7.2. A divergencia

1. Bevezetés

Vektortér. Vektortéren egy olyan teret értünk, melynek minden pontjához hozzárendelhető egy vektoriális mennyiség, melyet jellemez irány, irányítás és nagyság. A tér pontjaiban értelmezett vektorok lehetnek időben állandók, de változók is. Jelölés: $\vec{A}(x, y, z)$.

2. A divergencia.

A ∇ operátorral más műveleteket is végezhetünk. Ahhoz, hogy ne más operátokat kapjunk eredményképpen (mint azt a matematikából tudjuk, ha balról szorozunk egy operátort, eredményképpen szintén operátort lapunk) az operátor mindig balról jobbra hat az illető mennyiségre. Attól függően, hogy milyen módon hat a szorzandó mennyiségre más-más eredményt kapunk. Ha skalárisan alkalmazzuk a nabla operátort egy vektoriális mennyiségre, eredményképpen skaláris mennyiséget (skalárteret) kapunk. Tekintsünk egy $\vec{A}(x, y, z)$ vektorteret, amely folytonos és differenciálható.

$$\nabla\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

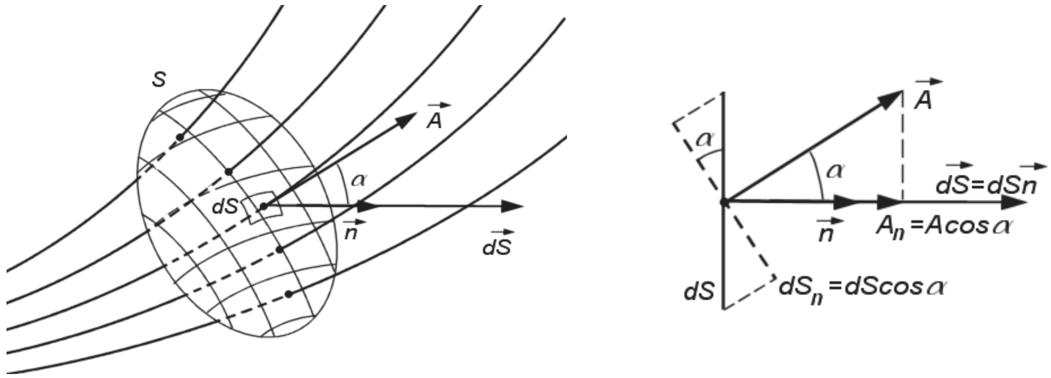
Ez az összeg invariáns a koordináta transzformációkkal szemben, tehát

$$\nabla'\vec{A} = \frac{\partial A_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial A_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial A_{z'}}{\partial z'} = \nabla\vec{A}$$

amiből az következik, hogy a $\nabla\vec{A}$ skalártér valamilyen fizikai mennyiséget jelent. Ezt a fizikában rendkívül fontos mennyiséget divergenciának nevezzük. Jelölés:

$$\nabla\vec{A} \equiv div\vec{A}$$

A divergencia egy vektortérben a tekintett vektornak egy adott zárt felületre vonatkoztatott fluxusával kapcsolatos mennyiség. Legyen $\vec{A}(x, y, z) = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ vektortér. Mint tudjuk a vektorteret jellemezhetjük a tér erővonalaival is. Az erővonalak olyan képzeletbeli vonalak, amelynek minden pontjába húzott vektorok érintői az erővonalaknak. Definíció szerint az a vektor fluxusa nem más, mint az egységnyi felületen áthaladó erővonalak száma.



a. b.

7.4 ábra

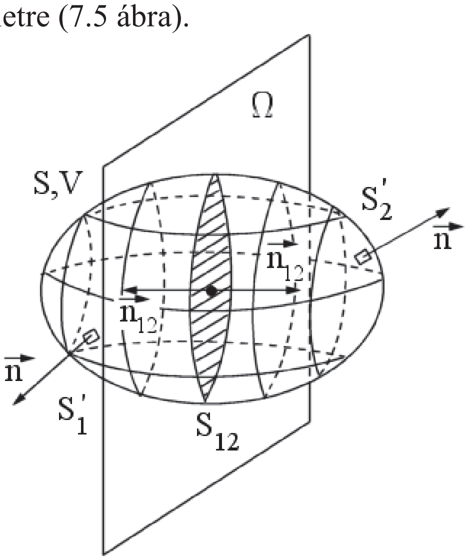
Tekintsük a 1.a ábrán látható dS felületelemet. Definíció szerint ezen a felületelemen áthaladó elemi fluxust $d\Phi$-vel jelöljük és az alábbiak szerint számíthatjuk ki:

$$d\Phi = \vec{A}\,d\vec{S} = A\,dS\cos\alpha = A_n\,dS = A\,dS_n$$

A teljes S felületre számított fluxust az előző összefüggés integrálásával számíthatjuk ki:

$$\Phi = \int_S \vec{A}\,d\vec{S} = \int_S \vec{A}\,\vec{n}\,dS$$

A továbbiakban tekintsünk egy zárt S felületet és számítsuk ki az $\vec{A}$ fluxusát erre a zárt felületre (7.5 ábra).



7.5 ábra

Az $\vec{A}$ fluxusát az S zárt felületen az alábbi módon számíthatjuk ki:

$$\Phi = \oint_S \vec{A}\,d\vec{S} = \oint_S \vec{A}\,\vec{n}\,dS$$

Az integrálás elvégzésekor, mint már láttuk, minden egyes felületelemet irányítottnak kell tekintsük. Ehhez azt a megállapodást kell betartsuk, hogy zárt felület esetében mindig a felületi merőleges a zárt felületből kifele mutat, úgy ahogy az az 2. ábrán is látható. A számítások elvégzése érdekében elmetsszük a zárt felületet egy Ω síkkal így nyerve két zárt felületű idomot, amelyek ugyanazt a V térfogatot kerítik el a térből. Felosztjuk a zárt felületeket elemi részekre. A két zárt felület az $S_1 = S_1' + S_{12}$ és az $S_2 = S_2' + S_{12}$. A két zárt felülethez tartozó fluxust az alábbiak szerint írhatjuk fel:

$$\Phi_1 = \oint_{S_1} \vec{A}\,\vec{n}\,dS = \int_{S_1'} \vec{A}\,\vec{n}\,dS + \int_{S_{12}} \vec{A}\,\vec{n}_1\,dS$$

és

$$\Phi_2 = \oint_{S_2} \vec{A}\,\vec{n}\,dS = \int_{S_2'} \vec{A}\,\vec{n}\,dS + \int_{S_{12}} \vec{A}\,\vec{n}_2\,dS$$

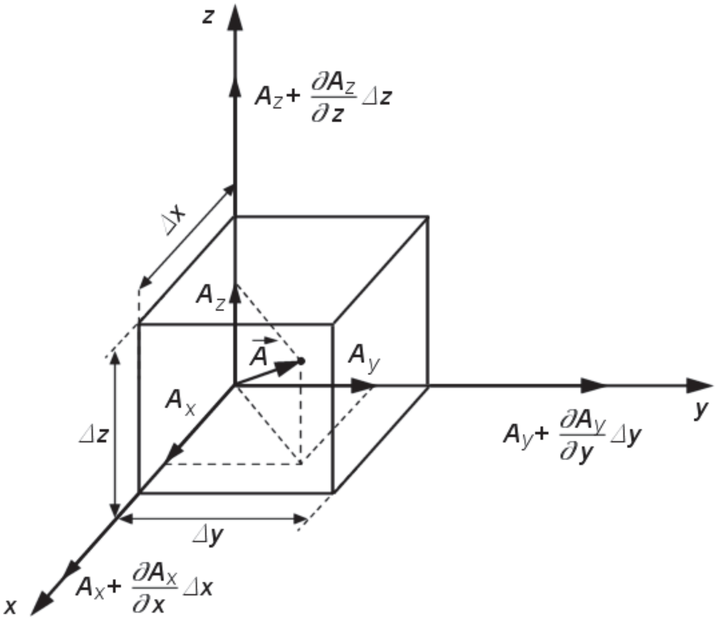
Mivel $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$, természetesen az S_{12} felületen az S_1 zárt felület esetében kimenő, az S_2 zárt felület esetében bemenő fluxust jelentenek az alábbi mennyiségek egymással egyenlők de ellentétes előjelűek.

$$\int_{S_{12}} \vec{A}\,\vec{n}_1\,dS = -\int_{S_{12}} \vec{A}\,\vec{n}_2\,dS$$

Ebből következik, hogy az S zárt felületen átmenő fluxust a felosztásból származó zárt felületeken átmenő fluxusok összegeként számíthatjuk ki.

$$\Phi = \oint_S \vec{A}\,d\vec{S} = \int_{S_1'} \vec{A}\,\vec{n}\,dS + \int_{S_{12}} \vec{A}\,\vec{n}_1\,dS + \int_{S_2'} \vec{A}\,\vec{n}\,dS + \int_{S_{12}} \vec{A}\,\vec{n}_2\,dS = \int_{S_1'} \vec{A}\,\vec{n}\,dS + \int_{S_2'} \vec{A}\,\vec{n}\,dS$$

Az előbbi kijelentés általánosítható arra az esetre is amikor az S zárt felületet tetszőleges számú zárt felületre bontjuk fel. Bontsuk fel az S felület által határolt V térfogatot két, egymásra merőleges, de egymás közt párhuzamos síksereggel. Ebből a felbontásból származik egy ΔV térfogatelem, amely ha végtelenül sok síkot használunk a felbontáskor, lehet egy paralelepipedon. Válasszunk egy koordinátarendszert, amelynek tengelyei párhuzamosak a felbontásból származó térfogatelem oldalaival. Ha a felbontás nagyon finom, feltételezhetjük, hogy a térfogatelemen belül az $\vec{A}$ állandónak tekinthető (7.6 ábra). Ezen kívül feltételezzük, hogy az egyes térfogatelemek között az $\vec{A}$ lineárisan változik.



7.6 ábra

A térfogatelemen áthaladó fluxus megegyezik a paralelepipedon oldalain áthaladó fluxusok összegével. A felületi merőlegesekre oldalanként ugyanaz a megállapítás érvényes, mint az előbbiekben, tehát minden esetben a zárt felületből kifele mutatnak.

- az x tengelyre merőleges síkokon áthaladó fluxus:

$$\Delta\Phi_x = -A_x S_x + \left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x \right) S_x, \quad \text{ahol} \quad S_x = \Delta y \Delta z$$

- az y tengelyre merőleges síkokon áthaladó fluxus:

$$\Delta\Phi_y = -A_y S_y + \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial y}\Delta y \right) S_y, \quad \text{ahol} \quad S_y = \Delta x \Delta z$$

- a z tengelyre merőleges síkokon áthaladó fluxus:

$$\Delta\Phi_z = -A_z S_z + \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial z}\Delta z \right) S_z, \quad \text{ahol} \quad S_z = \Delta x \Delta y$$

A ΔV térfogatelemen átható fluxus:

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_x + \Delta\Phi_y + \Delta\Phi_z = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

Az összefüggés jobb oldalán megjelenő szorzat zárójelben lévő tagja nem más, mint az „$\vec{A}$ divergenciája” ($div\vec{A}$), amelyet tárgyalásunk elején már bevezettünk, így a fluxus írható, mint:

$\Delta\Phi = div\vec{A}\,\Delta V$, ahol $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ a térfogatelem térfogata.

Az eredeti S zárt felületen átmenő fluxust kiszámíthatjuk, ha összegezzük az elemi térfogatelemeken áthaladó fluxusokat. Amennyiben $\Delta V \to 0$ az összegzést felválthatjuk integrálással és a fluxus írható, mint:

$$d\Phi = div\vec{A}\,dV \text{ és } \Phi = \int_V div\vec{A}\,dV$$

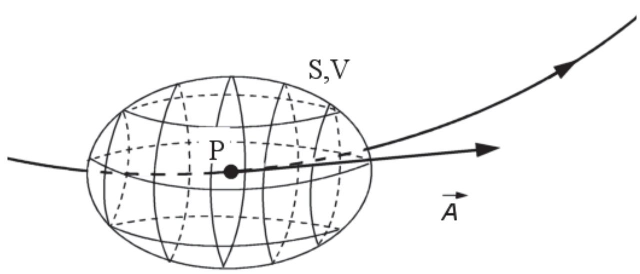
Figyelembe véve, a fluxusnak a definícióját is, a kapott összefüggést írhatjuk, mint:

$$\Phi = \int_S \vec{A}\,n\,dS = \int_V div\vec{A}\,dV$$

Ez utóbbi összefüggés egy integrálegyenlet, melynek neve *Gauss-Osztrogradszkij-tétel*. Ezen egyenlet segítségével egy zárt felületen végezendő integrált átalakíthatunk a zárt felület által elkerített térfogaton végzett integrállá, vagy fordítva.

Az összefüggés értelmezése: ha a zárt felületen kiszámított fluxus nulla, akkor a felületbe annyi erővonal lép be, mint amennyi erővonal azt elhagyja, ami arra utal, hogy nincs a felület által bezárt térfogatban nincs olyan objektum amely elnyelne vagy kibocsátana erővonalakat, vagy olyan objektum van, amely úgy nyel el vagy és bocsát ki, hogy ezen erővonalak eredője nulla legyen. Ha viszont a fluxus nullától különböző, akkor a térfogatban van olyan objektum, amely elnyelő vagy kibocsátó jelleggel rendelkezik, nevezzük ezt az objektumot „forrás"-nak. Mivel az összefüggés jobb oldalán $div\vec{A}$ szerepel, logikus, hogy a „forrással" ez a mennyiség hozható kapcsolatba. Tehát ezek szerint a egy vektor divergenciája a vektortér forrásbőségére utaló mennyiség.

Az $\vec{A}$ divergenciáját e tér egy adott pontjában kiszámíthatjuk, ha a zárt felület által elhatárolt térfogatot határértékben nullára csökkentjük, kiszámítjuk a zárt felületen áthaladó fluxust és osztjuk a térfogattal (7.7 ábra).



7.7 ábra

$$\left(\nabla\vec{A}\right)_P \equiv \left(div\vec{A}\right)_P = \lim_{V \to 0} \frac{\oint_S \vec{A}\,\vec{n}\,dS}{V}$$

7.3. A rotáció

1. Bevezetés

Vektortér. Vektortéren egy olyan teret értünk, melynek minden pontjához hozzárendelhető egy vektoriális mennyiség, melyet jellemez irány, irányítás és nagyság. A tér pontjaiban értelmezett vektorok lehetnek időben állandók, de változók is. Jelölés: $\vec{A}(x, y, z)$.

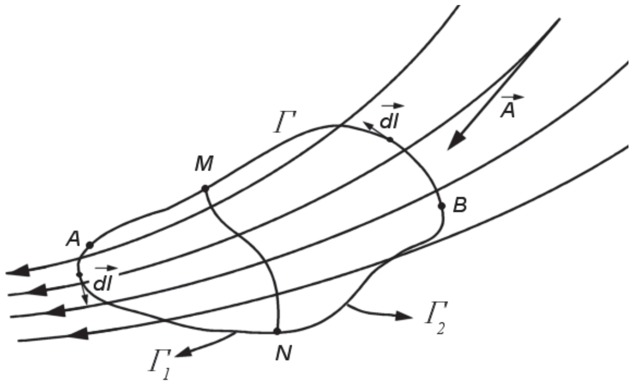
2. A rotáció.

Az előző fejezetben láttuk, hogy ha a ∇ operátort skalárisan alkalmazzuk egy vektoriális mennyiségre, eredményképpen skaláris mennyiséget kapunk és a műveletet divergenciának nevezzük. Meg van egy lehetőség amit nem vettünk figyelembe eddig, mégpedig az az eset amikor a ∇ operátort vektoriálisan alkalmazzuk egy vektoriális mennyiségre. Ezt a műveletet rotációnak nevezzük és eredménye ugyancsak egy vektor. Tekintsünk egy $\vec{A}(x, y, z)$ vektorteret, amely folytonos és differenciálható. Definíció szerint ennek a vektortérnek a rotációja:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

A továbbiakban megadjuk a rotáció fizikai jelentését. A rotáció a vizsgált vektornak egy zárt görbe menti integráljával kapcsolatos mennyiség, melyet cirkulációnak nevezünk. A 1. ábrán látható vektortérben vegyük fel a Γ zárt görbét, melyet felosztunk $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ elemi szakaszokra és kiszámítjuk az $\vec{A}$ cirkulációját:

$$L = \oint_{\Gamma} \vec{A}\, d\vec{l}$$



7.8 ábra

Bontsuk fel ezt a zárt görbét két újabb zárt görbére ($\Gamma_1(MANM)$ és $\Gamma_2(NBMN)$) és mindkettőre számítsuk ki az $\vec{A}$ cirkulációját:

$$L_1 = \oint_{MANM} \vec{A}\,d\vec{l} = \int_{MAN} \vec{A}\,d\vec{l} + \int_{NM} \vec{A}\,d\vec{l}$$

$$L_2 = \oint_{NBMN} \vec{A}\,d\vec{l} = \int_{NBM} \vec{A}\,d\vec{l} + \int_{MN} \vec{A}\,d\vec{l}$$

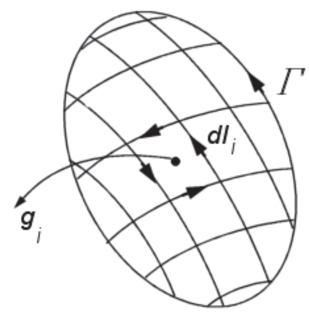
Mivel az $\int_{NM} \vec{A}\,d\vec{l}$ és $\int_{MN} \vec{A}\,d\vec{l}$ integrálokban a körbejárási irány éppen ellentétes, ezeknek értéke csak előjelben különbözhet:

$$\int_{NM} \vec{A}\,d\vec{l} = -\int_{MN} \vec{A}\,d\vec{l}$$

Ennek megfelelően az eredeti Γ görbe mentén számítandó cirkulációt kiszámíthatjuk a felosztásból származó két zárt görbe mentén számított cirkulációk összegeként.

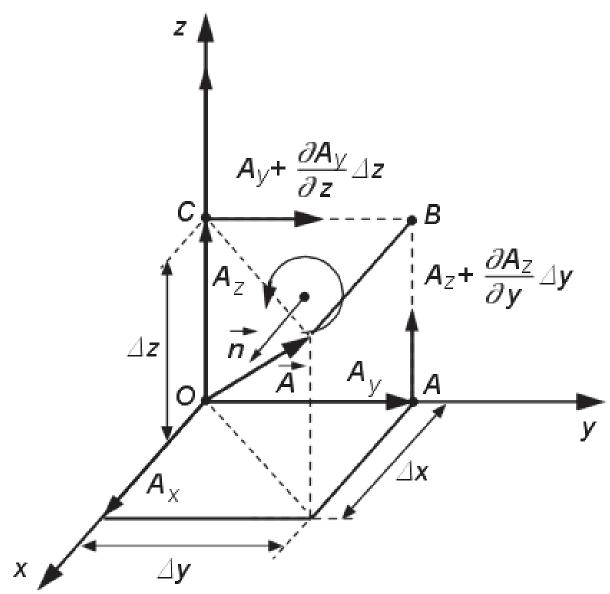
$$L = L_1 + L_2 = \int_{MAN} \vec{A}\,d\vec{l} + \int_{NM} \vec{A}\,d\vec{l} + \int_{NBM} \vec{A}\,d\vec{l} + \int_{MN} \vec{A}\,d\vec{l} = \int_{MAN} \vec{A}\,d\vec{l} + \int_{NBM} \vec{A}\,d\vec{l} = \oint_{\Gamma} \vec{A}\,d\vec{l}$$

Általánosíthatjuk ezt az eredményt úgy, hogy a Γ görbét felosztjuk nagyon sok egymással szomszédos zárt görbére a 7.9 ábrának megfelelően. Fontos, hogy minden elemi zárt görbe körbejárási iránya egyezzen meg a Γ görbe körbejárási irányával. A számítások egyszerűsége kedvéért tekintsünk egy olyan felosztást, melynek esetében a görbét levetítve az *xy, xz* és *yz* síkokra a vetületek mindig téglalapot határolnak. Tekintsük ezt például a 7.9 ábrán látható felosztásból származó g_i görbére.



7.9 ábra

Tekintsük az *zy* síkra vett vetületet. A körbejárási irányt olyannak választjuk, hogy a bezárt felület normálisának iránya egyezzen meg az *x* tengely pozitív irányításával (7.10 ábra). A felosztást úgy végezzük el, hogy az elemi cellákon belül az $\vec{A}$ komponensei legyenek állandók, de a szomszédos cellák szélein lineárisan változzanak. A *zy* síkra vonatkozóan a 7.10 ábrán fel vannak tüntetve e változások a megfelelő tengelyekre vonatkozóan.

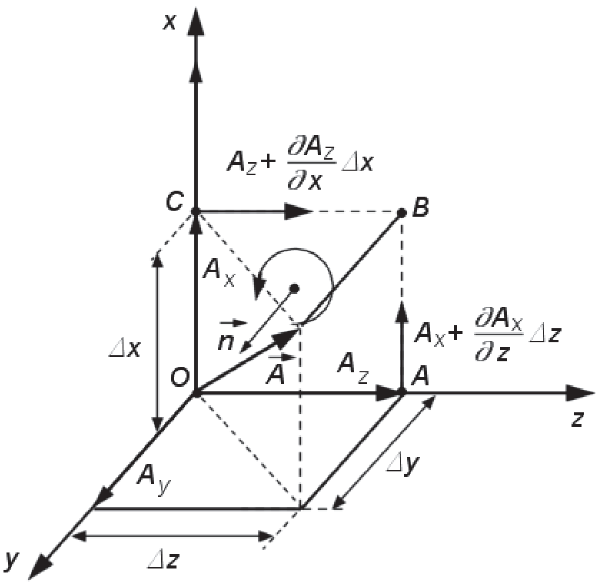


7.10 ábra

Az $\vec{A}$ cirkulációja az *ABCO* görbére vonatkozóan:

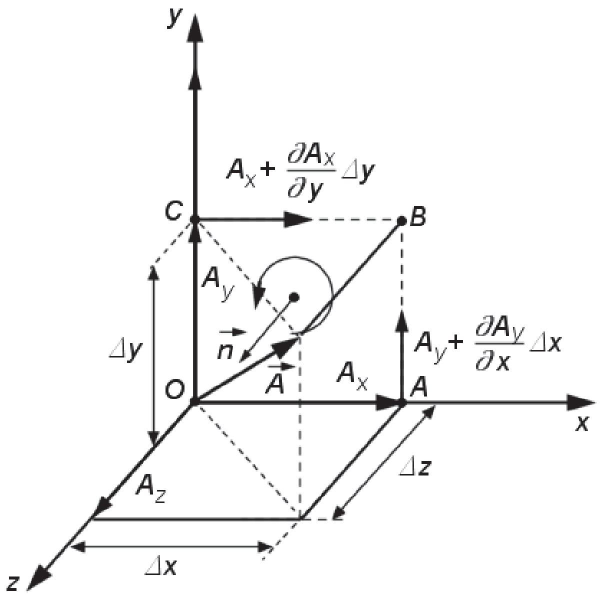
$$\Delta L_{i\,x} = \oint\limits_{OABCO} \vec{A}\,d\vec{l} = A_y \Delta y + \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y} \Delta y \right) \Delta z - \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z} \Delta z \right) \Delta y - A_z \Delta z =$$
$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \Delta y \Delta z$$

Hasonlóan járunk el az *xz* és *xy* síkokra vett vetületekkel is (7.11 illetve 7.12 ábrák)



7.11 ábra

$$\Delta L_{i\,y} = \oint\limits_{OABCO} \vec{A}\,d\vec{l} = A_z \Delta z + \left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x - \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial x} \Delta x \right) \Delta z - A_x \Delta x =$$
$$= \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \Delta x \Delta z$$



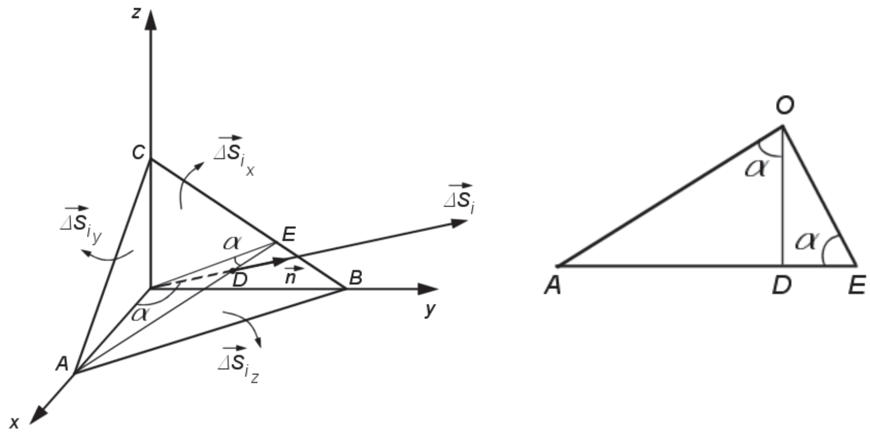
7.12 ábra

$$\Delta L_{iz} = \oint_{OABCO} \vec{A}\,d\vec{l} = A_x\Delta x + \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y - \left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x - A_y\Delta y =$$
$$= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y$$

Az i-ik felületelemet körülvevő zárt görbe esetére az $\vec{A}$ cirkulációja:

$$\Delta L_i = \Delta L_{ix} + \Delta L_{iy} + \Delta L_{iz} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\Delta y\Delta z + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\Delta x\Delta z +$$
$$+ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y$$

Ebben az összefüggésben felfedezhetjük a rotáció operátor definíciójánál bevezetett komponenseket. Mindegyik komponense meg van szorozva egy felület dimenziójú mennyiséggel. A továbbiakban ezeknek kell megadjuk az általános alakját. Az i-ik felületelem területe legyen ΔS_i, melyet irányítottnak kell tekintenünk (7.13.a ábra):



a. b.

7.13 ábra

$$\Delta\vec{S}_i = \vec{n}\Delta S_i$$

A normális vektorát felírhatjuk, mint $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$, tehát a vektoriális felületelemet a következő alakban adjuk meg:

$$\Delta\vec{S}_i = \Delta S_i\cos\alpha\,\vec{i} + \Delta S_i\cos\beta\,\vec{j} + \Delta S_i\cos\gamma\,\vec{k}$$

amely az általunk tekintett felosztás esetén:

$$\Delta\vec{S}_i = \Delta y\Delta z\,\vec{i} + \Delta x\Delta z\,\vec{j} + \Delta x\Delta y\,\vec{k}$$

Figyelembe véve az utóbbi eredményeket észrevesszük, hogy az i-ik felületelem hozzájárulása az $\vec{A}$ cirkulációjához két vektor skaláris szorzataként adható meg:

$$\Delta L_i = \Delta L_{i\,x} + \Delta L_{i\,y} + \Delta L_{i\,z} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\Delta y\Delta z + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\Delta x\Delta z +$$

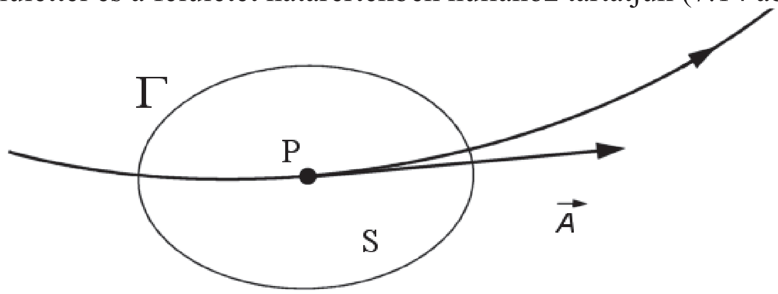
$$+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y = \left(\nabla\times\vec{A}\right)\Delta\vec{S}_i$$

Az $\vec{A}$ cirkulációját a Γ görbére vonatkozóan megkapjuk, ha összegezzük a felosztásból származó rész-cirkulációkat. Tekintsük, hogy $\Delta S_i \to 0$, tehát egy felületi integrált kell kiszámítsunk:

$$L = \oint_\Gamma \vec{A}\,d\vec{l} = \int_S \left(\nabla\times\vec{A}\right)d\vec{S}$$

Ez utóbbi összefüggést Stokes-féle integrálegyenletnek nevezzük, mely lehetővé teszi, hogy egy görbe vonalú integrált kiszámítsunk a görbe által kifeszített felületen végzett felületi integrállal, ész fordítva.

Az $\vec{A}$ rotációját a tér egy adott pontjában a következőképpen számíthatjuk ki. Kiszámítjuk az $\vec{A}$ a zárt Γ görbére vonatkoztatva, majd osztjuk a Γ görbe által elkerített felülettel és a felületet határértékben nullához tartatjuk (7.14 ábra).



7.14 ábra

$$\left(\nabla \times \vec{A}\right)_P \equiv \left(rot\vec{A}\right)_P = \lim_{S \to 0} \frac{\oint_\Gamma \vec{A}\,\overline{n}\,dl}{S}$$