DIFFERENCIÁLEGYENLETEK VIZSGA

2019. január 17.
Informatika szak

Munkaidő: **2 óra**. Hivatalból **10 pont** szerezhető. Nem minden feladat kötelező.

1. **(10 pont)** Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$y' = 4x^3(4+y^2).$$

2. **(10 pont)** Számítsuk ki

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2-2p+5}\right].$$

3. **(10 pont)** Oldjuk meg

$$2y' = \frac{2x-e^{-2x}}{y+e^{2y}}.$$

4. **(10 pont)** Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$y' = \sqrt{3y-5x}.$$

5. **(10 pont)** Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$y' = \ln x - \ln y + \frac{x+y}{x-y}.$$

6. **(10 pont)** Határozzuk meg a következő egyenlet megoldásait:

$$y'\sin x - y\cos x = e^x \sin^4 x.$$

7. **(10 pont)** Keressük meg a következő egyenlet megoldását:

$$y' = y^4\cos x + y\mathrm{tg}x.$$

8. **(10 pont)** Ismerve a partikuláris megoldás alakját, oldjuk meg:

$$y' = -y^2\sin x + 2\frac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad y_1 = \frac{a}{\cos x}.$$

9. **(10 pont)** Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$\left(y^2e^{xy^2}+4x^2\right)dx + \left(2xye^{xy^2}-3y^2\right)dy = 0.$$

10. **(10 pont)** A Laplace transzformáció segítségével oldjuk meg

$$y''+3y' = e^x,\ y(0)=0,\ y'(0)=-1.$$

11. **(10 pont)** Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$\begin{cases}(1+x^2)\ln(1+x^2)\,y' - 2xy = \ln(1+x^2) - 2x\cdot\mathrm{arctg}x,\\ \lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = -\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

12. **(10 pont)** A változók megcserélésével oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\left(y^2-x\right)\cdot y' - y = 0.$$

13. **(10 pont)** Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$y'' = \frac{4\sin x}{\cos^3 x} - \frac{8\sin 2x}{\cos^3 2x}.$$

14. (20 pont) A λ paraméter milyen értékére van az alábbi egyenletnek nem-triviális megoldása:

$$\begin{cases} y'' - \lambda y = 0, & x \in [0,1] \\ y(0) = 0,\ y'(1) = \frac{1}{\lambda} \end{cases} ?$$

15. (10 pont) Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0.$$

16. (10 pont) Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$y^{(4)} - 2y''' + y'' = x + e^x.$$

17. (10 pont) Keressük meg a következő egyenlet megoldását:

$$y'' - y' = \frac{1}{e^x + 1}.$$

18. (10 pont) Egy motorcsónak sebessége állóvízben $v_0 = 20km/h$. Teljes sebességgel halad, majd a motor leáll, és ezután $40s$ alatt a csónak sebessége $v_1 = 8km/h$-ra csökken. A víz ellenállása arányos a csónak sebességével. Mekkora a csónak sebessége 2 perccel a motor kikapcsolása után?

19. (10 pont) Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2x\frac{\partial u}{\partial y} = x.$$

20. (10 pont) Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\begin{cases} \left(x + y^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{x}{y} - y\right)u = 1 \\ u(x,1) = 0, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

21. (20 pont) Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\begin{cases} x^2\frac{\partial u}{\partial x} + y^2\frac{\partial u}{\partial y} = u^2 \\ u(x,2x) = x^2. \end{cases}$$

22. (30 pont) Határozzuk meg az alábbi funkcionál $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ extremális görbéit:

(a) $\begin{cases} I(y) = \displaystyle\int_1^2 \frac{y'^2}{x^3}dx \\ y(1) = 2, y(2) = 17 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} I(y) = \displaystyle\int_0^\pi y'^2 + 2y\sin x dx \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases}$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y^2 - y'^2 - 2y\sin x\right)dx,\ y(0) = 1,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$