

Speciális Matematika

Komplex függvények, folytonosság, deriválhatóság és a komplex integrál

Farkas Csaba

Sapientia EMTE, Marosvásárhely

2017. november

Értelmezés

Legyen $A \subset \mathbb{C}$ és z_0 az A halmaznak egy torlódási pontja. Az $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ függvénynek a z_0 pontban van határértéke és a határértéke $l \in \mathbb{C}$, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$ úgy, hogy

$$z \in A, \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon.$$

Az előbbi értelmezés kiterjeszthető azokra az esetekre, ha $z_0 \in \infty$ vagy $l = \infty$.

- Az f függvénynek a z_0 pontban a határértéke l , jelölésére a $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$ egyenlőséget használjuk.
- Nyilvánvaló, hogy a $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} l$ és $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} l$

Értelmezés

Az $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ függvény két esetben folytonos a $z_0 \in A$ pontban,

- 1 ha z_0 izolált pontja A -nak,
- 2 ha z_0 torlódási pontja A -nak és $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Az f függvény folytonos A -n, ha folytonos A -nak minden pontjában.

- Nyilvánvaló, hogy az $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ függvény akkor és csak akkor folytonos a z_0 pontban, ha az $u, v : A \rightarrow \mathbb{R}$ függvények folytonosak z_0 -ban, ahol $u = \operatorname{Re} f$ és $v = \operatorname{Im} f$.
- Ha $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$ folytonosak z_0 -ban, akkor $f + g$, $f \cdot g$ is folytonos z_0 -ban és ha $g(z_0) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ is folytonos z_0 -ban.
- Ha $f : A \rightarrow B$ folytonos a $z_0 \in A$ pontban és $g : B \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos $f(z_0)$ -ban, akkor $g \circ f$ folytonos z_0 -ban.

Deriválhatóság

A komplex függvény deriváltját a valós esettel analóg módon értelmezzük.

A komplex esetben a deriválhatóság egy tartományon, **sokkal "erősebb" feltétel, mint a valós esetben**, ugyanis egy ilyen függvény akárhányszor deriválható lesz, amint a továbbiakban látni fogjuk.

Értelmezés

- ① Legyen D egy nyílt részhalmaza $\mathbb{C}$ -nek, $z_0 \in D$ és $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ egy adott függvény. Az f függvény deriválható a z_0 pontban, ha

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

határérték létezik $\mathbb{C}$ -ben.

- ② Ezt a határértéket f deriváltjának nevezzük z_0 -ban és $f'(z_0)$ -val jelöljük.
- ③ Ha f deriválható a D halmaz minden pontjában, akkor azt mondjuk, hogy f holomorf D -n.

Tétel

Ha az $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ függvény deriválható a $z_0 \in D$ pontban, akkor f folytonos a z_0 pontban.

- ① Ha $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ deriválható függvények z_0 -ban, akkor $f + g$, $f \cdot g$ és ha $g(z_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ is deriválható a z_0 pontban és

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}$$

- ② Ha $D, D_1 \in \mathbb{C}$ két nyílt halmaz, az $f : D \rightarrow D_1$ függvény deriválható a $z_0 \in D$ pontban és a $g : D_1 \rightarrow \mathbb{C}$ függvény deriválható a $f(z_0)$ pontban, akkor a $g \circ f$ függvény is deriválható a z_0 pontban és

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

- 3 Legyen $D_1 \subseteq \mathbb{C}$ egy nyílt halmaz, az $f : D \rightarrow D_1$ bijektív függvény és $g : D_1 \rightarrow D$ az f inverze.

Ha f deriválható a z_0 pontban, $f'(z_0) \neq 0$ és g folytonos az $f(z_0)$ pontban, akkor g is deriválható a z_0 pontban és

$$g'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Cauchy-Riemann feltételek

Ha $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ egy függvény, akkor a továbbiakban az $u, v : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvények az f függvény valós, illetve komplex részét jelölik: $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$.

A következő tétel kapcsolatot teremt az f függvény deriválhatósága és az u és v függvények tulajdonságai között.

Tétel

Legyen $z_0 \in D$. Ha az $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ függvény deriválható a z_0 pontban, akkor az u, v függvényeknek léteznek az elsőrendű parciális deriváltjai és fennállnak a Cauchy-Riemann összefüggések

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

és

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

- a az f függvény deriválható a $z_0 = x_0 + iy_0$ pontban, akkor

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \rightarrow f'(z_0),$$

bármilyen irányból is tartson z a z_0 ponthoz.

- Tárgyaljuk először azt az esetet, amikor z a valós tengellyel párhuzamos irány mentén tart z_0 -hoz.
- Ebben az esetben $z = x + iy_0$ és $x \rightarrow x_0$.

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y_0) - v(x_0, y_0))}{x - x_0} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{1}$$

Bizonyítás II

- Ha z az imaginárius tengellyel párhuzamos irány mentén tart z_0 -hoz, akkor $z = x_0 + iy$, $y \rightarrow y_0$

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0, y) - v(x_0, y_0))}{i(y - y_0)} = \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{2}$$

- Az (1) és (2) egyenlőségeket összevetve, kapjuk, hogy

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{és} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$



Megjegyzések

- 1 Az f függvény deriválhatóságából tehát nem csak az következik, hogy $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ függvényeknek léteznek az elsőrendű parciális deriváltjai, hanem az is, hogy ezek teljesítik a Cauchy-Riemann féle összefüggéseket.
- 2 A Cauchy-Riemann-egyenletek teljesítéséből egy adott (x_0, y_0) pontban még **nem következik, hogy az adott pontban az f függvény deriválható.** Példa erre az $f(x) = \sqrt{|xy|}$ függvény. Itt $u(x, y) = \sqrt{|x \cdot y|}$, $v(x, y) = 0$. Egyszerű belátni, hogy

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

Tehát a Cauchy-Riemann-egyenletek teljesünek a $z_0 = 0$ pontban.

De a $z_0 = 0$ pontban f nem differenciálható, mert ha $z = (\alpha + i\beta)r$ és ha $r \rightarrow 0$, akkor

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{\sqrt{\alpha\beta}r^2}{(\alpha + i\beta)r} \rightarrow \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha + i\beta},$$

vagyis a határérték függ a $\alpha + i\beta$ iránytól.

Tétel

Ha az u és v függvényekről feltételezzük, hogy egy D tartomány minden pontjában léteznek a parciális deriváltjaik és ezek folytonosak, akkor a Cauchy-Riemann-differenciálegyenletek teljesülése szükséges és elégséges feltétele lesz az f függvény deriválhatóságának D -ben.

Megjegyzés

- A Cauchy-Riemann-differenciálegyenletekből további deriválással az következik, hogy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

tehát $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ és ugyanígy $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.

- A D tartományon holomorf függvény valós és képzetes részei a Laplace-differenciálegyenletet kielégítik, tehát harmonikus függvények.
- Ha egy $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez létezik egy $v : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény úgy, hogy az

$$f : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = u(x, y) + v(x, y)$$

függvény holomorf D -ben, akkor v -t az u harmonikus párjának nevezzük.

- Az előbbiek alapján láttuk, hogy ha u -nak van harmonikus párja, akkor u kielégíti a Laplace-egyenletet.
- Természetes a kérdés, hogy ha egy $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény kielégíti a Laplace-egyenletet, akkor következik-e, hogy van harmonikus párja. A következő tétel azt mondja ki, hogy a kérdésre a válasz igenlő.

Harmonikus párok tétele I

Tétel

Ha $D \subset \mathbb{C}$, D egy tartomány és az $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény harmonikus, akkor létezik egy $v : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény úgy, hogy az $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ függvény holomorf lesz D -n.

Bizonyítás:

- Tudjuk, hogy $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
- Tekintsük az

$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = Pdx + Qdy \quad (3)$$

differenciálformát.

- Mivel $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ következik, hogy az $\omega = Pdx + Qdy$ egzakt differenciálforma.
- Tehát létezik egy $v : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény úgy, hogy

$$\omega = Pdx + Qdy = dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy. \quad (4)$$

Harmonikus párok tétele II

- Az (3) és (4) összefüggésből adódik, hogy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{és} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

- A Cauchy-Riemann tétel alapján következik, hogy az $f : D \rightarrow \mathbb{C}$,
 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ függvény holomorf a D tartományon. □

Tétel

Ha D egy tartománya $\mathbb{C}$ -nek és f holomorf függvény D -n, akkor f akkor és csak akkor állandó, ha $f'(z) = 0$, bármely $z \in D$ esetén.

Bizonyítás I

- Azt kell igazolnunk, hogy ha $f'(z) = 0$, $(\forall) z \in D$, akkor f állandó, hiszen a fordított állítás nyilvánvaló.
- Legyen $z_0 \in D$ és $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Mivel D nyílt halmaz, következik, hogy van olyan $r > 0$, hogy $U(z_0, r) \subset D$.
- Bármely $z_1 \in U(z_0, r)$ esetén $f'(z_1) = 0$ -ból következik, hogy

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_1) = \frac{\partial u}{\partial y}(z_1) = \frac{\partial v}{\partial x}(z_1) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_1) = 0.$$

- A közéérték tételből:

$$u(x_0, y_0) - u(x_1, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + \theta(x_1 - x_0), y_0) \cdot (x_0 - x_1) = 0$$

ahonnan azt kapjuk, hogy $u(x_0, y_0) = u(x_1, y_0)$. Analóg módon igazolható, hogy

$$u(x_1, y_0) = u(x_1, y_1), \quad u(x_0, y_0) = u(x_1, y_0), \quad u(x_1, y_0) = u(x_1, y_1).$$

Az előbbi egyenlőségek alapján $f(z_1) = f(z_0)$, bármely $z_1 \in U(z_0, r)$.

- Legyen $A_1 = \{z \in D : f(z) = f(z_0)\}$. Az előző eredmények szerint, ha $z_1 \in A_1$, akkor létezik $r_1 > 0$ úgy, hogy $U(z_1, r_1) \subset A_1$.
- Tehát A_1 , nyílt halmaz D -ben.
- Ha $z \in A'_1$, akkor létezik $(z_n)_{n \geq 1} \subset A_1$ sorozat úgy, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$.
- Mivel f folytonos következik, hogy $f(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$, tehát $z \in A_1$, vagyis A_1 zárt halmaz D -ben.
- Mivel $A_1 \neq \emptyset$ és A_1 zárt is és nyílt is ugyanakkor, következik, hogy $A_1 = D$, vagyis $f(z) = f(z_0)$, bármely $z \in D$.

Értelmezés

Az $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, $z = x + iy$ függvényt komplex exponenciális függvénynek nevezzük.

Tétel

Az e^z függvény holomorf $\mathbb{C}$ -ben és $(e^z)' = e^z$.

Tétel

Érvényesek a következő egyenlőségek:

- 1 $e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}, \quad (\forall) z, z' \in \mathbb{C}$
- 2 $|e^z| = e^x, \quad x = \operatorname{Re} z.$
- 3 $e^{z+2\pi i} = e^z, \quad (\forall) z \in \mathbb{C}.$

Tétel

Legyen $S_0 = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$.

Az $f : S_0 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = e^z$ függvény bijektív.

Ha az $f(z) = e^z$ függvényt az $S_k = \{z \in \mathbb{C} \mid 2k\pi - \pi < \operatorname{Im} z \leq (2k + 1)\pi$ sávra szűkítjük le akkor az így értelmezett $f : S_k \rightarrow \mathbb{C}^*$ függvény szintén bijektív lesz.

A logaritmus függvény

Értelmezés

A logaritmus függvényt az exponenciális függvény inverzeként értelmezzük, akkor az így értelmezett függvény több értékű lesz:

$$f(z) = \log z, \quad f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{C})$$

$$\log z = \{\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Minden rögzített k érték esetén a logaritmus függvény egy-egy ágát kapjuk. A $k = 0$ ágát a logaritmus főágának nevezzük.

Tétel

- 1 Ha a D tartományon f a logaritmus függvény egy ága, akkor $f'(z) = \frac{1}{z}$, bármely $z \in D$.
- 2 Ha f és g a logaritmus függvény két ága a D tartományon, akkor létezik $k \in \mathbb{Z}$ úgy, hogy $f(z) - g(z) = 2k\pi i$, bármely $z \in D$.

További függvények I

Értelmezés

Legyen $\alpha \in \mathbb{C}$ és $z \in \mathbb{C}^*$.

A z^α hatványt a következő egyenlőséggel értelmezzük $z^\alpha = e^{\alpha \cdot \log z}$.

Ha $\alpha = k \in \mathbb{Z}$, akkor az így értelmezett függvény egyértékű lesz, a többi esetben többértékű.

Értelmezés

A $\sin, \cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényeket a

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

egyenlőségekkel értelmezzük.

Egyszerű belátni, hogy az előzőekben értelmezett függvényekre érvényesek a valós esetben bizonyított képletek és deriválási szabályok.

További függvények II

Az így értelmezett $\sin$ és $\cos$ függvények nem bijektívek, de meg lehet adni olyan leszűkítésüket, amelyek bijektívek lesznek (amint a következő tétel is mutatja).

Tétel

Legyen $D = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0, |\operatorname{Re} z| \geq 1\}$ és $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in (0, \pi)\}$. A $\cos : D_1 \rightarrow D$ függvény bijektív és ha az inverzét $\arccos : D \rightarrow D_1$ jelöli, akkor

$$\arccos z = \frac{1}{i} \log \left(z + i \sqrt{1 - z^2} \right).$$

Értelmezés

Az $f : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, függvényt ahol, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, lineáris törtfüggvénynek vagy homografikus leképezésnek nevezzük.

Ha az $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ lineáris törtfüggvényt a $\mathbb{C}_\infty$ kibővített komplex számsíkon értelmezzük $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, akkor $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ és $f(\infty) = \frac{a}{c}$. Egyszerű belátni, hogy $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$ lineáris törtfüggvények halmaza a függvények összetevésére nézve csoportot képez.

Értelmezés

1. *Polinomfüggvénynek nevezzük a $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $P(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n$ alakú függvényt, ahol $c_0, c_1, \dots, c_n$ adott komplex számok (együtthatók), $c_n \neq 0$. Azt mondjuk, hogy n a P polinom foka és így jelöljük $\deg(P) = n$.
A $\mathbb{C}$ komplex számok halmazán értelmezett polinomok halmazát $\mathbb{C}[z]$ jelöli.*
2. *A racionális törtfüggvényt az $R : \mathbb{C} \setminus \{b_1, \dots, b_n\} \rightarrow \mathbb{C}$, $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ képlettel értelmezzük, ahol $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ és $b_1, \dots, b_n$ a $Q(z) = 0$ egyenlet gyökei jelöli. (Feltételeztük, hogy Q nem a zéró polinom).*

Komplex integrál

Értelmezés

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és G egy nyílt halmaz $\mathbb{C}$ -ben.

A $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ folytonos leképezést görbének nevezzük. $\gamma(a)$ a γ görbe kezdőpontja, $\gamma(b)$ pedig a végpont.

Ha $\gamma(a) = \gamma(b)$, akkor γ egy zárt görbe.

Sajátos esetben a γ görbe állhat egyetlen pontból is, ha $\gamma(t) = \gamma(a)$ bármely $t \in [a, b]$.

Értelmezés

A γ görbét rektifikálhatónak nevezzük, ha az $[a, b]$ intervallum tetszőleges

$$\Delta_n = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b\}$$

felosztása esetén a $S_{\Delta_n}(\gamma) = \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|$ összeg egy beosztástól független korlát alatt marad. Jelölje $\mathcal{F}$ az $[a, b]$ intervallum összes felosztásainak a halmazát.

Komplex integrál

Egy γ rektifikálható görbe esetén a $\sup\{S_{\Delta_n}(\gamma) \mid \Delta_n \in \mathcal{F}\} = L(\gamma)$ pozitív valós számot a γ görbe hosszának nevezzük.

Értelmezés

Legyen $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow G$, $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow G$ két görbe úgy, hogy γ_1 végpontja egyezzen meg γ_2 kezdőpontjával. ($\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$). A $\tilde{\gamma} : [0, 2] \rightarrow G$ görbét, amit a

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma_1(a + t(b - a)), & t \in [0, 1] \\ \gamma_2(c + (t - 1)(d - c)), & t \in (1, 2] \end{cases}$$
 egyenlőség értelmez a γ_1 és γ_2 görbék egyesítésének nevezzük és $\tilde{\gamma} = \gamma_1 \cup \gamma_2$ -vel jelöljük.

Értelmezés

Legyen D egy nyílt halmaz és $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow D$ két görbe ebben a halmazban. Azt mondjuk, hogy a γ_1 görbe folytonosan deformálható a γ_2 görbébe, ha létezik egy $\varphi : [a, b] \times [a, b] \rightarrow D$ folytonos függvény úgy, hogy $\varphi(a, t) = \gamma_1(t)$ és $\varphi(b, t) = \gamma_2(t)$, bármely $t \in [a, b]$. Sajátos esetben, ha a γ_2 görbe csak egy pontból áll ($\gamma_2(t)$ az állandó leképezés), akkor azt mondjuk, hogy γ_1 egy ponttá deformálható D -ben. Egy egyszeresen összefüggő tartományban minden zárt görbe egy ponttá deformálható.

Komplex integrál

A továbbiakban egy γ görbén mindig egy rektifikálható görbét fogunk érteni.

A komplex integrált a valós esettel analóg módon értelmezzük.

Legyen $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ egy görbe a G nyílt halmazban és $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ egy függvény, amely folytonos $\gamma([a, b])$ -n. Az $[a, b]$ intervallum egy

$\Delta_n = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$ felosztása esetén

$\|\Delta_n\| = \max_{0 \leq k < n} |t_{k+1} - t_k|$ számot a Δ_n felosztás normájának nevezzük. Legyenek

továbbá $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ $k = \overline{1, n}$ adott számok. Az f függvényhez, Δ_n felosztáshoz és $(\tau_k)_{k=1}^n$ közbeeső értékekhez hozzárendeljük az

$$S_{\Delta_n}(f, \tau) = \sum_{k=1}^n f(\gamma(\tau_k))(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}))$$

összeget.

Komplex integrál

Értelmezés

Ha létezik egy $L \in \mathbb{C}$ komplex szám úgy, hogy bármely $\varepsilon > 0$ pozitív valós szám esetén létezik egy $\delta > 0$ pozitív valós szám úgy, hogy ha $\|\Delta_n\| < \delta$, akkor $|L - S_{\Delta_n}(f, \tau)| < \varepsilon$ tetszőleges $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{1, n}$ közbeeső értékek esetén, akkor az L számot az f függvény γ görbe menti integráljának nevezzük és így jelöljük $\int_{\gamma} f(z) dz$.

Tétel

Ha γ egy görbe a G nyílt halmazban és $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ egy olyan függvény, amely folytonos a γ görbén, akkor létezik és véges a $\lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} S_{\Delta_n}(f, \tau)$ határérték, tehát létezik az $\int_{\gamma} f(z) dz$ komplex integrál.

Tulajdonságok

Tulajdonság

Az integrál értelmezéséből azonnal következik, hogy:

a) Ha a γ_1 végpontja megegyezik a γ_2 kezdőpontjával, akkor

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

b) Ha γ^- jelöli a γ görbe fordított irányú bejárását, akkor:

$$\int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

c) $\int_{\gamma} \lambda f(z) dz = \lambda \int_{\gamma} f(z) dz$, $\int_{\gamma} (f(z) + g(z)) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} g(z) dz$.

d) Ha $|f(z)| \leq M$, bármely $z \in \gamma([a, b])$, akkor $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot L(\gamma)$ ($L(\gamma)$ a γ görbe hosszát jelöli).

Visszavezetés a valós változós integrálra

Tétel

Ha $\gamma \in C^1([a, b])$, $\gamma([a, b]) \subset G$ (nyílt halmaz) és $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos a $\gamma([a, b])$ pontjaiban, akkor

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

- ① Legyen $\gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$, $t \in [0, 1]$ (a γ görbe a z_1 és z_2 pontokat összekötő szakasz),

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} z dz &= \int_0^1 \gamma(t) \cdot \gamma'(t) dt = (z_2 - z_1) \int_0^1 (z_1 + t(z_2 - z_1)) dt = \\ &= (z_2 - z_1) \cdot \frac{z_2 + z_1}{2} = \frac{z_2^2 - z_1^2}{2}.\end{aligned}$$

- ② Számítsuk ki az $f(z) = \frac{1}{z}$ függvény integrálját az origó középpontú egység sugarú körön.

Ebben az esetben $\gamma(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Példák II

- 3 $f(z) = c$ (állandó)
Egy tetszőleges $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ görbe esetén

$$S_{\Delta_n}(f, \xi) = \sum_{k=1}^n c \cdot (\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})) = c(\gamma(t_n) - \gamma(t_1)) = c(\gamma(b) - \gamma(a)).$$

$$\text{Tehát } \int_{\gamma} c dz = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} S_{\Delta_n}(f, \xi) = c(\gamma(b) - \gamma(a)).$$

Ha a γ görbe zárt, akkor $\int_{\gamma} c dz = 0$.

- 4 Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z$. Újból $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ legyen egy tetszőleges görbe a komplex számsíkban. A

$$S_{\Delta_n}(f, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\gamma(\xi_k))(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}))$$

Példák III

integrálösszeg esetén a $\xi_k = t_k$, majd $\xi_k = t_{k-1}$, $k = \overline{1, n}$. Mind a két esetben

$$\lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} S_{\Delta_n}(f, \xi_k) = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \gamma(t_k)(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})) = \int_{\gamma} z dz$$

$$\lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} S_{\Delta_n}(f, t_{k-1}) = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \gamma(t_{k-1})(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})) = \int_{\gamma} z dz$$

és

$$S_{\Delta_n}(f, t_k) + S_{\Delta_n}(f, t_{k-1}) = \frac{1}{2}(\gamma^2(b) - \gamma^2(a))$$

következik, hogy $\int_{\gamma} z dz = \frac{1}{2}(\gamma^2(b) - \gamma^2(a))$. Ha γ egy zárt görbe, akkor

$$\int_{\gamma} z dz = 0.$$

Cauchy tételei

A T tartományt egyszeresen összefüggőnek nevezzük, ha bármely zárt, önmagát nem metsző görbe esetén, a görbével együtt, a görbe által határolt korlátos tartomány is T -hez tartozik.

Tétel

Ha T egyszeresen összefüggő tartomány és $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ egy holomorf függvény, akkor bármely T -ben levő γ háromszögvonala esetén

$$I_1 = \int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Tétel

Ha T egy egyszeresen összefüggő tartomány, $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ egy holomorf függvény és γ egy tetszőleges zárt görbe T -ben, akkor

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Megjegyzések I

- 1) A tétel nyilván érvényes marad akkor is, ha a T tartomány nem egyszeresen összefüggő, de a γ görbe T -nek egy egyszeresen összefüggő résztartományában van.
- 2) Ha a T tartomány egyszeresen összefüggő, $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény és γ_1 és γ_2 két közös kezdőpontú és közös végpontú görbe, akkor:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

- 3) Legyen γ_1 és γ_2 két egyszerû (önmagát nem metszõ) zárt görbe, γ_1 fogja körül γ_2 -t és γ_1, γ_2 az általuk közrezárt gyûrûszerû tartománnyal együtt tartozzon az f függvény T holomorfitási tartományához. Ebben az esetben

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz,$$

ha mindkét görbén ugyanolyan forgásirányba integrálunk.

4) Ha az f függvény valós és komplex részéről feltételezzük, hogy léteznek az első rendű parciális deriváltjai és azok folytonosak, akkor a Cauchy-féle integráltétel sokkal egyszerűbben bizonyítható a következő módon:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy = \\ &= \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy.\end{aligned}$$

Speciális Matematika

Holomorf függvények sorozatai és sorai, Laurent-sorok, Reziduum tétel és alkalmazásai

Farkas Csaba

Sapientia EMTE, Marosvásárhely

2017. december

Primitív függvények

A fentiek szerint, ha a T tartomány egyszeresen összefüggő és az $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ függvény holomorf, akkor f -nek bármely görbe menti integrálja csak a görbe végpontjaitól függ.

Ha a kezdőpontját a görbének rögzítjük és a végpontot változtatjuk, akkor az integrál csak a végpont függvénye, így egy F függvényt értelmezhetünk:

$$F(z) = \int_a^z f(t)dt, \quad F : T \rightarrow \mathbb{C}.$$

Tétel

Legyen T egyszeresen összefüggő tartomány. Ha $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ egy holomorf függvény, akkor az $F : T \rightarrow \mathbb{C}$, $F(z) = \int_a^z f(t)dt$ függvény is holomorf és $F'(z) = f(z)$, bármely $z \in T$ esetén.

Értelmezés

Ha a T tartományon értelmezett f holomorf függvényhez található olyan $F : T \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, hogy

$$F'(z) = f(z), \quad \text{bármely } z \in T,$$

akkor a F -et az f függvény primitív függvényének nevezzük.

Az előző tétel szerint, ha a T egyszeresen összefüggő tartomány, akkor bármely $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvénynek van primitív függvénye.

Tétel

Ha $F_1, F_2 : T \rightarrow \mathbb{C}$ az $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ függvény két különböző primitív függvénye, akkor $F_1(z)$ és $F_2(z)$ csak egy additív konstansban különböznek.

Tétel

Ha a T tartományon holomorf $f(z)$ függvénynek van egy $F(z)$ primitív függvénye, akkor

$$\int_{z_1}^{z_2} f(t)dt = F(z_2) - F(z_1),$$

bármely a T tartományban haladó görbe mentén vesszük is az integrált z_1 -től z_2 -ig. Speciálisan, ha γ zárt görbe, akkor $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$.

Cauchy-féle integrálképletek

Tétel

Legyen $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ egy zárt görbe, $K = \gamma([a, b])$, $G \subset \mathbb{C}$ egy nyílt halmaz. Ha a $g : G \times K \rightarrow \mathbb{C}$ függvény folytonos, akkor $h(z) = \int_{\gamma} g(z, t) dt$, $h : G \rightarrow \mathbb{C}$

függvény is folytonos, és ha $\frac{\partial g}{\partial z}(z, t)$ létezik és folytonos a $G \times K$ halmazon, akkor h holomorf G -n és

$$h'(z) = \int_{\gamma} \frac{\partial g}{\partial z}(z, t) dt.$$

Tétel (Cauchy képletei körlap esetén)

Legyen $f : \overline{U(z_0, r)} \rightarrow \mathbb{C}$ egy holomorf függvény $U(z_0, r)$ -n és folytonos $\overline{U(z_0, r)}$ -en. Akkor f akárhányszor deriválható az $U(z_0, r)$ körlapon pontjaiban és fennállnak a következő egyenlőségek:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial U(z_0, r)} \frac{f(t)}{(t - z)^{k+1}} dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Értelmezés

(A topológikus index)

Adott a $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ zárt görbe. Ha $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$, akkor az

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dt}{t - z_0}$$

számot a γ görbe z_0 pontra vonatkozó indexének nevezzük.

Amint a következő tétel mutatja, a topológikus index egy egész szám és durván fogalmazva azt mutatja meg, hogy egy adott görbe hányszor és milyen irányba kerül meg egy rajta kívül eső pontot.

Tétel

Ha $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ egy zárt görbe és $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$, akkor fennállnak a következő állítások:

- ❶ $n(\gamma^-, z_0) = -n(\gamma, z_0)$
- ❷ $n(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$
- ❸ *Az $n(\gamma, z)$ mint z -nek a függvénye, a $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ halmaz összefüggő komponensein állandó.*
- ❹ *Ha $\gamma = \partial U(z_0, r)$ és $z \in U(z_0, r)$, akkor $n(\gamma, z) \in \{-1, 1\}$.*
- ❺ *A $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ halmaznak egy nemkorlátos összefüggő összetevője van, ha z eleme ennek az összetevőnek, akkor $n(\gamma, z) = 0$.*

Tétel

Ha T egy egyszeresen összefüggő tartomány $\mathbb{C}$ -ben, $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ egy holomorf függvény és $\gamma : [a, b] \rightarrow T$ egy T -ben lévő zárt görbe, akkor:

$$n(\gamma, z)f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^{k+1}} dt$$

bármely $z \in T \setminus \gamma([a, b])$ és bármely $k \in \mathbb{N}$ esetén.

Tétel (Liouville)

Ha $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ egy holomorf, korlátos függvény, akkor f állandó.

Bizonyítás.

Bebizonyítjuk, hogy $f'(z_0) = 0$ bármely $z_0 \in \mathbb{C}$ esetén. A feltevés szerint létezik $M > 0$ úgy, hogy $|f(z)| < M$ bármely $z \in \mathbb{C}$ esetén. A Cauchy képlet alapján:

$$\begin{aligned} |f'(z_0)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial U(z_0, r)} \frac{f(t)}{(t - z_0)^2} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial U(z_0, r)} \frac{|f(t)|}{|t - z_0|^2} ds \leq \\ &\leq \frac{M}{2\pi r^2} \cdot L(\partial U(z_0, r)) = \frac{M}{r}, \end{aligned}$$

ahol r egy tetszőleges pozitív szám (a második integrálban ds a görbe ívelemét jelöli). De $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M}{r} = 0$ ahonnan következik, hogy $f'(z_0) = 0$. □

Értelmezés

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egy nyílt halmaz és $(f_n)_{n \geq 1}$ egy olyan függvénysorozat, amelynek tagjai a D halmazon vannak értelmezve.

Azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n \geq 1}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál kompakt halmazokon az f függvényhez, ha bármely $K \subset D$ kompakt részhalmazhoz és bármely $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan $n(\varepsilon, K)$ természetes szám, hogy ha $n \geq n(\varepsilon, K)$ akkor $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ minden $z \in K$ esetén.

Megjegyzés

- 1 A Cauchy kritérium szerint az $(f_n)_{n \geq 1}$ függvénysor akkor és csak akkor konvergál kompakt halmazokon az f függvényhez, ha bármely kompakt $K \subset D$ részhalmaz és bármely $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik egy $n(\varepsilon, K)$ természetes szám úgy, hogy ha $n, m \geq n(\varepsilon, K)$, akkor $|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$ minden $z \in K$ esetén.
- 2 Mivel D -nek bármely kompakt részhalmaza lefedhető véges sok olyan U körlappal, amelyre teljesül, hogy $\bar{U} \subset D$, következik, hogy egy függvénysor akkor konvergál egyenletesen kompakt halmazokon, ha egyenletesen konvergens minden D -ben lévő kompakt körlapon.
Sajátos esetben, ha D egy körlap, akkor a D -n értelmezett f_n függvényekből álló függvénysorozat akkor egyenletesen konvergens kompakt halmazokon, ha az $(f_n)_{n \geq 1}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens minden D -vel koncentrikus, D -ben lévő zárt körlapon.

Holomorf függvények sorozatai és sorai III

Tétel

Legyen D egy nyílt halmaz. Ha az $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ függvények folytonosak minden $n \in \mathbb{N}^$ esetén és az $(f_n)_{n \geq 1}$ függvénysor egyenletesen konvergens kompakt halmazokon az $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ függvényhez, akkor f is folytonos.*

Tétel

Legyenek az $f_n : U(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^$ függvények holomorfak az $U(z_0, R)$ körlepon és folytonosak az $\overline{U(z_0, R)}$ zárt körlepon. Ha az $(f_n)_{n \geq 1}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens az $\partial U(z_0, R)$ körön, akkor:*

- 1 az $(f_n)_{n \geq 1}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens kompakt halmazokon $U(z_0, R)$ -ben egy $f : U(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ függvényhez.*
- 2 az f függvény holomorf az $U(z_0, R)$ körlepon.*
- 3 minden $k \in \mathbb{N}$ esetén az $(f_n^{(k)})_{n \geq 1}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál kompakt halmazokon az $U(z_0, R)$ körlepon az $f^{(k)}$ függvényhez.*

Holomorf függvények sorozatai és sorai IV

Tétel (Weierstrass)

Legyen D egy nyílt halmaz. Ha az $(f_n)_{n \geq 1}$ függvénysorozat $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ függvényei holomorfak D -n és az $(f_n)_{n \geq 1}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a D halmazon minden kompakt részhalmazán az $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ függvényhez, akkor az f függvény holomorf a D halmazon és az $(f_n^{(k)})_{n \geq 1}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a D minden kompakt részhalmazán az $f^{(k)}$ függvényhez tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén.

Értelmezés

Legyen $(f_n)_{n \geq 0}$ a T tartományon értelmezett komplex függvényekből álló sorozat.

Az $(f_n)_{n \geq 0}$ függvénysorozathoz hozzárendeljük az $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ összeget, amit végtelen

függvénysornak nevezünk, az f_n függvények a sor tagjai. A $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ végtelen

függvénysor konvergens, ha az $(S_n)_{n \geq 0}$ sorozat konvergens, ahol $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$.

A $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ határérték a függvénysor összege. Ha az $(S_n)_{n \geq 0}$ sorozat nem konvergens, akkor a függvénysor divergens.

A függvénysor jelölésére, és ha konvergens, akkor az összegének a jelölésére is a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ szimbólumot használjuk.

Adottak az $f_n : T \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ függvények. A $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ függvénysor egyenletesen konvergens a T tartományon, ha a megfelelő $(S_n(z))_{n \geq 1}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a T tartományon.

Hatványsorok I

Analóg módon értelmezzük a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ sor egyenletes konvergenciáját a T tartomány kompakt részhalmazain.

Értelmezés

A $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor egyenletesen konvergál az F függvényhez a T tartomány kompakt részhalmazain, ha bármely $K \subset T$ kompakt részhalmaz és bármely $\varepsilon > 0$ esetén, létezik egy $n(\varepsilon, K)$ természetes szám úgy, hogy $n \geq n(\varepsilon, K)$ -ből következik $|S_n(z) - F(z)| < \varepsilon$ bármely $z \in K$.

Azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor abszolút konvergens a z pontban, ha a

$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)|$ sor konvergens.

A sorozatok konvergenciájára vonatkozó Cauchy kritériumot ha kombináljuk az egyenletes konvergencia fogalmával, akkor a következő tétel adódik.

Tétel

Legyen T egy tartomány. Adottak az $f_n : T \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ komplex függvények. A $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens a T tartomány kompakt részhalmazain, ha bármely $K \subset T$ kompakt részhalmazhoz és bármely $\varepsilon > 0$ számhoz találunk egy olyan $n(\varepsilon, K)$ természetes számot, hogy ha $n \geq n(\varepsilon, K)$, akkor

$$|f_n(z) + f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon,$$

bármely $z \in K$ és bármely $p \in \mathbb{N}$.

Az előző tételből egyszerűen következik a következő állítás.

Hatványsorok III

Tétel (Weierstrass)

Ha az $f_n : T \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ függvényekhez léteznek olyan u_n pozitív számok, hogy $|f_n(z)| \leq u_n$, bármely $n \in \mathbb{N}$ és bármely $z \in T$ esetén és a $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ számsor konvergens, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ függvénysor egyenletesen konvergens a T tartományon.

Tétel

Legyen T egy tartomány. Ha az $f_n : T \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ holomorf függvényekből álló $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens a T tartomány minden kompakt részhalmazán, akkor az $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ összegfüggvény is holomorf lesz a T tartományon és a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}$ függvénysor szintén egyenletesen konvergens lesz a T minden kompakt részhalmazán az $S^{(k)}$ függvényhez.

Egy speciális eset I

A hatványsorok a függvénysoroknak egyik legfontosabb sajátos esete, itt az $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényeket az $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$ képlettel értelmezzük minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra.

A hatványsort a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ szimbólummal jelöljük. Azt mondjuk, hogy a

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ hatványor a z_0 pont körül van értelmezve, ennek a jelentésére a konvergencia kör fog rávilágítani.

Tétel (A konvergenciasugár tétele, (Cauchy-Hadamard))

Adott az $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ hatványsor. Legyen $\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Igazak a következő állítások:

- 1 Az $U(z_0, R)$ körlap minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergens a hatványsor.
- 2 A $\mathbb{C} \setminus \overline{U(z_0, R)}$ halmaz minden pontjában divergens a hatványsor.
- 3 Az $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ holomorf az $U(z_0, R)$ körlapon. Az R számot a hatványsor konvergencia sugarának nevezzük.
- 4 $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$ és a derivált sor konvergencia sugara szintén R .

Egy speciális eset III

Tétel

Ha az f függvény holomorf az $U(z_0, r)$ nyílt körlapon, akkor létezik egy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ hatványsor, amelynek az R konvergenciasugara teljesíti a

következő egyenlőséget: $R \geq r$ és az $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ egyenlőség minden $z \in U(z_0, r)$ pontban fennáll.

A hatványsor együtthatói az

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U(z_0, \rho)} \frac{f(t)}{(t - z_0)^{n+1}} dt, \quad n \in \mathbb{N},$$

$0 < \rho < r$ képletekkel számíthatók ki.

Legyen $R > r \geq 0$ és $U(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : R > |z - z_0| > r\}$. Az $U(z_0, r, R)$ halmazt z_0 középpontú r belső és R külső sugarú körgyűrűnek nevezzük. Azt a sajátos esetet is elfogadjuk, amikor az $U(z_0, r, R)$ körgyűrű belső sugara zéró, ebben az esetben $U(z_0, r, R) = U(z_0, R) \setminus \{z_0\}$. Az $U(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ halmazt középpontjában kipontozott körnek is nevezik, jele $\dot{U}(z_0, R)$. Ebben a szakaszban olyan függvényeket vizsgálunk, amelyek az $U(z_0, r, R)$ körgyűrűn holomorfak. Az ilyen függvények két irányba végtelen hatványsorok összegfüggvényeként állíthatók elő.

Értelmezés

A

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \dots + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots$$

alakú hatványsort a z_0 pont körüli Laurent-sornak nevezzük.

A Laurent-sor negatív kitevős tagjaiból alkotott összeget $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ a

Laurent-sor főrészének nevezzük, a sor többi tagjaiból alkotott összeg

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ a Laurent-sor Taylor része.

Laurent sorok III

Tétel

Adott a $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ Laurent-sor. Legyen $r = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$ és $\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Ha $r < R$, akkor

- 1 Az $U(z_0, r, R)$ körgyűrűn a Laurent-sor egyenletesen konvergens kompakt halmazokon.
- 2 A Laurent-sor divergens a $\mathbb{C} \setminus \overline{U(z_0, r, R)}$ halmazon.
- 3 Az összegfüggvény $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ holomorf az $U(z_0, r, R)$ körgyűrűn és $f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n(z - z_0)^n$.

Láttuk, hogy általában egy $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ Laurent-sorhoz található olyan $U(z_0, r, R)$ körgyűrű (ha $r < R$), amelyben a Laurent-sor egyenletesen konvergens kompakt halmazokon és az összegfüggvény egy holomorf függvény lesz az

Laurent sorok IV

$U(z_0, r, R)$ körgyűrű. A következő tétel azt mondja ki, hogy a fordított állítás is igaz.

Tétel

(Laurent tétele)

Legyen $0 \leq r < R$. Ha az $f : U(z_0, r, R) \rightarrow \mathbb{C}$ függvény holomorf, akkor

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

bármely $z \in U(z_0, r, R)$, ahol

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U(z_0, \rho)} \frac{f(t)}{(t - z_0)^{n+1}} dt, \quad r < \rho < R$$

minden $n \in \mathbb{Z}$. A sor egyenletesen konvergens lesz minden kompakt részhalmazon az $U(z_0, r, R)$ körgyűrűnek.

Példák

$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$ függvény Laurent-sora segítségével igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2\cos x} \cos(nx) dx = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(n+j)!j!}.$$

Laurent tétele szerint az f függvény sorbafejthető a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tartományon.

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{z+\frac{1}{z}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \\ a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U(0,1)} \frac{e^{t+\frac{1}{t}}}{t^{n+1}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(e^{ix}+e^{-ix})} e^{-inx} dx + \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2\cos x} (\cos nx - i \sin nx) dx. \end{aligned} \tag{5}$$

Példa II

Az $\int_0^{2\pi} e^{2\cos x} \sin(nx) dx$ integrálba $y = 2\pi - x$ változcseré után azt kapjuk, hogy

$$\int_0^{2\pi} e^{2\cos x} \sin(nx) dx = - \int_0^{2\pi} e^{2\cos y} \sin(ny) dy,$$

tehát $\int_0^{2\pi} e^{2\cos x} \sin(nx) dx = 0$ és

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2\cos x} \cos(nx) dx.$$

Az a_n együtthatókat úgy is megkaphatjuk, hogy az

$$f(z) = e^{z+\frac{1}{z}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!} \right)$$

Példa III

kifejtésben z^n együtthatóját meghatározzuk, innen az egyértelműség alapján:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2\cos x} \cos(nx) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!k!}.$$

Értelmezés

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egy nyílt halmaz és $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ egy holomorf függvény. A $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ pontot izolált szinguláris pontnak nevezzük, ha létezik egy olyan $r > 0$ valós szám, hogy $U(z_0, r) \setminus \{z_0\} \subset D$.

Nyilvánvaló, hogy ha z_0 izolált szinguláris pont, akkor z_0 a D értelmezési tartomány határpontja és $D \cup \{z_0\}$ szintén nyílt halmaz.

Értelmezés

Ha $D \subset \mathbb{C}$ egy nyílt halmaz, az $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény és z_0 egy izolált szinguláris pont, akkor z_0 -t megszüntethető szinguláris pontnak nevezzük, ha létezik egy olyan $\tilde{f} : D \cup \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, amelynek leszűkítése D -re éppen f -el egyenlő.

Szinguláris pontok II

Tétel

A z_0 pont az $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvénynek akkor és csak akkor megszüntethető szinguláris pontja, ha létezik és véges a $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ határérték.

Szinguláris pontok III

Példák

- ① Az $f : \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ holomorf függvénynek a $z_0 = 0$ pont megszüntethető szinguláris pontja, mert

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

- ② Az $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$ holomorf függvénynek a $z_0 = 0$ pont nem megszüntethető szinguláris pontja, mert

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = \infty.$$

- ③ Az $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ holomorf függvénynek $z_0 = 0$ nem megszüntethető szinguláris pontja, ugyanis a $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ határérték nem létezik.

Értelmezés

Ha z_0 az $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvénynek egy olyan nem megszüntethető szinguláris pontja, amelyre igaz, hogy $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, akkor z_0 -t pólusnak nevezzük. Ha a z_0 nem megszüntethető szinguláris pontban az f függvénynek nincs határértéke, akkor z_0 -t lényeges szinguláris pontnak nevezzük.

A pólusok a következő tétellel jellemezhetők.

Tétel

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egy nyílt halmaz. Ha z_0 az $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvénynek egy nem megszüntethető szinguláris pontja, akkor a következő állítások ekvivalensek:

- ❶ z_0 pólusa f -nek
- ❷ z_0 zérushelye a $h(z) = \frac{1}{f(z)}$ függvénynek
- ❸ Létezik egy $n \in \mathbb{N}^*$ természetes szám úgy, hogy

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{a_{n+1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

bármely $z \in D$.

- ❹ Létezik egy $n \in \mathbb{N}^*$ és egy $g : D \cup \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény úgy, hogy $g(z_0) \neq 0$ és $f(z) = (z - z_0)^n \cdot g(z)$ bármely $z \in D$.

A reziduum-tétel I

Értelmezés

Adott az $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény és legyen z_0 egy nem megszüntethető izolált szinguláris pontja f -nek.

A feltétel szerint létezik egy $r > 0$ szám úgy, hogy az f függvény az $\dot{U}(z_0, r)$ kipontozott körlapon Laurent-sorba fejthető. Legyen ez a Laurent-sor

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Az a_{-1} együtthatót az f függvény z_0 szinguláris pontban számolt reziduumának nevezzük és $\text{Rez}(f, z_0)$ -val jelöljük.

A reziduum-tétel II

Tétel (Cauchy reziduum-tétele)

Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ egy holomorf függvény és $B = \{b_1, b_2, \dots, b_p\}$ az f függvény izolált szinguláris pontjainak egy halmaza. Ha γ egy zárt görbe D -ben úgy, hogy benne van $\tilde{D} = D \cup B$ -nek egy egyszeresen összefüggő részhalmazában, akkor az $\sum_{z \in \tilde{D}} n(\gamma, z) \operatorname{Rez}(f, z)$ összeg véges sok zérótól különböző taggal rendelkezik és

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z \in \tilde{D}} n(\gamma, z) \operatorname{Rez}(f, z)$$

Tétel

Ha az $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvénynek z_0 k -ad rendű pólusa, akkor

$$\operatorname{Rez}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)^k f(z))^{(k-1)}.$$

A reziduum-tétel III

Számítsuk ki a következő integrált:

$$I = \int_{\partial U(0,3)} \frac{z+2}{z(z^2+4)^2} dz.$$

A reziduum-tétel alapján

$$I = 2\pi i [\operatorname{Rez}(f, 0) + \operatorname{Rez}(f, 2i) + \operatorname{Rez}(f, -2i)].$$

A reziduum-tétel segítségével a komplex integrálok mellett valós integrálokat is kiszámíthatunk.

Nincs egy általános módszer, amivel minden valós integrál kiszámítható lenne, ezért néhány típus kiszámítására adunk eljárást.

Tétel

Legyen $(u, v) \mapsto R(u, v)$ egy racionális valós törtfüggvény, amelynek nevezője nem zéró, ha $u^2 + v^2 = 1$ és $W = 2\pi \sum_{|z|<1} \operatorname{Rez}(g, z)$, ahol

$$g(z) = R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) z^{m-1}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Fennállnak a következő egyenlőségek:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) \cos(mx) dx = \operatorname{Re} W$$
$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) \sin(mx) dx = \operatorname{Im} W.$$

Példa

Számítsuk ki az

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{(1 + \cos x)^n \cos nx}{a + b \cos x} dx$$

integrált, ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a > |b|$.

Az I -vel együtt az

$$I' = \int_0^{2\pi} \frac{(1 + \cos x)^n \sin nx}{a + b \cos x} dx$$

integrált is ki fogjuk számítani.

$$\begin{aligned} I + iI' &= \int_0^{2\pi} \frac{(1 + \cos x)^n e^{inx}}{a + b \cos x} dx = \\ &= \frac{1}{2^{n-1}i} \int_{\partial U(0,1)} \frac{(z+1)^{2n}}{bz^2 + 2az + b} dz \end{aligned}$$

Alkalmazások IV

Az integrál alatti függvénynek két pólusa van

$$z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \quad z_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

és a z_1 pólus van az $U(0, 1)$ körlapban.

$$\operatorname{Rez}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{(z+1)^{2n}}{b(z-z_2)} = \frac{(z_1+1)^{2n}}{b(z_1-z_2)} \quad \text{és}$$

$$\begin{aligned} I + iI' &= \frac{1}{2^{n-1}i} 2\pi i \operatorname{Rez}(f, z_1) = \frac{\pi}{2^{n-2}} \frac{(z_1+1)^{2n}}{b(z_1-z_2)} = \\ &= \frac{\pi}{2^{n-1}\sqrt{a^2-b^2}} \left(\frac{b-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b} \right)^{2n}. \end{aligned}$$

Tehát

$$I = \frac{\pi}{2^{n-1}\sqrt{a^2-b^2}} \left(\frac{b-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b} \right)^{2n} \quad \text{és} \quad I' = 0.$$

Értelmezés

Az $\int_0^{\infty} f(x)dx$ integrál konvergens, ha létezik és véges a $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r f(x)dx$ határérték. Analóg módon értelmezzük az $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ konvergenciáját, vagyis az adott integrál akkor lesz konvergens, ha létezik és véges a $\lim_{r \rightarrow -\infty} \int_0^r f(x)dx$ határérték.

Az $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ integrált akkor nevezzük konvergensnek ha egyszerre mindkét $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r f(x)dx$ és $\lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^0 f(x)dx$ határérték létezik és véges.

Tétel

Legyen $\theta_1 < \theta_2$ és $S_{z_0}(\theta_1, \theta_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid \theta_1 < \arg(z - z_0) < \theta_2\}$. Ha $f : \overline{S_0(\theta_1, \theta_2)} \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos és $\gamma_r : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_r(t) = re^{it}$, akkor

- ① $\lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) = 0$ egyenlőségből következik, hogy $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0$;
- ② A $\lim_{z \rightarrow 0} zf(z) = 0$ egyenlőségből következik, hogy $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0$;
- ③ Ha $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \frac{\pi}{p}$ és $\lim_{z \rightarrow \infty} z^{1-p} f(z) = 0$, akkor

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) e^{iz^p} dz = 0$$

- ④ Ha f holomorf az $\overline{S_0(\theta_1, \theta_2)} \setminus \{0\}$ halmazon és $z = 0$ egyszeres pólus, akkor

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = (\theta_2 - \theta_1) \operatorname{Res}(f, 0).$$

Tétel

Legyen $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ egy olyan racionális törtfüggvény, amely nevezőjének nincsenek valós gyökei. Ha $\text{gr}(P) \leq \text{gr}(Q) - 2$, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z > 0} \text{Rez}(R, z).$$

Példa

Számítsuk ki az $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$ integrált.

A fentiek szerint

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = 2\pi i (\text{Rez}(f, z_1) + \text{Rez}(f, z_2)),$$

Alkalmazások VIII

ahol $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$, $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Mivel $\operatorname{Rez}(f, z_1) = \frac{1}{4z_1^3}$, $\operatorname{Rez}(f, z_2) = \frac{1}{4z_2^3}$, következik, hogy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = 2\pi i \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}{-4} \right) + \left(-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}{-4} \right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Tétel

Ha $R(z)$ egy olyan racionális törtfüggvény, amelynek nincs pólusa a valós tengelyen és $\lim_{|z| \rightarrow \infty} R(z) = 0$, akkor az $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix} dx$ integrál konvergens és

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{Rez}(R(z)e^{iz}, z).$$

Példa

Számítsuk ki az $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$ integrált.

Az 0.71 tétel szerint

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{Res}(g, z) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{e^{iz}}{1+z^2} = \frac{\pi}{e}.$$

Egyenlővé tesszük a valós részt valós résszel, a komplex részt a kompakt résszel és az $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}$, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx = 0$ egyenlőséghez jutunk.

A második egyenlőséget más módszerrel egyszerűbb igazolni, az első bizonyítása viszont komplikáltabb.

Példa

Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Igazoljuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \cos x^n dx &= \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{2n} \\ \int_0^\infty \sin x^n dx &= \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{2n}.\end{aligned}$$

ahol $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt$.

Az $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = e^{iz^n}$ egész függvényt integráljuk

$C(n, r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{\pi}{2n}, |z| < r\}$ körcikk határán. Cauchy tételéből következik, hogy $\int_{\partial C(n, r)} f(z) dz = 0$.

Ha $\gamma_r: [0, \frac{\pi}{2n}] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_r = re^{it}$, akkor az előző egyenlőség a következő alakba írható

$$\int_0^r e^{ix^n} dx + \int_{\gamma_r} e^{iz^n} dz - \int_0^r e^{ix^n e^{i \frac{\pi}{2}}} \cdot e^{i \frac{\pi}{2n}} dx = 0.$$

Alkalmazások XI

Az 0.68 tétel 3. pontjából következik, hogy $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} e^{iz^n} dz = 0$ és ha $r \rightarrow \infty$ határértéket számítunk az előző egyenlőségben, következik, hogy

$$\int_0^\infty e^{ix^n} dx = e^{i\frac{\pi}{2n}} \int_0^\infty e^{-x^n} dx = \frac{1}{n} e^{i\frac{\pi}{2n}} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right).$$

Tétel

Ha R egy olyan racionális törtfüggvény, amelynek nincs pozitív valós pólusa és $\lim_{z \rightarrow \infty} zR(z) = 0$, akkor az $\int_0^\infty R(x)dx$ integrál konvergens és
 $\int_0^\infty R(x)dx = -\sum_{z \in \mathbb{C}^*} \operatorname{Res}_z(g, z)$, *ahol a g függvényt a $g(z) = R(z) \log z$ egyenlőséggel értelmezzük.*

Tétel

Ha R egy racionális törtfüggvény, amelynek nincs pólusa a $[0, +\infty)$ intervallumban, $\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = 0$ és $\alpha \in (0, 1)$, akkor az $\int_0^\infty \frac{R(x)}{x^\alpha} dx$ integrál konvergens és

$$\int_0^\infty \frac{R(x)}{x^\alpha} dx = \frac{\pi e^{\alpha\pi i}}{\sin \alpha\pi} \sum_{z \in \mathbb{C}^*} \operatorname{Rez}(g, z),$$

ahol $g(z) = \frac{R(z)}{z^\alpha}$.