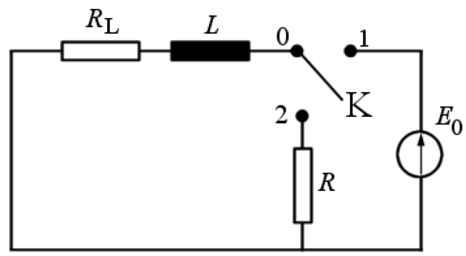
1. Feladat – RL bekapcsolási és RL kikapcsolási jelenségek

Az 1. ábrán látható egyenáramú áramkörben található egy valódi tekercs melynek ellenállása $R_L = 5\ \Omega$ és induktivitása $L = 20\ mH$, egy egyenáramú tápegység, melynek e.m.f.-e $E_0 = 10$ V, egy kétállású kapcsoló valamint egy $R = 10\ \Omega$ értékű lezáró ellenállás. A $t = 0$ s pillanatban a kapcsolót az 1-es állásba kapcsoljuk majd $t_1 = 12\ ms$ idő elteltével a kapcsolót átbillentjük a 2-es állásba. Határozzuk meg:

a) a tekercsen átfolyó áram időfüggését mindkét tranziens folyamat esetében,

b) a tekercsen megjelenő feszültség időfüggését mindkét tranziens folyamat esetében; számítsuk ki mindkét esetben a tekercs ohmos és induktív részén számítható feszültségeket.



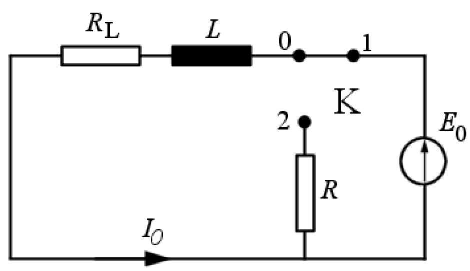
1. ábra

Megoldás

a.) Az kapcsoló *1*-es állásba kapcsolása után létrejövő tranziens folyamat (RL bekapcsolás).

Mivel kezdetben a kapcsoló semleges helyzetben található, az áramkörben nem folyik áram és így a valódi tekercs nem raktáros energiát mágneses tér formájában.

A kezdet stacionárius állapotot leíró paraméterek (kezdeti feltételek): $I_0 = 0\ A$ és a tekercs fluxusa $\phi_0 = 0\ Wb$. A feladat szövegének megfelelően a kapcsolót az *1*-es állásba kapcsoljuk (2. ábra) és megvárjuk, hogy kialakuljon a stacionárius állapot.



2. ábra

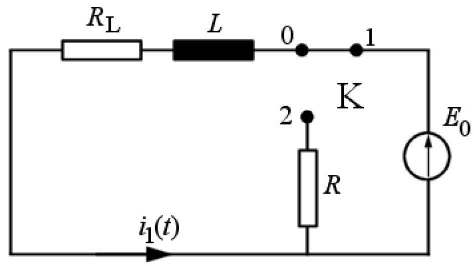
Az áramkörben folyó stacionárius áram értéke:

$$I_1 = \frac{E_0}{R_L} = 2\ (A)$$

és a tekercs fluxusa

$$\phi_1 = I_1 L = 20\ mWb.$$

A tranziens folyamat leírásához fel kell írjuk és meg kell oldjuk a folyamatot leíró differenciál egyenletet. Ezt megtehetjük a 3. ábrán szemléltetett áramkörben, ahol már az időfüggő áramot tüntettük fel.



3. ábra

$$R_L i_1(t) + L\frac{di_1(t)}{dt} = E_0$$

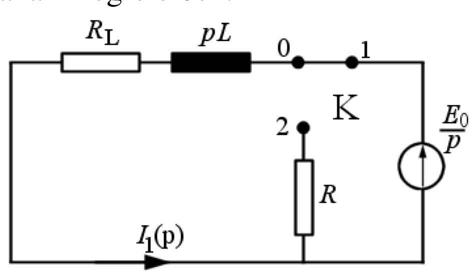
A differenciál egyenletet Laplace-transzformáció segítségével oldjuk meg. Legyen a keresett mennyiség Laplace-transzformáltja $\mathcal{L}\big(i(t)\big) = I(p)$, és ennek megfelelően az egyenlet transzformáltja az irodalomnak megfelelő jelölésekkel:

$$R_L I_1(p) + L[pI_1(p) - i(0-)] = \frac{E_0}{p}$$

ahol $i(0\,-) \equiv I_0 = 0$-val, tehát

$$(R_L + pL)I_1(p) = \frac{E_0}{p}$$

A fenti egyenlet „lerajzolható” úgy, hogy ezt egy áramköri huroknak tekintjük egy ún. operátoros áramkörben. Mivel ismertek a hurokban szereplő mennyiségek és a szerepük is, ez könnyedén megtehető a 4. ábrának megfelelően.



4. ábra

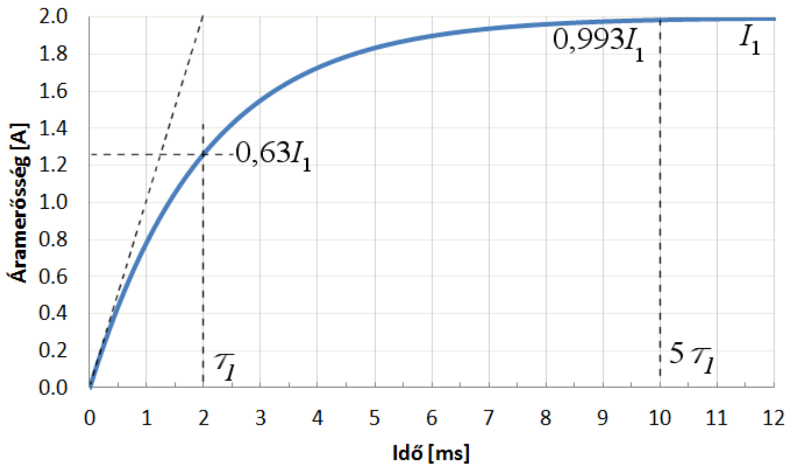
és így a keresett mennyiség Laplace-transzformáltja (az átviteli függvény):

$$I_1(p) = \frac{E_0}{p(R_L + pL)}$$

Látható, hogy a számlálóban található egy nullad rendű, $G(p) = E_0$, míg a nevezőben másod rendű, $H(p) = p(R_L + pL)$ polinom található. A $H(p)$ polinomnak két darab egyszeres gyöke van, az egyik a $p_0 = 0$, a másik pedig a $p_1 = -R_L/L$. Ennek megfelelően az összefüggés inverz-Laplace transzformáltját, $\mathcal{L}^{-1}(I_1(p)) = i_1(t)$, a Heaviside 2. képlet segítségével határozhatjuk meg. Az 5. ábra a tekercsen átfolyó áram így kapott időbeli változását szemlélteti.

$$i_1(t) = \mathcal{L}^{-1}(I(p)) = \frac{E_0}{R_L} + \frac{E_0}{-\frac{R_L}{L}L} e^{-\frac{R_L}{L}t} = \frac{E_0}{R_L}\left(1 - e^{-\frac{R_L}{L}t}\right) = \frac{E_0}{R_L}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right)$$

Az összefüggésben $\tau_1 = \frac{L}{R_L} = 20\ ms$, az áramkör időállandója.

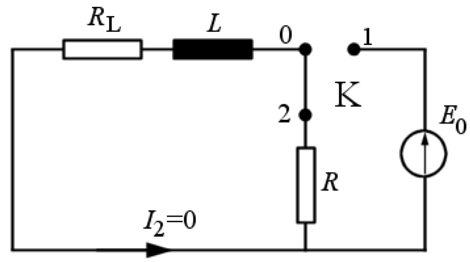


5. ábra

Megjegyzés: megfigyelhető az ábrán, hogy a τ_1 időállandónak megfelelő időtartam alatt a stacionárius állapotnak megfelelő áram 63%-a folyik az áramkörben. Az időállandót a nulla pillanatban a görbéhez húzott érintővel definiálhatjuk. Az $5\tau_1$ idő eltelte után a tranziens folyamat már tulajdonképpen leteltként kezelhető, mivel az áram már nagyon közel van a stacionárius értékhez (számítások alapján a stacionárius érték 99,33%-át éri el eddig az áram). Mivel a matematikai modellben szereplő ∞ időtartam csak fikció a valóságban, az alkalmazások esetén ez a megszokott kritérium.

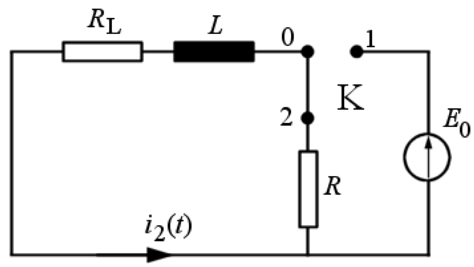
A kapcsoló *1*-esből *2*-es állásba való kapcsolás után végbemenő tranziens folyamat (RL kikapcsolás).

Az $5\tau_1$ idő eltelte után (az áramkör már stacionáriussá vált!) a kapcsolót a *2*-es állásba kapcsoljuk és tanulmányozzuk a létrejövő tranziens folyamatot. Figyelembe kell vennünk azt a tényt, hogy a tekercsen az átkapcsolás pillanatában már 2 A erősségű áram folyik, így a tekercs mágneses terében energiát halmozott fel. Az előző tranziens folyamat lezárásával létrejött stacionárius állapot a következő tranziens folyamat kezdeti állapotává válik. A második folyamatra a tekercs kezdeti fluxusa $\phi_1 = I_1 L = 20\,mWb$. A folyamat során a tekercsben tárolt energia hővé alakul, és a folyamat végére nem folyik áram az áramkörben, tehát $I_2 = 0$ (6. ábra).



6. ábra

A tranziens folyamat leírásához a 7. ábra szerinti áramkörben felírjuk a differenciál egyenletet.



7. ábra

$$(R_L + R)i_2(t) + L\frac{di_2(t)}{dt} = 0$$

a Laplace-transzformáció után:

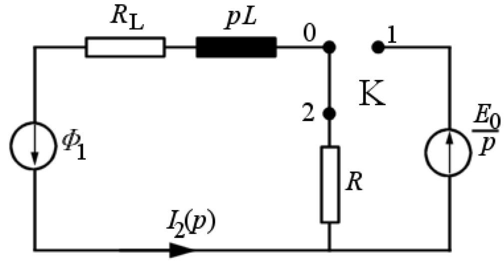
$$(R_L + R)I_2(p) + L[pI_2(p) - i(0-)] = 0$$

ahol $i(0\,-) = I_1 = 2\,A$, tehát

$$(R_L + R)I_2(p) + pL[I_2(p) - I_1] = (R_L + R)I_2(p) + pLI_2(p) - LI_1 = 0$$

$$I_2(p)(R_L + R + pL) = \phi_1$$

A bekapcsolási tranziens folyamat fenti huroktörvényét a 8. ábrán szemléltetett operátoros áramkörből is felírhatjuk.

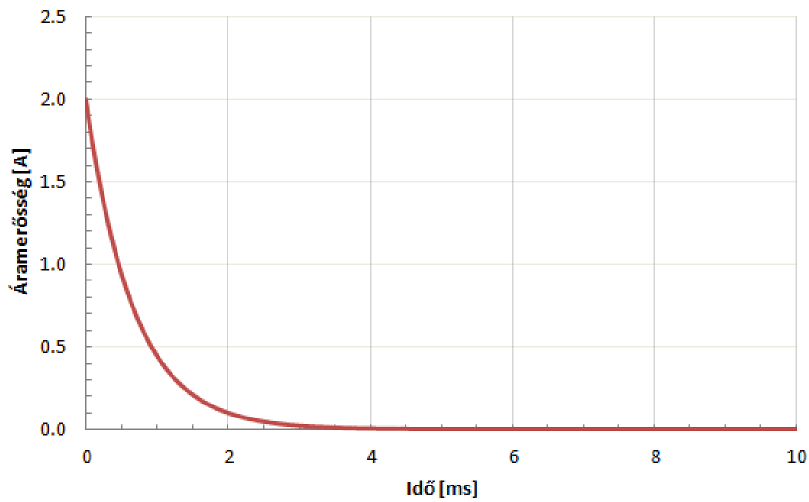


8. ábra

$$I_2(p) = \frac{\phi_1}{R_L + R + pL}$$

Látható, hogy a számlálóban található egy nullad rendű, $G(p) = \phi_1$, míg a nevezőben első rendű, $H(p) = R_L + R + pL$ polinom található. A $H(p)$ polinomnak egy darab egyszeres gyöke van, amely $p_1 = -(R_L + R)/L$. Ennek megfelelően az összefüggés inverz-Laplace transzformáltját, $\mathcal{L}^{-1}\big(I_2(p)\big) = i_2(t)$, a Heaviside 1. képlet segítségével határozhatjuk meg. A 9. ábra a tekercsen átfolyó áram így kapott időbeli változását szemlélteti.

$$i_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(I_2(p)\big) = \frac{\phi_1}{L} e^{-\frac{(R_L+R)}{L}t} = \frac{\frac{E_0}{R_L} L}{L} e^{-\frac{(R_L+R)}{L}t} = \frac{E_0}{R_L} e^{-\frac{(R_L+R)}{L}t}$$

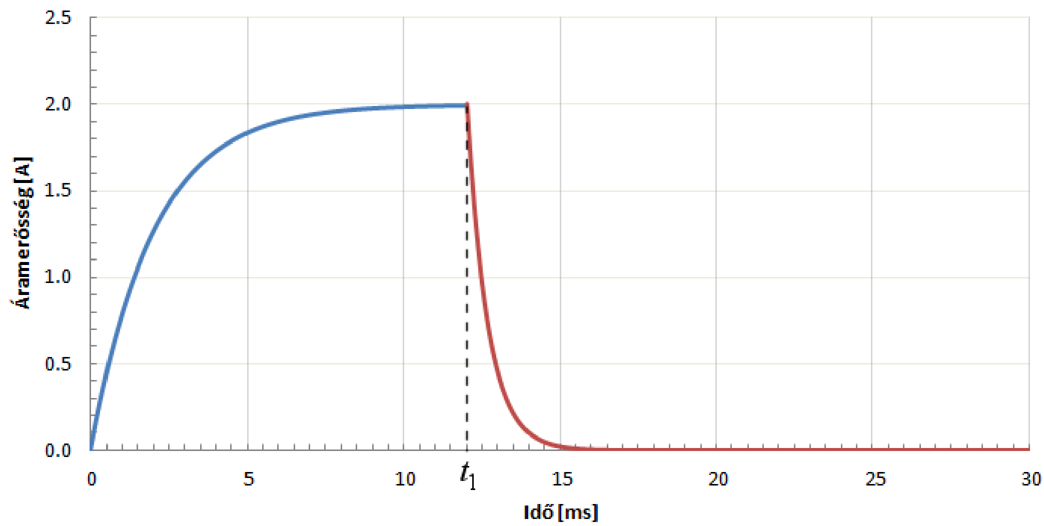


9. ábra

Ha a két folyamatot egymás után hozzuk létre úgy, hogy $t = 0$ pillanatban a kapcsolót az 1-es állásba kapcsoljuk, majd $t_1 = 12\,ms$ idő elteltével a 2-es állásba kapcsoljuk, a tekercsen átfolyó áram időfüggését a 10. ábra szemlélteti. Az áramok időfüggései megadó összefüggések ebben az esetben:

$$i_1(t) = \frac{E_0}{R_L}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right), \text{ ha } t \le t_1$$

$$i_2(t) = \frac{E_0}{R_L} e^{-\frac{(R_L+R)}{L}(t-t_1)}, \text{ ha } t > t_1.$$



10. ábra

b.) A tekercsen megjelenő feszültség kiszámítása.

Mivel a feszültségforrásra kizárólag egy valódi tekercs van kapcsolva, amelyet egy R_L ellenállás és egy L ideális induktivitás soros eredőjeként tárgyaljuk, a teljes tekercsen az

$$u_{R_L}(t) + u_{L_L}(t) = R_L i_1(t) + L\frac{di_1(t)}{dt} = E_0$$

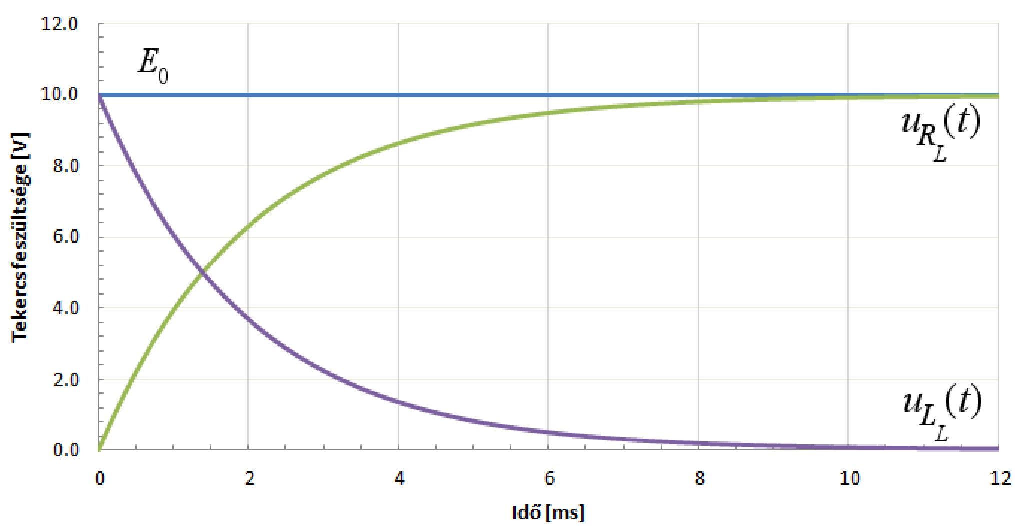
egyenletek megfelelően, mindig a tár e.m.f.-vel egyenlő, ahol

$$u_{R_L}(t) = R_L i_1(t) R_L = \frac{E_0}{R_L}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) = E_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right)$$

és

$$u_{L_L}(t) = L\frac{di_1(t)}{dt} = L\frac{E_0}{R_L}\frac{1}{\tau_1}e^{-\frac{t}{\tau_1}} = E_0 e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

Az eredményeket a 11. ábra szemlélteti.

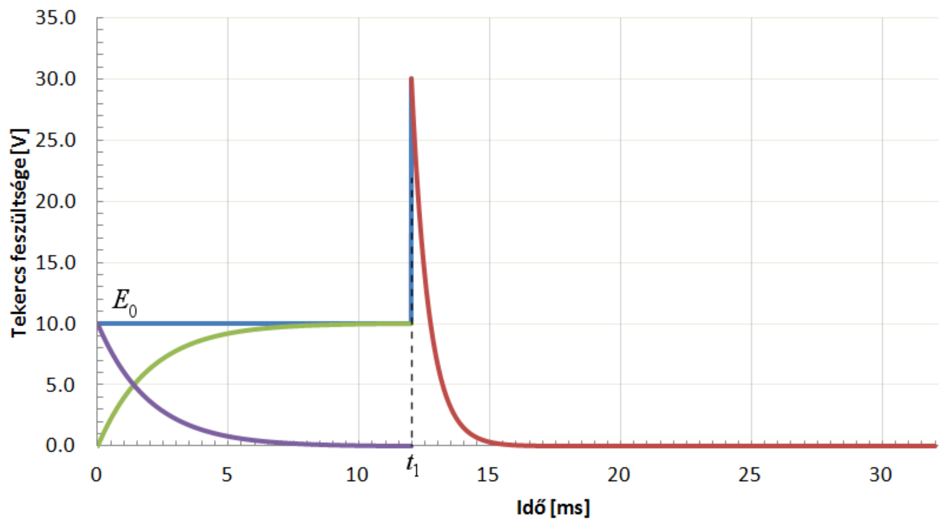


11. ábra

Abban az esetben amikor átkapcsolunk a 2-es állásba, a tekercs induktív részén megjelenő feszültség

$$u_{L_L}(t) = (R_L + R)i_2(t),\ t > t_1,\ \text{vagyis}$$

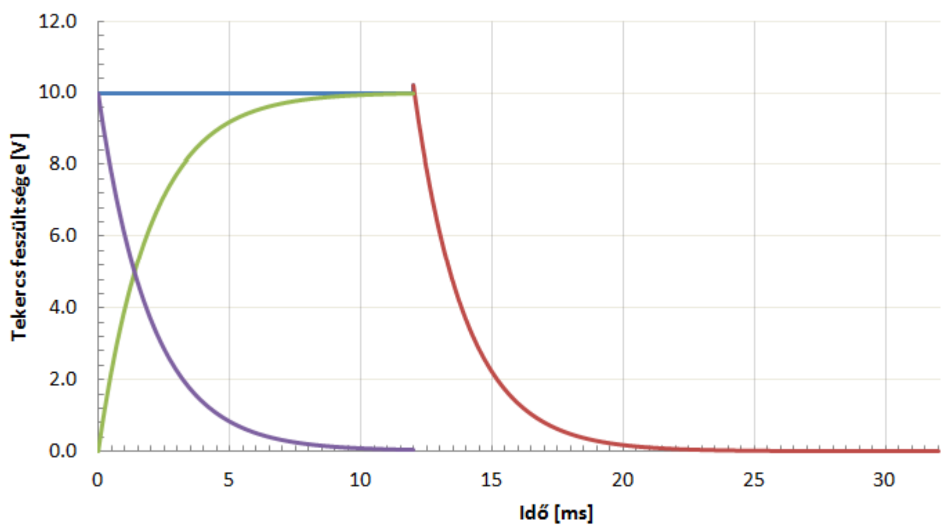
$$u_{L_L}(t) = (R_L + R)\frac{E_0}{R_L}e^{-\frac{(R_L+R)}{L}(t-t_1)}$$



12. ábra

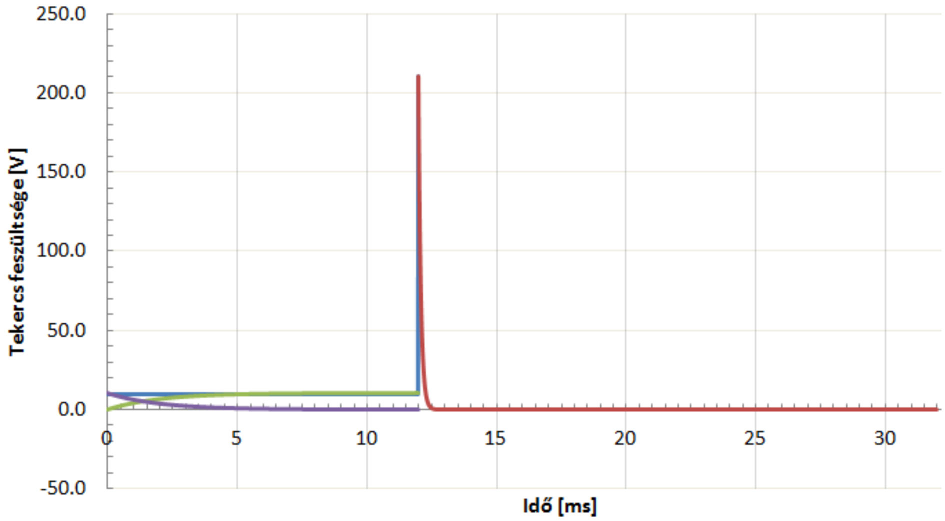
Megfigyelhető, hogy abban az esetben, amikor a lezáró ellenállás értéke nagyobb, mint a tekercs saját ellenállása, a tekercs induktív részén a tápfeszültségnél jóval nagyobb feszültség jelenik, meg. Ilyenkor a tekercsben gyors (az áramkör időállandója 0,67 ms) fluxus-változás jön létre, nagy az önindukció e.m.f.. Példánkban a feszültség túllövése 30V.

Ha pl. a lezáró ellenállásnak az értéke 1 ($R < R_L$), akkor a folyamat lassabban megy végbe (időállandó 1,96 ms), a feszültség túllövése csak 10,2 V (13. ábra).



13. ábra

Ha viszont a lezáró ellenállásnak az értéke 100 ($R > R_L$), akkor a folyamat sokkal gyorsabban megy végbe (időállandó 0,095 ms), a feszültség túllövése pedig jelentős 210 V (14. ábra).



14. ábra