Zárthelyi dolgozat
2015. november

1. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet: $\begin{cases} y'(x) = \frac{x}{y}, \\ y(4) = -3. \end{cases}$

2. Adott az
$$y'(x) = \frac{\lambda x + 5}{(x-2)^2(x-1)^3}, \ x > 2,$$
egyenlet. Határozzuk meg a λ valós paraméter értékét úgy, hogy a megoldás egy racionális törtfüggvény legyen.

3. Vízben feloldunk 100 g cukrot. Az oldódás sebessége a még fel nem oldódott cukor mennyiségével arányos. Mennyi cukor lesz az oldatban t másodperc múlva?

4. $y'(x) - \operatorname{tg}(y(x)) = e^x \frac{1}{\cos(y(x))}$;

5. $y'(x) = y(x)(e^x + \ln y(x))$;

6. $y'(x) + x\sin(2y(x)) = 2xe^{-x^2}\cos^2 y(x)$;

7. $y' - y + y^2 = e^x$;

8. $(1-x)y' - xy = xy^2$;

9. $y' = \frac{(1+y)^2}{x(1+y)-x^2}$;

10. $y'' - 2y' - y = 0$;

11. $y^{(4)} - 10y'' + y = 0$:

12. $y^{(6)} + 3y^{(4)} + 3y'' + y = 0$;

13. $y'' + y = \frac{1}{cos(x)}$;

14. Tekintsük a következő differenciálegyenletet:
$$\begin{cases} y''(x) - \lambda y(x) = 0, \\ y(0) = y(a) = 0. \end{cases}$$
A λ milyen értékére van a fenti egyenletnek nem-triviális megoldása a $[0, a]$ intervallumon.

15. Legyenek az $y_1, y_2, ..., y_n$ az $y^{(n)}(x) - \sum_{j=1}^{n} a_j(x) y^{(n-j)}(x) = f(x)$ egyenlethez rendelt homogén egyenlet független megoldásai. Továbbá legyen $W(x) = W(y_1, y_2, ..., y_n, x)$ az $y_1, y_2, ..., y_n$ függvények Wronski féle determinánsa. Bizonyítsuk be, hogy
$$W(x) = W(x_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x} f(s)ds\right).$$

16. Egy kenuverseny végén a győztes a beérkezés pillanatában abbahagyja az evezést. A partról valaki megfigyeli, hogy t_0 idő alatt a kenu d_1 és $2t_0$ alatt d_2 távolságot tesz meg. A beérkezési vonaltól milyen távol fog a kenu megállni, ha a víz ellenállása egyenesen arányos a kenu sebességével és t_0 ismeretlen?

Megjegyzés: Minden feladat 10 pontot ér.

Megoldások

A továbbiakban ismertetjük a feladatok megoldását.

1. A feladatot átírva a következő alakot kapjuk:

$$y(x)y'(x) = x, \text{ azaz } \frac{y^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + c.$$

Ekkor felhasználva, hogy $y(4) = -3$,

$$\frac{9}{2} = \frac{16}{2} + c,$$

ekkor $c = -\frac{7}{2}$. Ekkor visszahelyettesítéssel

$$y(x) = \pm\sqrt{x^2 - 7}, x \geq 4.$$

✓

2. A jobboldali törtet elemi törtekre bontva

$$\frac{\lambda x + 5}{(x-2)^2 \cdot (x-1)^3} = -\frac{5\lambda + 15}{x-2} + \frac{2\lambda + 5}{(x-2)^2} + \frac{5\lambda + 15}{x-1} + \frac{3\lambda + 10}{(x-1)^2} + \frac{\lambda + 5}{(x-1)^3}.$$

Ezt integrálva a következő megoldást írhatjuk fel:

$$y(x) = -5(\lambda+3)\ln(x-2) - \frac{2\lambda + 5}{x-2} + 5(\lambda+3)\ln(x-1) - \frac{3\lambda +}{x-1} - \frac{\lambda + 5}{2(x-1)^2} + C.$$

Ekkor világos, hogy a megoldás akkor lesz racionális törtfüggvény ha a ln tagok nem szerepelnek a kifejezésben. Azaz $\lambda + 3 = 0$, tehát $\lambda = -3$. Ekkor a megoldás

$$y(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C.$$

✓

3. Legyen t idő alatt feloldódott cukor mennyisége $x(t)gr$. A fel nem oldódott cukor mennyisége ekkor $100 - x(t)$. Tehát, mivel az oldódás sebessége $x'(t)$, és ez arányos a még fel nem oldódott cukor mennyiségével, így

$$x'(t) = k(100 - x(t)).$$

Világos, hogy ez az egyenlet egy szétválasztható változójú differenciál egyenlet. Tehát

$$\int \frac{x'(t)}{100 - x(t)} = k \int 1dt,$$

azaz

$$-\ln(100 - x(t)) = kt - c,$$

vagy

$$x(t) = 100 - ce^{-kt}.$$

✓

4. A feladatban szerepő egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg $\cos y(x)$-el, ekkor

$$\cos y(x) \cdot y'(x) - sin(y(x)) = e^x.$$

Bevezetve, a $\sin y(x) = u(x)$ jelölést, világos, hogy $u'(x) = \cos y(x) \cdot y'(x)$, ami pontosan azt jelenti, hogy az egyenletünk a következő alakot ölti:

$$u'(x) - u(x) = e^x.$$

A fenti egyenlet, megoldását lásd lentebb. Tehát $u(x) = ce^x + xe^x$, azaz

$$\sin y(x) = ce^x + xe^x.$$

Vigyázat, a további kifejtéshez trigonometriai egyenlet megoldását kell használni. ✓

5. A feladatot átrendezve, a következőt kapjuk:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = e^x + \ln y(x),$$

azaz bevezetve, az $u = \ln y(x)$ helyettesítést, világos, hogy $u'(x) = \frac{y'(x)}{y(x)}$, tehát a következő egyenlethez jutunk:

$$u'(x) = e^x + u(x),$$

vagy

$$u'(x) - u(x) = e^x.$$

Ekkor, kikerülve a lineáris egyenlet általános megoldási "algoritmusát", beszorozzuk az egyenletet, e^{-x}-el, tehát

$$e^{-x}u'(x) + (e^{-x})'u(x) = 1, \text{ azaz } \left(e^{-x}u(x)\right)' = 1.$$

Így világos, hogy

$$e^{-x}u(x) = x + c,$$

ami pontosan azt jelenti, hogy $\ln y(x) = u(x) = ce^x + xe^x$. Tehát $y(x) = e^{ce^x + xe^x}$. ✓

6. Az $y'(x) + x\sin(2y(x)) = 2xe^{-x^2}\cos^2 y(x)$ egyenletet mindkét oldalát elosztva $\cos^2 y(x)$-al, a következőt kapjuk:

$$\frac{y'(x)}{\cos^2 y(x)} + x\operatorname{tg} y(x) = 2xe^{-x^2}.$$

Megjegyezendő, hogy felhasználtuk, hogy $\sin 2y(x) = 2\sin y(x) \cdot \cos y(x)$. Ekkor vezessük be a $\operatorname{tg} y(x) = u$ jelölést. Világos, hogy ekkor $u'(x) = \frac{y'(x)}{\cos^2 y(x)}$, tehát

$$u'(x) + xu(x) = 2xe^{-x^2}.$$

A fenti egyenlet, egy elsőrendű lineáris egyenlet, amelynek megoldását kétféleképpen is előállíthatjuk (Lásd előadás). A fenti egyenlet mindkét oldalát szorozzuk be, most $2e^{x^2}$ függvénnyel, így

$$2e^{x^2}u'(x) + 2xe^{x^2}u(x) = 4x, \text{ azaz } \left(2e^{x^2}u(x)\right)' = 4x.$$

Mindkét oldalt integrálva,

$$2e^{x^2}u(x) = 2x^2 + c,$$

✓tehát

$$\operatorname{tg} y(x) = u(x) = x^2e^{-x^2} + ce^{-x^2}.$$

✓

7. Világos, hogy a feladat a következő általános környezetbe lehet behelyezni:

$$y'(x) = c(x) + b(x)y(x) + a(x)y^2(x). \tag{0.1}$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy az egyenletünk egy Riccati-féle differenciálegyenlet. Általában a Riccati differenciálegyenletre nincs megoldási módszerünk, azonban ha ismerünk egy $y_1(x)$ megoldását az (0.1) egyenletnek, akkor abból előállóthatjuk az összes többi megoldást. Amennyiben (0.1) egyenletben az $y(x) = \frac{1}{u(x)} + y_1(x)$ helyettesítést végezzük akkor egy elsőrendű lineáris egyenlethez jutunk. Világos, hogy az egyenletünk egy megoldása az $y_1(x) = e^x$. Tehát, végezzük el a következő változó cserét:

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} + e^x.$$

Ekkor világos, hogy $y'(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)} + e^x$, és $y^2(x) = \frac{1}{u^2(x)} + 2\frac{e^x}{u(x)} + e^{2x}$. Tehát visszahelyettesítés után

$$-\frac{u'(x)}{u^2(x)} + e^x - \frac{1}{u(x)} - e^x + \frac{1}{u^2(x)} + 2\frac{e^x}{u(x)} + e^{2x} = e^{2x},$$

azaz

$$-\frac{u'(x)}{u^2(x)} - \frac{1}{u(x)} + \frac{1}{u^2(x)} + 2\frac{e^x}{u(x)} = 0.$$

A fenti egyenlet mindkét oldalát megszorozva u^2-el:

$$-u'(x) - u(x) + 1 + 2e^x u(x) = 0,$$

vagy

$$u'(x) - u(x)\,(2e^x - 1) = 1.$$

Ebben az esetben a megszokott eljárással fogjuk megoldani az egyenletet. Azaz először tekintjük a homogén egyenletet:

$$u'(x) - u(x)\,(2e^x - 1) = 0 \text{ azaz } \frac{u'(x)}{u(x)} = 2e^x - 1.$$

Az utóbbi egyenletet integrálva

$$\ln u(x) = 2e^x - x + c,$$

azaz

$$u_h = e^{2e^x - x + c} = ce^{2e^x - x}.$$

Ekkor alkalmazva a konstans variálásának módszerét, az eredeti lineáris egyenlet sajátos megoldását a következő alakban keressük:

$$u_p = c(x)e^{2e^x - x}.$$

Ekkor $u_p' = c'(x)e^{2e^x - x} + c(x)e^{2e^x - x}(2e^x - 1)$, tehát

$$u_p'(x) - u_p(x)(2e^x - 1) = c'(x)e^{2e^x - x} + c(x)e^{2e^x - x}(2e^x - 1) - c(x)e^{2e^x - x}(2e^x - 1),$$

tehát

$$c'(x)e^{2e^x - x} = 1,$$

azaz

$$c'(x) = e^{x - 2e^x} = e^x \cdot e^{-2e^x}.$$

Világos, hogy ki kell számítanunk $\displaystyle\int e^x \cdot e^{-2e^x} dx$ integrált. Ennek érdekében végezzük el a $v = e^x$ változó cserét. Ekkor $dv = e^x dx$, tehát a fenti integrál kiszámításához elégséges a következő integrált kiszámítani:

$$\int e^{2v} dv = \frac{-1}{2} e^{-2v} = -\frac{e^{-2e^x}}{2},$$

azaz $c(x) = -\frac{e^{-2e^x}}{2}$. Ekkor

$$u(x) = u_h + u_p = ce^{2e^x - x} - \frac{e^{-2e^x}}{2} \cdot e^{2e^x - x} = ce^{2e^x - x} - \frac{e^{-x}}{2},$$

tehát

$$y(x) = e^x + \frac{1}{ce^{2e^x - x} - \frac{e^{-x}}{2}}.$$

8. A feladatban szereplő egyenlet egy Bernoulli-egyenlet. Az egyenlet mindkét oldalát y^2-al elosztva:

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{x}{1-x}\frac{1}{y} = x.$$

Ekkor az $\frac{1}{y} = u$ jelölést használva a következőt kapjuk $u' = -\frac{y'}{y}$, azaz

$$-u' - \frac{x}{1-x}u = x.$$

Az így kapott egyenlet már egy elsőrendű lineáris egyenlet. A szokásos módszerrel fogunk ebben az esetben is eljárni. Tehát, képezzük a homogén egyenletet:

$$u' + \frac{x}{1-x}u = 0,$$

vagy

$$\frac{u'}{u} = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Ekkor integrálás után a következőt kapjuk:

$$\ln u(x) = x + \ln|x-1| + c,$$

$$u_h = c(x-1)e^x.$$

Tehát ismét alkalmazva a konstans variálásának módszerét világos, hogy a lineáris egyenlet sajátos megoldása a következő alakban kereshető:

$$u_p(x) = c(x)(x-1)e^x.$$

Tehát $u_p' = c'(x)(x-1)e^x + c(x)[e^x + (x-1)e^x]$. Visszahelyettesítve az egyenletbe:

$$\begin{aligned} u_p' + \frac{x}{1-x}u_p &= c'(x)(x-1)e^x + c(x)[e^x + (x-1)e^x] + \frac{x}{1-x}c(x)(x-1)e^x \\ &= c'(x)(x-1)e^x \\ &= -x. \end{aligned}$$

Tehát

$$c'(x) = -\frac{x}{(x-1)^2}e^{-x} = \frac{-e^{-x}(x-1) - e^{-x}}{(x-1)^2}.$$

Azaz,

$$c(x) = \frac{e^{-x}}{x-1}.$$

Világos, hogy ebből felírható a végső megoldás. ✓

9. A feladat a változók megcserélése után (úgy tekintsük, hogy $x = x(y)$) egy Bernoulli egyenletté alakul. ✓

10. Felírjuk az egyenlethez rendelt karakterisztikus egyenletet:

$$r^2 - 2r - 1 = 0,$$

ennek az egyenletnek a gyökei $r_1 = 1 - \sqrt{2}$, $r_2 = 1 + \sqrt{2}$, tehát

$$y(x) = c_1 e^{(1-\sqrt{2})x} + c_2 e^{(1+\sqrt{2})x}.$$

✓

11. Hasonlóan járunk el ebben az esetben is $r^4 - 10r^2 + 1 = 0$. Ennek az egyenletnek a gyökei $r_1 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, $r_2 = -\sqrt{3} + \sqrt{2}$, $r_3 = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $r_4 = -\sqrt{3} - \sqrt{2}$. Tehát

$$y(x) = c_1 e^{(\sqrt{3}-\sqrt{2})x} + c_2 e^{(-\sqrt{3}+\sqrt{2})x} + c_3 e^{(\sqrt{3}+\sqrt{2})x} + c_4 e^{(-\sqrt{3}-\sqrt{2})x}.$$

✓

12. Ebben az esetben az egyenlethez rendelt karakterisztikus függvény:

$$r^6 + 3r^4 + 3r^2 + 1 = 0.$$

Világos, hogy

$$(r^2 + 1)^3 = 1,$$

tehát $r_1 = i, r_2 = -i, r_3 = i, r_4 = -i, r_5 = i, r_6 = -i$. Világos, hogy ezek háromszoros gyökök. Tehát a reprezentációs tétel alapján a megoldás:

$$y(x) = (c_1 x^2 + c_2 x + c_3)\cos(x) + (c_4 x^2 + c_5 x + c_6)\sin(x).$$

✓

13. A feladatot a konstans variálásának módszerével fogjuk megoldani. Elöször felírjuk az egyenlethez rendelet homogén egyenletet, azaz

$$y'' + y = 0.$$

Világos, hogy ennek a homogén egyenletnek a megoldása

$$y_h(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x).$$

Ekkor a sajátos megoldást a következő alakban keressük:

$$y_p(x) = c_1(x)\cos(x) + c_2(x)\sin(x).$$

Világos, hogy

$$y_p(x)' = [c_1'(x)\cos(x) + c_2'(x)\sin(x)] + [-c_1(x)\sin(x) + c_2(x)\cos(x)].$$

Tehát a konstans variálásnak első egyenlete:

$$c_1'(x)\cos(x) + c_2'(x)\sin(x) = 0,$$

azaz

$$y_p(x)' = -c_1(x)\sin(x) + c_2(x)\cos(x).$$

Ekkor

$$y_p''(x)+y_p(x) = [-c_1'(x)\sin(x)+c_2'(x)\cos(x)]+[-c_1(x)\cos(x)-c_2(x)\sin(x)]+[c_1(x)\cos(x)+c_2(x)\sin(x)] = -$$

így a második egyenletünk:

$$-c_1'(x)\sin(x) + c_2'(x)\cos(x) = \frac{1}{\cos(x)}.$$

Tehát a következi̋ egyenletrendszerünk van:

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos(x) + c_2'(x)\sin(x) = 0 \\ -c_1'(x)\sin(x) + c_2'(x)\cos(x) = \frac{1}{\cos(x)}. \end{cases}$$

A fenti egyenletrendszerben az ismeretlenek a $c_1'(x)$ és $c_2'(x)$. Tehát, $c_2'(x) = 1$, $c_1'(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Tehát világos, hogy

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \ln|\cos(x)|\cos(x) + x\sin(x).$$

✓

14. A karakterisztikus egyenlet $r^2 - \lambda = 0$. Mivel a differenciálegynlet megoldásainak alakja a karakterisztikus egynlet gyökeinek természetétől függ, tárgyalásra van szükség:

    (a) Ha $\lambda > 0$, akkor a karakterisztikus egyenletnek két különböző megoldása van: $r_1 = \sqrt{\lambda}, r_2 = -\sqrt{\lambda}$. Tehát a megoldás
    $$y(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$
    Felhasználva a kezdeti feltételeket a következő rendszert kapjuk:
    $$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{\lambda}a} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}a} = 0, \end{cases}$$
    tehát $c_1 = c_2 = 0$. (Ennek igazolására több módszer is adható: 1. Kifejezéssel megoldjuk a rendszert; 2.a rendszer determinánsa éppen az alapmegoldások Wronski-determinánsa az $x = a$-ban és mivel ez nem 0, a homogén egyenletrendszernek csak a triviális megoldása létezik.)

    (b) Ha $\lambda = 0$, akkor a megoldás
    $$y(x) = c_1 x + c_2,$$
    szintén figyelembe véve a kezdeti feltételeket csak a triviális megoldást kapjuk.

    (c) Ha $\lambda < 0$, akkor a karakterisztikus egyenletnek két komplex gyöke van: $r_1 = i\sqrt{-\lambda}, r_2 = -i\sqrt{-\lambda}$, tehát a megoldás
    $$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x).$$
    Felhasználva a feltételeket, világos, hogy $y(0) = 0$ feltétel alapján $c_1 = 0$, míg az $y(a) = 0$ feltétel alapján
    $$c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}a) = 0,$$
    tehát nem triviális megoldások létezésének szükséges és elégséges feltétele: $\sin(\sqrt{-\lambda}a) = 0$. Így a $\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2$ értékeket kapjuk, és ezekhez az
    $$y_k(x) = c_k \sin\left(\frac{kx\pi}{a}\right)$$
    megoldások tartoznak.

✓

15. A megoldás ötlete az, hogy levezetünk egy differenciálegyenletet a W függvényre. Ehhez ki fogjuk számítani a W'-et. A determináns deriválási szabály alapján W' n darab determináns összege, amelyeket úgy, kapunk W-ből, hogy egyszerre egy sorát deriváljuk. Ez alapján
$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$
mert a többi determináns mindegyike tartalmaz két azonos sort, tehát azok mind 0-val egyenlők. Ha ebben a determinánsabn az utolsó sor elemeit a differenciálegyenlet alapján behelyettesítjük, és az első $(n-1)$ sor segítségével eltüntetjük az $(n-1)$-nél kisebb rendű deriváltakat (az $y_j^{(i)}$ sort $-a_{n-i}$-vel szorozzuk és hozzáadjuk az utolsóhoz), akkor a
$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 y_1^{(n-1)} & a_1 y_2^{(n-1)} & \dots & a_1 y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = a_1(x) W(x)$$
egyenlőséget kapjuk. Ez egy szétválasztható differenciálegyenlet, amelynek megoldása pontosan ugyanaz amit a feladatban látunk. ✓

16. Az időt is és a távolságot is a beérkezés pillanatától kezdve mérjük. Ha $v(t)$-vel jelöljük a sebességet a t időpillanatban, akkor a pillanatnyi gyorsulás a $v'(t)$ és a t időpillanatban megtett út pedig $\int_0^s v(s)ds$. A feltételek alapján F az ellenállási erő $-kv(t)$, tehát a dinamika második törvénye alapján felirhatjuk a mozgásegyenletet:

$$mv'(t) = ma(t) = F = -kv(t),$$

így a

$$v'(t) = -\frac{k}{m}v(t)$$

differenciálegyenlethez jutunk. Ennek a megoldása (szétválasztható differenciálegyenlet):

$$v(t) = v(0)e^{-\frac{k}{m}t},$$

és a t időpillanatig megtett út

$$d(t) = \frac{mv(0)}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

A megállásig megtett út tehát $\lim_{t\to\infty} d(t) =: d_\infty$. A $d(t_0) = d_1$ és $d(2t_0) = d_2$ feltételek alapján igaz, hogy

$$d_2 = d_1\left(1 + e^{-\frac{k}{m}t_0}\right),$$

tehát

$$d_\infty = \frac{d_1}{1 - e^{-\frac{k}{m}t_0}} = \frac{d_1}{1 - \frac{d_1}{d_2} + 1} = \frac{d_1^2}{d_2 - d_1}.$$

✓