

## Integrálási képletek

**Fontos: Ez az anyag csak egy emlékeztető; nem helyettesíti az előadások, gyakorlatok látogatását, a tankönyveket, jegyzeteket és az egyéni gyakorlást!**

A matematikában, ezen belül az analízis területén, az antiderivált vagy primitív függvény, vagy más néven határozatlan integrál, az integrálszámítás nevű részterület egyik legfontosabb fogalma. Egy  $f$  függvény antideriváltja az az  $F$  függvény, melynek deriváltja egyenlő  $f$  függvénnyel, azaz  $F' = f$ .

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;$$

$$2. \int e^x dx = e^x + C;$$

$$3. \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$4. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C;$$

$$5. \int x \sin x dx = \sin x - x \cos x + C;$$

$$6. \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C;$$

$$7. \int \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg} x - x + C;$$

$$8. \int \sin^3 x dx = -\frac{1}{3}(2 + \sin^2 x) \cos x + C;$$

$$9. \int \operatorname{tg}^3 x dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln |\cos x| + C;$$

$$10. \int \sin(ax) \cos(bx) dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C;$$

$$11. \int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) + C;$$

$$12. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$13. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$14. \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$15. \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C;$$

$$16. \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C;$$

$$17. \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$18. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C;$$

$$19. \int x \cos x dx = \cos x + x \sin x + C;$$

$$20. \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C;$$

$$21. \int \operatorname{ctg}^2 x dx = -\operatorname{ctg} x - x + C;$$

$$22. \int \cos^3 x dx = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 x) \sin x + C;$$

$$23. \int \operatorname{ctg}^3 x dx = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x - \ln |\sin x| + C;$$

$$24. \int \cos(ax) \cos(bx) dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C;$$

$$25. \int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos(bx) + b \sin(bx)) + C;$$

$$26. \int x \cos x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C;$$

$$27. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \ln \left| u + \sqrt{a^2 + x^2} \right| + C;$$

$$28. \int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{a^2 + x^2} \right| + C;$$

$$29. \int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C;$$

$$30. \int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx.$$

### Primitív függvény keresésekor az alábbi kérdéseket tehetjük fel:

- Nem-e tudjuk felírni egyből felírni a primitív függvényt?
- Van-e lehetőségünk, hogy az integrálandó függvényt elemi függvények segítségével egyszerűbb alakra írni.
- Tudjuk-e használni a parciális integrálás módszerét (illetve érdemese használni ezt a módszert)?
- Tudunk-e használni valamilyen helyettesítési módszert?
  - A helyettesítéses integrál formulát “rövidítő irányban” akkor használhatjuk, ha az integrálandó függvényben szereplő egyik kifejezés deriváltja is szerepel vagy kialakítható (differenciálegyenletek esetén ezt használtuk leggyakrabban).
  - A helyettesítéses integrál formulát “hosszabbító irányban” bármikor használhatjuk. Jobb ötlet híján helyettesítsük a “legrondább” részt!
- Alkalmazható-e valamelyik általános módszer:
  - pl. Rekurzív képletek;
  - Racionális törtfüggvények  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  alakú integrálok. Ebben az esetben általában elemi törtre való bontás érdemes alkalmazni (esetleg egy osztás után);
  - $R(\sin x, \cos x)$  alakú függvények integrálja esetében  $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  helyettesítést érdemes végezni, ahol  $R$  egy racionális törtfüggvény;
  - érdemes megnézni, hogy az Euler helyettesítés alkalmazható-e?