Algoritmusok felülnézetből

1. ELŐADÁS

Sapientia-EMTE

2015-16

Algoritmus

- Az „algoritmus” kifejezés a bagdadi arab tudós, al-Hvárizmi (780-845) nevének eltorzított, rosszul latinra fordított változatából ered.
- Az első, számítógépre kigondolt algoritmust Ada Lovelace írta 1843-ban Charles Babbage analitikai gépére a Bernoulli-számok kiszámítására, tehát ő tekinthető az első programozónak.

Algoritmusok hatékonysága

- Lépésszám, legrosszabb esetben, a bemenet mérete (n) függvényében
  - $\log n \Longrightarrow$ remek ← Bináris keresés
  - $n \Longrightarrow$ nagyon jó ← Lineáris keresés
  - $n \log n \Longrightarrow$ egész jó ← Gyors rendezés
  - $n^2 \Longrightarrow$ nem túl nagy n-re jó ← Buborékos rendezés
  - $n^3 \Longrightarrow$ nem túl nagy n-re lehet jó
  - $n^4 \Longrightarrow$ nem túl nagy n-re néha jó
  - $n^{10} \Longrightarrow$ 50 év múlva, nem túl nagy n-re lehet jó
  - $n^{100} \Longrightarrow$ 1 millió év múlva lehet jó
  - $2^n \Longrightarrow$ nagyon kis n-re lehet jó, de nagy n-re sohasem

Algoritmustervezési stratégiák

- (0) „Nyers erő” (Brute force)
- (1) „Oszd meg és uralkodj” (Divide et impera)
- (2) Visszalépéses keresés (Backtracking)
- *Divide et impera vs. Backtracking*
- (3) Mohó (Greedy)
- *Backtracking + Greedy*
- (4) Dinamikus programozás (Dynamic programming)
- *Dinamikus programozás vs. Divide et impera*
- *Dinamikus programozás vs. Greedy*
- (5) Ág és korlát (Branch and bound)

„Nyers erő” módszere

- A legkézenfekvőbb algoritmust jelenti, amelyet a feladat megfogalmazása vagy a hivatkozott fogalmak definíciója elsőre sugall

PÉLDÁK

```
hatvány(x,n) // x^n = x*x*...*x
    p = 1
    minden i = 1,n végezd
        p = p * x
    vége minden
    return p
vége hatvány
```

Rendezd az a[1..n] tömböt

Visszatéríti az a[i..n] tömbszakasz legkisebb elemének indexét

```
kiválasztásos_rendezés(a[],n)
    minden i = 1,n-1 végezd
        j = min_index(a,i,n)
        csere(a[i],a[j])
    vége minden
vége kiválasztásos_rendezés
```

$O(n^2)$

```
buborékos_rendezés(a[],n)
    minden i = n,2,-1 végezd
        végérebuborékoztat(a,i)
    vége minden
vége buborékos_rendezés
```

Az a[1..i] tömbszakasz legnagyobb elemét kibuborékoztatja az a[i] pozícióba

Rendezd az a[1..n] tömböt

$O(n^2)$

Visszatéríti az utolsó csere helyét

```
finomított_buborékos_rendezés(a[],n)
    vég = n
    amíg vég > 0 végezd
        vég = végérebuborékoztat(a,vég)
    vége minden
vége finomított_buborékos_rendezés
```

REKURZIÓ – emlékeztető

- A kurrens feladat megoldása visszavezethető hasonló, „egyszerűbb” részfeladat(ok) megoldására
  - Kicsinyíts és urald! (Decrease-and-conquer)
  - Oszd meg és urald! (Divide-and-conquer)

Kicsinyíts és urald! (1)

- Méretkicsinyítés
  - állandó értékkel
    - pl. $a^n = a^{n-1} * a$
  - adott faktorral
    - pl. $a^n = a^{n/2} * a^{n/2}$
  - változó értékkel
    - pl. lnko

```
hatvány2(x,n) // x^n = x^(n/2)*x^(n/2)
    ha n = 0 végezd
        return 1
    különben
        ha n%2 = 0 végezd
            h = hatvány2(x,n/2)
            return h*h
        különben
            h = hatvány2(x,(n-1)/2)
            return h*h*x
        vége ha
    vége ha
vége hatvány2
```

```
hatvány1(x,n) // x^n = x^(n-1)*x
    ha n = 0 végezd
        return 1
    különben
        return hatvány1(x,n-1)*x
    vége ha
vége hatvány1
```

```
lnko(m,n) // lnko(m,n)=lnko(n,m%n)
    ha m = n végezd
        return n
    különben
        return lnko(n,m%n)
    vége ha
vége lnko
```

Kicsinyíts és urald! (2)

Rendezd az a[1..n] tömböt

Rendezd az a[1..n-1] tömbszakaszt

```
beszúrásos_rendezés(a[],n)
    if n > 1 végezd
        beszúrásos_rendezés(a,n-1)
        beszúrutolsóelem(a,n)
    vége minden
vége beszúrásos_rendezés
```

$O(n^2)$

Beszúrja az a[n] elemet a már rendezett a[1..n-1] tömbszakaszba

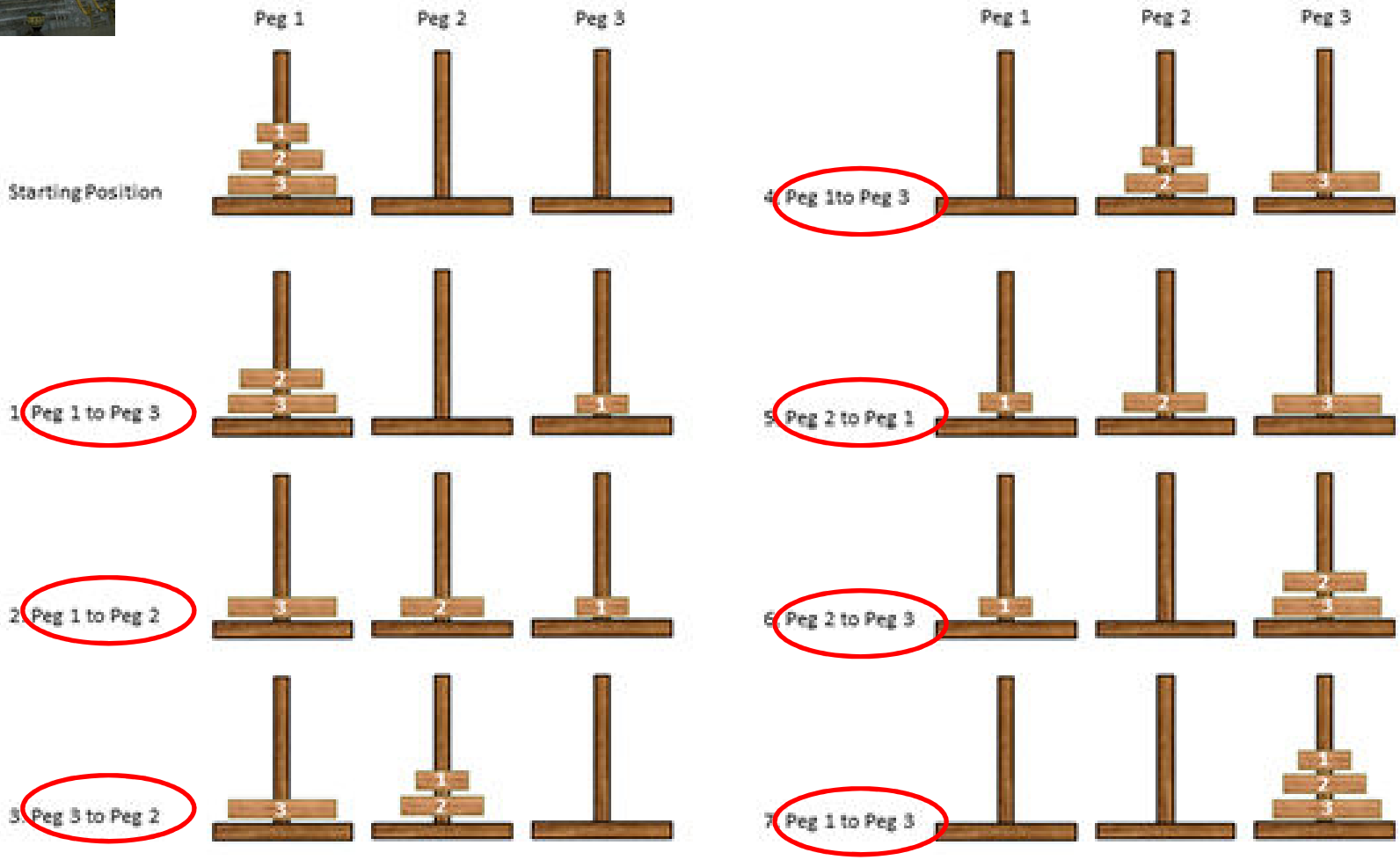
Oszd meg és urald!

- Milyen feladatok?
  - amelyek visszavezethetők/lebonthatók, **két vagy több** hasonló, egyszerűbb részfeladatra

```
eljárás Név(az_általános_feladat_paraméterei)
   ha triviális akkor
      < oldd meg >
   különben
      < határozd meg a részfeladatait >
      < rekurzív hívások által oldd meg ezeket >
      < építsd fel a megoldást >
   vége ha
vége eljárás
```

Hanoi tornyai (1)

2^n-1 steps



Hanoi tornyai (2)

k korong áthelyezése s-ről d-re h segítségével

az általános feladat paraméterei

a trivialitás feltétele

```
hanoi(k,s,d,h)
    ha k == 1 akkor
        ki: '(',s,',',d,')'
    különben
        hanoi(k-1,s,h,d)
        ki: '(',s,',',d,')'
        hanoi(k-1,h,d,s)
    vége ha
vége hanoi
```

a triviális feladat megoldása

a fiúrészfeladatok paraméterei

k-1 korong áthelyezése h-ról d-re s segítségével

k-1 korong áthelyezése s-ről h-ra d segítségével

Maximum-keresés

```
maxindex(a[],i,j)
    ha i == j akkor
        return i
    különben
        m1=maxindex(a,i,(i+j)/2)
        m2=maxindex(a,(i+j)/2+1,j)
        ha a[m1] > a[m2] akkor
            return m1
        különben
            return m2
        vége ha
    vége ha
vége maxindex
```

Visszatéríti az a[i..j] tömbszakasz legnagyobb elemének indexét

Visszatéríti az a[i..(i+j)/2] tömbszakasz legnagyobb elemének indexét

Visszatéríti az a[(i+j)/2+1..j] tömbszakasz legnagyobb elemének indexét

Összefésüléses-rendezés

O(n*log(n))

```
mergesort(x[],i,j)
    ha i < j akkor
        k = (i+j)/2
        mergesort(x,i,k)
        mergesort(x,k+1,j)
        összefésül(x,i,k,j)
    vége ha
vége mergesort
```

Rendezd az a[i..j] tömbszakaszt

Rendezd az a[i..k] tömbszakaszt

Rendezd az a[k+1..j] tömbszakaszt

Fésüld össze az a[i..k] és a[k+1..j] tömbszakaszokat

Gyors-rendezés

O(n*log(n))

```
quicksort(a[],i,j)
    ha i < j akkor
        k=szétválogat(a,i,j)
        quicksort(a,i,k-1)
        quicksort(a,k+1,j)
    vége ha
vége quicksort
```

Rendezd az a[i..j] tömbszakaszt

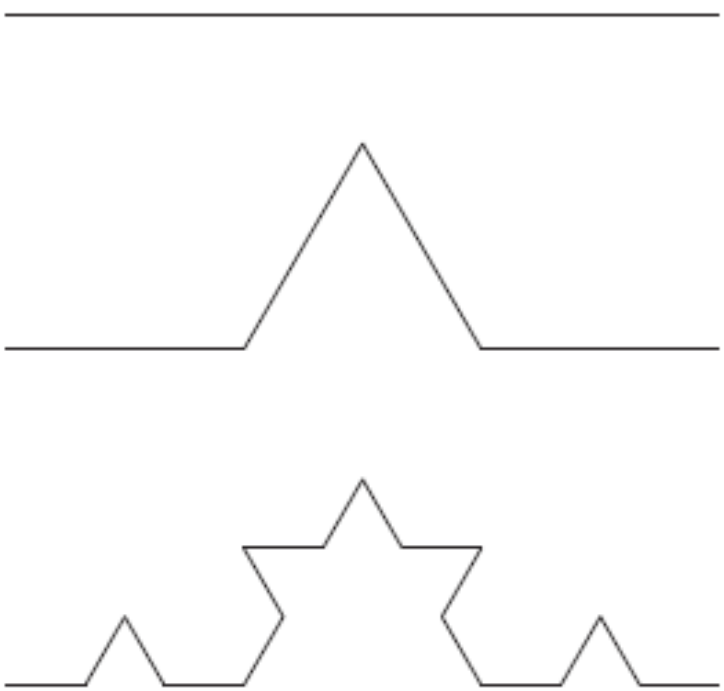
Válogasd szét az a[i..j] tömbszakaszt, és térítsd vissza hol találta meg helyét az a[i] elem

Rendezd az a[i..k-1] tömbszakaszt

Rendezd az a[k+1..j] tömbszakaszt

Koch-fraktál

Rajzolj d hosszú vonalat α szög alatt



```
koch(d,α,k)
    ha k == n akkor
        rajzol(d,α)
    különben
        koch(d/3,α,k+1)
        koch(d/3,α + π/3,k+1)
        koch(d/3,α - π/3,k+1)
        koch(d/3,α,k+1)
    vége ha
vége koch
```

Rajzolj d/3 hosszú vonalat α szög alatt

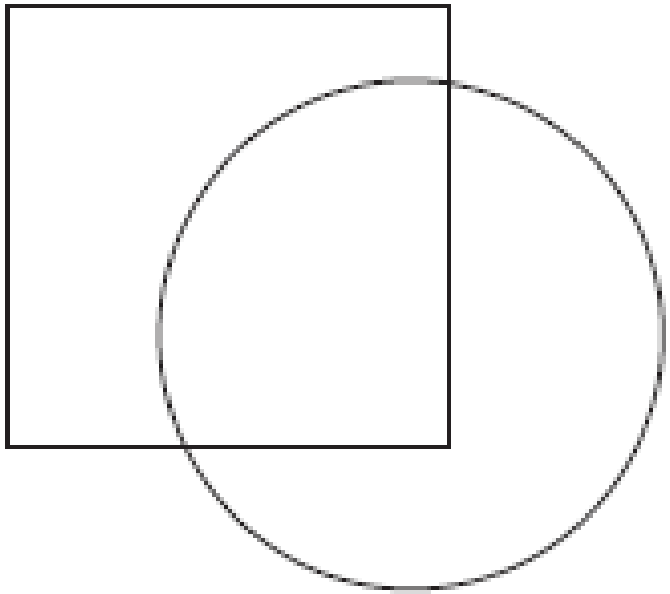
Rajzolj d/3 hosszú vonalat α+π/3 szög alatt

Rajzolj d/3 hosszú vonalat α szög alatt

Rajzolj d/3 hosszú vonalat α-π/3 szög alatt

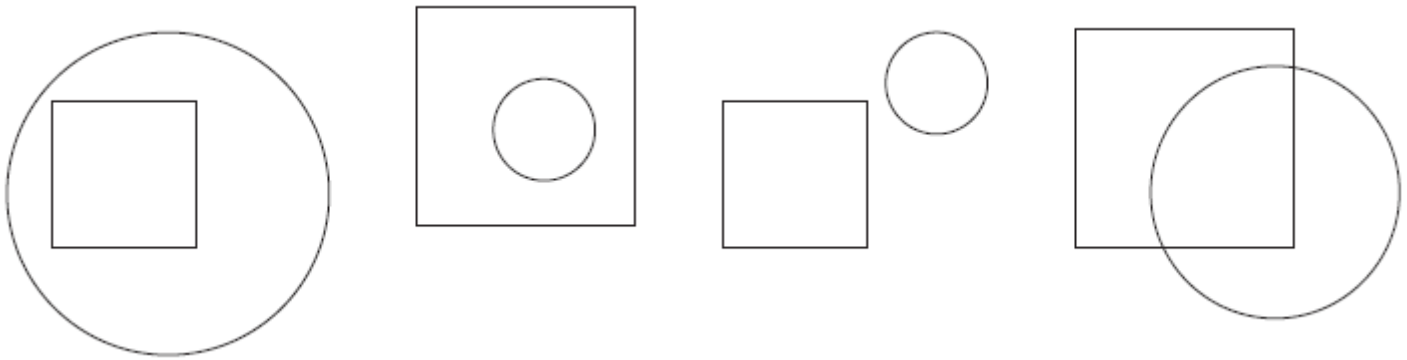
Négyzet és kör (1)

(átfedési területe méretét 3 tizedes pontossággal)



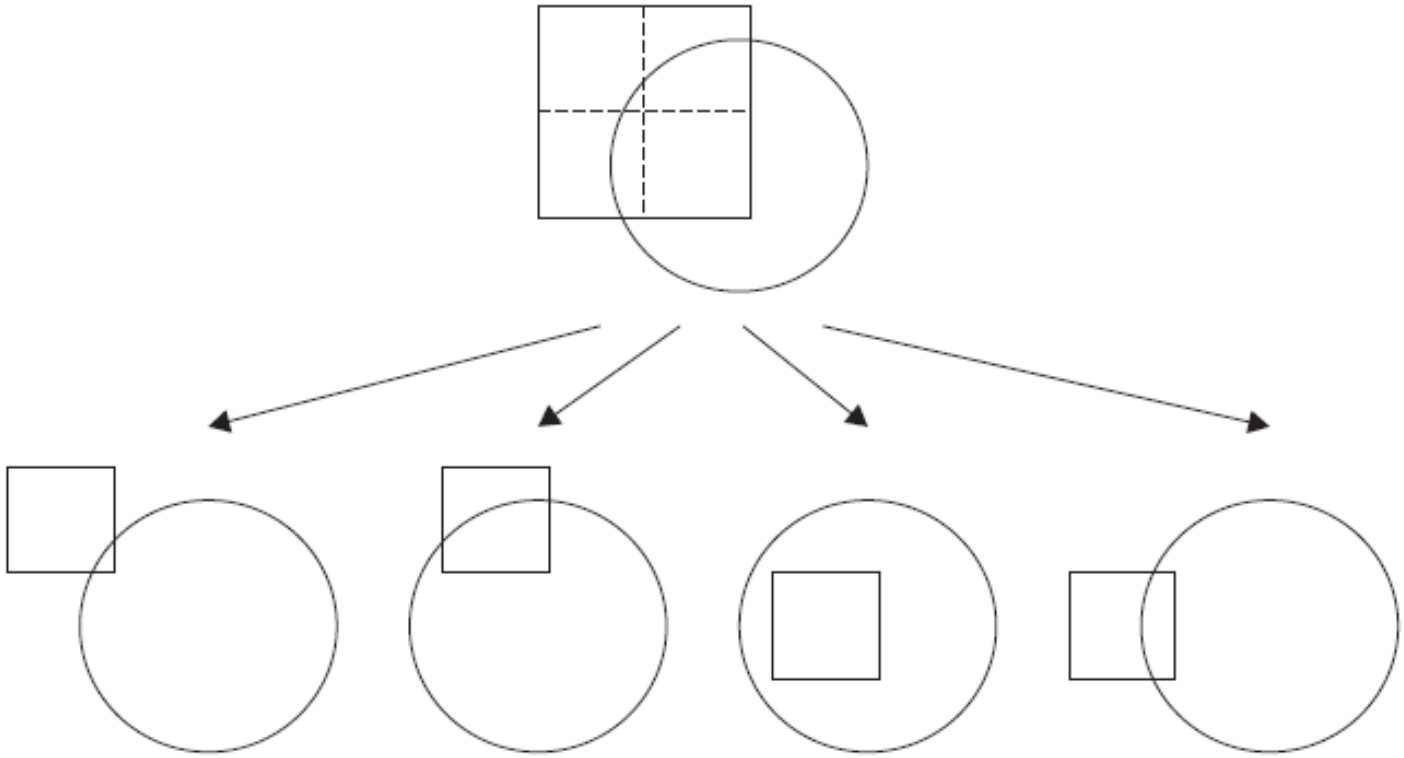
Négyzet és kör (2)

(átfedési területe méretét 3 tizedes pontossággal)



Négyzet és kör (3)

(átfedési területe méretét 3 tizedes pontossággal)



Négyzet és kör (4)

(átfedési területe méretét 3 tizedes pontossággal)

```
négyzet_és_kör(x,y,o,xk,yk,rk)
   ha o*o < 0.001 akkor
      return 0
   vége ha
   i=kör_négyzet_helyzete(x,y,o,xk,yk,rk)
   ha i == 1 akkor
      return o*o
   vége ha
   ha i == 2 akkor
      return π*rk*rk
   vége ha
   ha i == 3 akkor
      return 0
   vége ha
   ha i == 4 akkor
      t1=négyzet_és_kör(x1+o/2,y1,o/2,xk,yk,rk)
      t1=négyzet_és_kör(x1+o/2,y1+o/2,o/2,xk,yk,rk)
      t1=négyzet_és_kör(x1,y1+o/2,o/2,xk,yk,rk)
      t1=négyzet_és_kör(x1,y1,o/2,xk,yk,rk)
      return t1+t2+t3+t4
   vége ha
vége négyzet_és_kör
```

Alakítsd át, hogy uralhasd

- Egyszerűsítsd, hogy uralhasd
  - Például hatékonyabb algoritmust eredményezhet, ha előre rendezed a bementet
    - Melyik érték fordul elő a legtöbbször egy adott sorozatban?
      - O(n*log(n)): rendezd, majd keresd meg a leghosszabb konstans részsorozatot
- Ábrázold másként, hogy uralhasd
  - Gausz módszer egyenletrendszer-megoldáshoz
- Vezesd vissza, hogy uralhasd
  - Vezesd vissza egy olyan feladatra, amelyre tudsz hatékony algoritmust
    - lkkt(m,n) = (m*n) / lnko(m,n)

Ismétlesként

- Decrease-and-conquer
  - Az $x^n=x^{n/2}*x^{n/2}$ felbontás hatékonyabb algoritmust eredményez, mint az $x^n=x^{n-1}*x$
- Divide-and-conquer
  - A „divide et impera” rendezések (merge-sort, quick-sort) hatékonyabbak, mint a nyers erő megközelítések (selection-sort, bubble-sort)
- Transfor-and-conquer
  - lkkt(m,n) = (m*n) / lnko(m,n)