

A VÉGESELEM-MÓDSZER A SZERKEZETEK SZÁMÍTÁSÁBAN

Kakucs András

Ez a könyv a mérnöki gyakorlatban elterjedten használt végelem-módszer alapjait mutatja be. E módszer angol nyelvű szakirodalma igen gazdag és szerteágazó, a könyvben bemutatottak pedig ennek a szakirodalomnak a tanulmányozásában szeretnének segítséget nyújtani az alapok anyanyelven történő megismertetésével. Szűkebb terjedelemben nem lehet minden sajátosságra és alkalmazási területre kitérni, a könyv elsősorban a szerkezetek számításánál felmerülő általános feladatokra összpontosít.

Külön köszönet illeti a könyv véglegesítéséhez nyújtott segítségért dr. Uj Józsefet, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem professzorát, és dr. Száva Jánost, a Brassói Transzilvania Egyetem professzorát.

Cartea de față prezintă bazele metodei elementelor finite, metodă des folosită în calculele ingineresti. Bibliografia în limba engleză este foarte bogată și acoperă multe domenii ingineresti, iar tematica prezentată în carte a fost tratată cu intenția de a servi ca punct de plecare în studiul acestei bibliografii. O prezentare scurtă nu poate cuprinde toate aspectele și particularitățile metodei. De aceea, cartea se concentrează în primul rând asupra problemelor de bază din domeniul analizei structurilor.

Autorul mulțumește profesorilor dr. Uj József de la Universitatea Tehnică din Budapesta și dr. Száva János de la Universitatea Transilvania din Brașov pentru sprijinul acordat în finalizarea cărții.

This book introduces the basic concepts of the finite element method. The international literature of this method is vast and it covers many fields of the engineering science. The presented topics are treated with the intention to serve as the starting point in studying the English-written literature. A short introduction cannot cover all aspects and applications of the method, so only the main aspects of the structural analysis are treated.

The first chapter introduces the displacement-method as the direct formulation of the finite element method. In the next two chapters are presented the basics of the variational and of the residual formulations. In the 4th and 5th chapters there are presented the main finite element types. The 6th chapter deals with the numerical methods of the linear analysis and the 7th one with those used in computing nonlinear structures. In the 8th chapter there are introduced the main aspects of the finite element analysis applied in the field of structural dynamics, than in the 9th one in some other fields related to structural mechanics. Finally, the last chapter introduces some aspects and methods of the meshing.

Special thanks for József Uj, professor of the Budapest University of Technology and Economics, and for János Száva, professor of the Transylvania University of Brașov, for their help given in the finalization of this book.

Tartalom

1. A KÖZVETLEN MEGFOGALMAZÁS	9
1.1. A MEREVSÉGI MÁTRIX MÓDSZERE	9
1.1.1. Bevezető.....	9
1.1.2. Vonatkozási rendszerek.....	10
1.1.3. Szabadságfokok.....	10
1.1.4. Az elemi merevségi mátrix.....	13
1.1.5. A vonatkoztatási rendszerek közötti kapcsolatot adó transzformáció.....	18
1.1.6. A szerkezet merevségi mátrixa.....	19
1.1.7. A szerkezet egyensúlyát kifejező egyenletrendszer.....	23
1.1.8. Első- és másodrendű ismeretlenek.....	26
1.2. AZ ELMOZDULÁS-MÓDSZER, MINT A VÉGESELEM-MÓDSZER ALAPJA.....	30
2. A VARIÁCIÓS ELJÁRÁS	32
2.1. A MEGOLDANDÓ FELADAT	32
2.1.1. A geometriai aspektus.....	32
2.1.2. A statikai aspektus.....	32
2.1.3. A fizikai aspektus.....	33
2.1.4. A rugalmasságtani feladatot leíró differenciálegyenlet.....	38
2.2. A FELADAT MEGOLDÁSÁNAK LEHETŐSÉGEI	39
2.3. A TANULMÁNYOZOTT TARTOMÁNY DISZKRETIZÁLÁSA.....	42
2.4. A VARIÁCIÓS MÓDSZER ALKALMAZÁSA	44
2.5. A HELYI ÉS AZ ÁLTALÁNOS KOORDINÁTARENDSZER KÖZÖTTI KAPCSOLAT	48
3. A REZIDUÁLIS MÓDSZER	52
3.1. A VARIÁCIÓS ELJÁRÁS KORLÁTAI.....	52
3.2. A SÚLYOZOTT REZIDUUMOK MÓDSZERE.....	52
3.2.1. A kollokációs eljárás.....	53
3.2.2. Szubdomének alkalmazása.....	53
3.2.3. Legkisebb négyzetek módszere.....	54
3.2.4. A Galerkin-módszer.....	54
3.3. A SÚLYOZOTT REZIDUUMOK MÓDSZERÉNEK VÉGESELEMES FORMÁJA	55
3.4. A SÚLYOZOTT REZIDUUMOK MÓDSZERÉNEK RUGALMASSÁGTANI ALKALMAZÁSA.....	60
4. EGYSZERŰ VÉGESELEMEK	61
4.1. BEVEZETŐ	61
4.2. VONATKOZTATÁSI RENDSZEREK, VÉGESELEM TÍPUSOK	61
4.2.1. Hiperkubusok.....	64
4.2.2. Szimplexek.....	65
4.3. INTERPOLÁCIÓS FÜGGVÉNYEK, FOLYTONOSSÁGI OSZTÁLYOK.....	68
4.4. VONALELEMEK.....	70
4.4.1. Helyi koordináták.....	70
4.4.2. Interpolációs polinomok.....	72
4.4.3. A C_0 illesztés.....	73
4.4.4. A C_1 illesztés.....	77
4.4.5. Magasabb osztályú illesztések.....	79
4.5. FELÜLETELEMEK	80
4.5.1. Helyi koordináták.....	80
4.5.2. Interpolációs polinomok.....	82
4.5.3. A C_0 -folytonos felületelemek.....	83
4.5.4. A C_1 -folytonos felületelemek.....	94
4.6. TÉRFOGATELEMEK	97
4.6.1. Helyi koordináták.....	97
4.6.2. Interpolációs polinomok.....	99
4.6.3. A C_0 -folytonos térfogatelemek.....	100
4.6.4. A C_1 -folytonos térfogatelemek.....	105

4.7. GYAKORLATI SZEMPONTOK.....	106
4.7.1. Vektoriális függvények közelítése.....	106
4.7.2. Parametrikus elemek.....	107
4.7.3. A háló minőségére vonatkozó előírások.....	108
5. A SZERKEZETEK SZÁMÍTÁSÁBAN HASZNÁLT GYAKORIBB VÉGESELEM-TÍPUSOK.....	112
5.1. VONALELEMEK.....	112
5.2. FELÜLETELEMEK.....	112
5.2.1. Tárcsák.....	112
5.2.2. A lemezekre vonatkozó elméletek.....	112
5.2.3. Lemezelemek.....	117
5.2.4. A lemezek peremfeltételei.....	120
5.2.5. Sík héjak.....	122
5.2.6. Görbült felületek.....	124
5.3. TÉRFOGATELEMEK.....	130
6. A LINEÁRIS VÉGESELEM-ANALÍZIS NUMERIKUS MÓDSZEREI.....	132
6.1. AZ ELEMI MÁTRIXOK ÉS VEKTOROK KISZÁMÍTÁSA.....	132
6.1.1. A numerikus integrálás.....	132
6.1.2. Alkalmazás.....	139
6.1.3. Gyakorlati jellegű megjegyzések.....	143
6.2. A GLOBÁLIS MÁTRIXOK ÖSSZEÁLLÍTÁSA ÉS TÁROLÁSA.....	144
6.3. AZ EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA.....	147
6.3.1. Az LU és az LLT dekompozíció.....	147
6.3.2. Iteratív eljárások.....	149
6.3.3. A nagyméretű egyenletrendszerek megoldása.....	152
6.3.3.1. A paralell számítások elvégzésére alkalmas változat.....	152
6.3.3.2. A szekvenciális számítások elvégzésére alkalmas változat.....	155
6.3.3.3. Az egyenletrendszer feldarabolásának lehetőségei.....	157
6.3.3.4. Frontális megoldási módszerek.....	158
7. NEMLINEÁRIS SZERKEZETEK.....	162
7.1. AZ ANYAGI NEMLINEARITÁS.....	162
7.1.1. A rugalmas test.....	162
7.1.1.1. A közvetlen eljárás.....	164
7.1.1.2. Az Euler-módszer.....	165
7.1.1.3. A módosított Newton-Raphson eljárás.....	167
7.1.2. Az elasztoplasztikus test.....	169
7.1.2.1. A Ramberg-Osgood modell.....	170
7.1.2.2. Linearizált modellek.....	172
7.1.2.3. Redukált feszültségek, tönkremeneteli kritériumok.....	173
7.1.2.4. A képlékenység elméletének alapjai.....	176
7.1.2.5. A képlékenység-elmélet végeeselemes alkalmazása.....	178
7.1.3. Időben lejátszóó alakváltozás.....	179
7.1.3.1. A lassú folyás végeeselemes modellezése.....	186
7.1.3.2. A viszkoelasztikus test végeeselemes modellezése.....	189
7.1.3.3. A viszkoplasztikus eset.....	190
7.2. A GEOMETRIAI NEMLINEARITÁS.....	191
7.2.1. Nagy elmozdulások.....	191
7.2.2. Nagy deformációk.....	193
7.3. A TERHELÉS NEMLINEARITÁSA.....	194
8. LENGÉSTANI SZÁMÍTÁSOK.....	196
8.1. KÉNYSZERREZGÉSEK.....	196
8.1.1. Végeeselemes modellezés.....	197
8.1.3. Egyszerűsítő feltételezések.....	198
8.1.4. A mozgásegyenlet megoldása.....	200
8.1.4.1. A véges differenciák módszere (közvetlen explicit integrálás).....	200
8.1.4.2. A Runge-Kutta módszer.....	202
8.1.4.3. Közvetlen implicit integrálás.....	203
8.1.4.4. A közvetlen explicit integrálás több szabadságfok esetén.....	207

8.1.4.5. <i>A közvetlen implicit integrálás több szabadságfok esetén</i>	208
8.1.5. <i>Nemlineáris rendszerek dinamikája</i>	209
8.1.6. <i>A dinamikai rendszer merevtest-elmozdulása</i>	210
8.2. SAJÁTLENGÉSEK	212
8.2.1. <i>A sajátérték-feladat</i>	212
8.2.2. <i>A sajátérték-feladat megoldása</i>	215
8.2.2.1. <i>A Sturm-szekvencia alkalmazása</i>	215
8.2.2.2. <i>A Householder-módszer</i>	219
8.2.2.3. <i>A sajátértékek eltolása</i>	224
8.2.3. <i>A sajátmódusok felhasználása</i>	224
8.2.3.1. <i>Modál-analízis</i>	224
8.2.3.2. <i>Spektrál-analízis</i>	228
8.2.4. <i>Csillapított sajátértékek</i>	230
8.3. KÜLÖNLEGES VÉGESELEMEK	232
9. EGYÉB ALKALMAZÁSOK	234
9.1. <i>A HŐTÁGULÁS VÉGESELEMES ANALÍZISE</i>	234
9.2. <i>A HŐVEZETÉS MODELLEZÉSE</i>	235
9.2.1. <i>A stacionárius eset</i>	237
9.2.2. <i>A nemstacionárius eset</i>	239
9.3. <i>A NEDVESSÉG HATÁSA</i>	241
9.4. <i>A SZIVÁRGÁS VÉGESELEMES MODELLEZÉSE</i>	243
10. A HÁLÓZÁSRÓL	245
10.1. <i>STRUKTURÁLT ÉS NEM STRUKTURÁLT HÁLÓK</i>	245
10.2. <i>NEM STRUKTURÁLT EGYENLETES HÁROMSZÖGHÁLÓK ELŐÁLLÍTÁSA</i>	246
10.2. <i>NEM STRUKTURÁLT EGYENLETES NÉGYSZÖGHÁLÓK ELŐÁLLÍTÁSA</i>	251
10.3. <i>A HÁLÓ SIMÍTÁSA</i>	253
10.4. <i>A HÁLÓ SÚRÍTÉSE</i>	255
10.5. <i>EGYÉB ALGORITMUSOK</i>	257
10.6. <i>HÁROMDIMENZIÓS HÁLÓZÁS</i>	260
KÖNYVÉSZET	263

Conținut

1. FORMULAREA DIRECTĂ.....	9
1.1. METODA MATRICEI DE RIGIDITATE	9
1.1.1. <i>Introducere</i>	9
1.1.2. <i>Sisteme de referință</i>	10
1.1.3. <i>Grade de libertate</i>	10
1.1.4. <i>Matricea de rigiditate a elementului</i>	13
1.1.5. <i>Relații de transformare între sistemele de referință</i>	18
1.1.6. <i>Matricea de rigiditate a structurii</i>	19
1.1.7. <i>Sistemul de ecuații al echilibrului structural</i>	23
1.1.8. <i>Necunoscute primare și secundare</i>	26
1.2. METODA DEPLASĂRILOR, CA BAZA METODEI ELEMENTELOR FINITE	30
2. FORMULAREA VARIAȚIONALĂ.....	32
2.1. PROBLEMA STUDIATĂ	32
2.1.1. <i>Aspectul geometric</i>	32
2.1.2. <i>Aspectul static</i>	32
2.1.3. <i>Aspectul fizic</i>	33
2.1.4. <i>Ecuția diferențială a problemelor de elasticitate</i>	38
2.2. POSIBILITĂȚILE DE REZOLVARE	39
2.3. DISCRETIZAREA DOMENIULUI STUDIAT	42
2.4. APLICAREA PRINCIPIULUI VARIAȚIONAL.....	44
2.5. RELAȚII DE TRANSFORMARE ÎNTRE SISTEMUL LOCAL ȘI GLOBAL DE REFERINȚĂ.....	48
3. FORMULAREA REZIDUALĂ	52
3.1. LIMITELE METODEI VARIAȚIONALE.....	52
3.2. METODA REZIDUURILOR PONDERATE	52
3.2.1. <i>Metoda cologației</i>	53
3.2.2. <i>Metoda subdomeniilor</i>	53
3.2.3. <i>Metoda celor mai mici pătrate</i>	54
3.2.4. <i>Metoda Galerkin</i>	54
3.3. FORMA CU ELEMENTE FINITE A METODEI REZIDUURILOR PONDERATE	55
3.4. APLICAREA METODEI REZIDUURILOR PONDERATE ÎN REZOLVAREA PROBLEMELOR DE ELASTICITATE	60
4. ELEMENTE FINITE SIMPLE.....	61
4.1. INTRODUCERE.....	61
4.2. SISTEME DE REFERINȚE, TIPURI DE BAZĂ DE ELEMENTE FINITE.....	61
4.2.1. <i>Hipercuburi</i>	64
4.2.2. <i>Simplexe</i>	65
4.3. FUNCȚII DE INTERPOLARE, CLASE DE CONTINUITATE.....	68
4.4. ELEMENTE DE LINIE	70
4.4.1. <i>Coordonate locale</i>	70
4.4.2. <i>Polinoame de interpolare</i>	72
4.4.3. <i>Continuitatea C_0</i>	73
4.4.4. <i>Continuitatea C_1</i>	77
4.4.5. <i>Continuitate de clasă mai înaltă de 1</i>	79
4.5. ELEMENTE DE SUPRAFAȚĂ	80
4.5.1. <i>Coordonate locale</i>	80
4.5.2. <i>Polinoame de interpolare</i>	82
4.5.3. <i>Continuitate C_0</i>	83
4.5.4. <i>Continuitate C_1</i>	94
4.6. ELEMENTE DE VOLUM.....	97
4.6.1. <i>Coordonate locale</i>	97
4.6.2. <i>Polinoame de interpolare</i>	99
4.6.3. <i>Continuitatea C_0</i>	100
4.6.4. <i>Continuitatea C_1</i>	105

4.7. OBSERVAȚII PRACTICE.....	106
4.7.1. Aproximarea funcțiilor vectoriale.....	106
4.7.2. Elemente parametrice.....	107
4.7.3. Prescripții privind calitatea rețelei de discretizare.....	108
5. ELEMENTE FINITE CU APLICABILITATE LARGĂ ÎN DOMENIUL ANALIZEI STRUCTURILOR ...	112
5.1. ELEMENTE DE LINIE.....	112
5.2. ELEMENTE DE SUPRAFAȚĂ.....	112
5.2.1. Șaibe.....	112
5.2.2. Elemente ale teoriei plăcilor.....	112
5.2.3. Elemente finite de placă.....	117
5.2.4. Condiții de margine.....	120
5.2.5. Plăci plane subțiri.....	122
5.2.6. Suprafețe curbe.....	124
5.3. ELEMENTE DE VOLUM.....	130
6. METODELE NUMERICE ALE ANALIZEI LINIARE CU ELEMENTE FINITE	132
6.1. CALCULUL MATRICELOR ELEMENTARE ȘI AL VECTORILOR ELEMENTARI	132
6.1.1. Integrarea numerică.....	132
6.1.2. Aplicație.....	139
6.1.3. Observații de ordin practic.....	143
6.2. ASAMBLAREA ȘI STOCAREA MATRICELOR GLOBALE.....	144
6.3. REZOLVAREA SISTEMULUI DE ECUAȚII.....	147
6.3.1. Metodele de decompoziție LU și LLT.....	147
6.3.2. Metode iterative.....	149
6.3.3. Rezolvarea sistemelor de ecuații mari.....	152
6.3.3.1. Variantă pentru calculele paralele.....	152
6.3.3.2. Variantă pentru calculele secvențiale.....	155
6.3.3.3. Posibilitățile partiționării sistemului de ecuații.....	157
6.3.3.4. Metode de rezolvare frontale.....	158
7. STRUCTURI NELINIARE	162
7.1. NELINIARITATEA MATERIALĂ.....	162
7.1.1. Corpul elastic.....	162
7.1.1.1. Metoda directă.....	164
7.1.1.2. Metoda Euler.....	165
7.1.1.3. Metoda Newton-Raphson modificată.....	167
7.1.2. Corpul elastoplastic.....	169
7.1.2.1. Modelul Ramberg-Osgood.....	170
7.1.2.2. Modele liniarizate.....	172
7.1.2.3. Eforturi unitare reduse, criterii de rezistență.....	173
7.1.2.4. Bazele teoriei plasticității.....	176
7.1.2.5. Aplicarea teoriei plasticității în domeniul elementelor finite.....	178
7.1.3. Deformații ce se dezvoltă în timp.....	179
7.1.3.1. Modelarea curgerii lente cu elemente finite.....	186
7.1.3.2. Modelarea corpului viscoelastic cu elemente finite.....	189
7.1.3.3. Cazul viscoplastic.....	190
7.2. NELINIARITATEA GEOMETRICĂ.....	191
7.2.1. Deplasări mari.....	191
7.2.2. Deformații mari.....	193
7.3. NELINIARITATEA ÎNCĂRCĂRII.....	194
8. PROBLEME DINAMICE	196
8.1. VIBRAȚII FORȚATE.....	196
8.1.1. Modelarea cu elemente finite.....	197
8.1.3. Ipoteze simplificatoare.....	198
8.1.4. Rezolvarea ecuațiilor de mișcare.....	200
8.1.4.1. Metoda diferențelor finite (integrarea directă explicită).....	200
8.1.4.2. Metoda Runge-Kutta.....	202
8.1.4.3. Integrarea directă implicită.....	203
8.1.4.4. Integrarea directă explicită în cazul sistemelor cu mai multe grade de libertate dinamică.....	207

8.1.4.5. Integrarea directă implicită în cazul sistemelor cu mai multe grade de libertate dinamică.....	208
8.1.5. Dinamica sistemelor neliniare	209
8.1.6. Deplasarea de corp rigid a sistemului dinamic.....	210
8.2. OSCILAȚII LIBERE	212
8.2.1. Problema de valori proprii.....	212
8.2.2. Rezolvarea problemei de valori proprii	215
8.2.2.1. Aplicarea secvenței Sturm	215
8.2.2.2. Metoda Householder	219
8.2.2.3. Deplasarea valorilor proprii	224
8.2.3. Utilizarea modurilor proprii	224
8.2.3.1. Analiza modală	224
8.2.3.2. Analiza spectrală.....	228
8.2.4. Valori proprii amortizate	230
8.3. ELEMENTE FINITE SPECIALE.....	232
9. ALTE APLICAȚII	234
9.1. ANALIZA DILATAȚIEI TERMICE CU ELEMENTE FINITE.....	234
9.2. MODELAREA CONDUȚIEI CALORICE.....	235
9.2.1. Cazul staționar	237
9.2.2. Cazul nestaționar	239
9.3. INFLUENȚA UMIDITĂȚII.....	241
9.4. MODELAREA INFILTRAȚIEI CU ELEMENTE FINITE	243
10. DESPRE GENERAREA REȚELEI DE DISCRETIZARE.....	245
10.1. REȚELE STRUCTURATE ȘI NESTRUCTURATE	245
10.2. GENERAREA REȚELEI NESTRUCTURATE ȘI UNIFORME DE ELEMENTE TRIUNGHILARE.....	246
10.2. GENERAREA REȚELEI NESTRUCTURATE DE ELEMENTE PATRULATERE	251
10.3. CORECȚIA CALITĂȚII	253
10.4. MODIFICAREA DENSITĂȚII REȚELEI.....	255
10.5. ALȚI ALGORITMI.....	257
10.6. GENERAREA REȚELELOR TRIDIMENSIONARE.....	260
BIBLIOGRAFIE	263

1. A KÖZVETLEN MEGFOGALMAZÁS

1.1. A merevségi mátrix módszere

1.1.1. Bevezető

A különböző rendeltetésű szerkezeteket (gépeket, építményeket) alkotó szerkezeti elemek igen sokfélék, azonban geometriájukat osztályozási kritériumnak tekintvén néhány alapvető kategóriát különíthetünk el. Vannak olyan szerkezeti elemek, amelyeknek hosszuk sokkal nagyobb a keresztmetszetüknél, ilyenek például az egyenes rudak és a síkban vagy térben görbült ívek. Ezeket összefoglaló néven „rúdtartó”-nak nevezik. Aztán vannak olyan elemek, amelyeknek a vastagságuk jóval kisebb a többi irányban mérhető kiterjedésüknél, ilyenek például a sík vagy görbült membránok és lemezek. Ezeket „felülettartó” gyűjtőnévvel illetik. Végül vannak olyan szerkezeti elemek, amelyeknek bármely irányban is mérjük kiterjedésüket, a kapott méretek ugyanazon nagyságrenden belül vannak, ezeket „tömbtartó”-nak nevezik.

A szerkezetek tervezése és elemzése megköveteli e szerkezeti elemek viselkedésének matematikai-fizikai modellezését, leírását. Az egyszerűbb geometriájuk miatt a rúdtartók és a rudakból álló szerkezetek tanulmányozása bontakozott ki elsőként, a gyökerek legalább Leonardo da Vinci-ig nyúlnak vissza. Mindaz, amit ma az egyszerű rúdtartók tanulmányozásában alapvetőnek tartunk, az a XIX. század végén már ismert volt. A rudakból álló szerkezetek – a rúdszerkezetek – számítása a rúdtartókra megállapított összefüggésekre alapoz. E szerkezetekben az elemek egymáshoz kapcsolódnak, tehát a terhelést együttesen veszik át és az alakváltozásokkor az összekapcsolt pontjaik együtt mozdulnak el. A szerkezeti elemeket rendszerint nem tudjuk valami egyszerű eljárással egymástól elkülöníteni, éppen ezért a szerkezet tanulmányozásakor az alkotó elemeket összességükben kell tekintsük. A szerkezetté összekapcsolt elemek együttes viselkedését egy egyenletrendszer írja le, amelyet a XIX. században ugyan fel tudtak írni, de a nagyszámú egyenletből álló rendszereket a rendelkezésükre álló eszközökkel nem tudták megoldani. Ezt az akadályt különböző közelítő (például grafikus) módszerek kidolgozásával próbálták meg elhárítani.

A szerkezet modellezésében a legáltalánosabbaknak és a legáttekinthetőbbeknek a mátrixos módszerek bizonyultak. Az egyik ilyen módszer a merevségi mátrix módszere, amelyről első ízben 1930-as években jelent meg közlemény W. J. Duncan és A. R. Collar munkájaként (két amerikai mérnökről van szó, akik a repülőgép-szárnyak számításához dolgozták ki e módszert). Ezt az eljárást más néven „elmozdulás-módszernek” is szokták nevezni, azonban ez utóbbi megnevezés önmagában egy korábban (1862, Alfred Clebsch) kidolgozott nem mátrixos számítási eljárást takar, amely tulajdonképpen a merevségi mátrix módszerének alapját alkotja.

A Clebsch által elemzett rúdszerkezet egymáshoz csuklósan illeszkedő elemekből állt, amelyek tehát nyomatékot nem adtak át egymásnak (ez nyilvánvalóan egy egyszerűsítő hipotézis volt). Minden csomópontban három ismeretlent tekintett, a csomópont térbeli elmozdulásának három vetületét. A rúdelemben ébredő erők és a rúdelem végpontjainak egymáshoz viszonyított elmozdulása közötti összefüggést ismerte, a közös csomópont elmozdulása pedig ezeket az összefüggéseket fűzte egymáshoz.

A mai formájában az elmozdulás-módszer a csomópontok elfordulását is figyelembe veszi (ez tehát csomópontonként további három ismeretlent jelent a térbeli elfordulás három összetevőjének megfelelően), a merevségi mátrix módszere pedig a szerkezet terhelése és alakváltozása közötti kapcsolatot egy mátrixokkal és vektorokkal felírt lineáris egyenletrendszer formájában adja meg.

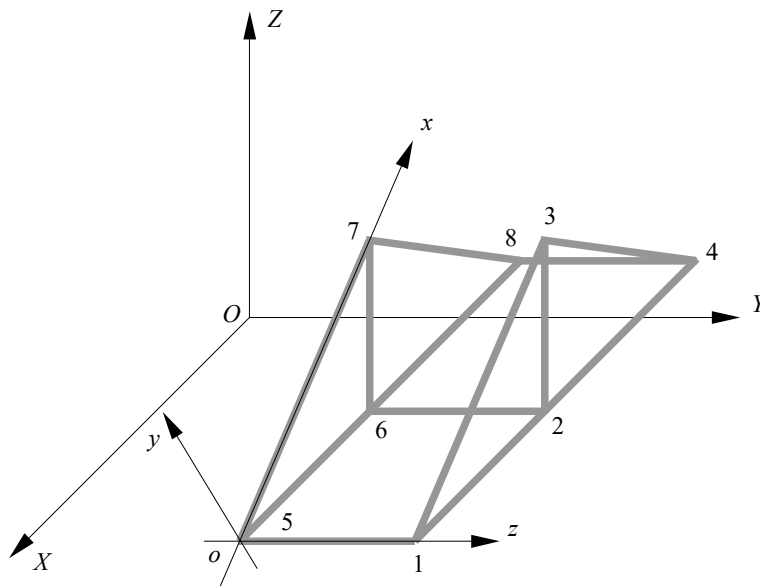
A rúdszerkezetek számítására kitalált eljárások között van még egy „erő módszernek” nevezett megoldás is. Míg az elmozdulás-módszerben az ismeretlen mennyiséget a csomópont elmozdulása jelenti, addig az erő módszerben az ismeretlen mennyiségekként a csomópontokban ható erőket tekinti. Tulajdonképpen ugyanannak a jelenségnek a fordítottjáról van szó: az elmozdulás-módszer az elmozdulás miatt fellépő erőt arányosnak tekinti a kiváltó okkal – az arányossági tényező az elem merevsége –, az erő módszer pedig az erő hatására létrejövő elmozdulást tartja azzal

arányosnak, az arányossági tényező pedig az elem hajlékonysága. Könnyen belátható, hogy az említett hajlékonyság a merevség reciproka kell legyen.

Az erőmódszer alapján kidolgozható egy másik mátrixos módszer, a hajlékonysági mátrix módszere. Ez utóbbi azonban algoritmizálásának nehézségei miatt a szerkezetek számításában nem jutott fontos szerephez.

1.1.2. Vonatkozási rendszerek

A mátrixos módszerek alapját a rúdelem viselkedésének leírása alkotja. Legyen egy ilyen, a szerkezetből kiemelt, térben elhelyezkedő 5–7 rúdelem (1.1. ábra). Tanulmányozása sokkal egyszerűbbé válik, ha nem a szerkezethez (például a talajhoz) kötött *globális*, nagy betűkkel jelölt vonatkoztatási rendszerben elemezzük, hanem a rúdhoz rendelt *lokális* (helyi), kis betűkkel jelölt rendszerben keressük az elmozdulások és a fellépő erők közötti kapcsolatot.



1.1. ábra. A szerkezet globális és a rúdelem lokális vonatkoztatási rendszere

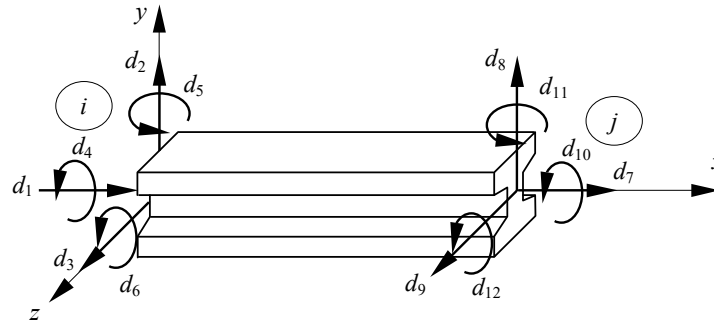
1.1.3. Szabadságfokok

A kiragadott rúdelemet tanulmányozva észrevehetjük, hogy végei egyenként három, egymástól független irányban mozdulhatnak el és három egymástól független irányban fordulhatnak el. A rúdvégek egymástól független lehetséges elmozdulásait és elfordulásait (másképpen: lineáris és szögmozdulásait) célszerűen a lokális koordinátarendszer tengelyeinek irányában vesszük fel és ezeket a rúdelem *szabadságfokainak* nevezik (egy fizikai rendszer szabadsági fokainak számát az adott rendszer állapotát egyértelműen leíró, egymástól független adatok számaként definiálják). A rúdelem szabadságfokainak száma tehát összesen tizenkettő (1.2. ábra), amelyeket a könnyebb azonosítás céljából számjelzéssel látunk el.

Az ábrán kijelölt pozitív irányok a végeselem-módszerben használt egyezménynek felelnek meg, a vektorok a koordinátatengelyek pozitív irányába mutatnak. Megjegyzendő, hogy ez az egyezmény különbözik a szilárdságtanban használttól.

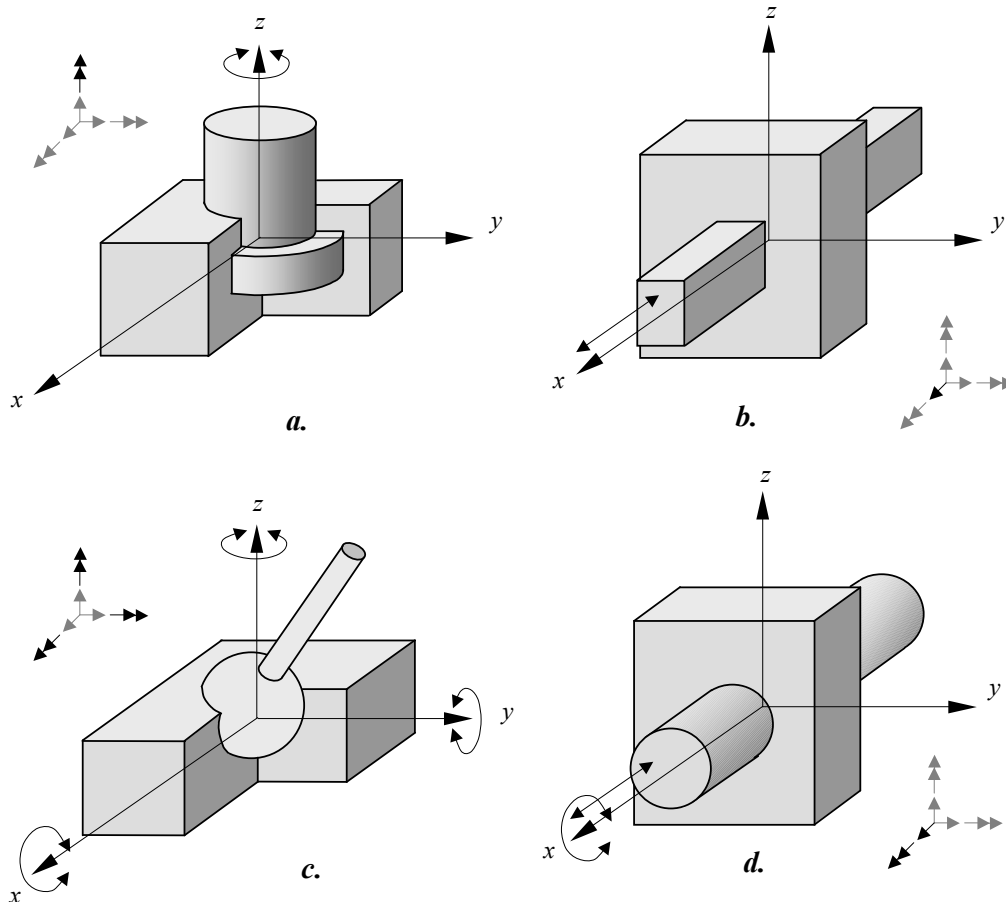
A merevségi mátrix módszerében és a végeselem-módszerben egyszerűsítő hipotézisként előírják, hogy a rúdelemek csak a csomópontokban csatlakozhatnak egymáshoz és a szerkezet alapjához, a külső erők pedig szintén csak a csomópontokban hatnak a szerkezetre. Éppen ezért a

szabadságfokok irányában fellépő erőkkel és elmozdulásokkal a rúdelemek és így a teljes szerkezet igénybevétele leírható.



1.2. ábra. A rúdelem tizenkét lehetséges szabadságfoka

Az elemek összekapcsolódási módja bizonyos relatív elmozdulásokat megengedhet, másokat pedig nem. Például ha a rúd vége gömbcsuklós illesztéssel csatlakozik a talajhoz vagy egyéb elemekhez (1.3.c. ábra), akkor az összekapcsolt rudak egymáshoz viszonyítva szabadon elfordulhatnak, a megfelelő szabadságfokok (három elfordulás) szabadok, a többi három, az elmozdulásnak megfelelő szabadságfok pedig kötött. Ekképpen ezek a rudak csak erőt tudnak egymásnak átadni, nyomatékokat nem.

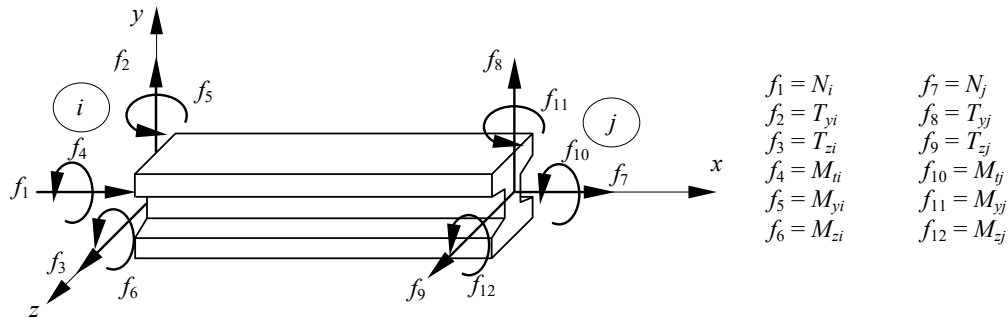


1.3. ábra. A rúdelem néhány lehetséges illesztése és a le nem kötött szabadságfokok

Ha a rúd vége befogott vagy egy másik rúdhoz mereven csatlakozik, akkor e végpont hat szabadságfoka mind kötött. Az ilyen módon összekapcsolt rudak az erők mellett a nyomatékokat is átadják egymásnak.

Természetesen a hat szabadságfok lekötésének bármely kombinációja lehetséges, néhányat ezek közül az 1.3. ábra mutat be.

A szabadságfokok irányában ható erők és nyomatékok számozása a szabadságfokok (elmozdulások) számozását követi. A szilárdságtan fogalomtára szerint az elem tengelyének irányában az N normális erő hat, míg a T nyíróerők az elem tengelyére merőlegesek. Az elem tengelye körüli M_i csavarónyomaték az elem torzióját okozza, a másik két tengely körül az M hajlítónyomatékok hatnak (1.4. ábra).



1.4. ábra. A szabadságfokok irányában ható erők és nyomatékok

A csomópontokban fellépő erőket és nyomatékokat tanulmányozva megállapítható, hogy reakcióerők csak a rögzített szabadságfokok irányában jelenhetnek meg, egy rúdelem a hozzá kapcsolódó szomszédos rúdelemnek csak a rögzített szabadságfokok irányában ható erőket és nyomatékokat tudja átadni.

A gyakorlatban a végpontok d_n elmozdulásait és elfordulásait általánosítva *csomóponti* (nodális) *elmozdulásoknak*, a fellépő f_n erőket és nyomatékokat pedig *csomóponti erőknél* nevezik. Úgy a csomóponti elmozdulások, mint a csomóponti erők egy-egy tizenkét elemű vektorba rendezhetők:

$$\{\mathbf{d}\} = [d_1 \quad d_2 \quad \dots \quad d_{12}]^T, \quad (1.1)$$

$$\{\mathbf{f}\} = [f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_{12}]^T. \quad (1.2)$$

A két vektor közötti lineárisnak feltételezett kapcsolatot az

$$\{\mathbf{f}\} = [\mathbf{k}] \cdot \{\mathbf{d}\} \quad (1.3)$$

egyenlet adja, ahol $[\mathbf{k}]$ a rúdelem *merevségi mátrixa*, melynek elemei állandó paraméterek.

A merevségi mátrix $k_{i,j}$ eleme definíció szerint a j szabadságfok irányában történő egységnyi d_j elmozdulás által az i szabadságfok irányában előidézett f_i erővel azonos. Mivel az erők és az elmozdulások vektora egyaránt tizenkét elemet tartalmaz, a merevségi mátrix egy 12×12 méretű négyzetes mátrix kell legyen:

$$\begin{array}{l}
i \text{ csomópont, } x \text{ irányban ható axiális erő} \\
i \text{ csomópont, } y \text{ irányban ható nyíróerő} \\
i \text{ csomópont, } z \text{ irányban ható nyíróerő} \\
i \text{ csomópont, } x \text{ körüli csavarónyomaték} \\
i \text{ csomópont, } y \text{ körüli hajlítónyomaték} \\
i \text{ csomópont, } z \text{ körüli hajlítónyomaték} \\
j \text{ csomópont, } x \text{ irányban ható axiális erő} \\
j \text{ csomópont, } y \text{ irányban ható nyíróerő} \\
j \text{ csomópont, } z \text{ irányban ható nyíróerő} \\
j \text{ csomópont, } x \text{ körüli csavarónyomaték} \\
j \text{ csomópont, } y \text{ körüli hajlítónyomaték} \\
j \text{ csomópont, } z \text{ körüli hajlítónyomaték}
\end{array}
\left. \begin{array}{l}
f_1 \\
f_2 \\
f_3 \\
f_4 \\
f_5 \\
f_6 \\
f_7 \\
f_8 \\
f_9 \\
f_{10} \\
f_{11} \\
f_{12}
\end{array} \right\} =
\begin{array}{l}
\left[\begin{array}{lll}
k_{1,1} & k_{1,2} & \dots & k_{1,12} \\
k_{2,1} & k_{2,2} & \dots & k_{2,12} \\
k_{3,1} & k_{3,2} & \dots & k_{3,12} \\
k_{4,1} & k_{4,2} & \dots & k_{4,12} \\
k_{5,1} & k_{5,2} & \dots & k_{5,12} \\
k_{6,1} & k_{6,2} & \dots & k_{6,12} \\
k_{7,1} & k_{7,2} & \dots & k_{7,12} \\
k_{8,1} & k_{8,2} & \dots & k_{8,12} \\
k_{9,1} & k_{9,2} & \dots & k_{9,12} \\
k_{10,1} & k_{10,2} & \dots & k_{10,12} \\
k_{11,1} & k_{11,2} & \dots & k_{11,12} \\
k_{12,1} & k_{12,2} & \dots & k_{12,12}
\end{array} \right]
\left\{ \begin{array}{l}
d_1 \\
d_2 \\
d_3 \\
d_4 \\
d_5 \\
d_6 \\
d_7 \\
d_8 \\
d_9 \\
d_{10} \\
d_{11} \\
d_{12}
\end{array} \right\}
\begin{array}{l}
i \text{ csomópont, } x \text{ irányú elmozdulás} \\
i \text{ csomópont, } y \text{ irányú elmozdulás} \\
i \text{ csomópont, } z \text{ irányú elmozdulás} \\
i \text{ csomópont, } x \text{ körüli elfordulás} \\
i \text{ csomópont, } y \text{ körüli elfordulás} \\
i \text{ csomópont, } z \text{ körüli elfordulás} \\
j \text{ csomópont, } x \text{ irányú elmozdulás} \\
j \text{ csomópont, } y \text{ irányú elmozdulás} \\
j \text{ csomópont, } z \text{ irányú elmozdulás} \\
j \text{ csomópont, } x \text{ körüli elfordulás} \\
j \text{ csomópont, } y \text{ körüli elfordulás} \\
j \text{ csomópont, } z \text{ körüli elfordulás.}
\end{array}
\end{array} \quad (1.4)$$

Az 1.3. egyenlet fordítottja a

$$\{d\} = [h] \cdot \{f\} \quad (1.5)$$

összefüggés, ahol $[h]$ a rúdelem *hajlékonysági mátrixa*, a merevségi mátrix inverze:

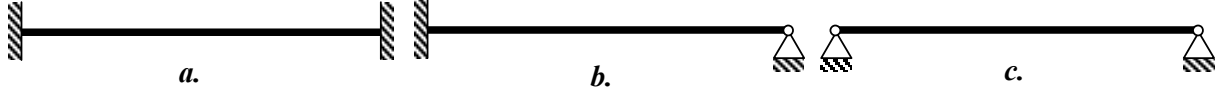
$$[h] = [k]^{-1}. \quad (1.6)$$

A hajlékonysági mátrix $h_{i,j}$ eleme az egységnyi f_j erő által előidézett d_i elmozdulást adja. Mivel a rugalmas szerkezetek merevségi mátrixa és hajlékonysági mátrixa egyaránt fizikailag értelmezett, a köztük fennálló 1.6. kapcsolat szerint egyik sem lehet szinguláris. Más a helyzet ha a rúdelem valamelyik irányban ideálisan merev (merevsége végtelen) vagy ellenállás nélkül deformálódik (merevsége zéró): ezekben az esetekben a merevségi mátrix szinguláris lesz.

1.1.4. Az elemi merevségi mátrix

A merevségi mátrix tagjai a rúdelem geometriájának és anyagi minőségének, valamint a csomópontok szabadságfokainak állapotától függenek és a szilárdságtan és a sztatika módszereivel határozhatók meg. Egy adott geometriájú és anyagú rúdelem esetében a szabadságfokok lehetséges kombinációinak száma 2^{12} (ami 4096-tal egyenlő), mely szám a merevségi mátrix lehetséges

formáinak számával azonos. Nem minden eset bír gyakorlati jelentőséggel, rendszerint csak néhány gyakrabban előforduló esetet szoktak megemlíteni, például a mindkét végén befogott (a.), a mindkét végén csuklós (c.) és az egyik végén befogott, másik végén csuklós (b.) rúdelemeket (1.5. ábra).



1.5. ábra. Gyakoribb rúdelemek

Tekintsük először a tengelyirányú húzó-nyomó igénybevétel esetét. Mindhárom elemtípusnál a tengelyirányú elmozdulás gátolt, tehát a tengelyirányú f_1 erő egy $u(x)$ alakváltozást idéz elő. A deformált elemet leíró differenciálegyenlet az alakváltozás és a tengelyirányú erő közötti összefüggést fejezi ki a rúd esetlegesen változó A keresztmetszetének és anyaga E Young-modulusának (rugalmassági tényezőjének) függvényében (ez tulajdonképpen a prizmatikus, egyenletes keresztmetszetű rudakra felírt Hooke-törvény általánosításával nyert differenciális forma lenne):

$$\frac{du}{dx} = -\frac{f_1}{E(x) \cdot A(x)}, \quad (1.7)$$

ahonnan az elem L hossza menti integrálással a két végpont relatív elmozdulása

$$u = -\int_0^L \frac{f_1}{E(x) \cdot A(x)} dx + C. \quad (1.8)$$

A merevségi mátrix $k_{1,1}$ elemét a fenti összefüggésből határozhatjuk meg úgy, hogy előírjuk a szabadságfokok irányában történő elmozdulásokat. A $k_{i,j}$ tag definíciójából eredendően tehát most

$$d_1 = 1, \quad (1.9)$$

az összes többi d_n elmozdulás pedig zérus értékkel kell rendelkezzen. Ekkor $x=0$ -ra a fenti integrál értéke egységnyi ($u(0)=1$), $x=L$ -re pedig nulla ($u(L)=0$) kell legyen. Az így meghatározott f_1 erő a merevségi mátrix $k_{1,1}$ tagjával lesz azonos, míg az ellenkező végpontban fellépő ellenkező előjelű reakcióerő a merevségi mátrix $k_{7,1}$ tagját fogja adni. Az egyenletrendszer megoldásával az integrálási konstans $C=1$,

$$k_{1,1} = \frac{1}{\int_0^L \frac{dx}{E(x) \cdot A(x)}}, \quad (1.10)$$

és

$$k_{7,1} = -k_{1,1} = \frac{-1}{\int_0^L \frac{dx}{E(x) \cdot A(x)}}. \quad (1.11)$$

Ugyancsak az 1.8. egyenletből a

$$d_7 = 1 \quad (1.12)$$

elmozdulást előírva, miközben a többi szabadságfok irányában a rúdvégeket lekötjük,

$$k_{7,7} = k_{1,1} = \frac{1}{\int_0^L \frac{dx}{E(x) \cdot A(x)}}, \quad (1.13)$$

és

$$k_{7,1} = k_{1,7} = -k_{1,1} = \frac{-1}{\int_0^L \frac{dx}{E(x) \cdot A(x)}}. \quad (1.14)$$

Mivel a tengelyirányú elmozdulás nem vezet nyíróerők, csavaró- és hajlítónyomatékok megjelenéséhez a merevségi mátrix első és hetedik sorainak további $k_{1,n}$, $k_{7,n}$, valamint oszlopainak $k_{n,1}$ és $k_{n,7}$ tagjai mind nullák lesznek.

Hasonló módon kell eljárni a többi szabadságfok esetében is. A rúdelem torziójának differenciálegyenlete az 1.7. egyenlethez alakilag hasonló:

$$\frac{d\theta_x}{dx} = -\frac{f_4}{G(x) \cdot I_t(x)}, \quad (1.15)$$

(G a nyírási modulus, I_t pedig a keresztmetszet jellemző csavarási másodrendű nyomaték), ahonnan a $k_{4,4}$, $k_{10,4}$, $k_{4,10}$ és $k_{10,10}$ tagok azonos módon számíthatók ki. Mivel a csavarás sem vezet egyéb erők megjelenéséhez, a negyedik és a tizedik oszlop, illetve sor egyéb tagjai szintén nullák lesznek.

Bonyolultabb a helyzet a többi szabadságfok esetén, mivel általában egy sztatikailag határozatlan szerkezeten kell dolgozni. A mindkét végén befogott rúdelem esetében a csomópontok y tengely irányú v elmozdulását két erő is okozhatja: a T_y nyíróerő és az M_z hajlítónyomaték. E kijelentésnek a fordítottja is igaz: a v elmozdulás egy T_y nyíróerő és egy M_z nyomaték megjelenését vonja maga után. A v elmozdulás a két erő által okozott komponensek összegeként fogható fel:

$$v = v^T + v^M. \quad (1.16)$$

Az elmozdulás-komponensek és a megfelelő erők kapcsolatát leíró differenciálegyenletek a következők:

$$\frac{dv^T}{dx} = -\frac{k_y(x) \cdot f_2}{G(x) \cdot A(x)}, \quad (1.17)$$

$$\frac{d^2v^M}{dx^2} = \frac{d\theta_z}{dx} = \frac{f_2 \cdot x - f_6}{E(x) \cdot I_z(x)}, \quad (1.18)$$

ahol k_y a keresztmetszet alakú tényezője, I_z pedig a keresztmetszet z tengelyre vonatkoztatott másodrendű nyomatéka. A θ_z szög a keresztmetszet elfordulása és nem azonos a nyírófeszültségek

által okozott alakváltozás szögével. Az 1.18. egyenletből, annak 0 és x közötti integrálásával az x koordinátájú pontban az elfordulást

$$\theta_z(x) = \theta_z(0) + \int_0^x \frac{f_2 \cdot t}{E(t) \cdot I_z(t)} dt - \int_0^x \frac{f_6}{E(t) \cdot I_z(t)} dt \quad (1.19)$$

formában kapjuk, ahol a t változó 0 és x között vesz fel értékeket. Itt $\theta_z(0)$ mint integrálási konstans jelenik meg, mely a peremfeltételeket figyelembe véve a csomópont elfordulásának felel meg. Ugyanebből az egyenletből a v^M elmozdulás is meghatározható. Mivel

$$\underbrace{\int_0^x \int_0^x \dots \int_0^x dx f(x)}_{n\text{-szer}} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \int_0^x (x-t)^{n-1} \cdot f(t) dt, \quad (1.20)$$

az 1.16. - 1.18. egyenletekből

$$v(x) = v(0) + \theta_z(0) \cdot x + \int_0^x \frac{k_y(t) \cdot f_2}{G(t) \cdot A(t)} dt + \int_0^x \frac{f_2 \cdot (x-t) \cdot t}{E(t) \cdot I_z(t)} dt - \int_0^x \frac{f_6 \cdot (x-t)}{E(t) \cdot I_z(t)} dt, \quad (1.21)$$

ahol a $v(0)$ szintén mint integrálási konstans jelenik meg, mely a peremfeltételeket figyelembe véve a csomópont tengelyre merőleges elmozdulásának felel meg.

A fenti mennyiségek és a szabadságfokok irányában történő elmozdulások közötti kapcsolatot a következő relációk adják:

$$v(0) = d_2, \quad \theta_z(0) = d_6, \quad v(L) = d_8, \quad \theta_z(L) = d_{12}. \quad (1.22)$$

A merevségi mátrix tagjait ezúttal is az elmozdulások előírásával kapott összefüggésekből számítjuk. Például a $k_{j,2}$ tagokat ahol j értéke 2, 6, 8 és 12, a

$$d_2 = 1 \quad (1.23)$$

feltételnek az 1.19. és 1.21. egyenletekbe való behelyettesítésével kapjuk:

$$0 = f_2 \cdot \int_0^L \frac{t}{E(t) \cdot I_z(t)} dt - f_6 \cdot \int_0^L \frac{1}{E(t) \cdot I_z(t)} dt, \quad (1.24)$$

$$0 = 1 + f_2 \cdot \int_0^L \frac{k_y(t)}{G(t) \cdot A(t)} dt + f_2 \cdot \int_0^L \frac{(L-t) \cdot t}{E(t) \cdot I_z(t)} dt - f_6 \cdot \int_0^L \frac{(L-t)}{E(t) \cdot I_z(t)} dt. \quad (1.25)$$

Ebből az egyenletrendszerből $f_2 = k_{2,2}$ és $f_6 = k_{6,2}$ meghatározható, a rúdelem másik végpontjában fellépő reakciók pedig a $k_{8,2} = -f_2 = -k_{2,2}$, $k_{12,2} = f_6 = k_{6,2}$ összefüggésekhez vezetnek. A merevségi mátrixnak e szabadságfokokhoz tartozó sorai és oszlopai tehát négy-négy zérótól különböző elemet fognak tartalmazni.

Nagymértékben egyszerűsödnek a merevségi mátrix tagjainak kifejezései, ha a rúd keresztmetszete állandó és anyaga is homogén. A levezetett képletekben szereplő integrál-kifejezések kiszámításával a mindkét végén befogott rúd merevségi mátrixát a következőképpen kapjuk:

$$\begin{aligned}
[k] = & \begin{bmatrix}
\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{12 \cdot E \cdot I_z}{L^3 \cdot (1 + \varphi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L^2 \cdot (1 + \varphi_z)} \\
0 & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I_y}{L^3 \cdot (1 + \varphi_y)} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I_y}{L^2 \cdot (1 + \varphi_y)} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{G \cdot I_t}{L} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I_y}{L^2 \cdot (1 + \varphi_y)} & 0 & \frac{(4 + \varphi_y) \cdot E \cdot I_y}{L \cdot (1 + \varphi_y)} & 0 \\
0 & \frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L^2 \cdot (1 + \varphi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4 + \varphi_z) \cdot E \cdot I_z}{L \cdot (1 + \varphi_z)} \\
-\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I_z}{L^3 \cdot (1 + \varphi_z)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L^2 \cdot (1 + \varphi_z)} \\
0 & 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I_y}{L^3 \cdot (1 + \varphi_y)} & 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I_y}{L^2 \cdot (1 + \varphi_y)} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{G \cdot I_t}{L} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I_y}{L^2 \cdot (1 + \varphi_y)} & 0 & \frac{(2 - \varphi_y) \cdot E \cdot I_y}{L \cdot (1 + \varphi_y)} & 0 \\
0 & \frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L^2 \cdot (1 + \varphi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2 - \varphi_z) \cdot E \cdot I_z}{L \cdot (1 + \varphi_z)}
\end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix}
-\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I_z}{L^3 \cdot (1 + \varphi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L^2 \cdot (1 + \varphi_z)} \\
0 & 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I_y}{L^3 \cdot (1 + \varphi_y)} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I_y}{L^2 \cdot (1 + \varphi_y)} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{G \cdot I_t}{L} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I_y}{L^2 \cdot (1 + \varphi_y)} & 0 & \frac{(2 - \varphi_y) \cdot E \cdot I_y}{L \cdot (1 + \varphi_y)} & 0 \\
0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L^2 \cdot (1 + \varphi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2 - \varphi_z) \cdot E \cdot I_z}{L \cdot (1 + \varphi_z)} \\
\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{12 \cdot E \cdot I_z}{L^3 \cdot (1 + \varphi_z)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L^2 \cdot (1 + \varphi_z)} \\
0 & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I_y}{L^3 \cdot (1 + \varphi_y)} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I_y}{L^2 \cdot (1 + \varphi_y)} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{G \cdot I_t}{L} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I_y}{L^2 \cdot (1 + \varphi_y)} & 0 & \frac{(4 + \varphi_y) \cdot E \cdot I_y}{L \cdot (1 + \varphi_y)} & 0 \\
0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L^2 \cdot (1 + \varphi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4 + \varphi_z) \cdot E \cdot I_z}{L \cdot (1 + \varphi_z)}
\end{bmatrix}, \quad (1.26)
\end{aligned}$$

ahol

$$\varphi_y = \frac{12 \cdot k_y \cdot E \cdot I_z}{L^2 \cdot G \cdot A} \quad (1.27)$$

és

$$\varphi_z = \frac{12 \cdot k_z \cdot E \cdot I_y}{L^2 \cdot G \cdot A} \quad (1.28)$$

a nyíróerők hatását figyelembevevő együtthatók. Ez utóbbiak értéke a gyakorlati esetek többségében zéro fele közelít (a nyíróerők hatása a rúdelem alakváltozásában elhanyagolható), ami további egyszerűsítéseket tesz lehetővé.

Észrevehetjük, hogy az elemi merevségi mátrix szimmetrikus, nincs „tele” (több tagja zéro; az ilyen mátrixot *ritkának* – angolul „sparse” – nevezik; ellenben a mátrix *sűrű*, azaz „dense”), és hogy a főátlóján minden egyes tag zérónál nagyobb szám.

Hasonlóan kapjuk a rúdelem merevség mátrixát a szabadságfokok összes többi lehetséges kombinációjának esetében is.

1.1.5. A vonatkoztatási rendszerek közötti kapcsolatot adó transzformáció

A fentiek szerint kiszámított *elemi* $[k]$ merevségi mátrix a rúdelemhez rendelt helyi (lokális) koordinátarendszerben volt értelmezve, a szerkezet egészét, a peremfeltételeit is beleértve, egy megfelelően megválasztott általános (globális) rendszerben határoztuk meg. A csomóponti erőket és elmozdulásokat a globális rendszerben kívánjuk kiszámítani, tehát meg kell kapnunk az 1.3. egyenletek globális koordinátarendszerben felírt formáját is.

A csomópontok szabadságfokainak irányában felvett elmozdulások és erők egy-egy térbeli vektormennyiség (elmozdulás és elfordulás, illetve erő és nyomaték) komponensei, így például az i csomópontban ható f_1 , f_2 és f_3 komponensek egy térbeli F_i erőnek a rúdelem lokális koordinátarendszerében meghatározott vetületeiként foghatók fel. Ugyanennek az F_i erőnek a globális koordinátarendszerben felvett $F_{i,x}$, $F_{i,y}$, $F_{i,z}$ vetületeit is meghatározhatjuk. Ha ismerjük a lokális és a globális koordinátarendszer egymáshoz viszonyított helyzetét, akkor e vetületek között fennálló kapcsolat is könnyen leírható.

A globális és a lokális vonatkoztatási rendszerek közötti kapcsolatot egy geometriai transzformáció adja, amely többféleképpen is elvégezhető. Talán a legközismertebb lehetőség az iránytényező (vagy iránykoszinuszok) használata. Az 1.6. ábra a lokális x tengely helyzetének meghatározását illusztrálja: iránytényezői a globális tengelyekkel bezárt szögek koszinuszával, avagy a tengelyek egységvektorainak skaláris szorzatával egyenlők.

Hasonló módon határozhatók meg a másik két lokális tengely, y és z iránytényezői is. A három tengelyre összesen kilenc tényezőt kapunk, azokat egy mátrixba rendezhetjük:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}. \quad (1.29)$$

A koordinátatengelyek egymásra merőlegesek, tehát mind a kilenc tényező nem lehet egymástól független, tetszőleges. Bebizonyítható, hogy a fenti transzformációs (vagy *rotációs*, mivel egy elforgatást ad meg) mátrix a következő fontos tulajdonsággal rendelkezik:

$$[A]^T = [A]^{-1}, \quad (1.30)$$

(a rotációs mátrix transzponáltja egyúttal annak inverze is), tehát

$$[A] \cdot [A]^T = [I], \quad (1.31)$$

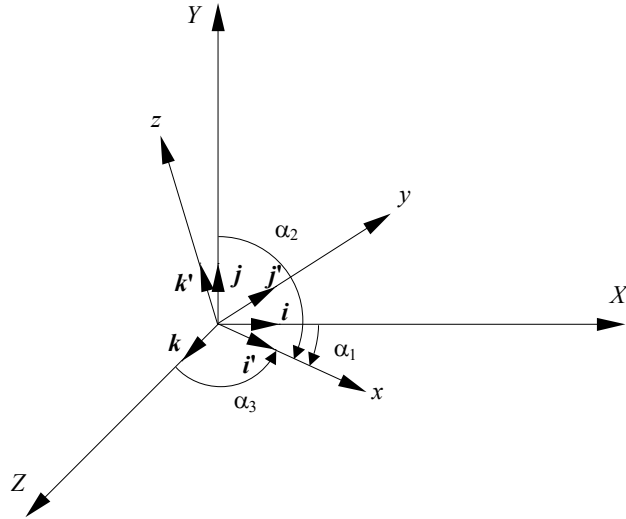
ahol $[I]$ a 3×3 -as egységmátrix:

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.32)$$

$$a_{1,1} = \cos \alpha_1 = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}$$

$$a_{1,2} = \cos \alpha_2 = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}$$

$$a_{1,3} = \cos \alpha_3 = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{k}$$



1.6. ábra. A lokális koordinátarendszer x tengelyének irányítványozói

A globális koordinátarendszerben kiszámítandó összetevőket a lokális tengelyek irányában megadott komponensek megfelelő vetületeinek összege adja (ez fordítva is igaz), mely transzformációk az előbbi módon felírt rotációs mátrix segítségével a következők lesznek:

$$\begin{Bmatrix} F_{i,x} \\ F_{i,y} \\ F_{i,z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_{i,x} \\ F_{i,y} \\ F_{i,z} \end{Bmatrix}. \quad (1.33)$$

Hasonlóképpen kapjuk a csomóponti nyomatékok, elmozdulások és elfordulások transzformáltjait is.

Gyakorlati szempontból érdemes megjegyezni, hogy a rúdelem két végpontjának koordinátái nem rögzítik egyértelműen a rúdelem térbeli helyzetét, csak a lokális rendszerének x tengelyét adják meg (ez rendszerint az alacsonyabb számú csomóponttól a magasabb számú csomópont felé mutat). A rúdelem lokális koordinátarendszerének egyértelmű definíciójához meg kell adnunk az y vagy z tengely helyzetét is. Ezt gyakran egy harmadik, nem az x tengelyen fekvő pont (*kontroll-pont*) felvételével történik, mely egyezményesen a lokális y vagy a z koordináta-tengelyen, esetleg az xy vagy az xz koordináta-síkban kell legyen.

1.1.6. A szerkezet merevségi mátrixa

A szerkezetet a csomópontokban összekapcsolt rúdelemek alkotják, a terhelés pedig a csomópontokba koncentrált, a globális tengelyek irányában felvett vetületekkel megadott erőkből és nyomatékokból áll. Egy-egy csomópontban két vagy több elem is kapcsolódhat egymáshoz,

amelyek az adott pontban ható erőket együttesen veszik át az elemek relatív merevségének arányában: a merevebb elem jobban terhelődik, a hajlékonyabb pedig kevésbé.

A számítások elvégzéséhez az elemi merevségi mátrixokat a globális koordinátarendszerben kell kifejezni. A globális rendszerben megadott $\{f\}$ erővektort az 1.33. transzformációval analóg

$$\{f'\} = [T]^T \cdot \{f\} \quad (1.34)$$

művelettel kapjuk, ahol $[T]$ egy alkalmasan megválasztott transzformációs mátrix. Ugyanakkor ismerjük a lokális rendszerben megadott erők és elmozdulások közötti 1.3. kifejezést, amellyel

$$\{f'\} = [T]^T \cdot [k] \cdot \{d\}. \quad (1.35)$$

Az így kapott egyenletrendszer bal oldalán a globális rendszerben megadott erők, a jobb oldalán pedig a lokális rendszerben megadott elmozdulások vannak. Az elmozdulások transzformációja az erők transzformációjával azonos, mivel a két vektor felépítése is azonos:

$$\{d'\} = [T]^T \cdot \{d\}, \quad (1.36)$$

ahonnan:

$$\{d\} = [T] \cdot \{d'\}. \quad (1.37)$$

Ez utóbbi kifejezést az 1.35. egyenletbe behelyettesítve

$$\{f'\} = [T]^T \cdot [k] \cdot [T] \cdot \{d'\} = [k'] \cdot \{d'\}, \quad (1.38)$$

ahol a $[T]^T \cdot [k] \cdot [T]$ szorzatként kiszámított $[k']$ mátrix a végeelem globális rendszerben érvényes merevségi mátrixa.

Az elmozdulások és az erők 12 elemű vektorai (1.4. képlet) egyaránt négy-négy térbeli vektoriális mennyiség vetületeit tartalmazzák, tehát a $[T]$ transzformációs mátrixot a következő alkalmas formában lehet felírni (ennek egy-egy „sora” a 12 elemű vektorban foglalt vetületek közül csak egy-egy vektoriális mennyiséghez tartozó elemeket érinti):

$$[T] = \begin{bmatrix} [A] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [A] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [A] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [A] \end{bmatrix}, \quad (1.39)$$

ahol $[A]$ az eddigiekben ismertetett rotációs mátrix. A fenti forma csak a $\{d\}$ és $\{f\}$ vektoroknak az ebben a fejezetben leírt módon történő felépítésének esetében érvényes.

A 12×12 méretű elemi merevségi mátrixot 16 darab 3×3 -as mátrixra tudjuk felosztani:

$$[k] = \begin{bmatrix} [k_{tt,ii}] & [k_{tr,ii}] & [k_{tt,ij}] & [k_{tr,ij}] \\ [k_{rt,ii}] & [k_{rr,ii}] & [k_{rt,ij}] & [k_{rr,ij}] \\ [k_{tt,ji}] & [k_{tr,ji}] & [k_{tt,jj}] & [k_{tr,jj}] \\ [k_{rt,ji}] & [k_{rr,ji}] & [k_{rt,jj}] & [k_{rr,jj}] \end{bmatrix}, \quad (1.40)$$

ahol az i és j indexek a csomópontokra, a t és r indexek pedig a szabadságfokokra (transzláció, illetve rotáció) vonatkoznak. Az így felosztott merevségi mátrix tagjai között általában különböző összefüggéseket állapíthatunk meg, melyeket a megoldó-program megalkotásakor használhatunk

fel. A mindkét végén befogott rúdelem esetében például a szimmetria miatt $[k_{rr,ii}]$ és $[k_{rt,ii}]$ egymás transzponáltjai, $[k_{tt,ii}]$ és $[k_{tt,ij}]$ csak előjelükben különböznek egymástól és így tovább.

A felosztásból származó mátrixok elemei fizikailag azonos értelemmel bírnak: a $[k_{tt,ii}]$ mátrix kilenc tagja az i csomópontban az i csomópont egységnyi translációi miatt megjelenő erők komponenseit, $[k_{rr,ii}]$ pedig az i csomópont egységnyi translációi miatt megjelenő nyomatékok komponenseit fogja adni ugyanott és így tovább.

A $[T]$ transzformációs mátrix segítségével a rúdelem globális koordinátarendszerben kifejezett merevségi mátrixát a következőképpen kapjuk:

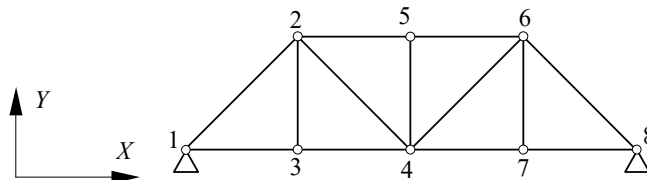
$$[k^*] = [T]^T \cdot [k] \cdot [T] =$$

$$= \begin{bmatrix} [A]^T \cdot [k_{tt,ii}] \cdot [A] & [A]^T \cdot [k_{rr,ii}] \cdot [A] & [A]^T \cdot [k_{tt,ij}] \cdot [A] & [A]^T \cdot [k_{rr,ij}] \cdot [A] \\ [A]^T \cdot [k_{rt,ii}] \cdot [A] & [A]^T \cdot [k_{rr,ii}] \cdot [A] & [A]^T \cdot [k_{rt,ij}] \cdot [A] & [A]^T \cdot [k_{rr,ij}] \cdot [A] \\ [A]^T \cdot [k_{tt,ji}] \cdot [A] & [A]^T \cdot [k_{rr,ji}] \cdot [A] & [A]^T \cdot [k_{tt,ij}] \cdot [A] & [A]^T \cdot [k_{rr,ij}] \cdot [A] \\ [A]^T \cdot [k_{rt,ji}] \cdot [A] & [A]^T \cdot [k_{rr,ji}] \cdot [A] & [A]^T \cdot [k_{rt,ij}] \cdot [A] & [A]^T \cdot [k_{rr,ij}] \cdot [A] \end{bmatrix}. \quad (1.41)$$

A különböző rúdelemek így kiszámított elemi merevségi mátrixai mind ugyanahhoz a viszonyítási rendszerhez igazodnak, tehát a csomópontokban található elemek merevségi mátrixainak megfelelő tagjai egyszerűen összegezhetőek. Az összegek a csomópontoknak a globális vonatkozási rendszerben kifejezett teljes merevségét adják (melyet az ott egymáshoz csatlakozó elemek együttesen idéznek elő) és a szerkezet merevségi mátrixába rendezhetőek.

A strukturális merevségi mátrix összeállítását egy egyszerű példával lehet szemléltetni. Az 1.7. ábrán látható sík szerkezet 13 rúdelemből áll, amelyek 8 csomópontban kapcsolódnak egymáshoz.

A csuklókkal csatlakozó rúd modelljét az 1.5. ábrán c. jelöli. Ez a fajta elem illesztéséből kifolyólag csak tengely irányú erőt tud átvenni, nyomatékokat és nyíróerőket nem. Ez a tény az eddig tárgyalt három dimenziós általános rúdelemmel (tartóelemmel) szemben jelentős egyszerűsítéseket hoz be, a lokális rendszerben 2×2 -es elemi merevségi mátrixa ugyanis csak a tengely irányú húzó-nyomó igénybevételnek megfelelő $\pm E \cdot A / L$ tagokat tartalmazza. A nyomatékok és a nyíróerők elhanyagolása a szilárdságtan elfogadott és gyakran használt hipotézise, amelyet hosszú és hajlékony elemekből felépített szerkezetek modellezésében alkalmazunk. Ilyenek a *rácsos szerkezetek*, ahol bár az elemeket általában mereven rögzítik egymáshoz, a rudak hajlítással szembeni csekély merevsége miatt a csomópontban átadott nyomatékok és nyíróerők hatása csak lokálisan, az illesztés közvetlen közelében jelentkezik. Amikor e hatásokat a rúd teljes hosszán figyelembe kell venni, akkor az illető szerkezetet *tartónak* tekintjük és akképpen modellezzük.



1.7. ábra. Csuklós rudakból álló síkszerkezet

A csuklós rúdelem (rácsrúdelem) ugyan csomópontonként csak egy szabadságfokkal rendelkezik, de a szerkezetet leíró általános koordinátarendszer tengelyeivel az illető szabadságfok iránya valamilyen szögöt zár be. Éppen ezért a koordináta-transzformáció során, midőn az elem

szabadságfokait a globális rendszer tengelyeire vetítjük le, a rúdelem helyi koordinátarendszerében megadott 2×2 -es elemi merevségi mátrix helyett sík esetben egy 4×4 , térbeli esetben egy 6×6 nagyságú elemi merevségi mátrixhoz jutunk.

Az elmondottak alapján tehát a példaként megrajzolt rácsos szerkezet összesen 16 szabadságfokkal rendelkezik, amelyből négy az 1. és 8. csomópontok rögzítése miatt kötött. A szerkezet globális merevségi mátrixának mérete következésképpen 16×16 lesz:

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} K_{1x,1x} & K_{1x,1y} & K_{1x,2x} & K_{1x,2y} & \dots & K_{1x,8x} & K_{1x,8y} \\ K_{1y,1x} & K_{1y,1y} & K_{1y,2x} & K_{1y,2y} & \dots & K_{1y,8x} & K_{1y,8y} \\ K_{2x,1x} & K_{2x,1y} & K_{2x,2x} & K_{2x,2y} & \dots & K_{2x,8x} & K_{2x,8y} \\ K_{2y,1x} & K_{2y,1y} & K_{2y,2x} & K_{2y,2y} & \dots & K_{2y,8x} & K_{2y,8y} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{8x,1x} & K_{8x,1y} & K_{8x,2x} & K_{8x,2y} & \dots & K_{8x,8x} & K_{8x,8y} \\ K_{8y,1x} & K_{8y,1y} & K_{8y,2x} & K_{8y,2y} & \dots & K_{8y,8x} & K_{8y,8y} \end{bmatrix}. \quad (1.42)$$

Az indexek a csomópontok számát, illetve a szabadságfokok irányát adják.

A globális merevségi mátrix összeállításakor az kezdetben üres, feltöltése az elemek megfelelő indexű tagjainak hozzáadásával történik. Például a szerkezet 3. csomópontjában három rúdelem kapcsolódik egymáshoz: az 1–3, 2–3 és 3–4 elemek, melyek elemi merevségi mátrixai

$$[\mathbf{k}^{1,3}] = \begin{bmatrix} k_{1x,1x}^{1,3} & k_{1x,1y}^{1,3} & k_{1x,3x}^{1,3} & k_{1x,3y}^{1,3} \\ k_{1y,1x}^{1,3} & k_{1y,1y}^{1,3} & k_{1y,3x}^{1,3} & k_{1y,3y}^{1,3} \\ k_{3x,1x}^{1,3} & k_{3x,1y}^{1,3} & k_{3x,3x}^{1,3} & k_{3x,3y}^{1,3} \\ k_{3y,1x}^{1,3} & k_{3y,1y}^{1,3} & k_{3y,3x}^{1,3} & k_{3y,3y}^{1,3} \end{bmatrix},$$

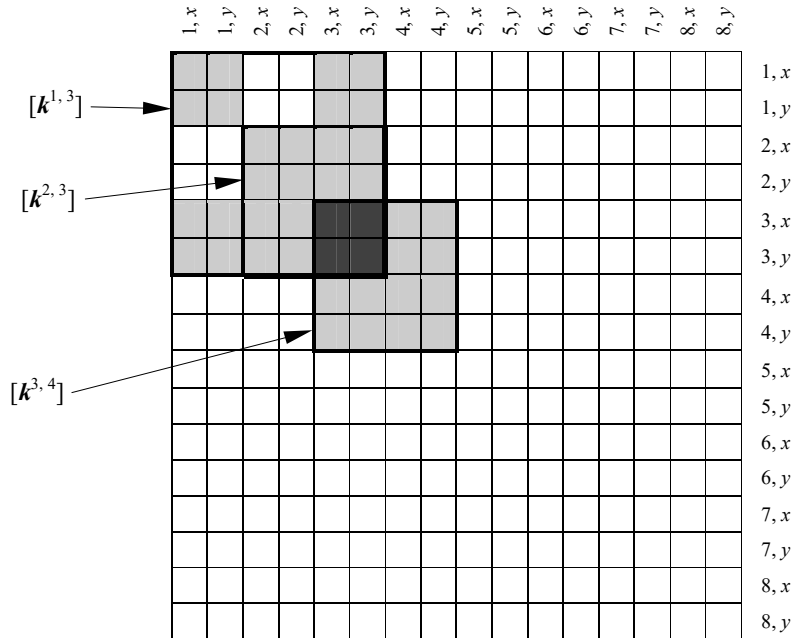
$$[\mathbf{k}^{2,3}] = \begin{bmatrix} k_{2x,2x}^{2,3} & k_{2x,2y}^{2,3} & k_{2x,3x}^{2,3} & k_{2x,3y}^{2,3} \\ k_{2y,2x}^{2,3} & k_{2y,2y}^{2,3} & k_{2y,3x}^{2,3} & k_{2y,3y}^{2,3} \\ k_{3x,2x}^{2,3} & k_{3x,2y}^{2,3} & k_{3x,3x}^{2,3} & k_{3x,3y}^{2,3} \\ k_{3y,2x}^{2,3} & k_{3y,2y}^{2,3} & k_{3y,3x}^{2,3} & k_{3y,3y}^{2,3} \end{bmatrix}, \quad (1.43)$$

$$[\mathbf{k}^{3,4}] = \begin{bmatrix} k_{3x,3x}^{3,4} & k_{3x,3y}^{3,4} & k_{3x,4x}^{3,4} & k_{3x,4y}^{3,4} \\ k_{3y,3x}^{3,4} & k_{3y,3y}^{3,4} & k_{3y,4x}^{3,4} & k_{3y,4y}^{3,4} \\ k_{4x,3x}^{3,4} & k_{4x,3y}^{3,4} & k_{4x,4x}^{3,4} & k_{4x,4y}^{3,4} \\ k_{4y,3x}^{3,4} & k_{4y,3y}^{3,4} & k_{4y,4x}^{3,4} & k_{4y,4y}^{3,4} \end{bmatrix}.$$

A fenti három elemi merevségi mátrix tagjainak a globális mátrixban megfelelő helyét, amelyet a következő (1.8.) ábra szemléltet, az alsó indexek azonosítják.

Mint ahogy az ábrából is kiténik, a közös harmadik csomópontnak megfelelő $k_{3x,3x}$, $k_{3x,3y}$, $k_{3y,3x}$ és $k_{3y,3y}$ tagok egymásra tevődnek és ezeket összegezzük (együttesen járulnak hozzá a csomópont globális merevségéhez):

$$\begin{aligned} K_{3x,3x} &= k_{3x,3x}^{1,3} + k_{3x,3x}^{2,3} + k_{3x,3x}^{3,4}, \\ K_{3x,3y} &= k_{3x,3y}^{1,3} + k_{3x,3y}^{2,3} + k_{3x,3y}^{3,4}, \\ K_{3y,3x} &= k_{3y,3x}^{1,3} + k_{3y,3x}^{2,3} + k_{3y,3x}^{3,4}, \\ K_{3y,3y} &= k_{3y,3y}^{1,3} + k_{3y,3y}^{2,3} + k_{3y,3y}^{3,4}. \end{aligned} \quad (1.44)$$



1.8. ábra. Az elemi merevségi mátrixok tagjainak helye a globális merevségi mátrixban

Az összes többi elem merevségi mátrixának tagjait a globális mátrix megfelelő tagjaihoz hozzáadva végül megkapjuk a szerkezet $[K]$ merevségi mátrixát.

Megjegyzendő, hogy a szerkezet $[H]$ hajlékonysági mátrixát, amely a $[K]$ merevségi mátrix inverze, nem lehet az elemi hajlékonysági mátrix tagjainak fent bemutatott összegzésével kiszámítani. E kijelentés alátámasztására tekintsük a következő példát: feltételezzük, hogy az eredő merevséget két tag összegzésével kapjuk ($k = k_1 + k_2$). A megfelelő hajlékonyságok a tagok inverzei, tehát

$$h = \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1 + k_2} \neq \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = h_1 + h_2. \quad (1.45)$$

Az elemi és az eredő hajlékonyságok között fennálló összefüggés megállapítható, a fenti relációból:

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}, \quad (1.46)$$

viszont a strukturális hajlékonysági mátrix összeállítása már nem oldható meg egyszerű összegzéssel (ugyanis $([k_1] + [k_2])^{-1} \neq [k_1]^{-1} + [k_2]^{-1}$).

1.1.7. A szerkezet egyensúlyát kifejező egyenletrendszer

A rúdelem egyensúlyát a lokális rendszerben felírt 1.3. egyenletrendszer fejezi ki, ahol az $\{f\}$ vektor a rúdelem terhelését, a $\{d\}$ vektor pedig végpontjainak elmozdulását jelenti. Az előbbieken a rúdelem merevségi mátrixát a globális rendszerre vetítettük le, mivel a szerkezet

terhelését a globális rendszerben adjuk meg és az elmozdulásokat szintén ugyanebben a rendszerben szeretnénk kiszámítani.

Az elemi $\{f\}$ vektorok tagjai ismeretlenek, mivel nem tudjuk, hogy a csomóponti terhelésből az ott csatlakozó rúdelemek egyenként mennyit vesznek át, viszont a globális rendszerre levetített $\{f\}$ vektorok megfelelő tagjait összegezvén pontosan a csomóponti terhelés $\{F\}$ vektorát kell kapjuk. Más szavakkal: a globális terhelésvektor a globális merevségi mátrixhoz hasonlóan az elemi terhelésvektorokból állítható össze. Ez a művelet azonban inkább csak elméleti fontossággal bír, mivel az $\{F\}$ terhelésvektor számos tagja peremfeltételként már eleve ismert, ismeretlen tagjait (a reakcióerőket) pedig szintén a globális rendszerben szeretnénk kiszámítani.

Az elemi $\{d\}$ elmozdulásvektor tagjai között szintén vannak ismert és ismeretlen mennyiségek. A csomópont az ott összekapcsolódó rúdelemek közös pontja, elmozdulásának összetevői a globális rendszerben mindegyik ott csatlakozó elemre nézve azonosak, azonban az elemek lokális koordinátarendszerében más-más vetületekkel rendelkezik. Például a 3. csomópont globális Y tengely irányában történő elmozdulása a 2–3 elem esetén tengelyirányú, az 1–3 és 3–4 elemek esetén pedig arra merőleges komponenszt jelent. Felfogható úgy is, hogy a globális elmozdulásvektort az elemi vektorok levetítésével kapjuk (a tagok összegzése nélkül), viszont a gyakorlatban erre a műveletre sem kerül sor: a peremfeltételként előírt elmozdulásokat a globális rendszerben adjuk meg és az ismeretlen elmozdulásokat szintén ott számítjuk ki.

Végző soron az elemi mátrixok és vektorok egy globális

$$\{F\} = [K] \cdot \{D\} \quad (1.47)$$

lineáris egyenletrendszerhez vezetnek, amelynek megoldását a

$$\{D\} = [K]^{-1} \cdot \{F\} = [H] \cdot \{F\} \quad (1.48)$$

összefüggés adja.

A tekintett példában a szerkezet alátámasztását jelentő peremfeltételeket, a megfelelő $D_i = 0$ alakú egyenlőségeket is be kell vezetnünk: az 1. és a 8. csomópontok lekötése miatt $D_{1,x} = D_{1,y} = D_{8,x} = D_{8,y} = 0$. Ezeknek a peremfeltételeknek a bevezetése a megfelelő sorok és oszlopok törlésével egyenértékű.

A feladat peremfeltételei a csomóponti erők mellett az elmozdulások előírt zérótól különböző értékeire is vonatkozhatnak. Ekkor az előbbiektől eltérően az egyenletrendszerből az előírt elmozdulásoknak megfelelő sorokat és oszlopokat nem törölhetjük. Ezen elmozdulásokkal a strukturális egyensúlyt kifejező egyenletrendszer a következő módon osztható fel:

$$\begin{bmatrix} [K_{1,1}] & [K_{1,2}] \\ [K_{2,1}] & [K_{2,2}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{D_n\} \\ \{D_e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_e\} \\ \{F_n\} \end{Bmatrix}, \quad (1.49)$$

ahol az n a nem ismert, e pedig az előírt értékekre vonatkozik. Az elmozdulások előírt értéke lehet zéró (rögzített szabadságfok) vagy attól különböző. Az erővektor $\{F_e\}$ tagjait az ismert terhelés alkotja (beleértve a nulla terhelést jelentő tagokat is), az $\{F_n\}$ tagok pedig az alátámasztási pontokban fellépő ismeretlen reakcióerőket jelentik.

A megoldás érdekében az 1.49. egyenletrendszert két részre osztjuk:

$$\begin{cases} [K_{1,1}] \cdot \{D_n\} + [K_{1,2}] \cdot \{D_e\} = \{F_e\}, \\ [K_{2,1}] \cdot \{D_n\} + [K_{2,2}] \cdot \{D_e\} = \{F_n\}. \end{cases} \quad (1.50)$$

Ekkor az előírt elmozdulásokkal az első egyenlet a

$$[K_{1,1}] \cdot \{D_n\} = \{F_e\} - [K_{1,2}] \cdot \{D_e\} = \{F_e^*\} \quad (1.51)$$

formára hozható, amelynek megoldása az ismeretlen elmozdulások $\{D_n\}$ vektorát adja. Az $\{F_n\}$ reakcióerők a második egyenletből számíthatók, az előzetesen meghatározott $\{D_n\}$ vektor behelyettesítésével.

Az egyenletrendszerek megoldásának létfeltétele a strukturális merevségi mátrix megfordíthatósága. $[K]$ nem lehet szinguláris, mely feltétel, ha csak az elemzett szerkezet nem mechanizmus, valódi szerkezetek esetén mindig teljesül.

A lineáris egyenletrendszer klasszikus megoldási módja a Gauss-féle elimináció. Algoritmikusan néhány egymást követő lépés, a *normalizálás*, *redukálás* és *visszahelyettesítés* segítségével írható le.

Mátrixos megfogalmazásban a műveleteket a szerkezet *kiterjesztett* merevségi mátrixán végezzük el, ahol a kiterjesztett mátrix utolsó oszlopa az erővektor elemeiből áll. Egy n szabadságfokú rendszer kiterjesztett mátrixának n sora és $n+1$ oszlopa van:

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \dots & K_{1,n} & F_1 \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \dots & K_{2,n} & F_2 \\ \dots & & & & \dots \\ K_{n,1} & K_{n,2} & \dots & K_{n,n} & F_n \end{bmatrix}. \quad (1.52)$$

Az első művelet az első sor normalizálása: az első sort végigosztjuk az első elemével, miáltal az első elem, $K_{1,1}$ értéke egységnyi lesz. Az osztás lehetséges, mivel a merevségi mátrix diagonális elemei zérónál nagyobb számok.

Az így beosztott sort a többi sor első elemével beszorozva és abból kivonva az első oszlop többi elemének helyén zérókat alakítunk ki, ez a redukálás. Az első normalizálás és redukálás után a kiterjesztett mátrix a következőképpen néz ki:

$$\begin{bmatrix} 1 & (K_{1,2}/K_{1,1}) & \dots & (K_{1,n}/K_{1,1}) & (F_1/K_{1,1}) \\ 0 & (K_{2,2} - K_{2,1} \cdot K_{1,2}/K_{1,1}) & \dots & (K_{2,n} - K_{2,1} \cdot K_{1,n}/K_{1,1}) & (F_2 - K_{2,1} \cdot F_1/K_{1,1}) \\ \dots & & & & \dots \\ 0 & (K_{n,2} - K_{n,1} \cdot K_{1,2}/K_{1,1}) & \dots & (K_{n,n} - K_{n,1} \cdot K_{1,n}/K_{1,1}) & (F_n - K_{n,1} \cdot F_1/K_{1,1}) \end{bmatrix}. \quad (1.53)$$

A normalizálást és a redukálást a következő sorokkal folytatjuk mindaddig, míg a főátlón minden elem egységnyi lesz:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \dots & & & & \dots \\ 0 & 0 & & 1 & b_n \end{bmatrix}. \quad (1.54)$$

Ezután alulról felfele haladva soronként visszahelyettesítünk. Először az utolsó sort a felette levő sorok utolsóelőtti elemével beszorozva azokból levonjuk, így az utolsóelőtti oszlop nemdiagonális tagjai zérók lesznek:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{1,2} & \dots & 0 & b_1 - b_n \cdot a_{1,n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 - b_n \cdot a_{2,n} \\ \dots & & & & \dots \\ 0 & 0 & & 1 & b_n \end{bmatrix}. \quad (1.55)$$

A műveletet felfele haladva addig ismételjük, míg a kiterjesztett mátrix bal oldalán az $n \times n$ -es egységmátrix jelenik meg. Ekkor az utolsó oszlop a keresett megoldást, a csomóponti elmozdulásokat tartalmazza:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & D_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & D_2 \\ \dots & & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & D_n \end{bmatrix}. \quad (1.56)$$

Megjegyzendő, hogy ez a módszer a $[\mathbf{K}]$ merevségi mátrix inverzének kiszámítására is alkalmas: ekkor a kiterjesztett mátrixot a $[\mathbf{K}]$ mátrix és a vele azonos méretű $[\mathbf{I}]$ egységmátrixsal építjük fel. A Gauss-elimináció lépéseit elvégezvén $[\mathbf{K}]$ helyén az $[\mathbf{I}]$ egységmátrix, $[\mathbf{I}]$ helyén pedig a keresett $[\mathbf{K}]^{-1}$ inverz mátrix jelenik meg.

1.1.8. Első- és másodrendű ismeretlenek

A szerkezet egyensúlyát kifejező lineáris egyenletrendszer megoldása az *elsőrendű ismeretlenek*, a csomópontok elmozdulását és a reakcióerőket adja. A szerkezet szilárdságtani leírásának szempontjából ezek a mennyiségek kevésbé hasznosak, mivel önmagukban nem nyújtanak információt a szerkezet elemeiben fellépő feszültségállapotról.

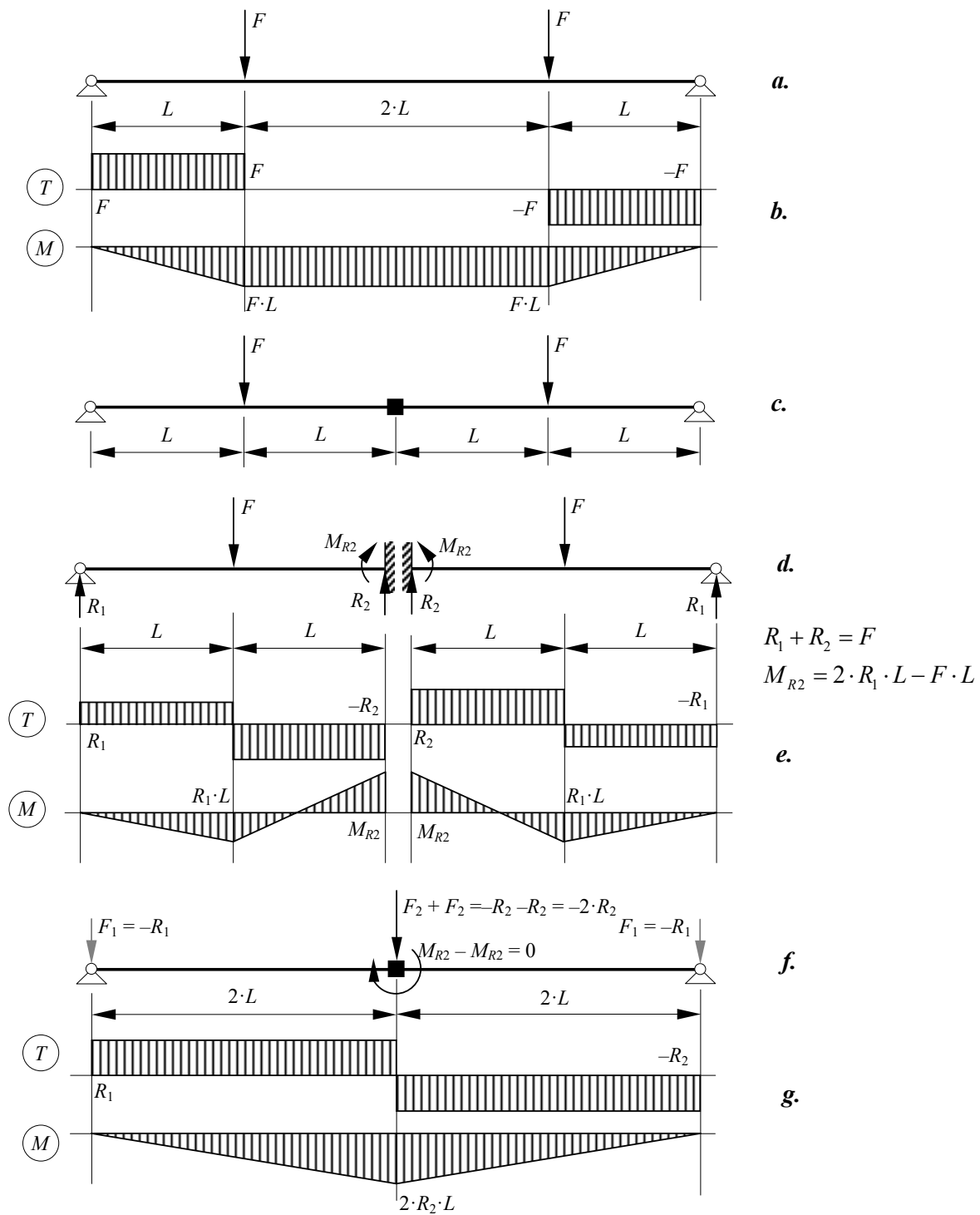
A csomópontok relatív elmozdulásából az elemek alakváltozását adó elemi $\{\mathbf{d}\}$ elmozdulásvektorok az 1.37. formájú inverz transzformációval a $\{\mathbf{D}\}$ vektor megfelelő elemeiből meghatározhatók. Ezekkel az elmozdulásokkal és az adott elem merevségi mátrixával a csomópontokban ható erők elemi $\{\mathbf{f}\}$ vektorát is előállíthatjuk, az 1.3. képlet szerint.

A rúdelemek tényleges igénybevételének megállapításához a csomópontokba koncentrált erők nem elegendők, hiszen a számítások kezdetekor a rúdelemet terhelő erőrendszert a reakcióerők segítségével redukáltuk a csomópontokba. A tényleges igénybevételi diagramokat a merevségi mátrix módszerével megállapított mennyiségek és az elkülönített rúdelemekre kiszámított mennyiségek összegzésével kapjuk.

Például legyen az 1.9.a. ábrán látható szerkezet, amelyet két rúdelemre bontunk (c. ábra). E rúdelemek illeszkedésük szerint egyik oldalon csuklós, másik oldalon mereven befogott elemek (d. ábra). Mivel e rudak sztatikailag határozatlan megtámasztásúak, a reakcióerők meghatározásakor az erőmódszer alapelveinek alkalmazása javasolt.

Az erőmódszerben a sztatikailag határozatlan szerkezetet a kényszerek egy részének megszüntetésével sztatikailag határozott szerkezetté (törzs-szerkezet) alakítjuk át. Példánkban ezt több féle képpen is megtehetjük, így a csuklók megszüntetésével is.

A megszüntetett kényszereket a törzs-szerkezeten a megfelelő ismeretlen reakcióerőkkel helyettesítjük. E reakcióerők meghatározásánál előírjuk, hogy azok a szerkezet terhelésével együtt a megszüntetett kényszerek irányában ugyanazokat az elmozdulásokat idézzék elő, mint amelyek az eredeti szerkezeten tapasztalhatók. Példánkban a csukló megszüntetése egy tengely irányú és egy arra merőleges reakcióerő bevezetését teszi szükségessé, a rúd e végpontjának elmozdulása mindkét irányban zérus kell legyen.



1.9. ábra. A számítás menetének illusztrálása

Az erőmódszer kanonikus egyenleteit az ismeretlen R_i reakcióerők irányában történő Δ_i elmozdulásokra írjuk fel (ezek többnyire zérus értékűek), általánosítva:

$$\begin{cases} \Delta_1 = \delta_{1,1} \cdot R_1 + \delta_{1,2} \cdot R_2 + \dots + \delta_{1,n} \cdot R_n + \Delta_{1,0} \\ \Delta_2 = \delta_{2,1} \cdot R_1 + \delta_{2,2} \cdot R_2 + \dots + \delta_{2,n} \cdot R_n + \Delta_{2,0} \\ \dots \\ \Delta_n = \delta_{n,1} \cdot R_1 + \delta_{n,2} \cdot R_2 + \dots + \delta_{n,n} \cdot R_n + \Delta_{n,0}, \end{cases} \quad (1.57)$$

ahol a $\delta_{i,j}$ együtthatók az egységnyi nagyságú R_j reakcióerő által az R_i irányában előidézett elmozdulást adják, a $\Delta_{i,0}$ mennyiségek pedig a szerkezet terhelése által az R_i irányában okozott elmozdulásokat jelentik.

Ezen elmozdulásokat a sztatikailag determinált törzs-szerkezeten számítjuk, a Maxwell-Mohr egyenletekkel:

$$\begin{aligned} \delta_{i,j} = & \int \frac{n_i \cdot n_j}{E(x) \cdot A(x)} dx + \int \frac{m_{ti} \cdot m_{tj}}{G(x) \cdot I_t(x)} dx + \int \frac{k_y(x) \cdot t_{yi} \cdot t_{yj}}{G(x) \cdot A(x)} dx + \int \frac{k_z(x) \cdot t_{zi} \cdot t_{zj}}{G(x) \cdot A(x)} dx + \\ & + \int \frac{(t_{yi} \cdot x - m_{zi}) \cdot (t_{yj} \cdot x - m_{zj})}{E(x) \cdot I_z(x)} dx + \int \frac{(t_{zi} \cdot x - m_{yi}) \cdot (t_{zj} \cdot x - m_{yj})}{E(x) \cdot I_y(x)} dx, \end{aligned} \quad (1.58)$$

ahol a tagokban szereplő, a szerkezet tengelye mentén számított integrálok alatt rendre az 1.1.4. fejezetben leírt, az n_i , m_{ti} stb. igénybevételek által előidézett elemi elmozdulások és elfordulások és az n_j , m_{tj} stb. erők, illetve nyomatékok szorzatait találjuk. E kis betűkkel jelölt igénybevételeket a törzs-szerkezeten számított diagramokról olvashatjuk le, amelyek megszerkesztésénél e szerkezetet csak az alsó indexnek megfelelő egységnyi reakcióerővel terheljük. Tehát például ha az n_i mennyiségre van szükségünk, akkor a törzs-szerkezet axiális igénybevételi diagramját kell megszerkesztenünk amikor annak terhelését csak az $R_i = 1$ erő jelenti. Észrevehetjük, hogy $\delta_{i,j} = \delta_{j,i}$.

A $\Delta_{i,0}$ elmozdulásokat ugyanígy kapjuk, ekkor a j indexű tagokat a szerkezet külső terhelésével számított igénybevételekkel helyettesítjük.

Megjegyzendő, hogy a rúdszerkezeteknél a nyíróerők hatása elhanyagolható, ezért a gyakorlatban a fenti formulából a megfelelő tagok rendszerint hiányoznak:

$$\delta_{i,j} = \int \frac{n_i \cdot n_j}{E(x) \cdot A(x)} dx + \int \frac{m_{ti} \cdot m_{tj}}{G(x) \cdot I_t(x)} dx + \int \frac{m_{zi} \cdot m_{zj}}{E(x) \cdot I_z(x)} dx + \int \frac{m_{yi} \cdot m_{yj}}{E(x) \cdot I_y(x)} dx; \quad (1.59)$$

továbbá igen gyakran elhanyagolják a tengelyirányú igénybevételek hatását is (ekkor az első integrál is hiányzik).

A kanonikus egyenletrendszer együtthatóit és szabad tagjait meghatározván, a lineáris egyenletrendszer megoldásával a keresett reakcióerőkhöz jutunk.

A példánkban szereplő sztatikailag határozatlan rúdelemből származtatott törzs-tartó az 1.10. ábrán látható, alatta pedig a Maxwell-Mohr képletekhez szükséges igénybevételi diagramokat szerkesztettük meg.

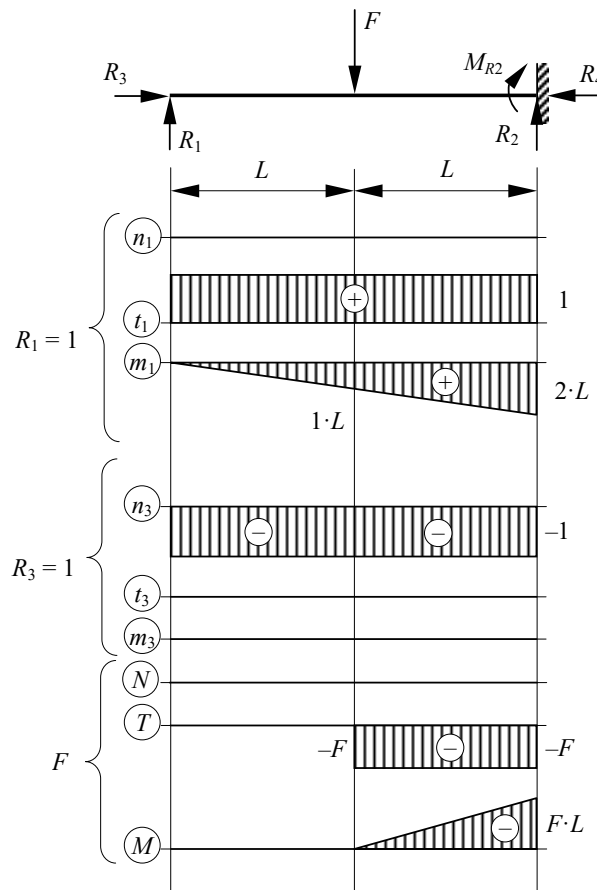
Ha a nyíróerők hatását elhanyagoljuk, akkor a $\Delta_{i,0}$ tagot a következő módon határozhatjuk meg:

$$\Delta_{1,0} = \int \frac{n_1 \cdot N}{E(x) \cdot A(x)} dx + \int \frac{m_1 \cdot M}{E(x) \cdot I_z(x)} dx. \quad (1.60)$$

Mivel az n_1 diagram végig zérus értékű, az első integrál nyilvánvalóan zérus lesz. A második integrál kiszámításánál az $m_1(x)$ és az $M(x)$ függvények szorzatát kell integrálni. Amennyiben ezt az integrált kézzel szeretnénk kiszámítani és ha legalább az egyik függvény lineáris, akkor a következő szabály szerint járhatunk el:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = A \cdot h, \quad (1.61)$$

ahol A az $f(x)$ függvény alatti terület és h a lineáris $g(x)$ függvénynek az A geometriai középpontjánál mért ordinátája.



1.10. ábra. A Maxwell-Mohr egyenletekhez szükséges igénybevételi ábrák

Legyen most A az M diagram területe, amelyet az ábrából $-F \cdot L^2 / 2$ nagyságúnak kapunk. Ennek geometriai középpontja a jobb oldalról mért $L/3$ távolságra van, ott pedig az m_1 diagram ordinátáját $5 \cdot L/3$ nagyságúnak kapjuk. Ha a rúd keresztmetszete állandó és anyaga homogén, akkor $\Delta_{1,0}$ értéke

$$\Delta_{1,0} = -\frac{5 \cdot F \cdot L^3}{6 \cdot E \cdot I_z} \quad (1.62)$$

lesz.

A $\Delta_{3,0}$ tag, mivel az m_3 diagram végig zérus, nulla lesz. A $\delta_{1,1}$ értéket az m_1 diagram önmagával való megszorzásával kapjuk, értéke $8 \cdot L^3 / (3 \cdot E \cdot I_z)$. A $\delta_{1,3} = \delta_{3,1}$ tagok zérók lesznek, $\delta_{3,3}$ pedig az n_3 diagram önmagával való megszorzásával határozható meg, értéke $2 \cdot L / (E \cdot A)$.

A négy meghatározott együtthatóval és a két szabadtaggal a megoldandó egyenletrendszer

$$\begin{cases} \delta_{1,1} \cdot R_1 + \delta_{1,3} \cdot R_3 = -\Delta_{1,0} \\ \delta_{3,1} \cdot R_1 + \delta_{3,3} \cdot R_3 = -\Delta_{3,0} \end{cases} \quad (1.63)$$

lesz, megoldásként R_3 -ra zérót, R_1 -re pedig az $5 \cdot F / 16$ értéket kapjuk.

Tehát eddig megkaptuk a csuklóokban ható reakcióerőket. A rúd befogott végén fellépő R_2 és M_{R_2} reakciók meghatározása (1.9.d. ábra) már egyszerű feladat, hiszen az 1.10. ábrán látható sztatikailag determinált, az F és az R_1 erőkkel törzs-tartó reakcióit kell meghatározni. Az R_2 reakcióerő nagysága $11 \cdot F / 16$, az M_{R_2} nyomatéké pedig $6 \cdot F \cdot L / 16$ lesz.

Az így kapott reakcióerők tehát a csomópontokba koncentrált terhelést adják (1.9.f. ábra). A feladatnak a merevségi mátrix módszerével való megoldása után (amikor csak a csomópontokban ható erőkkel dolgozunk, tehát a tényleges terhelést az előbbieken kiszámított, fordított előjellel vett reakcióerők összegzésével a csomópontokba „koncentráljuk”) a 1.9.g. ábrán látható igénybevételi diagramokat kapjuk, amelyek nyilvánvalóan különböznek a tényleges, a szilárdságtan analitikus módszerével meghatározott 1.9.b. diagramoktól. Ez utóbbiakat úgy kapjuk meg, hogy a merevségi mátrix módszerével kapott 1.9.g. diagramokat összegezzük a rúdelemek 1.9.e. diagramjaival.

Az 1.58. Maxwell-Mohr egyenletekkel a rúdelemek deformált alakját is meghatározhatjuk. Ekkor a j indexű tagok az illető rúdelem tényleges igénybevételi diagramjainak felelnek meg, az i indexű tagok pedig a tanulmányozott pontban a kiszámítandó elmozdulás irányában ható egységnyi erővel megrajzolt igénybevételi diagramoknak felelnek meg. Ha ezeket az i pontokat eléggé sűrűn vesszük fel, akkor az e pontokban kiszámított elmozdulásokkal megszerkesztett deformált alak kielégítő pontosságú lesz.

Az igénybevételi diagramok segítségével a rúdelemek feszültségi állapotát (a $\{\sigma\}$ feszültségeket) és alakváltozási állapotát (az $\{\epsilon\}$ fajlagos alakváltozásokat) a rugalmasságtan módszereivel határozhatjuk meg. Az összenyomott rudakat kihajlásra is szokás ellenőrizni.

Ez utóbbi mennyiségek – a keresztmetszeti igénybevételek, a feszültségek és a fajlagos alakváltozások és a segítségükkel definiált egyéb mennyiségek (egyenértékű feszültségek, biztonsági tényezők), valamint a deformált alak – a szerkezet állapotát jellemző *másodlagos ismeretleneket* alkotják.

1.2. Az elmozdulás-módszer, mint a végeelem-módszer alapja

Az elmozdulás-módszer rendkívül hatékonyan bizonyult, hiszen segítségével – legalábbis elvileg, hiszen a merevségi mátrix módszer megszületésekor még nem léteztek számítógépek –, bármilyen bonyolultságú rudakból álló szerkezetet könnyedén lehetett modellezni, így például az 1.11. ábrán látható távvezeték-tartóoszlopot is.

Felvetődött tehát annak a kérdésnek a tanulmányozása, hogy e módszer alkalmazása kiterjeszhető-e a több dimenziós elemekből felépített szerkezetek modellezésére és hogy azt lehet-e más jellegű (nemcsak rugalmasságtani) feladatok megoldására használni.

A rúdelemekből álló szerkezetekhez hasonlóan az 1940-es évek első felében megpróbálták a merevségi mátrix módszerét többdimenziós elemekből álló szerkezetekre is alkalmazni. Egy ilyen kísérlet volt az A. Hrennikoff és D. McHenry nevéhez kötődő rács-analógia, amely a tanulmányozandó szerkezetet egy rudakból felépített rácsos szerkezettel próbálta helyettesíteni úgy, hogy ez utóbbi lehetőleg az eredeti szerkezethez hasonló módon viselkedjen. Természetesen ez az analógia a valóság meglehetősen durva megközelítése volt, s bár az alkalmazásával a kapott eredmények helyessége megkérdőjelezhető, mégis bizonyos elemeit egyes közelítő számítási eljárásokban egészen napjainkig fellelhetjük. A rácsanalógia alkalmazhatóságát a bizonytalan számítási eredmények mellett a számítógépek hiánya is korlátozta, éppen ezért az nem vált egy általános mérnöki eljárássá.

A fejlődés előtt azonban, szintén az 1940-es évek első felében, megnyílt egy másik lehetőség is: egy amerikai mérnök, R. Courant három tudós, III. Rayleigh báró – eredeti nevén J. W. Strutt –, W. Ritz és B. Galerkin (Galjorkin) korábbi eredményeire támaszkodva a rudak csavarásának leírására felírt differenciálegyenletet a mai végeselem-módszerhez hasonló eljárással oldotta meg: a rúd keresztmetszetét háromszög alakú tartományokra osztotta fel, a tanulmányozandó függvényt pedig e tartományok felett lineárisan közelítette. A végeselem-módszer megszületését ehhez az 1943-ban publikált eljáráshoz köthetjük, amely azonban alkalmazhatóságát tekintve, a sokismeretlenes egyenletrendszer miatt, közlésének idején nem bizonyult hasznosnak és hamarosan feledésbe is merült. A számítógép, mint mérnöki feladatok megoldására alkalmas eszköz, csak ezután jelent meg.

Később, a számítógépek elterjedésével a számítási módszerek is fejlődni kezdtek. Az első próbálkozások intuitív mérnöki meglátás szerint történtek, a végeselem-módszer szempontjából az első fontosabb eredményeket 1953-ban tették közzé (maga a „végeselem” megnevezést csak később, 1960-ban vezette be R. W. Clough). 1963-ban született meg az a felfedezés, hogy a végeselem-módszer tulajdonképpen a variációs feladat Ritz-Galerkin megoldása egy társított funkcionál minimalizálásával, tehát a Courant által 1943-ban publikált eljárás megvalósítása. A módszer elméleti alapjainak kidolgozása a végeselem-módszer egyéb fizikai feladatokra való kiterjesztését is lehetővé tette, 1965-ben már hővezetéssel és folyadékok szivárgásával kapcsolatos feladatokat oldottak meg vele. Hamarosan a lengéstani és a nemlineáris feladatok megoldása is megvalósult. A módszer hatékonysága a számítógépek fejlődésével tovább növekedett és folyamatosan fejlődik napjainkban is.

Összehasonlítván a végeselem-módszer és a merevségi mátrix módszerének jellemző lépéseit azt tapasztaljuk, hogy ez utóbbi a végeselemes analízis minden jellemző elemét tartalmazza. Végző következtetésként elmondható, hogy az elmozdulás-módszer mátrixos leírása a végeselem-módszer legegyszerűbb formája, úgynevezett *közvetlen* megfogalmazása. A „közvetlen” jelző a strukturális egyensúlyt kifejező egyenletrendszer felállítására, tehát a merevségi mátrix meghatározására vonatkozik, amely – az elemek viselkedését közvetlenül ismervén – egyszerű megfontolások és törvényszerűségek alapján történik.



1.11. ábra. Az elmozdulás-módszerrel elemezhető rácsos szerkezet

2. A VARIÁCIÓS ELJÁRÁS

2.1. A megoldandó feladat

A kontinuum mechanikájának alapvető problémája a testre ható erők hatására kialakuló feszültségállapot és deformációs állapot kiszámítása, a megadott peremfeltételek mellett. E feladatot három szempont szerint megállapított egyenletek írják le.

2.1.1. A geometriai aspektus

A *geometriai aspektus* egyenletei (az „összeférhetőségi” egyenletek) az ε és a γ fajlagos deformációk definícióját adják:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \partial u / \partial x, & \gamma_{xy} &= \gamma_{yx} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x, \\ \varepsilon_y &= \partial v / \partial y, & \gamma_{yz} &= \gamma_{zy} = \partial v / \partial z + \partial w / \partial y, \\ \varepsilon_z &= \partial w / \partial z, & \gamma_{zx} &= \gamma_{xz} = \partial w / \partial x + \partial u / \partial z,\end{aligned}\tag{2.1}$$

ahol u , v és w a térbeli \mathbf{d} elmozdulás x , y és z tengelyre eső vetületei. Ezeket az egyenleteket egy megfelelően felépített $[\partial]$ operátor-mátrixszal a rövidebb

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\partial] \cdot \{\mathbf{d}\}\tag{2.2}$$

formára hozhatjuk, amelynek kifejtése:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [\partial] \cdot \{\mathbf{d}\},\tag{2.3}$$

ahol a fajlagos szögváltozás dualitása miatt a bal oldalon csak a hat független mennyiség szerepel. Itt $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ a fajlagos alakváltozások vektora.

2.1.2. A statikai aspektus

Egy rugalmas test esetében a térfogati f_x , f_y és f_z erők (a térbeli \mathbf{f} erő vetületei) és a fellépő normálfeszültségek egyensúlyát adó Navier egyenletek, valamint a nyírófeszültségek dualitását kifejező Cauchy-féle azonosságok (ez utóbbiak a nyomatékok egyensúlyi feltételéből származnak) a feladat *statikai aspektusát* írják le:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= -f_x, & \tau_{xy} &= \tau_{yx}, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= -f_y, & \tau_{xz} &= \tau_{zx}, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} &= -f_z, & \tau_{yz} &= \tau_{zy}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Az előbbi operátorral ezeket az egyenleteket

$$\{\mathbf{f}\} = -[\boldsymbol{\partial}]^T \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} \quad (2.5)$$

formára hozhatjuk, ahol $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ a feszültségek vektora. Mátrixos formában most is elegendő a független mennyiségekkel dolgoznunk:

$$\{\mathbf{f}\} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = -[\boldsymbol{\partial}]^T \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\}. \quad (2.6)$$

2.1.3. A fizikai aspektus

A *fizikai aspektust*, a feszültségek és a deformációk közötti összefüggéseket lineárisan rugalmas anyagok esetében Hooke általánosított törvénye adja (ez a lineárisan rugalmas *anyagegyenlet*). Ha az anyag izotróp, akkor Hooke törvényét a következő relációk írják le:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

ahol az anyag rugalmasságtani tulajdonságait leíró E Young-modulusz, ν Poisson-együttható és a G nyírási modulusz között fennáll a

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (2.8)$$

reláció. Ezeket az egyenleteket is felírhatjuk mátrixos formában:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{E}] \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\}, \quad (2.9)$$

ahol a rugalmassági mátrix (az anyag merevségi mátrixa):

$$[\mathbf{E}] = \frac{E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2 \cdot \nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2 \cdot \nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2 \cdot \nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Megjegyzendő, hogy az anizotróp anyag általános esetében a rugalmassági mátrixot

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} & C_{1,4} & C_{1,5} & C_{1,6} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} & C_{2,4} & C_{2,5} & C_{2,6} \\ C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} & C_{3,4} & C_{3,5} & C_{3,6} \\ C_{4,1} & C_{4,2} & C_{4,3} & C_{4,4} & C_{4,5} & C_{4,6} \\ C_{5,1} & C_{5,2} & C_{5,3} & C_{5,4} & C_{5,5} & C_{5,6} \\ C_{6,1} & C_{6,2} & C_{6,3} & C_{6,4} & C_{6,5} & C_{6,6} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

formában adhatjuk meg, amely bizonyíthatóan egy szimmetrikus mátrix ($C_{i,j} = C_{j,i}$), huszonegy, kísérletileg meghatározandó független taggal. A tagok értelmezéséhez a fizikai aspektus egyenletét

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{E}]^{-1} \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}] \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\}, \quad (2.12)$$

formában írjuk fel, ahol a rugalmassági mátrix inverze az anyag $[\mathbf{D}]$ hajlékonysági mátrixa, amely az $[\mathbf{E}]$ mátrix tulajdonságaival rendelkezik. Ez az egyenlet végső soron a szuperpozíciós elv alapján határozza meg a fajlagos alakváltozásokat.

Ha a testben csak egytengelyű (lineáris) feszültségállapotot hozunk létre, akkor az a legáltalánosabb esetben mindhárom irányban alakváltozásokhoz vezet. Például a σ_x feszültség által kiváltott fajlagos alakváltozások:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_x} \cdot \sigma_x, & \varepsilon_y &= -\frac{\nu_{yx}}{E_x} \cdot \sigma_x, & \varepsilon_z &= -\frac{\nu_{zx}}{E_x} \cdot \sigma_x, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\eta_{xy,x}}{E_x} \cdot \sigma_x, & \gamma_{yz} &= \frac{\eta_{yz,x}}{E_x} \cdot \sigma_x, & \gamma_{zx} &= \frac{\eta_{zx,x}}{E_x} \cdot \sigma_x, \end{aligned} \quad (2.13)$$

ahol E az adott normál feszültség irányában érvényes rugalmassági tényező (a Young-modulusz), a ν -vel jelölt mennyiségek a harántirányú összehúzódás tényezői (a Poisson-együtthatók, a fajlagos lineáris alakváltozások kölcsönhatási tényezői), míg az η együtthatók a fajlagos lineáris alakváltozás és a fajlagos szögváltozás kölcsönhatási tényezői. E tényezők kísérletileg megállapított, az adott anyagra jellemző mennyiségek. A σ_y és a σ_z feszültségek által előidézett alakváltozásokra (egytengelyű feszültségállapotban) hasonló összefüggések határozhatók meg.

A nyírófeszültségek is minden irányban alakváltozást okoznak, például a τ_{xy} csúsztatófeszültség által létrehozott fajlagos alakváltozások:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\eta_{x,xy}}{G_{xy}} \cdot \tau_{xy}, & \varepsilon_y &= \frac{\eta_{y,xy}}{G_{xy}} \cdot \tau_{xy}, & \varepsilon_z &= \frac{\eta_{z,xy}}{G_{xy}} \cdot \tau_{xy}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{xy}} \cdot \tau_{xy}, & \gamma_{yz} &= \frac{\mu_{yz,xy}}{G_{xy}} \cdot \tau_{xy}, & \gamma_{zx} &= \frac{\mu_{zx,xy}}{G_{xy}} \cdot \tau_{xy}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

ahol G a megfelelő síkban felvett nyírási rugalmassági tényező, a μ -vel jelölt mennyiségek a fajlagos szögváltozások kölcsönhatási tényezői. Hasonló összefüggéseket állapíthatunk meg a τ_{yz} és a τ_{zx} csúsztatófeszültségek esetében is. A különböző G és μ mennyiségek szintén kísérleti úton megállapított anyagjellemző mennyiségek.

Az általános, térbeli feszültségállapotban tehát a fenti hatások irányonként egymásra tevődnek és a 2.12. anyagegyenlet a következőképpen alakul:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{-\nu_{xy}}{E_y} & \frac{-\nu_{xz}}{E_z} & \frac{\eta_{x,xy}}{G_{xy}} & \frac{\eta_{x,yz}}{G_{yz}} & \frac{\eta_{x,zx}}{G_{zx}} \\ \frac{-\nu_{yx}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \frac{-\nu_{yz}}{E_z} & \frac{\eta_{y,xy}}{G_{xy}} & \frac{\eta_{y,yz}}{G_{yz}} & \frac{\eta_{y,zx}}{G_{zx}} \\ \frac{-\nu_{zx}}{E_x} & \frac{-\nu_{zy}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & \frac{\eta_{z,xy}}{G_{xy}} & \frac{\eta_{z,yz}}{G_{yz}} & \frac{\eta_{z,zx}}{G_{zx}} \\ \frac{\eta_{xy,x}}{E_x} & \frac{\eta_{xy,y}}{E_y} & \frac{\eta_{xy,z}}{E_z} & \frac{1}{G_{xy}} & \frac{\mu_{xy,yz}}{G_{yz}} & \frac{\mu_{xy,zx}}{G_{zx}} \\ \frac{\eta_{yz,x}}{E_x} & \frac{\eta_{yz,y}}{E_y} & \frac{\eta_{yz,z}}{E_z} & \frac{\mu_{yz,xy}}{G_{xy}} & \frac{1}{G_{yz}} & \frac{\mu_{yz,zx}}{G_{zx}} \\ \frac{\eta_{zx,x}}{E_x} & \frac{\eta_{zx,y}}{E_y} & \frac{\eta_{zx,z}}{E_z} & \frac{\mu_{zx,xy}}{G_{xy}} & \frac{\mu_{zx,yz}}{G_{yz}} & \frac{1}{G_{zx}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}. \quad (2.15)$$

Ebben az egyenletben egyszerűsítésképpen nem szerepelnek a γ_{yx} , a γ_{zy} és a γ_{zx} fajlagos szögváltozások és a megfelelő csúsztatófeszültségek, azok dualitása miatt. Ha a relációt teljesebb formájában szeretnénk felírni ezen kihagyott tagok explicit kifejezésével, akkor a fajlagos deformációkat és a feszültségeket egy-egy főátlóra nézve szimmetrikus $[\varepsilon]$, illetve $[\sigma]$ mátrixba kellene rendeznünk és a közöttük levő lineáris arányosságot egy negyedrendű, 81 tagú tenzonnal tudnánk leírni. E tenzorban további G , η és μ tényezők jelennének meg, amelyeket az indexek permutációjával állíthatunk elő.

A 2.15. egyenlet mátrixának tagjait tehát fizikai értelemmel rendelkező moduluszokkal és tényezőkkel írtuk le. A mátrix szimmetriája miatt, a $D_{i,j} = D_{j,i}$ egyenlőségekből e mennyiségek között különböző összefüggések állapíthatók meg. A hajlékonysági mátrix megfordításából származó rugalmassági mátrix tagjait is ezen fizikai értelemmel rendelkező mennyiségekkel írhatjuk fel és bonyolult kifejezésekhez jutunk.

A gyakorlati szempontból érdekesebb ortotrop anyagok rugalmassági mátrixa az előbbinél egyszerűbb, az csak kilenc független mennyiséget foglal magába:

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} & 0 & 0 & 0 \\ C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{4,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{5,5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{6,6} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Tagjait három Young-modulusz és hat Poisson-együttható segítségével definiálhatjuk. A szögváltozások nincsenek kölcsönhatásban egymással és a lineáris alakváltozásokkal, tehát az η és μ együtthatók értéke mind zéró:

$$[\mathbf{E}]^{-1} = [\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{xy}/E_y & -\nu_{xz}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{yx}/E_x & 1/E_y & -\nu_{yz}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{zx}/E_x & -\nu_{zy}/E_y & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{zx} \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

A mátrix szimmetriája miatt például

$$\nu_{yx} \cdot E_x = \nu_{xy} \cdot E_y, \quad (2.18)$$

a nyírási moduluszt pedig E és ν függvényében is ki lehet fejezni, például:

$$G_{xy} = G_{yx} = \frac{E_x \cdot E_y}{E_x \cdot (1 + \nu_{yx}) + E_y \cdot (1 + \nu_{xy})}. \quad (2.19)$$

Amennyiben az anyag izotróp, akkor a Young-modulusz és a Poisson-együttható nagysága minden irányban ugyanaz, az anyagegyenletet két független paraméter írja le:

$$[\mathbf{E}]^{-1} = [\mathbf{D}] = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \cdot (1 + \nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \cdot (1 + \nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \cdot (1 + \nu) \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

a 2.10. rugalmassági mátrix pedig ennek az inverze.

A fizikai aspektus egyenleteit általános, térbeli alakváltozási és feszültségi állapotra írtuk fel. A lineáris (egytengelyű) állapotokon túlmenően fontos a sík állapotok tanulmányozása, ugyanis a gyakorlatban sokszor előfordul az az eset, amikor rugalmasságtani vizsgálódásaink egy sík tartományra vonatkoznak. Ez a sík tartomány lehet egy alkalmasan megválasztott metszet vagy pedig egy olyan test középfelülete, melynek egyik mérete (a vastagsága) elhanyagolható a másik két méretéhez viszonyítva.

Az anyagegyenletből következően, még az izotróp esetben is, a valamely tengely irányában ható feszültség harántirányú alakváltozásokat okozhat és fordítva: a valamely tengely irányában fellépő alakváltozás arra merőleges feszültségeket hozhat létre. Következésképpen, bizonyos sajátosságos esetektől eltekintvén, a lineáris vagy sík feszültségállapot általános esetben térbeli alakváltozási állapothoz vezet és fordítva, a lineáris vagy sík alakváltozási állapot térbeli feszültségállapotot feltételez.

A feszültségállapotot síknak nevezzük, ha feszültségvektornak csak két tengelyre eső vetülete van, például:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad 0 \quad \tau_{xy} \quad 0 \quad 0]^T. \quad (2.21)$$

Ez az eset fordul elő egy hajlított tartó tanulmányozásakor, amikor egy függőleges sík hosszmetszetre szorítkozunk, ahol a tengelyirányú σ_x normálfeszültséget Navier képlete, a τ_{xy} nyírófeszültséget pedig Juravski (Zsuravszkij) képlete adja.

A tengelyirányú feszültség azonban keresztirányú alakváltozást is okoz, tehát a síkra merőleges irányban fellépő fajlagos lineáris alakváltozás, amint az a 2.9. képletből számítható:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y). \quad (2.22)$$

A sík feszültségi állapot tehát általában (ha $\sigma_x \neq -\sigma_y$) térbeli deformációs állapothoz vezet.

ε_z elhagyásával a fajlagos deformációk és a feszültségek közötti egyszerűsített összefüggés izotróp anyagra:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot (1 + \nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

(ezt az összefüggést a térbeli $\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{E}]^{-1} \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\}$ reláció egyszerűsítésével kapjuk), amelynek inverze:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.24)$$

Az anizotróp és ortotróp anyagok sík feszültségi állapotára vonatkozó anyagegyenleteket, a megfelelő rugalmassági és hajlékonysági mátrixszal hasonlóképpen állítjuk elő.

Amikor ezeket az egyszerűsített mátrixos képleteket használjuk, az ε_z -t adó formulát (2.22) is mellékelnünk kell (azt az egyszerűség kedvéért nem foglalják bele e mátrixos formákba).

A sík deformációs állapot vektora szintén csak két tengely irányába eső vetületeket tartalmaz, például:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad 0 \quad \gamma_{xy} \quad 0 \quad 0]^T. \quad (2.25)$$

Sík deformációs állapottal találkozunk például egy belső nyomás által terhelt egyenes csőszakasz keresztmetszetén, amikor a cső hosszirányú alakváltozását meggátoljuk.

A harmadik irányban, az alakváltozás meggátolása miatt fellépő feszültség, izotróp anyag esetén

$$\sigma_z = \frac{E \cdot \nu}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y), \quad (2.26)$$

tehát a sík deformációs állapot általában (ha $\varepsilon_x \neq -\varepsilon_y$) térbeli feszültségállapotot von maga után.

σ_z elhagyásával a feszültségek és a fajlagos alakváltozás közötti kapcsolatot az általános 2.9. kifejezés egyszerűsítésével kapott

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2 \cdot \nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

reláció adja, ennek inverze pedig

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1-\nu^2 & -\nu \cdot (1+\nu) & 0 \\ -\nu \cdot (1+\nu) & 1-\nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot (1+\nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.28)$$

Ha e két utóbbi képletet használjuk, akkor a 2.26. relációt is mellékelnünk kell.

A sík feszültségi és a sík deformációs állapot egyenleteit összehasonlítva láthatjuk, hogy azok lényegesen különböznek egymástól. Egy sík feladat esetében tehát igen fontos az éppen érvényes eset azonosítása, egyébként a valóságtól igen eltérő számítási eredményekhez juthatunk.

2.1.4. A rugalmasságtani feladatot leíró differenciálegyenlet

A három aspektus egyenleteit (2.2, 2.5 és 2.9) kombinálva egy újabb egyenletrendszerhez jutunk, amely az erők és az elmozdulások közötti közvetlen kapcsolatot adja:

$$\{\mathbf{f}\} = -[\boldsymbol{\partial}]^T \cdot [\mathbf{E}] \cdot [\boldsymbol{\partial}] \cdot \{\mathbf{d}\}. \quad (2.29)$$

A tanulmányozott jelenségeket tehát differenciálegyenletek írják le, a keresett megoldás pedig az elmozdulás vetületeit leíró függvények alkotják. Differenciálegyenleteket csak peremfeltételek megadásával tudunk megoldani. A megoldásához szükséges peremfeltételek között általában három típust különböztetnek meg.

A Dirichlet-féle „lényeges” vagy „esszenciális” peremfeltételek a keresett φ megoldásfüggvény értékét írják elő a tanulmányozott tartomány bizonyos részein, például:

$$\varphi|_{\Gamma_1} = a, \quad \Gamma_1 \in \Gamma \quad (2.30)$$

formában. Itt az a mennyiség az adott Γ_1 részen definiált függvény is lehet (ezek a részek nem kell szükségszerűen a tartomány tényleges geometriai peremén legyenek). A Dirichlet típusú peremfeltétel tehát esetünkben a \mathbf{d} elmozdulást írja elő: a szerkezet bizonyos pontjainak adott irányú elmozdulását meggátolhatjuk (az előírt elmozdulás zérus), vagy pedig annak valamilyen értéket adunk (például a támasz megereszkedésekor).

A Neumann-típusú „természetes” peremfeltételek a megoldásfüggvény változásának mértékét (valamely deriváltját vagy például a gradiensét) írják elő. Ezt a változást rendszerint a peremre merőleges irányban adják meg:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\Gamma_2} = b, \quad \Gamma_2 \in \Gamma. \quad (2.31)$$

A fizikai jelenségeket leíró differenciálegyenletek esetében e mennyiségeknek jól meghatározott jelentésük van. A keresett megoldásfüggvény az elmozdulást írja le, annak deriváltjai pedig a 2.1. egyenletekkel a fajlagos alakváltozásokkal, ez utóbbiak pedig a feszültségekkel hozhatók kapcsolatba. A szerkezetek elemzésében a Neumann-féle peremfeltételek a szerkezetre ható \mathbf{p} külső nyomást vagy felületi erőt írják elő; a peremeken a feszültség e nyomással vagy felületi erővel kell egyensúlyban legyen.

A Cauchy-féle „vegyes” peremfeltételek egyszerre írják elő a függvény értékét és a függvény változásának mértékét is:

$$c_1 \cdot \varphi + c_2 \cdot \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\Gamma_3} = c, \quad \Gamma_3 \in \Gamma. \quad (2.32)$$

Cauchy-féle vegyes peremfeltétel esetünkben a megadott formában nem írható fel, ugyanis a két egyszerű feltétel által előírt mennyiségek (a külső erők és az elmozdulások) egymástól nem

függetlenek. Van azonban a rugalmasságtani feladatnak egy harmadik típusú peremfeltétele, amikor bizonyos pontokban a reakcióerő az elmozdulás közötti kapcsolatot határozzuk meg: ez a rugalmas alátámasztások esete. Ez a 2.32. peremfeltétel azon egyedi formájával hozható kapcsolatba, amikor c értéke nulla és azt

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\Gamma_3} = -\frac{c_1}{c_2} \cdot \varphi, \quad \Gamma_3 \in \Gamma \quad (2.33)$$

alakra hozzuk: a bal oldalon a reakcióerőt, a jobb oldalon pedig a rugalmas támasz $k = -c_1/c_2$ merevségi együtthatójával beszorzott elmozdulást ismerhetjük fel.

Ahhoz, hogy a feladat megoldása matematikai szempontból determinált legyen, e feltételeket a perem teljes egészén meg kell adnunk. Ez a kitétel, mely szerint az egyértelmű megoldás érdekében a perem teljes egészén meg kell adnunk valamilyen típusú feltételt, nem mond ellen az előbbi fejezetben megállapítottakkal. Ott ugyanis a peremfeltételeket adott (nem nulla) erő vagy elmozdulás formájában értelmeztük és így voltak olyan peremrészek is, ahol explicit módon nem írtunk elő semmit (például azt nem rögzítettük és nem írtunk elő ottan ható külső erőt sem). Ezzel azonban mégiscsak előírtunk valamit: a perem „szabad” részein, ahol sem az erőt, sem az elmozdulást nem írtuk elő, tulajdonképpen nulla nagyságú külső erők hatnak és ott tehát Neumann-típusú peremfeltételek érvényesek.

2.2. A feladat megoldásának lehetőségei

Az előbbi fejezetben megadott 2.29. differenciálegyenlet-rendszer által leírt feladat – az „erős” (*strong*) forma – analitikus megoldása (az elmozdulásfüggvény kiszámítása) csak néhány igen egyszerű esetben lehetséges, ezért általában valamilyen közelítő módszert kell alkalmaznunk.

Az egyik ilyen lehetőség a végeselem-módszer a *variációs eljárása*, mely a tanulmányozott feladatot leíró differenciálegyenlet-rendszer megoldását adó függvényeket úgy határozza meg, hogy azok egy társított (a feladattal asszociált) E skaláris funkcionál minimumához vezessenek:

$$\delta E = 0; \quad (2.34)$$

ezt a formát „gyengének” (*weak*) nevezik.

Ennek az eljárásnak az alapelvét bizonyos fizikai észrevételek alkotják: az említett differenciálegyenletek közvetlen megoldása helyett egy másfajta egyenletet oldunk meg, amely ugyanazt a fizikai jelenséget írja le, de más szemszögből. Az egyik feladatnak a másikkal történő kiváltása, a társított E funkcionál mibenlétének megállapítása tehát nem egy tisztán matematikai levezetés eredménye, hanem a tanulmányozott jelenség fizikai törvényeire alapoz.

Ezen eljárás alapötlete a rugalmasságtani feladat megoldására tett kísérletek során merült fel. A tanulmányozott testet ugyan a három felsorolt aspektus egyenleteivel is leírhatjuk, de ugyanakkor azt is tudjuk, hogy nyugalmi egyensúlyi helyzetében e test potenciális energiájának minimuma van. A potenciális energia felírásában az ismeretlen elmozdulásokat adó függvény is megjelenik, amelyet a megoldás során a 2.34. minimumfeltételből határozunk meg.

A feladathoz társított funkcionál tehát a szerkezet potenciális energiája:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \int_V \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} dV + \int_V \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T \cdot \{\boldsymbol{\sigma}_0\} dV - \int_V \{\boldsymbol{d}\}^T \cdot \{\boldsymbol{f}\} dV - \int_S \{\boldsymbol{d}\}^T \cdot \{\boldsymbol{p}\} dS - \int_l \{\boldsymbol{d}\}^T \cdot \{\boldsymbol{q}\} dl - \sum_i \boldsymbol{d}_i \cdot \boldsymbol{F}_i. \quad (2.35)$$

E kifejezésben az első integrál az alakváltozási energiával, a második integrál a szerkezetben esetleg jelen levő $\boldsymbol{\sigma}_0$ kezdeti feszültségekhez köthető deformációs energiával, a harmadik és a

negyedik tag pedig a térfogati, illetve a felületi erők mechanikai munkájával egyenlő. Térfogati erő például a gravitációs erő (a szerkezet saját súlya), míg a felületi erőket a szerkezetre ható külső erők alkotják. Ha vonal mentén eloszló q erőket is tekintünk (ez egy idealizált terhelési forma), akkor természetesen a mechanikai munkájukat adó tagot is számításba kell vennünk. Amennyiben idealizált F koncentrált erőkkel is dolgozunk, akkor e képletet ki kell egészítenünk ezen erők deformációs elmozdulásokból származó munkájának összegével is. Az első tagban szereplő feszültséget a 2.9. egyenlet alapján a fajlagos alakváltozással, ez utóbbit pedig a 2.2. összefüggés alapján az elmozdulással is megadhatjuk, így a 2.35. egyenletet tisztán az elmozdulás függvényeként is felírhatjuk.

A stacionaritást kifejező 2.34. egyenletet teljesítő φ (esetünkben: d) függvénynek analitikus kiszámítása legtöbbször lehetetlen feladat, éppen ezért közelítő eljárásokat kellett keresni. Így felmerült az az ötlet, hogy az egzakt, analitikus megoldást adó függvény helyett egy azt közelítő,

$$\varphi \approx \bar{\varphi} = N_1(x, y, z) \cdot a_1 + N_2(x, y, z) \cdot a_2 + \dots + N_n(x, y, z) \cdot a_n \quad (2.36)$$

formájú megoldásfüggvényt kell keresni, ahol az N_i függvények egymástól független, ismert matematikai kifejezésű *bázisfüggvények*, az a_i mennyiségek pedig független paraméterek, valós állandók (*általánosított koordináták*). Vektoriális mennyiségek közelítésekor a 2.36. vektoriális egyenletet három skaláris egyenlettel helyettesíthetjük. Az N_i bázisfüggvények megválasztásában tetszőlegesen járhatunk el, a gyakorlatban azonban egyszerűségük miatt az interpolációs polinomok használata terjedt el: ekkor az N_i függvények az x , y és z koordináták különböző hatványainak szorzatai.

Az E funkcionál a közelítő függvények használata esetében tehát csak az a_i paraméterektől (általánosított koordinátáktól) függ, a stacionaritás feltétele pedig a

$$\delta E = \frac{\partial E}{\partial a_1} \cdot \delta a_1 + \frac{\partial E}{\partial a_2} \cdot \delta a_2 + \dots + \frac{\partial E}{\partial a_n} \cdot \delta a_n = 0 \quad (2.37)$$

alakot ölti, ahol a δa_i mennyiségek a paraméterek zéróhoz tartó variációi, kicsiny valós számok. A fenti egyenlőség csak akkor áll fenn, ha

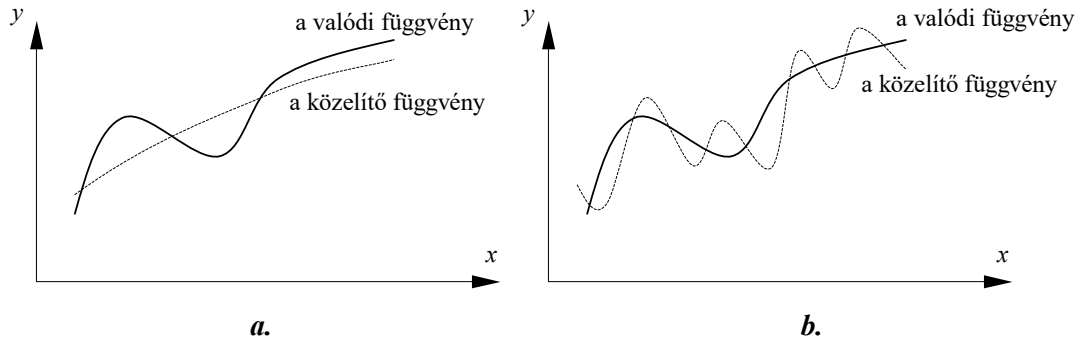
$$\left\{ \frac{\partial E}{\partial a_i} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial E}{\partial a_1} \\ \frac{\partial E}{\partial a_2} \\ \dots \\ \frac{\partial E}{\partial a_n} \end{array} \right\} = \{\mathbf{0}\}, \quad (2.38)$$

ugyanis a δa_i variációk ugyan kicsik, de zérótól különböznek. Ebből az egyenletrendszerből az a_i általánosított koordináták, tehát végső soron a feladat közelítő megoldását adó függvény meghatározható. Ez a megoldási mód *Rayleigh-Ritz módszer* néven ismeretes.

A Rayleigh-Ritz módszer N_i bázisfüggvényei a tanulmányozott kontinuum teljes tartományán értelmezettek és folytonosak, s emiatt a kihangsúlyozottabban változó ismeretlen φ függvények megközelítésére alkalmas bázisfüggvények megválasztása egy igen kényes feladattá válhat. Egy túl alacsony fokú polinom „kisímitja” az eredményt, egy túl magas fokú polinom pedig a két függvény (φ és a közelítő $\bar{\varphi}$) egyezésének megfelelő pontok között nagy eltérésekhez,

ingadozásokhoz vezethet (ez „overfitting”, túlzott egyeztetés néven ismeretes). Ezt a két esetet a 2.1. ábra szemlélteti.

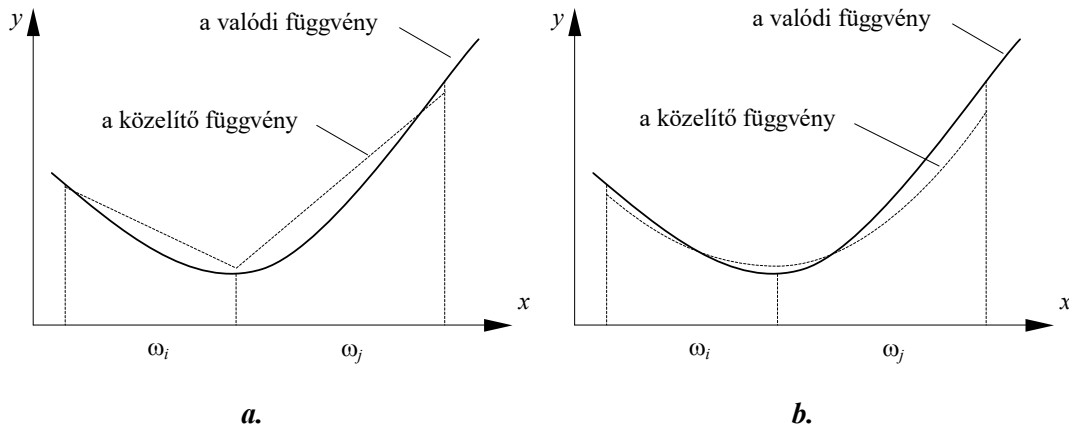
A Rayleigh-Ritz módszer ezen hátrányának kiküszöbölésére a teljes Ω értelmezési tartományt olyan kis ω_i résztartományokra osztjuk fel, amelyeken várhatóan az ismeretlen függvény változása nem erőteljes. Ekkor a φ megoldásfüggvényt az ω_i résztartományon definiált $\bar{\varphi}_i$ függvényekkel, darabonként közelítünk meg. Rendszerint minden egyes résztartomány felett ugyanolyan felépítésű közelítő függvényt használnak, s ezzel a megalkotandó algoritmus sokat egyszerűsödik.



2.1. ábra. A rosszul megválasztott közelítő függvény hatása:

- a). a közelítő függvény túlságosan sima
- b). a közelítő függvény túlságosan erőteljes változásokat mutat

A közelítő függvényeket adó bázisfüggvények megválasztásában bizonyos kritériumokat kell szem előtt tartani. A számítások elvégzésének megkönnyebbítéséhez a közelítő függvény felépítése minél egyszerűbb kell legyen – legtöbbször a lineáris közelítéssel is megelégszünk.



2.2. ábra. Az ismeretlen függvény interpolálása:

- a). a közelítő függvény értéke a határfelületen folytonos
- b). a közelítő függvény és első deriváltjának értéke a határfelületen folytonos

Ugyanakkor, a konkrét feladattól függően, a résztartományok közös határán bizonyos folytonossági feltételeket is elő kell írni (2.2. ábra). E folytonossági feltételek rendszerint a közelítő függvényre és ritkábban esetleg annak első deriváltjára vonatkoznak: előírjuk, hogy az egymással szomszédos résztartományok felett értelmezett közelítő függvények és deriváltjaik értékei a közös peremen azonos nagyságúak legyenek.

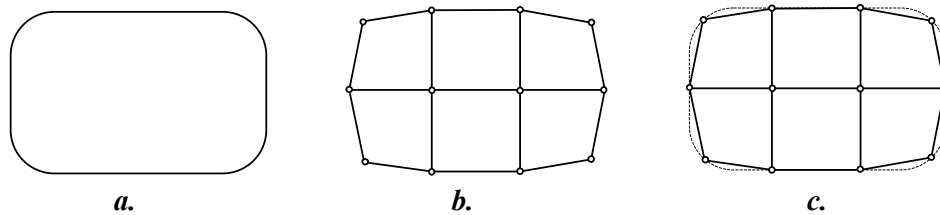
Az ω_i tartományok kiterjedésének meghatározásánál a közelítés kívánt pontosságát kell szem előtt tartani. Könnyen belátható, hogy minél kisebb résztartományokra osztjuk fel Ω -t, annál jobb lesz a keresett függvény megközelítése is.

Az N_i bázisfüggvényeket (interpolációs függvényeket) tehát a résztartományokon definiáljuk. Ekkor a 2.35. összefüggéssel megadott E funkcionál (a potenciális energia) a résztartományokon kiszámított értékek összege lesz:

$$E = \sum_{i=1}^m E_i, \quad (2.39)$$

ahol m a résztartományok száma. E kijelentésnek megintcsak fizikai értelmezése van: a funkcionál valamilyen skaláris additív mennyiséget jelent, mint amilyen a tekintett potenciális energia is.

A feladat ilyen jellegű megoldása a *Ritz-Galerkin módszer* nevet viseli. A végeelem-módszer a Ritz-Galerkin eljárás azon egyedi esete, amikor a résztartományok (a végeelemek) feletti interpolációban speciálisan megválasztott bázisfüggvényeket alkalmazunk és ekkor a folytonossági feltételeket csak a peremhez tartozó *csomópontok*ban kell előírni.



2.3. ábra. Az eredeti geometria (a.), a végeelemekre osztott tartomány (b.) és a diszkretizálás során elkövetett hiba szemléltetése (c.)

A végeelem-módszer egy másik sajátossága, hogy a végeelem geometriáját, pontjainak koordinátáit is, közelítő függvények segítségével írjuk le. Ebből következően a végeelem alakja nem lehet tetszőleges, hanem a választott közelítő függvényekhez igazodik. A diszkretizált tartomány valódi határát ilyen módon a végeelemek megfelelő oldalfelületei vagy élei fogják helyettesíteni, melynek következményeit a diszkretizálás elvégzésekor figyelembe kell venni (2.3. ábra). Lineáris interpoláció esetén a végeelemek élei egyenesek lesznek.

Azokat a végeelemeket, amelyek geometriáját ugyanazok az interpolációs függvények adják, mint amelyek az ismeretlen függvényt is közelítik, *izoparametrikusnak* nevezik.

Megjegyzendő, hogy az izoparametrikus végeelemeket használó programok algoritmusai lényegesen egyszerűbbek, de a magasabb fokú interpoláció esetén a geometria izoparametrikus megközelítése a gyakorlati haszon szempontjából gyakran fölösleges számításokat visz be.

2.3. A tanulmányozott tartomány diszkretizálása

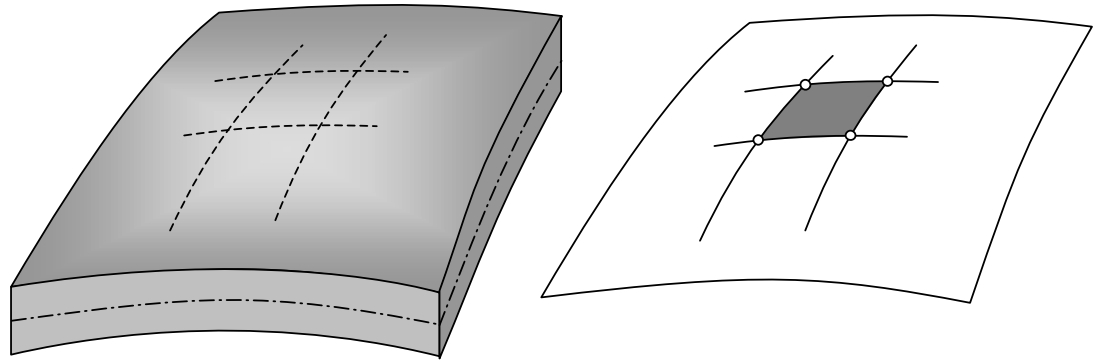
Geometriai szemléletmódunk szorosan kötődik a három koordinát tengellyel megadható vonatkoztatási rendszerekhez. Ezekben a pontok mint kiterjedés nélküli objektumok, dimenzió nélküli elemeként jelennek meg. A görbék egy, a felületeket két, míg a testeket három

méret segítségével írjuk le (még ha térbeli görbékről vagy felületekről is van szó), így egy-, két-, illetve háromdimenziós geometriai alakzatokként fogjuk fel.

Bármely valódi szerkezet egy háromdimenziós, térbeli test. Végeselemes modellezése során háromdimenziós résztartományokra, végelemekre osztása elvileg mindig lehetséges, hiszen e szerkezetek méretei soha nem infinitezimálisan kicsinyek.

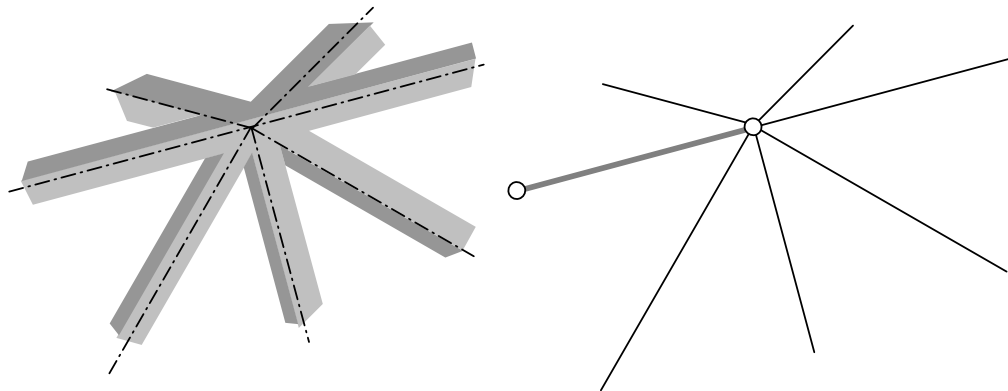
Gyakran fordul elő azonban egy olyan eset, amikor a tanulmányozott szerkezet sajátos formával rendelkezik, például egyik-másik kiterjedése elhanyagolható a többihez viszonyítva.

Például egy gépkocsi lemezekből összeállított karosszériája egy háromdimenziós szerkezet, azonban állandó vastagságú elemeit a középfelületük egyértelműen azonosítja. E középfelületen bármely pont helyzetét két mérettel (dimenzióval) is le lehet írni. A harmadik méret, a vastagság az adott karosszériaelem minden pontjában azonos, így állandó paraméternek tekinthető.



2.4. ábra. *Háromdimenziós héjszerkezet modellezése kétdimenziós végelemekkel (részlet).
A végelemek a lemez középfelületéhez igazodnak.*

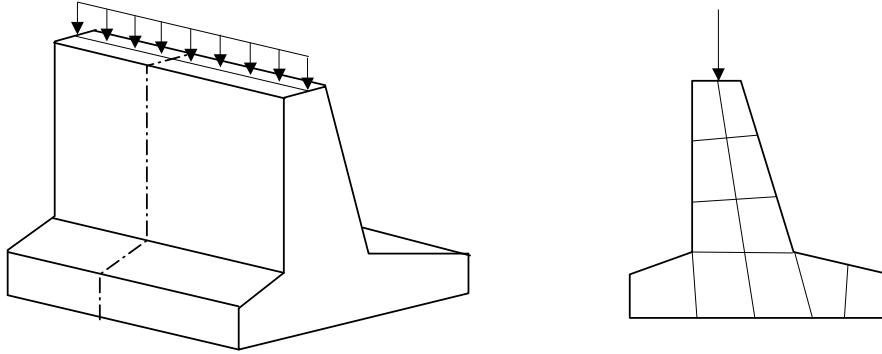
Egy rácsos szerkezet, mint amilyen egy daru karja, szintén egy térbeli szerkezet, melyet egydimenziósnak tekinthető elemek alkotnak. Az egyetlen dimenziót az elem középvonala (tengelye) mentén mérjük, a másik két dimenzióval megadott keresztmetszet mint paraméter szerepel.



2.5. ábra. *Háromdimenziós rácsszerkezet modellezése egydimenziós végelemekkel (részlet).
A végelemek a szerkezet elemeinek tengelyeihez igazodnak.*

A modell dimenzióinak számát csökkenthetjük abban az esetben is, amikor a háromdimenziós szerkezet vizsgálata leegyszerűsíthető valamely alkalmasan megválasztott keresztmetszetének tanulmányozására.

A dimenzió nélküli végelem például a merev testet helyettesítő tömegközéppont, amely a mechanikában használt anyagi pont modelljének felel meg.



2.6. ábra. Háromdimenziós szerkezet modellezése kétdimenziós végelemekkel.
A végelemek a szerkezet egy keresztmetszetét közelítik.

A végelemek alakja nem lehet tetszőleges: a gyakorlatban elterjedt formák az n -dimenziós szimplex és az n -dimenziós hiperkubus, illetve azok elfajuló és sajátos esetei.

Az n -dimenziós szimplex az n dimenziójú legegyszerűbb véges geometriai idom. A geometriai dimenziók számának növekvő sorrendjében az egy szakasz, háromszög vagy tetraéder lehet.

Az n -dimenziós hiperkubus pereme a koordinátatengelyekhez igazodik, azok a dimenziók növekvő száma szerint felsorolva a következők: szakasz, négyszög, hexaéder.

Az elemekre osztott n -dimenziós tartomány határfelületei $n-1$ dimenziós tartományok. Ha a végelem egy n -dimenziós szimplex, akkor peremét $n-1$ dimenziójú szimplexek, ha pedig n -dimenziós hiperkubus, akkor $n-1$ dimenziójú hiperkubusok alkotják. Két szomszédos végelem a közös oldallapok, élek és csúcsok mentén illeszkedik egymáshoz.

A modellezés pontossága a háló sűrűségétől (a végelemek méreteitől) is függ. A háló sűrűtésének az igényelt számítógép-kapacitás és a számítási idő szab határt, éppen ezért a végelemes háló egyenletes sűrítése nem mindig a legmegfelelőbb megoldás. A háló finomítása különösen azokon a helyeken fontos, ahol a közelítendő függvény erőteljes változása várható (például a feszültséggyűjtő helyeken), míg egyéb helyeken (például a peremektől távol eső belső tartományban) egy durvább háló is kielégítő pontosságot ad. A változó finomságú háló alkalmazásával a rendelkezésünkre álló számítógép-kapacitást optimálisabban használhatjuk ki.

A háló finomságát tekintve nincsenek általános érvényű előírások. Egy igényesebb modellezés esetén a szerkezetet a kiszámított eredmények alapján újrահálózzák (például a tanulmányozott függvény erőteljes változásának tartományán a hálót tovább sűrítik) és a számításokat megismétlik.

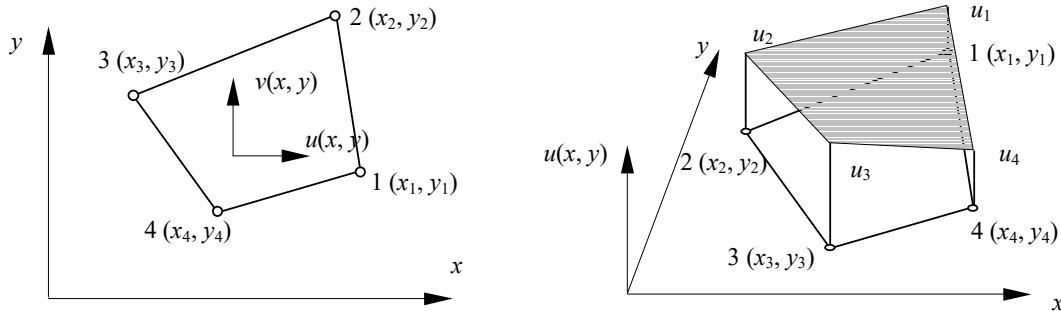
2.4. A variációs módszer alkalmazása

A rugalmasságtani feladatban a keresett megoldásfüggvény a szerkezet csomópontjainak elmozdulását adja, az tehát a vektoriális $\mathbf{d}(x, y, z)$ mennyiség lenne. A vektoriális függvények használatát elkerülhetjük, ha azok vetületeivel dolgozunk; ekkor a keresett megoldást \mathbf{d} -nek a tengelyekre eső vetületei, a skaláris $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ és $w(x, y, z)$ függvények alkotják.

Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban csak két dimenzióra, sík deformációs állapotra szorítkozunk és négyzög alakú végelemek (kétdimenziós hiperkubusokat) használunk. Ekkor az x irányú u elmozdulás-függvény lineáris közelítése a következő formát ölti:

$$u(x, y) = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot x \cdot y, \quad (2.40)$$

amelyet grafikusan a 2.7. ábra jobb oldalán látható módon ábrázolhatunk. Megjegyzendő, hogy az előbbi függvénnyel leírt felület általában nem sík, hanem az egy nyeregfelület, azonban a végelem peremei mentén az ábrázolás során egyeneseket kapunk.



2.7. ábra. Lineáris négyzögelem; az x irányú elmozdulás közelítésének szemléltetése

Az a feltétel, amely előírja hogy a végelem négy csomópontjában az x irányú csomóponti elmozdulásokat kapjuk vissza, a következő egyenletrendszerhez vezet:

$$\begin{cases} u_1 = u(x_1, y_1) = a_1 + a_2 \cdot x_1 + a_3 \cdot y_1 + a_4 \cdot x_1 \cdot y_1 \\ u_2 = u(x_2, y_2) = a_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot y_2 + a_4 \cdot x_2 \cdot y_2 \\ u_3 = u(x_3, y_3) = a_1 + a_2 \cdot x_3 + a_3 \cdot y_3 + a_4 \cdot x_3 \cdot y_3 \\ u_4 = u(x_4, y_4) = a_1 + a_2 \cdot x_4 + a_3 \cdot y_4 + a_4 \cdot x_4 \cdot y_4, \end{cases} \quad (2.41)$$

ahol az x_i, y_i mennyiségek a végelem i csomópontjának koordinátái (2.7. ábra).

A 2.41. egyenletrendszer mátrixos formában a következőképpen írható fel:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 \cdot y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 \cdot y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 \cdot y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 \cdot y_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}, \quad (2.42)$$

vagy, tömören:

$$\{\mathbf{u}\}_e = [\Phi]_e \cdot \{\mathbf{a}\}_e, \quad (2.43)$$

ahol $[\Phi]_e$ a csomópontok koordinátái által adott konstansok mátrixa (az „ e ” indexek azt mutatják, hogy e mennyiségek egy bizonyos végelemre vonatkozó *elemi* mennyiségek). Innen a keresett ismeretlen együtthatókat az

$$\{\mathbf{a}\}_e = [\Phi]_e^{-1} \cdot \{\mathbf{u}\}_e \quad (2.44)$$

kifejezés adja, ahol az előbbi konstansokból álló mátrix inverze és az egyelőre ismeretlen csomóponti elmozdulások x tengelyre eső vetületének vektora szerepel.

A végeelem bármely pontjának x tengely irányú elmozdulását a 2.40. egyenlet adja, amelyet a fenti jelölésekkel tömören az

$$u(x, y) = [1 \quad x \quad y \quad x \cdot y] \cdot \{\mathbf{a}\}_e \quad (2.45)$$

formában is felírhatunk. Itt az egyetlen sorból álló mátrix a 2.40. interpolációs polinom bázisfüggvényeit tartalmazza, az a_i együtthatók pedig az általánosított koordináták lennének. Az együtthatók vektorára kapott 2.44. egyenlettel ez

$$u(x, y) = [1 \quad x \quad y \quad x \cdot y] \cdot [\Phi]_e^{-1} \cdot \{\mathbf{u}\}_e \quad (2.46)$$

lesz, mely kifejezésben a két mátrix szorzata az interpolációs függvények mátrixát adja:

$$[N(x, y)]_e = [1 \quad x \quad y \quad x \cdot y] \cdot [\Phi]_e^{-1} \quad (2.47)$$

(könnyen beláthatjuk, hogy most ennek is csak egyetlen sora van), amellyel

$$u(x, y) = [N(x, y)]_e \cdot \{\mathbf{u}\}_e. \quad (2.48)$$

Hasonló összefüggést kapunk az elmozdulás y tengely irányú $v(x, y)$ komponensére is:

$$v(x, y) = [N(x, y)]_e \cdot \{\mathbf{v}\}_e. \quad (2.49)$$

E két utóbbi relációval a csomóponti elmozdulások segítségével a végeelem tartományán bármely (x, y) koordinátájú pont elmozdulását meg tudjuk határozni. E két egyenletet egyetlen kifejezésbe tömöríthetjük:

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}_e = \{\mathbf{d}\}_e = \begin{bmatrix} [N(x, y)]_e & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [N(x, y)]_e \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}\}_e \\ \{\mathbf{v}\}_e \end{Bmatrix} = [N]_e \cdot \{\mathbf{\delta}\}_e, \quad (2.50)$$

tehát

$$\{\mathbf{d}\}_e = [N]_e \cdot \{\mathbf{\delta}\}_e, \quad (2.51)$$

ahol $[N]_e$ az interpolációs függvények mátrixának egy újabb formája.

A fajlagos alakváltozást a rugalmasságtanból ismert összefüggések (a geometriai aspektus 2.2. egyenletei) felhasználásával kapjuk, a végeelem tartományán az

$$\{\mathbf{\epsilon}\}_e = [\partial] \cdot \{\mathbf{d}\}_e \quad (2.52)$$

lesz, ahol $[\partial]$ egy deriválási operátorokat tartalmazó mátrix, amelyet a 2.1. fejezetben bemutatott esettől eltérően a sík deformációs állapot tanulmányozásakor csak két dimenzióban kell felírunk (csak az x és y koordinátákra vonatkozó tagjait tartjuk meg). Itt megjegyezhető, hogy a kétdimenziós végeelemekkel modellezett sík feszültségi állapot térbeli deformációs állapottal jár (a végeelem síkjára merőleges alakváltozás is megjelenik).

A geometriai aspektus egyenletrendszerébe az elmozdulásokat behelyettesítvén egy olyan összefüggéshez jutunk, mely a végeelem bármely pontjában a fajlagos alakváltozást a csomóponti elmozdulások függvényeként írja le:

$$\{\mathbf{\epsilon}\}_e = [\partial] \cdot [N]_e \cdot \{\mathbf{\delta}\}_e = [\mathbf{B}]_e \cdot \{\mathbf{\delta}\}_e, \quad (2.53)$$

ahol $[B]_e$ az interpolációs függvények deriváltjainak mátrixa. Az interpolációs függvények 2.47. kifejezését tekintetbe véve kijelenthetjük, hogy az $[N]_e$ mátrix egy tagjának általános formája

$$N_{i,j} = c_1^{i,j} + c_2^{i,j} \cdot x + c_3^{i,j} \cdot y + c_4^{i,j} \cdot x \cdot y, \quad (2.54)$$

ahol a c együtthatók a csomóponti koordinátákkal felírt $[\Phi]_e$ mátrix inverzéből származnak, illetve zérók. Sík deformációs állapot esetében a $[B]_e$ mátrix formája a következő lesz:

$$[B]_e = [\partial] \cdot [N]_e = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \cdot [N]_e = \quad (2.55)$$

$$= \begin{bmatrix} (c_2^{1,1} + c_4^{1,1} \cdot y) & (c_2^{1,2} + c_4^{1,2} \cdot y) & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & (c_3^{2,5} + c_4^{2,5} \cdot x) & (c_3^{2,6} + c_4^{2,6} \cdot x) & \dots & \dots \\ (c_3^{1,1} + c_4^{1,1} \cdot x) & (c_3^{1,2} + c_4^{1,2} \cdot x) & \dots & \dots & (c_2^{2,5} + c_4^{2,6} \cdot y) & (c_2^{2,5} + c_4^{2,6} \cdot y) & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

mely tehát a 2.54. tagok különböző parciális deriváltjait tartalmazza.

A feszültségek és a fajlagos alakváltozások között a fizikai aspektus egyenletrendszere (Hooke általánosított törvénye) teremt kapcsolatot:

$$\{\sigma\}_e = [E]_e \cdot \{\epsilon\}_e, \quad (2.56)$$

ahol az $[E]_e$ rugalmassági mátrix az adott végelemet kitöltő anyag rugalmasságtani jellemzőinek mátrixa (e kitételből következik az az észrevétel, hogy inhomogén testek modellezése esetén a végelemekre való osztást úgy kell elvégezni, hogy egy végelemen belül az anyagparaméterek változása ne legyen jelentős). A rugalmassági mátrix formája síkfeladatok esetében a feladat jellegétől függ.

A fajlagos deformáció vektorának kifejezésével az elemi feszültségeket is a csomóponti elmozdulások függvényében kapjuk:

$$\{\sigma\}_e = [E]_e \cdot \{\epsilon\}_e = [E]_e \cdot [B]_e \cdot \{\delta\}_e. \quad (2.57)$$

A fentiek felhasználásával (2.35, 2.51, 2.53. és 2.57. egyenletek) egy végelemre a rugalmas alakváltozásból származó potenciális energiát a csomóponti elmozdulások vektorának függvényeként írhatjuk fel:

$$E_e = \frac{1}{2} \cdot \{\delta\}_e^T \cdot \left(\int_{V_e} [B]_e^T \cdot [E]_e \cdot [B]_e \, dV \right) \cdot \{\delta\}_e + \{\delta\}_e^T \cdot \int_{V_e} [B]_e^T \cdot \{\sigma_0\}_e \, dV -$$

$$- \{\delta\}_e^T \cdot \int_{V_e} [N]_e^T \cdot \{f\}_e \, dV - \{\delta\}_e^T \cdot \int_{S_e} [N]_e^T \cdot \{p\}_e \, dS -$$

$$- \{\delta\}_e^T \cdot \int_{L_e} [N]_e^T \cdot \{q\}_e \, dl - \sum_i \{\delta\}_e^T \cdot \{F_i\}_e, \quad (2.58)$$

ahol az első integrál a végelem merevségi mátrixa:

$$[k]_e = \int_{V_e} [B]_e^T \cdot [E]_e \cdot [B]_e \, dV, \quad (2.59)$$

a további tagok pedig a végelemre ható terhelés vektorát jelentik:

$$\begin{aligned} \{r\}_e = & -\int_{V_e} [B]_e^T \cdot \{\sigma_0\}_e dV + \int_{V_e} [N]_e^T \cdot \{f\}_e dV + \int_{S_e} [N]_e^T \cdot \{p\}_e dS + \\ & + \int_{l_e} [N]_e^T \cdot \{q\}_e dl + \sum_i \{F_i\}_e. \end{aligned} \quad (2.60)$$

A szerkezet potenciális energiája a végelemek potenciális energiáinak összege, amit szimbolikusan

$$E = \frac{1}{2} \cdot \{\delta\}^T \cdot \left(\sum_e [k]_e \right) \cdot \{\delta\} - \{\delta\}^T \cdot \left(\sum_e \{r\}_e \right) \quad (2.61)$$

formában írhatunk fel. A Σ jel nyilvánvalóan a strukturális merevségi mátrixnak az elemi merevségi mátrixokból és a strukturális terhelés vektorának az elemi terhelésvektorokból való összeállítását szimbolizálja:

$$[K] = \sum_e [k]_e \quad \text{és} \quad \{R\} = \sum_e \{r\}_e. \quad (2.62)$$

Az összeállítás menetét az 1. fejezet ismertette, eredményeként az előbbi jelöléseket felhasználva egy

$$E = \frac{1}{2} \cdot \{\delta\}^T \cdot [K] \cdot \{\delta\} - \{\delta\}^T \cdot \{R\} \quad (2.63)$$

skaláris kifejezéshez jutunk, ahol $\{\delta\}$ az ismeretlen csomóponti elmozdulások strukturális vektora.

A potenciális energia minimumának 2.34. feltétele az előbbi egyenlet csomóponti elmozdulások szerinti deriválásával a

$$[K] \cdot \{\delta\} = \{R\} \quad (2.64)$$

egyenletrendszerhez vezet, amelyet az elmozdulásokra vonatkozó peremfeltételek bevezetése után (az $\{R\}$ vektor a külső erőket már tartalmazza) megoldva az elmozdulások $\{\delta\}$ vektorát kapjuk.

Az elmozdulások felhasználásával, a 2.53. egyenletekkel a végelemek tartományán meghatározhatjuk a deformációs állapotot, majd a 2.56. egyenletekkel a feszültségi állapotot is. E mennyiségek a „másodlagos” ismeretlenek.

2.5. A helyi és az általános koordinárendszer közötti kapcsolat

A végeelemes analízis gyakorlatában a fajlagos alakváltozások, a feszültségek és a rugalmassági mátrix leírásakor felvetődhet az egyik rendszerről a másikra való áttérés igénye vagy szükségessége. Például ortotróp anyagok esetében megtörténhet, hogy az ortotrópia főirányai nem párhuzamosak a globális koordinárendszer tengelyeinek irányával. Az ortotróp anyagok rugalmasságtani jellemzőit a főirányok szerint szokás megadni, az elemi merevségi mátrix 2.59. képletében szereplő $[E]_e$ rugalmassági mátrix tagjait pedig a globális vonatkoztatási rendszerben vettük fel. Egy másik példa a görbült felületek modellezésének esete, amikor a kiszámított feszültségeket és fajlagos alakváltozásokat a globális vonatkoztatási rendszer tengelyeinek irányában kapjuk meg, pedig a mérnöki gyakorlatban a felülethez érintőleges és arra merőleges irányú mennyiségeket használjuk. Mindkét példában szükségessé válik a két koordinárendszer közötti transzformáció.

Az említett mennyiségek közötti összefüggés a fizikai aspektus 2.9. egyenletrendszere. Ha egy vonatkoztatási rendszerről át akarunk térni egy másikra, akkor ezt az áttérést a következő transzformációkkal írjuk le:

$$\left. \begin{aligned} \{\sigma\} &= [E] \cdot \{\epsilon\} \\ \{\sigma'\} &= [T_\sigma] \cdot \{\sigma\} \\ \{\epsilon'\} &= [T_\epsilon] \cdot \{\epsilon\} \\ \{\sigma'\} &= [E'] \cdot \{\epsilon'\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \{\sigma'\} = [T_\sigma] \cdot [E] \cdot [T_\epsilon]^{-1} \cdot \{\epsilon'\}, \quad [E'] = [T_\sigma] \cdot [E] \cdot [T_\epsilon]^{-1}. \quad (2.65)$$

A két koordinátarendszer közötti átalakítást elvégző transzformációs mátrixokat most nem az 1. fejezetben felírt forma adja, hiszen azt egy vektorra állapítottuk meg.

A $[T_\epsilon]$ mátrix kiszámításának céljából írjuk fel az $x'y'z'$ koordinátarendszerben az u' , v' és w' elmozdulást, az xyz rendszerben mért u , v és w elmozdulások felhasználásával:

$$\begin{aligned} u' &= l_x \cdot u + m_x \cdot v + n_x \cdot w, \\ v' &= l_y \cdot u + m_y \cdot v + n_y \cdot w, \\ w' &= l_z \cdot u + m_z \cdot v + n_z \cdot w, \end{aligned} \quad (2.66)$$

ahol az l , m és n szorzók az x' , az y' , illetve az z' tengelyek irányítványozói (iránykoszinuszai).

A fajlagos deformációk 2.1. definíciójában e mennyiségek parciális deriváltjai szerepelnek:

$$\begin{aligned} \epsilon_x' &= \frac{\partial u'}{\partial x'} = l_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x'} + m_x \cdot \frac{\partial v}{\partial x'} + n_x \cdot \frac{\partial w}{\partial x'}, \\ \dots \\ \gamma_{xy}' &= \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'} = l_y \cdot \frac{\partial u}{\partial x'} + m_y \cdot \frac{\partial v}{\partial x'} + n_y \cdot \frac{\partial w}{\partial x'} + l_x \cdot \frac{\partial u}{\partial y'} + m_x \cdot \frac{\partial v}{\partial y'} + n_x \cdot \frac{\partial w}{\partial y'}, \\ \dots \end{aligned} \quad (2.67)$$

A deriválás láncszabályával

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x'} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x'}, \\ \frac{\partial u}{\partial y'} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y'} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y'}, \\ \dots \\ \frac{\partial w}{\partial z'} &= \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z'} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z'} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial z'}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Felhasználván, hogy

$$\begin{aligned} \partial x / \partial x' &= l_x, \quad \partial y / \partial x' = m_x, \quad \partial z / \partial x' = n_x, \\ \partial x / \partial y' &= l_y, \quad \partial y / \partial y' = m_y, \quad \partial z / \partial y' = n_y, \\ \partial x / \partial z' &= l_z, \quad \partial y / \partial z' = m_z, \quad \partial z / \partial z' = n_z, \end{aligned} \quad (2.69)$$

az előbbi összefüggések tovább alakíthatók:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x'} &= l_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + m_x \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + n_x \cdot \frac{\partial u}{\partial z}, \\
\frac{\partial u}{\partial y'} &= l_y \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + m_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + n_y \cdot \frac{\partial u}{\partial z}, \\
&\dots \\
\frac{\partial w}{\partial z'} &= l_z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + m_z \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + n_z \cdot \frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{2.70}$$

E parciális deriváltakat a 2.67. egyenletekbe behelyettesítve, felhasználván a fajlagos alakváltozások 2.1. definícióját, az elforgatott $x'y'z'$ koordinátarendszerben értelmezett fajlagos alakváltozásokat kapjuk, amelyek képleteit a következő mátrixos formában foglalhatjuk egybe:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x' \\ \varepsilon_y' \\ \varepsilon_z' \\ \gamma_{xy}' \\ \gamma_{yz}' \\ \gamma_{zx}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x^2 & m_x^2 & n_x^2 & l_x \cdot m_x & m_x \cdot n_x & n_x \cdot l_x \\ l_y^2 & m_y^2 & n_y^2 & l_y \cdot m_y & m_y \cdot n_y & n_y \cdot l_y \\ l_z^2 & m_z^2 & n_z^2 & l_z \cdot m_z & m_z \cdot n_z & n_z \cdot l_z \\ 2 \cdot l_x \cdot l_y & 2 \cdot m_x \cdot m_y & 2 \cdot n_x \cdot n_y & l_x \cdot m_y + l_y \cdot m_x & m_x \cdot n_y + m_y \cdot n_x & n_x \cdot l_y + n_y \cdot l_x \\ 2 \cdot l_y \cdot l_z & 2 \cdot m_y \cdot m_z & 2 \cdot n_y \cdot n_z & l_y \cdot m_z + l_z \cdot m_y & m_y \cdot n_z + m_z \cdot n_y & n_y \cdot l_z + n_z \cdot l_y \\ 2 \cdot l_z \cdot l_x & 2 \cdot m_z \cdot m_x & 2 \cdot n_z \cdot n_x & l_z \cdot m_x + l_x \cdot m_z & m_z \cdot n_x + m_x \cdot n_z & n_z \cdot l_x + n_x \cdot l_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}. \tag{2.71}$$

Ez utóbbi összefüggésben a keresett $[T_\varepsilon]$ mátrixot ismerhetjük fel.

A $[T_\sigma]$ mátrix kiszámításához tekintsük a feszültségek térfogatra fajlagosított virtuális munkáját. Mivel e munka független a koordinátarendszertől, amelyben kiszámoljuk,

$$\{\delta \boldsymbol{\varepsilon}\}^T \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\delta \boldsymbol{\varepsilon}'\}^T \cdot \{\boldsymbol{\sigma}'\}. \tag{2.72}$$

Ennek az egyenlőségnek a jobb oldali tagját a 2.71. transzformációval tovább alakíthatjuk:

$$\{\delta \boldsymbol{\varepsilon}\}^T \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\delta \boldsymbol{\varepsilon}'\}^T \cdot [T_\varepsilon]^T \cdot \{\boldsymbol{\sigma}'\}, \tag{2.73}$$

ahonnan tehát

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [T_\varepsilon]^T \cdot \{\boldsymbol{\sigma}'\}, \text{ vagy } \{\boldsymbol{\sigma}'\} = [T_\varepsilon]^{-T} \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\}. \tag{2.74}$$

Ezt az összefüggést a 2.65. transzformációkkal (a második egyenlettel) egybevetve észrevehetjük, hogy

$$[T_\sigma] = [T_\varepsilon]^{-T}. \tag{2.75}$$

Amennyiben e mátrixok az első fejezetben tárgyalt $[T]$ mátrix tulajdonságaival rendelkeznének, rögtön következne a kétfajta ($[T_\varepsilon]$ és $[T_\sigma]$) mátrix egyenlősége. Ez azonban nincs így, a 2.71. transzformáció mátrixából pedig, a 2.75. átalakítással

$$[\mathbf{T}_\sigma] = \begin{bmatrix} l_x^2 & m_x^2 & n_x^2 & 2 \cdot l_x \cdot m_x & 2 \cdot m_x \cdot n_x & 2 \cdot n_x \cdot l_x \\ l_y^2 & m_y^2 & n_y^2 & 2 \cdot l_y \cdot m_y & 2 \cdot m_y \cdot n_y & 2 \cdot n_y \cdot l_y \\ l_z^2 & m_z^2 & n_z^2 & 2 \cdot l_z \cdot m_z & 2 \cdot m_z \cdot n_z & 2 \cdot n_z \cdot l_z \\ l_x \cdot l_y & m_x \cdot m_y & n_x \cdot n_y & l_x \cdot m_y + l_y \cdot m_x & m_x \cdot n_y + m_y \cdot n_x & n_x \cdot l_y + n_y \cdot l_x \\ l_y \cdot l_z & m_y \cdot m_z & n_y \cdot n_z & l_y \cdot m_z + l_z \cdot m_y & m_y \cdot n_z + m_z \cdot n_y & n_y \cdot l_z + n_z \cdot l_y \\ l_z \cdot l_x & m_z \cdot m_x & n_z \cdot n_x & l_z \cdot m_x + l_x \cdot m_z & m_z \cdot n_x + m_x \cdot n_z & n_z \cdot l_x + n_x \cdot l_z \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

(a bal alsó negyed 2-es szorzója felkerül a jobb felső negyedbe). E mátrix transzponáltja $[\mathbf{T}_\epsilon]$ inverze, $[\mathbf{T}_\epsilon]$ transzponáltja pedig $[\mathbf{T}_\sigma]$ inverzével azonos.

E két mátrixszal tehát a feszültségek, a fajlagos deformációk és a rugalmassági mátrix a globális és a lokális rendszerek között egyszerűen átszámíthatók.

3. A REZIDUÁLIS MÓDSZER

3.1. A variációs eljárás korlátai

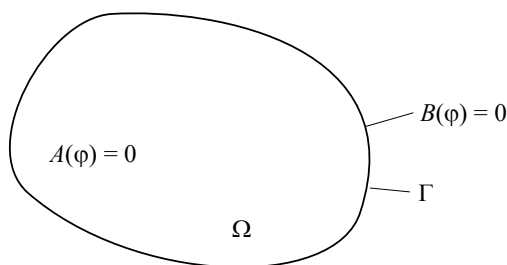
Az előbbi fejezetben bemutatottak alapján a végeselem-módszert, mint számítási eljárást, általánosíthatjuk: általánosságként elmondhatjuk, hogy az tulajdonképpen egy Ω tartományon felírt

$$A(\varphi) = 0 \quad (3.1)$$

differenciálegyenlet megoldása bizonyos, a tartomány Γ peremén előírt

$$B(\varphi) = 0 \quad (3.2)$$

feltételek mellett (3.1. ábra). A fenti két szimbolikus egyenlet egyenletrendszereket is jelenthet, φ vektoriális is lehet.



3.1. ábra. A tanulmányozott feladat

A variációs eljárás a 3.1. és 3.2. egyenletekkel leírt feladat megoldása helyett egy másik, szimbolikus

$$\delta E = 0 \quad (3.3)$$

formában leírt feladat megoldásával keresi a 3.1. differenciálegyenletet és a 3.2. peremfeltételeket kielégítő φ függvényt. A 3.3. képlettel megadott variációs eljárás a tanulmányozott feladathoz egy skaláris E funkcionált rendel, amely a peremfeltételek hatását is magába foglalja és amelynek szélsőértéke (stacionaritása) jelenti a keresett megoldást. A variációs eljárás alkalmazásának feltétele e skaláris funkcionál léte.

A funkcionálnak konkrét fizikai jelentése van, amely a tanulmányozott rendszer egyensúlyi állapotához szorosan kötődik. Kijelölése tehát nem matematikai, hanem fizikai feladat: ha két különböző jelenséget formailag azonos differenciálegyenlet ír le, az nem jelenti azt, hogy mindkét feladathoz ugyanazt a funkcionált lehetne társítani. Ilyen funkcionál azonban nem minden esetben írható fel. Ezen okok miatt a variációs módszer nem általánosítható és nem is alkalmazható bármilyen feladat megoldásának esetében.

3.2. A súlyozott reziduumok módszere

A társítható funkcionál hiányában a közelítő megoldást az adott differenciálegyenlet egzakt, „valódi” φ megoldása és a javasolt közelítő $\bar{\varphi}$ megoldás közötti különbség – a *reziduum* – minimumának feltétele adja. Ez az eljárás a *reziduális megfogalmazás* nevet viseli.

A reziduum tehát a feltételezett és a pontos megoldás különbsége, szimbolikus jelölvén

$$R_{\Omega}(\bar{\varphi}) = A(\bar{\varphi}) - A(\varphi) = A(\bar{\varphi}) \quad (3.4)$$

(mivel az egzakt megoldásra a 3.1. egyenletrendszer szerint $A(\varphi) = 0$), a feladat pedig annak a függvénynek a kiszámítása, amelyre teljesül az

$$R_{\Omega}(\bar{\varphi}) = 0 \quad (3.5)$$

feltétel.

A $\bar{\varphi}$ közelítő függvényeket a variációs módszer leírásánál felsorolt okok miatt a 2.36. összefüggéssel megegyező módon bázisfüggvények segítségével írjuk fel. Ekkor a reziduum az a_i általánosított koordinátáktól és az Ω tartományt leíró geometriai koordinátáktól fog függeni, mely kapcsolatot szimbolikusan az

$$R_{\Omega}(a, x) = 0 \quad (3.6)$$

képlettel jelölhetjük.

A 3.2. peremfeltételeket hasonló módon vezethetjük be, ekkor a közelítő függvénnyel számított $B(\bar{\varphi})$ reziduumokra is egy

$$R_{\Gamma}(a, x) = 0 \quad (3.7)$$

formájú feltételt írunk elő.

A feladat megoldása az utóbbi két egyenlet vagy egyenletrendszer megoldása. A közelítő függvény kiszámítására több eljárást is kifejlesztettek, az alábbi felsorolás a legfontosabbakat ismerteti.

3.2.1. A kollokációs eljárás

Lényege az, hogy az x koordináták különböző értékeire, tehát a tanulmányozott tartomány n különböző pontjában a reziduumokat zéróval tesszük egyenlővé, mely feltételek a következő egyenletrendszerhez vezetnek:

$$\begin{cases} R_{\Omega}(a, x_i) = 0, & \text{ahol } i = 1, 2, \dots, j, \\ R_{\Gamma}(a, x_i) = 0, & \text{ahol } i = j + 1, j + 2, \dots, n. \end{cases} \quad (3.8)$$

Az egyértelmű megoldhatóság érdekében a felvett pontok n számát úgy kell megválasztanunk, hogy a 3.8. egyenletrendszer egyenleteinek száma a közelítő függvény általánosított a_i koordinátáinak számával legyen azonos.

A közelítő függvények a teljes Ω tartomány felett értelmezettek. Ennél az eljárásnál ugyanazokkal a problémákkal találkozunk, mint a variációs megfogalmazásánál említett Rayleigh-Ritz módszer esetében: a megállapított közelítő függvény a kijelölt pontokban ugyan az egzakt megoldást adja, de közöttük attól jelentős mértékben eltérhet.

3.2.2. Szubdomének alkalmazása

Ebben az eljárásban a tanulmányozott Ω tartományt és annak Γ peremét résztartományokra, *szubdoménekre* osztjuk fel. Mindegyik résztartomány felett a reziduum integrálját zéróval tesszük egyenlővé, amely a következő egyenletrendszerhez vezet:

$$\begin{cases} \int_{\omega_i} R_{\Omega}(a, x) d\Omega = 0, \\ \int_{\gamma_i} R_{\Gamma}(a, x) d\Gamma = 0, & i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (3.9)$$

Ezt a módszert még *szubdomén-kollokációnak* is mondják, míg az előbbi a *pont-kollokáció* nevet is viseli.

A közelítő függvények most is a teljes Ω tartomány felett folytonosak, az a_i paraméterek száma pedig szintén a felírható egyenletek számával kell azonos legyen. Mivel a valódi és a közelítő függvény egyeztetése nem néhány kijelölt pontban, hanem a résztartományok felett történik, a kapott megoldásfüggvény-készlet várhatóan az előbbi eljárásnál jobb közelítést fog adni.

3.2.3. Legkisebb négyzetek módszere

A legkisebb négyzetek módszere a matematikai statisztika és a valószínűség-számítás egyik eljárása, amellyel egy közelítő függvényosztálynak egy adott számsort legjobban megközelítő elemét határozzuk meg. A közelítés mértéke az eltérések négyzetének összege, esetünkben a következő integrál értéke:

$$I = \int_{\Omega} R_{\Omega}^2(a, x) \, d\Omega + \alpha \cdot \int_{\Gamma} R_{\Gamma}^2(a, x) \, d\Gamma, \quad (3.10)$$

ahol az α szám egy, a peremfeltételek relatív súlyát kifejező tetszőleges együttható (a nagyobb α a peremfeltételek kiemeltebb fontosságát veszi figyelembe). A legkisebb négyzetek módszerében a megoldást a fenti összeg minimuma adja. A mi esetünkben az I integrálok az általánosított koordináták függvényei, tehát e minimumfeltétellel a következő egyenletrendszerrel kapjuk:

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial a_i} = 0, \\ i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (3.11)$$

A közelítő függvények most is a teljes Ω tartományon értelmezettek, pontosságuk általában valamivel jobb az előbbi módszerrel megállapított megoldásnál.

3.2.4. A Galerkin-módszer

A Galerkin-eljárás alkalmazása során a közelítő megoldást a reziduumok súlyozott átlagának előírásával kapjuk:

$$W_i(\bar{\varphi}) = \int_{\Omega} w_i \cdot R_{\Omega}(a, x) \, d\Omega = 0, \quad (3.12)$$

ahol a w_i mennyiségek a súlyozó együtthatókat adó függvények (*súlyfüggvények* vagy *tesztfüggvények*). A 3.12. egyenlet integrálja a W_i súlyozott reziduumokat adja. Ez esetben is annyi egyenletünk kell legyen, amennyi ismeretlenünk van.

Ha alaposabban megnézzük az előbbi három eljárást, akkor azt tapasztaljuk, hogy azok is a súlyozott reziduumok módszerének valamilyen formái. Így a pont-kollokációs eljárásnál a súlyfüggvények Dirac delta-függvényével azonosak, szimbolikusan:

$$w_i = \delta(x - x_i) = \begin{cases} \infty, & \text{ha } x = x_i \\ 0, & \text{ha } x \neq x_i \end{cases} \quad (3.13)$$

(mivel $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \delta(x - x_i) \, dx = f(x_i)$ bármely $f(x)$ függvényre), a szubdomén-kollokációs eljárásnál

$$w_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \omega_i \\ 0, & \text{ha } x \notin \omega_i \end{cases} \quad (3.14)$$

a legkisebb négyzetek módszerének alkalmazásánál pedig a súlyfüggvényeket a közelítő függvény deriváltjai adják:

$$w_i(x) = \frac{\partial R}{\partial a_i}. \quad (3.15)$$

A Galerkin-eljárásban (melyet néha Bubnov-Galerkin-módszernek is neveznek) a súlyfüggvényeket a közelítő függvény

$$w = \delta\bar{\varphi} \quad (3.16)$$

variációja adja.

A súlyfüggvény ilyen megválasztása matematikai megfontolásokon nyugszik, melyeknek alapja a súlyfüggvény és a reziduum 3.12. formában előírt ortogonalitása (ekkor a 3.12. feltétel csak akkor teljeshet, ha a reziduum értéke válik zéróvá).

3.3. A súlyozott reziduumok módszerének végelelemes formája

E módszer alkalmazásakor a teljes Ω tartományt ω_e résztartományokra, végelemekre bontjuk. Ekkor a súlyozott reziduumot adó 3.12. integrált e résztartományokon számítjuk ki és a W_e mennyiségeket kapjuk. E W_e maradékok skaláris mennyiségek, amelyeket összegezvén a teljes Ω tartományon értelmezett W reziduumhoz, a

$$W = \sum_e W_e = \sum_e \int_{\omega_e} \delta\bar{\varphi} \cdot R_{\Omega}(\bar{\varphi})_e \, d\Omega = 0 \quad (3.17)$$

kifejezéshez jutunk. A közelítő függvényt ($\bar{\varphi}$ -t) és annak variációját ($\delta\bar{\varphi}$ -t), akárcsak a variációs megfogalmazásban, interpolációs függvényekkel írjuk fel:

$$\bar{\varphi} = [N] \cdot \{\mathbf{a}\} \Rightarrow \delta\bar{\varphi} = [N] \cdot \{\delta\mathbf{a}\}, \quad (3.18)$$

és bizonyos folytonossági feltételeket is előírunk. E megközelítéssel:

$$\{\mathbf{W}\} = \sum_e \{\delta\mathbf{a}\}_e \cdot \int [N]_e^T \cdot \{\mathbf{R}_{\Omega}(\alpha, x)\}_e \, d\Omega = \{\delta\mathbf{A}\} \cdot \sum_e \int [N]_e^T \cdot \{\mathbf{R}_{\Omega}(\alpha, x)\}_e \, d\Omega = \{\mathbf{0}\}, \quad (3.19)$$

ahol a $\{\delta\mathbf{a}\}_e$ és a $\{\delta\mathbf{A}\}$ vektorok tagjai zérótól különböző számok (a csomóponti függvényértékek variációjáról van szó). Az összegzés természetesen a szerkezeti mennyiségeknek az elemi mennyiségekből történő összeállítását szimbolizálja. Mivel a $\{\delta\mathbf{A}\}$ vektor tagjai zérótól különböző számok egyedül az

$$\sum_e \int [N]_e^T \cdot \{\mathbf{R}_{\Omega}(\alpha, x)\}_e \, d\Omega = \{\mathbf{0}\} \quad (3.20)$$

értéke lehet zéró. E mennyiségek (az interpolációs függvényekkel súlyozott reziduumok) integrálásával és a résztartományok feletti összegzéssel egy, a peremfeltételeket is figyelembe vevő egyenletrendszert kapunk, amelynek megoldását a keresett közelítő függvény csomóponti értékei alkotják.

A megoldás menete hasonlít a variációs módszeréhez: a differenciálegyenlet megoldása helyett egy mennyiség minimumát írjuk elő. Míg e mennyiséget a variációs módszerben (a társított funkcionált) valamilyen fizikai megfontolás alapján vezettük be, addig a reziduális módszerben mindezt pusztán a matematika eszközeivel tettük meg. Emiatt az reziduális megfogalmazás a variációstól eltérően általános, tehát konkrét fizikai jelentés nélküli differenciálegyenletek megoldására is alkalmazni lehet. Lássuk mindezt a két dimenziós Ω tartományon felírt elliptikus Poisson-egyenletre:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_v = 0, \quad (3.21)$$

amelyhez az

$$\begin{aligned} u \Big|_{\Gamma_1} &= a_s, \quad \Gamma_1 \in \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} &= b_s, \quad \Gamma_2 \in \Gamma \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha \cdot u \right) \Big|_{\Gamma_3} &= c_s, \quad \Gamma_3 \in \Gamma \end{aligned} \quad (3.22)$$

peremfeltételek tartoznak ($\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ az Ω tartomány pereme).

A gradienst adó $\partial/\partial n$ operátor vetületeinek segítségével írható fel, két dimenzió esetén:

$$\frac{\partial}{\partial n} = n_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + n_y \cdot \frac{\partial}{\partial y}, \quad (3.23)$$

ahol n_x és n_y az \mathbf{n} normális vetületei, a peremre merőleges irány iránytényezői.

A felírt Poisson-egyenletre a reziduumok súlyozott átlagát a következő kifejezés adja:

$$W = \int_{\Omega} w(x, y) \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_v \right) d\Omega, \quad (3.24)$$

mely zéró kell legyen, a legalább kétszer differenciálható u függvény pedig ki kell elégítse a megadott peremfeltételeket is. A 3.1. táblázatban foglalt integrálási szabályok alapján a fenti egyenlet tovább alakítható:

$$W = - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} - c_v \cdot w \right) d\Omega + \oint_{\Gamma} w \cdot \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma, \quad (3.25)$$

ahonnan következik, hogy a $w(x, y)$ súlyfüggvény legalább egyszer deriválható kell legyen az Ω tartományon.

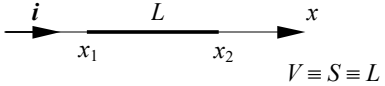
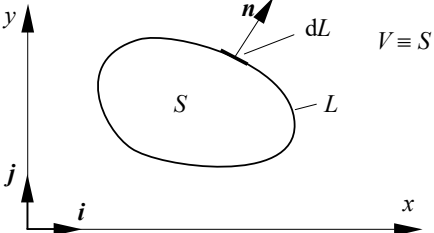
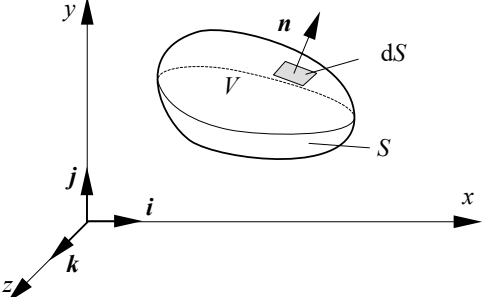
A peremfeltételeknek a deriváltakra vonatkozó részét (a nem-esszenciális feltételeket) a második integrálba vezetjük be. A Cauchy-feltétel kifejezéséből

$$\frac{\partial u}{\partial n} = c_s - \alpha \cdot u, \quad (3.26)$$

tehát e feltételek behelyettesítésével

$$W = - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} - c_v \cdot w \right) d\Omega + \oint_{\Gamma_2} w \cdot b_s d\Gamma + \oint_{\Gamma_3} w \cdot (c_s - \alpha \cdot u) d\Gamma. \quad (3.27)$$

A fenti összefüggésben a perem Γ_1 részén számított felületi integrál nem szerepel, a perem e részén az esszenciális, u értékére vonatkozó feltételek érvényesek. Ezt az egyszerűsítést a w súlyfüggvények megfelelő megválasztásával érjük el: w értéke Γ_1 -en zéró kell legyen.

Az Ω tartomány	A parciális integrálás összefüggései
<p>1. egydimenziós (L)</p>  <p>$V \equiv S \equiv L$</p> <p>$u = u(x), w = w(x)$ $dL = dx$</p>	$\int_L w \cdot \frac{du}{dx} dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dw}{dx} \cdot u dx + (w \cdot u) \Big _{x_1}^{x_2}$ $\int_L w \cdot \frac{d^2u}{dx^2} dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dw}{dx} \cdot \frac{du}{dx} dx + \left(w \cdot \frac{du}{dx} \right) \Big _{x_1}^{x_2}$
<p>2. kétdimenziós (S)</p>  <p>$V \equiv S$</p> <p>$u = u(x, y), w = w(x, y)$ $dS = dx \cdot dy$ $n_x = \mathbf{n} \cdot \mathbf{i}, n_y = \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}$ $dx = n_y \cdot dL, dy = n_x \cdot dL$ $\frac{\partial}{\partial n} = n_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + n_y \cdot \frac{\partial}{\partial y}$</p>	$\int_S w \cdot \frac{\partial u}{\partial x} dx dy = - \int_S u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} dx dy + \oint_L w \cdot u dy$ $\int_S w \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy = - \int_S \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} dx dy + \oint_L w \cdot \frac{\partial u}{\partial x} dy$ $\int_S w \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy = - \int_S \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} dx dy + \oint_L w \cdot \frac{\partial u}{\partial y} dy$
<p>3. háromdimenziós (V)</p>  <p>$u = u(x, y, z), w = w(x, y, z)$ $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ $n_x = \mathbf{n} \cdot \mathbf{i}, n_y = \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}, n_z = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}$ $dx \cdot dy = n_z \cdot dS, dy \cdot dz = n_x \cdot dS,$ $dz \cdot dx = n_y \cdot dS$ $\frac{\partial}{\partial n} = n_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + n_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} + n_z \cdot \frac{\partial}{\partial z}$</p>	$\int_V w \cdot \frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz = - \int_V u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} dx dy dz + \oint_S w \cdot u dy dz$ $\int_V w \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy dz = - \int_V \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} dx dy dz + \oint_S w \cdot \frac{\partial u}{\partial x} dy dz$ $\int_V w \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy dz = - \int_V \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} dx dy dz + \oint_S w \cdot \frac{\partial u}{\partial y} dy dz$

3.1. táblázat (a). A parciális integrálás szabályai

Szorzat deriválása:

$$\frac{\partial(u \cdot w)}{\partial x} = w \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x},$$

melynek integrálja:

$$\int_V \frac{\partial(u \cdot w)}{\partial x} dV = \int_V w \cdot \frac{\partial u}{\partial x} dV + \int_V u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} dV.$$

Innen

$$\int_V w \cdot \frac{\partial u}{\partial x} dV = - \int_V u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} dV + \int_V \frac{\partial(u \cdot w)}{\partial x} dV.$$

A Gauss-Ostrogradsky (Osztrogradszkij) képlet:

$$\int_V \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) dV = \oint_S (f_x \cdot \mathbf{i} + f_y \cdot \mathbf{j} + f_z \cdot \mathbf{k}) \cdot (n_x \cdot \mathbf{i} + n_y \cdot \mathbf{j} + n_z \cdot \mathbf{k}) dS,$$

ahol f_x , f_y és f_z egy \mathbf{F} vektor vetületei, S a V tartomány pereme, n_x , n_y és n_z pedig az S felület \mathbf{n} normálisának komponensei. A baloldali integrál alatti kifejezés $\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$ – az \mathbf{F} vektor divergenciája, a jobb oldali integrál pedig \mathbf{F} fluxusa a V tartomány S felületén keresztül.

Ha $f_x = u \cdot w$, $f_y = f_z = 0$, akkor a fentiek alapján

$$\int_V w \cdot \frac{\partial u}{\partial x} dV = - \int_V u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} dV + \oint_S u \cdot w \cdot n_x dS.$$

3.1. táblázat (b). A parciális integrálás szabályainak megállapításához szükséges képlet levezetése

Galerkin módszerében a súlyfüggvény az ismeretlen függvény variációja ($w = \delta u$), amivel

$$W = - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial(\delta u)}{\partial y} - \delta u \cdot c_v \right) d\Omega + \oint_{\Gamma_2} \delta u \cdot b_s d\Gamma + \oint_{\Gamma_3} \delta u \cdot (c_s - \alpha \cdot u) d\Gamma = 0. \quad (3.28)$$

Az Ω tartományt elemi résztartományokra, végelemekre osztjuk, tehát:

$$\begin{aligned} W &= \sum_e W_e = \\ &= \sum_e \left[- \int_{\omega_e} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial(\delta u)}{\partial y} - \delta u \cdot c_v \right) d\Omega + \right. \\ &\quad \left. + \oint_{\gamma_{2e}} \delta u \cdot b_s d\Gamma + \oint_{\gamma_{3e}} \delta u \cdot (c_s - \alpha \cdot u) d\Gamma \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

ahol ω_e egy végelem tartománya, a γ_e mennyiségek pedig a végelem peremének azon részei, ahol az adott feltételek érvényesek.

Mátrixos megfogalmazással, a

$$\{\partial \mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad \{\delta(\partial \mathbf{u})\} = \begin{Bmatrix} \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ \delta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

jelölések bevezetésével:

$$W = -\sum_e \left[\int_{\omega_e} \left(\{\delta(\partial \mathbf{u})\}_e^T \cdot \{\partial \mathbf{u}\}_e - \delta u_e \cdot c_V \right) d\Omega + \right. \\ \left. + \oint_{\gamma_{2e}} \delta u_e \cdot b_S d\Gamma + \oint_{\gamma_{3e}} \delta u_e \cdot (c_S - \alpha \cdot u_e) d\Gamma \right]. \quad (3.31)$$

A megoldást közelítő függvényt, annak deriváltjait és variációját bármely végelemen az interpolációs függvényekkel és a csomóponti u_n értékekkel írjuk fel:

$$u_e = [\mathbf{N}]_e \cdot \{\mathbf{u}_n\}_e, \quad \delta u_e = [\mathbf{N}]_e \cdot \{\delta \mathbf{u}_n\}_e, \\ \{\partial \mathbf{u}\}_e = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_e}{\partial x} \\ \frac{\partial u_e}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \cdot u_e = [\partial] \cdot [\mathbf{N}]_e \cdot \{\mathbf{u}_n\}_e = [\mathbf{B}]_e \cdot \{\mathbf{u}_n\}_e, \quad (3.32) \\ \{\delta(\partial \mathbf{u})\}_e = \{\partial(\delta \mathbf{u})\}_e = \begin{Bmatrix} \frac{\partial(\delta u_e)}{\partial x} \\ \frac{\partial(\delta u_e)}{\partial y} \end{Bmatrix} = [\partial] \cdot [\mathbf{N}]_e \cdot \{\delta \mathbf{u}_n\}_e = [\mathbf{B}]_e \cdot \{\delta \mathbf{u}_n\}_e.$$

Egy végelemre az előbbi jelölések bevezetésével a reziduum súlyozott átlaga a következő lesz:

$$W_e = -\int_{\omega_e} \{\delta \mathbf{u}_n\}_e^T \cdot [\mathbf{B}]_e^T \cdot [\mathbf{B}]_e \cdot \{\mathbf{u}_n\}_e d\Omega + \int_{\omega_e} [\mathbf{N}]_e \cdot c_V \cdot \{\delta \mathbf{u}_n\}_e d\Omega + \\ + \oint_{\gamma_{2e}} [\mathbf{N}]_e \cdot \{\delta \mathbf{u}_n\}_e \cdot b_S d\Gamma + \oint_{\gamma_{3e}} [\mathbf{N}]_e \cdot \{\delta \mathbf{u}_n\}_e \cdot (c_S - \alpha \cdot [\mathbf{N}]_e \cdot \{\mathbf{u}_n\}_e) d\Gamma, \quad (3.33)$$

amely a variációs megfogalmazásban bevezetett jelölésekkel a

$$W_e = \{\delta \mathbf{u}_n\}_e^T \cdot ([\mathbf{k}]_e \cdot \{\mathbf{u}_n\}_e - \{\mathbf{f}\}_e) \quad (3.34)$$

formára hozható (ahhoz, hogy a csomóponti függvényértékek variációját ki lehessen emelni, az utolsó három integrál alá az ott szereplő mennyiségek transzponáltját kell beírni). Innen, a végelemek feletti összegzéssel, mivel $W = 0$ és $\{\delta \mathbf{U}\} \neq \{\mathbf{0}\}$, ismét az ismert

$$[\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{U}_n\} = \{\mathbf{F}\} \quad (3.35)$$

összefüggéshez jutunk. A további lépések, a Dirichlet-féle peremfeltételek bevezetését is beleértve, azonosak a variációs módszerben alkalmazottakkal.

3.4. A súlyozott reziduumok módszerének rugalmasságtani alkalmazása

A megoldandó differenciálegyenlet-rendszer a 2.29. reláció, amelyet a következő formára hozhatunk:

$$[\partial]^T \cdot [E] \cdot [\partial] \cdot \{d\} + \{f\} = \{0\}. \quad (3.36)$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása a vektoriális $d(x, y, z)$ elmozdulás-függvény skaláris vetületeinek meghatározásából áll. A pontos megoldást kiszámítani nem tudjuk, éppen ezért azt egy $\bar{d}(x, y, z)$ függvénnyel közelítjük (tulajdonképpen három skaláris mennyiséget közelítünk, az u , v és w vetületeket). A reziduum, a közelítő függvény által bevitt eltérés a következő lesz:

$$\{R_v\} = [\partial]^T \cdot [E] \cdot [\partial] \cdot \{\bar{d}\} - \{f\}. \quad (3.37)$$

A reziduális módszer Galerkin-féle változatában a reziduum súlyozott átlagát adó teljes V tartomány feletti integrált V_e elemi tartományokra lebontva a

$$W = \sum W_e = \sum \int_{V_e} \{\delta \bar{d}\}_e^T \cdot \{R_v(\bar{d})\}_e dV = 0 \quad (3.38)$$

összeghez jutunk. A végelem-módszer az elmozdulást közelítő függvényt és annak variációját interpolációs függvényekkel adja meg, a már ismert eljárással:

$$\{\bar{d}\}_e = [N]_e \cdot \{\delta\}_e, \quad \{\delta \bar{d}\}_e = [N]_e \cdot \{\delta \delta\}_e, \quad (3.39)$$

(ahol $\{\delta\}_e$ a csomóponti elmozdulások vektora), egy elemi tartományon a reziduumok súlyozott átlaga pedig

$$W_e = \{\delta \delta\}_e^T \cdot \int_{V_e} [N]_e^T \cdot \{R_v([N]_e \cdot \{\delta\}_e)\} dV \quad (3.40)$$

lesz.

Az R_v reziduum kifejezése a 3.37 képlet, amely formailag a tanulmányozott feladatot leíró differenciálegyenlettel azonos. Ezt behelyettesítvén, a parciális integrálás elvégzése után az $[N]_e$ interpolációs függvények $[B]_e$ deriváltjaival egy

$$W_e = \{\delta \delta\}_e^T \cdot \left(\int_{V_e} [B]_e^T \cdot [E]_e \cdot [B]_e dV \cdot \{\delta\}_e - \int_{V_e} [N]_e^T \cdot \{f\}_e dV - \oint_{S_e} [N]_e^T \cdot \{p\}_e dS \right) \quad (3.41)$$

formájú egyenletet kapunk. A felületi integrál a felületi erőkre vonatkozó Neumann-feltételeket foglalja magába. Ezt az egyenletet, akárcsak a variációs megfogalmazásban, a

$$W_e = \{\delta \delta\}_e^T \cdot ([k]_e \cdot \{\delta\}_e - \{r\}_e) \quad (3.42)$$

alakra hozzuk. Innen az ismert

$$[K] \cdot \{D\} = \{F\} \quad (3.43)$$

összefüggéshez jutunk. A további lépések azonosak a variációs módszerben alkalmazottakkal: a szerkezeti mátrixok és vektorok összeállítása egy lineáris egyenletrendszerhez vezet, amelynek a Dirichlet-feltételek (az előírt csomóponti elmozdulások) bevezetése utáni megoldása a csomóponti elmozdulásokat adja.

4. EGYSZERŰ VÉGESELEMEK

4.1. Bevezető

Az előbbi három fejezetben leírtak alapján már meg lehetne alkotni egy működőképes végeसेlemes programot. Ha azonban elmélyedünk a program írása és futtatása közben felmerülő problémák tanulmányozásában, akkor a következő fő „szépséghibákkal” találjuk szemben magunkat.

Először is észrevehetjük, hogy a végeसेlemeken értelmezett interpolációs függvények $[N]_e$ mátrixai és annak $[B]_e$ deriváltjai végeसेlemenként különböznek egymástól, mivel azokat a csomóponti koordinátákkal felépített $[\Phi]_e$ mátrixok inverzének segítségével adtuk meg. Emiatt az elemeken értelmezett merevségi mátrixokat és a terhelésvektorokat külön-külön, végeसेlemenként kell kiszámítani, s ezáltal az elvégzendő műveletek száma és a számítások elvégzéséhez szükséges idő jelentősen megnövekszik. Ez a növekedés azért jelentős, mert a pontosabb számításnál a végeसेlemek száma igen nagy lehet (akár milliós nagyságrendű).

Az említett merevségi mátrixok és terhelésvektorok tagjaink kiszámításánál egy-egy integrálást kell elvégezni. A numerikus integrálás közismert algoritmusai, például a Simpson-képlet alkalmazása, megintcsak nagyszámú lépésből állanak, miáltal a számítások ideje még tovább növekedik.

A reziduális módszer alkalmazásánál olyan közelítő függvényeket kell használnunk, amelyek értéke a peremnek a Dirichlet-feltételeket érintő részén nulla kell legyen. E függvények megválasztása körülményes lehet.

A nagyobb szerkezetek merevségi mátrixának tárolásánál a számítógép memóriájának korlátaiba ütközhetünk.

Végül, a lineáris egyenletrendszer megoldásánál azt fogjuk tapasztalni, hogy a Gauss-Jordan algoritmus az egyenletek számának elszaporodásakor az egymást követő, sorozatos kerekítési hibák miatt használhatatlanná válik.

A végeसेlem-módszer fejlesztői rájöttek, hogy az elvégzendő műveletek száma jelentősen csökkenthető, ha az elemi merevségi mátrix és a terhelésvektor kiszámításánál nem a globális vonatkoztatási rendszert használják, hanem a végeसेlemekhez rendelt lokális koordinátarendszereket. A két koordinátarendszer között ugyan bizonyos transzformációs műveleteket is el kell végezni, azonban e többletmunkával együtt is a teljes számítási idő jóval kisebb lesz, mintha az előző fejezetekben bemutatott folyamatokat követnénk.

A használt lokális koordinátarendszer megválasztása és a használandó interpolációs függvények megállapítása összhangban vannak; e témakört a jelen fejezet fogja taglalni. A megfelelően megválasztott interpolációs függvények jelentős egyszerűsítést hoznak be a numerikus integrálásnál is.

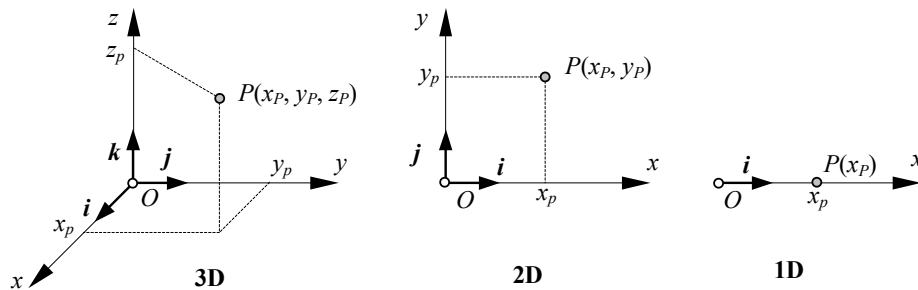
A merevségi mátrix tárolásának problémái a mátrix jellemző tulajdonságainak segítségével oldhatók meg (tudjuk, hogy a mátrix szimmetrikus és sok zérus elemet tartalmaz). Erről a témakörrel, valamint a numerikus integrálásról és az egyenletrendszer megoldásra használható numerikus eljárásokról a későbbi fejezetekben olvashatunk.

4.2. Vonatkoztatási rendszerek, végeसेlem típusok

A műszaki feladatokat geometriájuktól függően egy 1...3 dimenzióval rendelkező modell segítségével írjuk le. Egy pont geometriai helyzetének megadása valamely alkalmasan megválasztott vonatkoztatási rendszerben, a koordináták segítségével történik. A tanulmányozott szerkezetet, mint egészet, egy globálisnak vagy általánosnak nevezett koordinátarendszerben írjuk le.

A szerkezet diszkretizálásából származó végelemekre vonatkozó kifejezéseket, összefüggéseket azok lokális rendszerében adjuk meg, mert ez lehetővé teszi a valamennyi elemnél előforduló műveletek összevonását. A helyi koordináta-rendszerben felírt formákról a teljes tartományra érvényes, a globális rendszerben megadott kifejezésekre egyszerű koordináta-transzformációval lehet áttérni. A helyi vonatkoztatási rendszer használata nem a végelem-módszer önálló találmánya, viszont igen jellemző rá (általában a helyi vonatkoztatási rendszer használatát *Lagrange* módszernek is nevezik, míg az általános koordináta-rendszerét *Euler* módszernek).

A legközismertebb koordináta-rendszer a háromdimenziós Descartes-féle egyenesvonalú ortonormált vonatkoztatási rendszer: közös O origóból kiinduló három tengelye egymásra merőleges, a bázisát alkotó egységvektorok modulusza egyenlő (4.1. ábra). A P pont helyzetét az (x_p, y_p, z_p) koordináta-hármas azonosítja (az abszcissza, az ordináta és a kóta). Két- és egydimenziós változatait ennek xy síkja, illetve x tengelye alkotja, ekkor a P pont helyzetét az (x_p, y_p) koordináta-pár, illetve az x_p koordináta adja meg.



4.1. ábra. A Descartes-féle (orto-)normált koordináta-rendszerek

A globálisként használt koordináta-rendszerek többnyire egyenesvonalúak és ortonormáltak, azonban a koordinátatengelyeknek nem kell szükségszerűen egymásra merőlegeseknek vagy egyeneseknek lenniük és a kijelölt egységek sem kell azonosak legyenek (az egységvektorok moduluszai különbözhetnek egymástól).

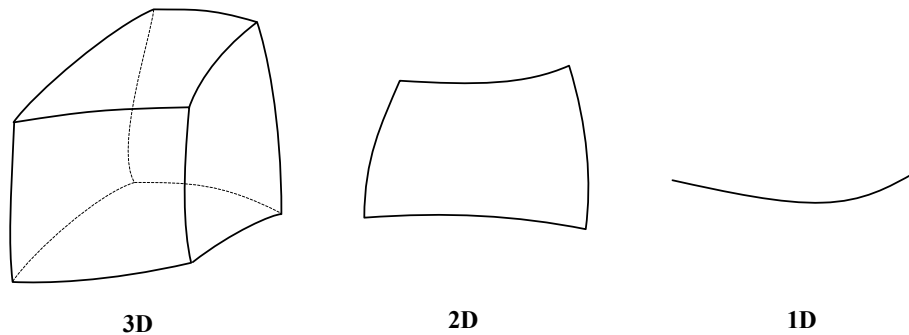
A műszaki gyakorlatban a Descartes-féle koordináta-rendszeren kívül elterjedten használják a térbeli hengeres (cilindrikus) és gömbi (szférikus), illetve a sík poláris koordináta-rendszereket. Szilárdságtani alkalmazásuk különösen forgástestek esetében előnyös. A végelem-módszerben a cilindrikus és poláris koordináta-rendszerrel is találkozhatunk, azonban használatuk a háttérbe szorult.

A derékszögű ortonormált Descartes-féle koordináta-rendszerben az eltolás (transzláció) lineáris koordináta-transzformációval oldható meg, de az elforgatás, azaz rotáció már nemlineáris transzformációt jelent. A poláris koordináta-rendszerben az eltolás is nemlineáris transzformációt jelent; e rendszerben az egyedüli lineáris transzformáció az origó körüli elforgatás lenne. A végelem-módszer gyakran fordul a kis elmozdulások és elfordulások hipotéziseihez e nemlineáris jelenségek elkerülésének érdekében. Amennyiben e hipotézisek nem állják meg a helyüket, akkor a nemlineáris transzformációkat nem lehet megkerülni, ez pedig többletműveleteket jelent. Ez a helyzet különösen a poláris és a cilindrikus koordináták használatának esetében áll fenn.

A végelelemes modellezésben nemcsak a szerkezet leírásához szükséges globális koordináta-rendszer típusát kell megválasztanunk, hanem döntenünk kell a végelelem leírásához használt lokális rendszereket illetően is. Alapvetően két lehetőség között mérlegelhetünk.

A végelelemes háló felépítésekor a felosztás egyik lehetősége a Descartes-koordinátákhoz kötődik. A felosztásban a tengelyekhez igazodunk: háromdimenziós esetben hatlapú testeket,

kétdimenziós esetben négyoldalú felületeket, míg egydimenziós esetben szakaszokat kapunk. Összefoglaló néven az így keletkezett idomokat *hiperkubusoknak* nevezik; általános esetben mindhárom görbült (4.2. ábra).

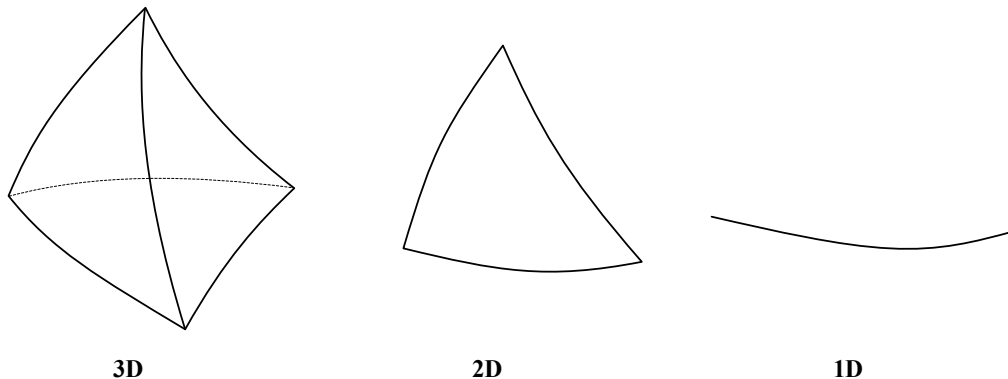


4.2. ábra. Hiperkubusok

A tértartományok végelemekre osztásának egy másik lehetősége azon a felismerésen alapul, hogy az n -dimenziós térben $n+1$ pont egy elemi tartományt, *szimplexet* határoz meg, amely a legegyszerűbb n dimenziós idom. Az $n+1$ pont nulla „térfogatú” szimplexet eredményező elfajuló helyzetének lehetőségeit természetesen ki kell zárunk (háromdimenziós esetben például a négy pont nem lehet ugyanabban a síkban).

Valamely n dimenziós tartományon tetszőlegesen elhelyezkedő $k > n$ pont halmazához ezért hozzárendelhető legalább egy olyan felosztás, amely legalább $k-n$ szimplexből áll. A végelemekre való osztás során keletkezett n -dimenziójú szimplexet $n+1$ darab, $n-1$ dimenziójú szimplex határolja el a szomszédjaitól (a szomszédos végelemektől).

A háromdimenziós szimplex a tetraéder, a kétdimenziós a háromszög, az egydimenziós pedig megintcsak a szakasz. E szimplexek élei, oldallapjai görbültek is lehetnek (4.3. ábra).



4.3. ábra. Szimplexek

A szimplexekre való felosztást *természetesnek* mondják, mivel nem feltételezi egy n -tengelyű lokális vonatkoztatási rendszer előzetes felvételét (ez a megjegyzés csak a kiragadott végelemekre érvényes, a globális vonatkoztatási rendszert így is fel kell vennünk, hiszen a szerkezet geometriáját és peremfeltételeit csak abban tudjuk definiálni).

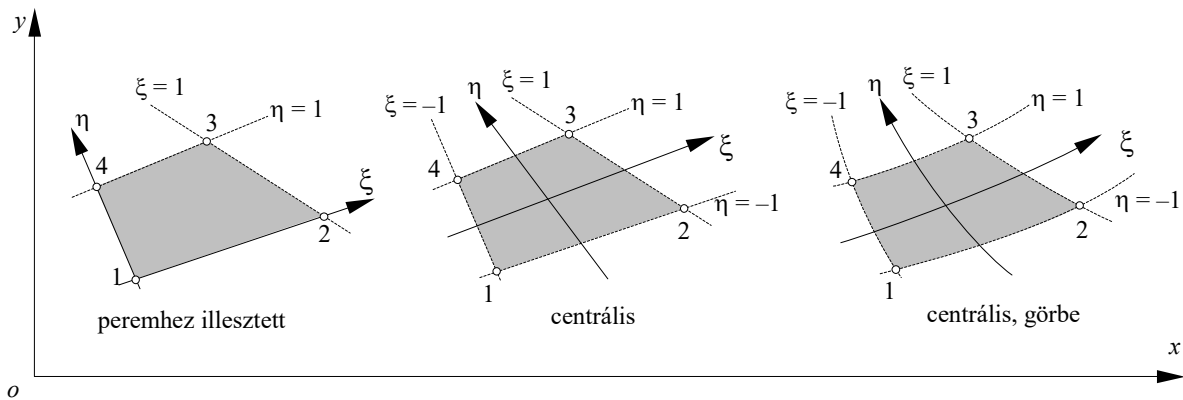
A hiperkubusok és a szimplexek használata mellett és ellen több érvet is fel lehet sorakoztatni. A legfőbb érv általában a hálózás megvalósítása (a végeselemes háló megrajzolása) szokott lenni: a szimplexekre való felosztás sokkal egyszerűbb a hiperkubusok használatánál. Egy szabálytalan

körvonalú tartományt szimplexekkel könnyebb lefedni mint hiperkubusokkal. A háromszög- és a tetraéderhálók létrehozásának általános algoritmusait már régen kidolgozták (ezek rendszerint a Delaunay-háromszögelésen alapulnak), viszont a hiperkubusokra való felosztásról ugyanez korántsem mondható el. Éppen ezért sok végeeselemes program csak szimplexekkel dolgozik, hiperkubusokkal nem.

A felosztás egyszerűségén túlmenően azonban más szempontokat is szem előtt kell tartani. Így például az anyag esetleges anizotrópiáját szimplexekkel csak nehezen lehet modellezni, a hiperkubusok használata ilyenkor célszerűbb lenne. A tapasztalat azt mutatja, hogy a hiperkubusok pontosabb eredményhez vezetnek, mint a szimplexek.

4.2.1. Hiperkubusok

A végeeselem lokális koordináta-rendszere a végeeselem-módszerben az adott elem geometriájához igazodik. Hiperkubusok esetén a végeeselem helyi koordináta-rendszere is tulajdonképpen egy Descartes-féle vonatkoztatási rendszer marad, amelynek tengelyeit a végeeselemhez igazítjuk. Ennek origója vagy a hiperkubus valamelyik sarokpontja (ekkor *peremhez illesztett koordináta-rendszer*ről beszélünk), vagy pedig az a hiperkubus geometriai középpontjában van (ez a *centrális koordináta-rendszer*). Tengelyei az első esetben a hiperkubus élei, a második esetben pedig annak középvonalai. A lokális koordináta-rendszer a végeeselem alakjának megfelelően lehet egyenes vagy görbe vonalú és az csak sajátos esetekben derékszögű. E rendszer *normált*, a tengelyeken a hossz-mértékegységeket úgy választjuk meg, hogy a koordináták a végeeselem tartományán a $[0,1]$, illetve a $[-1,1]$ tartományból vegyenek értékeket az origó helyzetétől függően (az előbbi eset a peremhez illesztett, az utóbbi pedig a centrális rendszeré). Mivel az említett mértékegységekkel kifejezett hosszúságokat tulajdonképpen az adott él hosszához (illetve annak feléhez) viszonyított arányokkal fejezzük ki, e koordinátákat *dimenzió nélkülinek* (adimenzionálisnak) is nevezik. A 4.4. ábra kétdimenziós helyi vonatkoztatási rendszereket mutat be.



4.4. ábra. Hiperkubushoz rendelt helyi vonatkoztatási rendszer

A hiperkubus helyi koordináta-rendszerben felírt $f_L(\xi, \eta, \zeta)$ függvénynek az általános vonatkoztatási rendszerben egy $f_C(x, y, z)$ függvény felel meg, a megfeleltetés pedig az

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta) \quad (4.1)$$

koordináta-transzformáció szerint történik. Természetesen az inverz transzformációnak is léteznie kell:

$$\xi = \xi(x, y, z), \quad \eta = \eta(x, y, z), \quad \zeta = \zeta(x, y, z). \quad (4.2)$$

Bebizonyítható, hogy ez utóbbi kikötés a 4.1. transzformáció függvényeinek Jacobi-determinánsára vonatkozó

$$|\mathbf{J}| \neq 0 \quad (4.3)$$

feltétellel azonos, ahol a Jacobi-mátrix elemei a

$$J_{i,j} = \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} \quad (4.4)$$

parciális deriváltak (az a globális koordináták lokális koordináták szerinti deriváltjait tartalmazza).

Egyenes vonalú, egymáshoz viszonyítva eltolt és/vagy elforgatott vonatkoztatási rendszerek esetén a 4.1. transzformáció Jacobi-mátrixának elemei állandók. Ebben az esetben a 4.2. inverz transzformáció függvényei is könnyen előállíthatók explicit alakban. Más a helyzet a görbe vonalú vonatkoztatási rendszerek esetében: ilyenkor a 4.2. összefüggéseket nem vagy csak nehezen tudjuk kifejezni; azonban erre gyakorlati szempontból nincs is szükség.

A végelemekeken értelmezett összefüggések kiszámításában a helyi koordináta-rendszer használatakor a lokális változókra kell áttérni (beleértve az integrálási határértékeket is) és az elemi integrálási tartományokat is transzformálni kell, például két dimenzióban a

$$dA = dx \cdot dy = |\mathbf{J}| \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (4.5)$$

összefüggés szerint. A deriváltak esetében az áttérés a láncszabály alapján történik:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (4.6)$$

4.2.2. Szimplexek

Szimplexekre való felosztáskor a lokális koordináta-rendszer merőben különbözik a Descartes-féleleltől, azt *természetesnek* mondják. Értelmezése a következő észrevételen alapul: tudjuk, hogy az n -dimenziós szimplex tartományán felvett pontot a szimplex sarokpontjaival összekötve azt $n+1$ darab n -dimenziós belső szimplexre osztja, melyek összterfogata az eredeti szimplex V térfogata lesz. A belső szimplexek V_i térfogatának a teljes térfogathoz viszonyított ξ_i aránya dimenzió nélküli koordinátaként használható, mivel az illető pont helyzete és a térfogatarányok közötti megfeleltetés egyértelmű (4.5. ábra):

$$\xi_i = \frac{V_i}{V}. \quad (4.7)$$

Az $n+1$ helyi természetes koordináta közül csak n független, mivel összegük mindig egységnyi kell legyen:

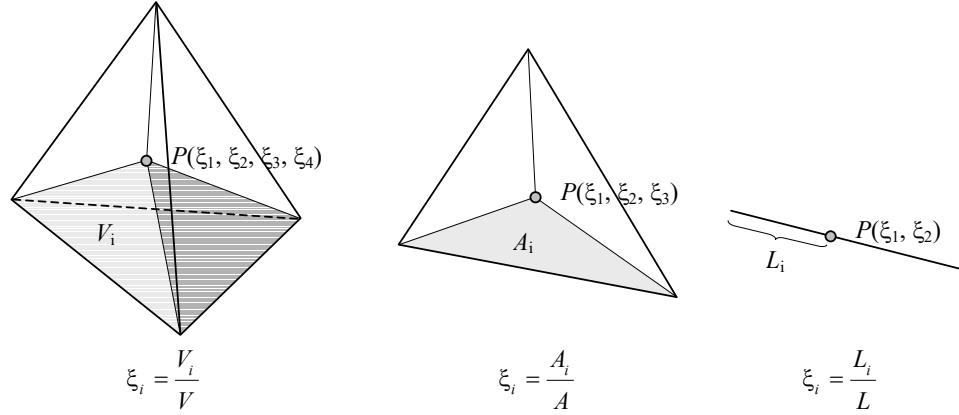
$$\sum_{i=1}^{n+1} \xi_i = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} V_i}{V} = \frac{V}{V} = 1. \quad (4.8)$$

A „térfogat” a háromdimenziós szimplex esetén a tetraéder valódi térfogata, míg két- és egydimenziós szimplexeknél az általánosított fogalom: a háromszög területét, illetve a szakasz hosszát jelenti.

A végeelem feletti függvények és az ezekből származtatott kifejezések felírásakor a természetes koordinátákat ugyanúgy használjuk, mint a Descartes-féle koordinátákat. Az általános és a helyi természetes koordináták közötti kapcsolatot az

$$x = x(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}), \quad y = y(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}), \quad z = z(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}) \quad (4.9)$$

transzformáció fejezi ki, ahol az utolsó természetes koordinátát (ξ_{n+1} -et) csak a teljesség kedvéért írtuk ki, mivel az nem független. A fordított transzformáció képletei is hasonló módon írhatók fel. Természetesen a transzformáció Jacobi-determinánsa ez esetben sem lehet zéró; e determináns az utolsó lokális koordináta szerinti deriváltakat nem tartalmazza.



4.5. ábra. Természetes koordináták

Példának vegyünk egy kétdimenziós szimplexet (4.6. ábra). A direkt transzformációt, bizonyíthatóan, a mátrixos formában felírt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

reláció fogja adni. Az inverz transzformáció (amit az előbbi egyenletnek a mátrix inverzével balról történő beszorzásával kapunk) ennél már lényegesen bonyolultabb:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{2 \cdot A} \cdot (a_1 + b_1 \cdot x + c_1 \cdot y), \\ \xi_2 &= \frac{1}{2 \cdot A} \cdot (a_2 + b_2 \cdot x + c_2 \cdot y), \\ \xi_3 &= \frac{1}{2 \cdot A} \cdot (a_3 + b_3 \cdot x + c_3 \cdot y), \end{aligned} \quad (4.11)$$

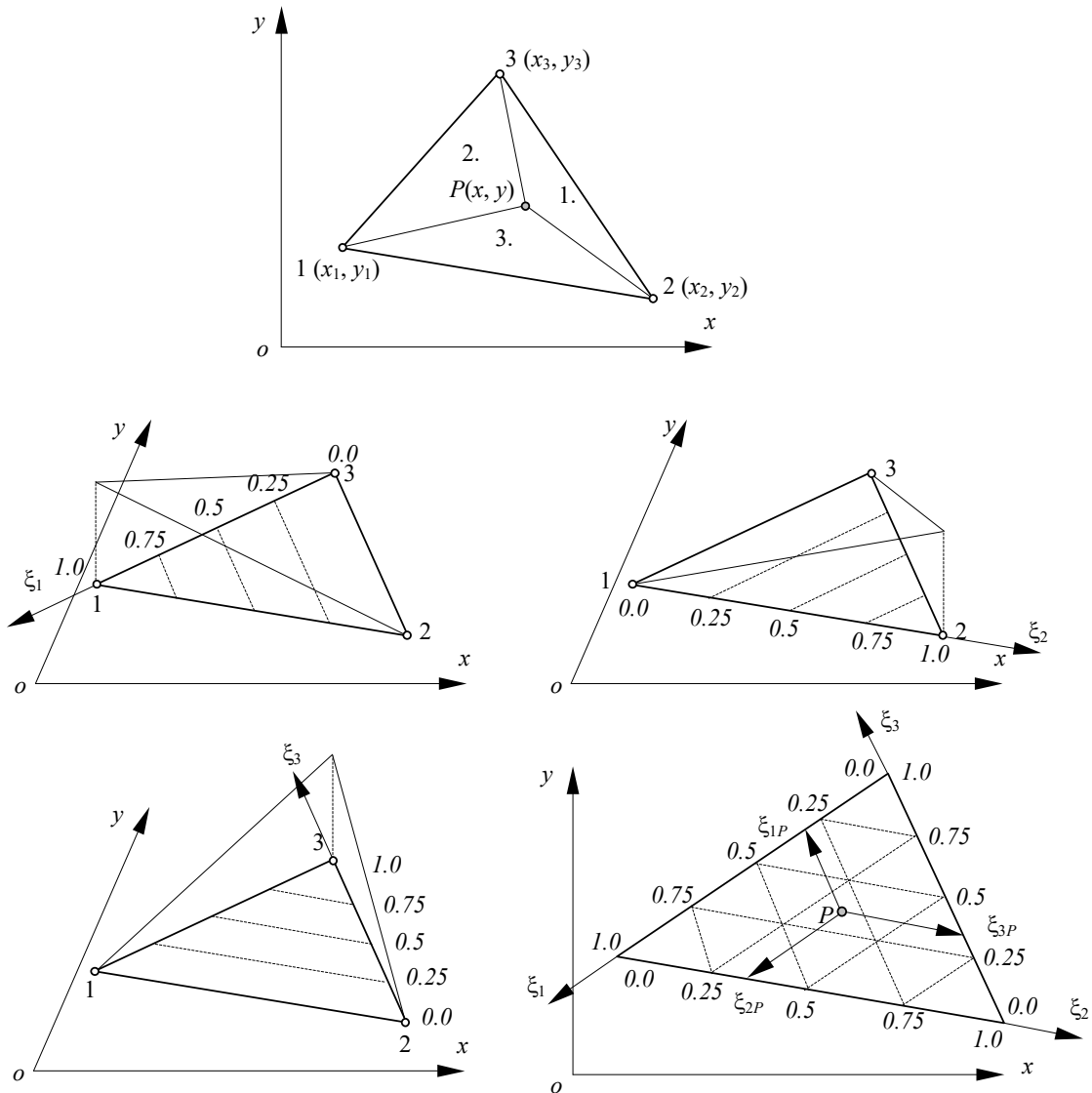
ahol

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2, & b_1 &= y_2 - y_3, & c_1 &= x_3 - x_2, \\ a_2 &= x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3, & b_2 &= y_3 - y_1, & c_2 &= x_1 - x_3, \\ a_3 &= x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1, & b_3 &= y_1 - y_2, & c_3 &= x_2 - x_1, \end{aligned} \quad (4.12)$$

és

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (4.13)$$

a szimplex területe.



4.6. ábra. 2D szimplex általános és helyi koordinátái

Ha a 4.6. ábrán az i belső szimplex (háromszög) egyik csúcsát képező P pontot az állandó ξ_i segédvonalak mentén mozgatjuk, akkor azt tapasztaljuk, hogy az A_i terület nagysága nem változik. A segédvonal ugyanis párhuzamos a háromszögnek az i csomóponttal szemben fekvő alapjával, így a P pont mozgásakor a háromszög magassága nem változik meg, melynek következményeként A_i és így ξ_i is állandó marad. E segédvonalakkal a szimplex valamely megfelelően megválasztott élén egy, a ξ_i természetes koordináta nagyságát visszaadó skálát állapíthatunk meg. Hasonlóképpen eljárva mindhárom koordinátával végül is a 4.6. ábra jobb alsó felén látható viszonyítási rendszerhez jutunk. Ez az ábra csak a szemléltetést szolgálja, a gyakorlatban a lokális rendszerek megrajzolására nincs szükség.

4.3. Interpolációs függvények, folytonossági osztályok

A végeelem-módszer egyik fő vonása az, hogy a megoldást az egyes elemek felett definiált közelítő (interpoláló) függvények formájában keresi. A közelítő függvényeket polinomiálisan fejezik ki – ennek elméleti alapján Weierstrass egy tétele áll, mely szerint bármilyen folytonos függvény tetszőleges pontossággal megközelíthető polinomokkal. E közelítés gyakorlati haszna az interpolációs függvények egyszerűségében, a deriválási és integrálási műveletek analitikus kifejezhetőségében és a számítás pontosságában áll.

A háromdimenziós esetben, ha semmiféle előzetes elgondolás nem befolyásol minket az interpolációs függvények megválasztásának tekintetében, akkor a φ megoldást közelítő $\bar{\varphi}$ függvényt mindhárom koordinátát tekintve azonos felépítésű

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum p_i \cdot x^i = p_0 + p_1 \cdot x + p_2 \cdot x^2 + \dots, \\ q(y) &= \sum q_i \cdot y^i = q_0 + q_1 \cdot y + q_2 \cdot y^2 + \dots, \\ r(z) &= \sum r_i \cdot z^i = r_0 + r_1 \cdot z + r_2 \cdot z^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.14)$$

polinomok szorzataként vehetjük fel. A közelítő $\bar{\varphi}$ függvény tehát a következő polinom lesz:

$$\varphi(x, y, z) \approx \bar{\varphi}(x, y, z) = \bar{\varphi}_{0,0,0} + \bar{\varphi}_{1,0,0} \cdot x + \bar{\varphi}_{0,1,0} \cdot y + \dots = \sum_{i,j,k} \bar{\varphi}_{i,j,k} \cdot x^i \cdot y^j \cdot z^k. \quad (4.15)$$

Az $x^i \cdot y^j \cdot z^k$ szorzatok egymástól lineárisan függetlenek, függvénybázist alkotnak, a

$$\bar{\varphi}_{i,j,k} = p_i \cdot q_j \cdot r_k \quad (4.16)$$

szorzatokból álló együtthatók pedig a közelítő függvény e bázisban felvett koordinátái (az általánosított koordináták), a megoldás folyamata pedig ezeknek a koordinátáknak a kiszámítását jelenti.

A végeelem-módszerben az interpolálás véges tartományok felett történik, melyek méretét úgy választjuk meg, hogy a φ függvény az adott tartományon várhatóan eléggé sima legyen ahhoz, hogy alacsony fokú polinomokkal közelíthessük meg. A számítási nehézségek miatt ugyanis mindig a lehető legalacsonyabb fokú polinomokkal kell dolgoznunk.

A polinomok foka, a keresett függvény várható változása és a végeelemek mérete szorosan összefügg. Ha egy lassan változó, sima megoldásfüggvényre számítunk, akkor megfelelő közelítést jelenthet egy alacsony fokszámú (például lineáris) polinom, nagyobb elemméret esetén is. Gyorsan változó függvények esetén a végeelem méreteinek csökkentése és/vagy a polinom fokszámának növelése szükséges.

Az algoritmusok a fokszám növelésével mind bonyolultabbak lesznek, a számítási idő is erőteljesen nő – ezért a végeelemes programok nem teszik lehetővé a polinomok fokának tetszőleges növelését. A gyakorlatban harmadfokúnál magasabb hatványú koordinátákat tartalmazó polinomokat csak ritkán használnak.

A közelítő polinomnak nem kell szükségszerűen mindhárom koordinátát tekintve azonos felépítésűnek lennie. Például ha a φ függvény csak egyik irányban mutat erőteljes változást, akkor csak abban az egy irányban szükséges magasabb fokú közelítést használnunk. Ez esetben a végeelem helyi vonatkoztatási rendszerének (tehát a végeelem megfelelő élének) ehhez az irányhoz kell igazodnia.

Amennyiben a vizsgált tartomány geometriai jellemzése során mód volt alacsonyabb dimenziójú közelítésre (felület- vagy vonalkontinuumra való áttérésre), akkor a polinomok felépítése is megfelelően leegyszerűsödik: a 4.14. polinomok közül csak kettőt, illetve egyet használunk fel, a közelítő függvény pedig csak két-, illetve egyváltozós lesz.

Ha a polinomban minden egyes ijk kitevőjű tag jelen van, akkor az adott polinomot *teljesnek* nevezik. Bizonyos gyakorlati észrevételek (az algoritmus egyszerűsítése, a számítási idő csökkentése) a nem teljes polinomok használatához vezettek: megfigyelték, hogy bizonyos tagok elhagyása nem befolyásolja mérvadó módon a közelítés pontosságát. Például a

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_{0,0,0} + \bar{\varphi}_{1,0,0} \cdot x + \bar{\varphi}_{0,1,0} \cdot y + \bar{\varphi}_{0,0,1} \cdot z + \bar{\varphi}_{2,0,0} \cdot x^2 + \bar{\varphi}_{0,2,0} \cdot y^2 + \bar{\varphi}_{0,0,2} \cdot z^2 \quad (4.17)$$

polinom, mely a teljes kétváltozós másodfokú

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} = \bar{\varphi}_{0,0,0} + \bar{\varphi}_{1,0,0} \cdot x + \bar{\varphi}_{0,1,0} \cdot y + \bar{\varphi}_{0,0,1} \cdot z + \bar{\varphi}_{1,1,0} \cdot x \cdot y + \bar{\varphi}_{0,1,1} \cdot y \cdot z + \bar{\varphi}_{1,0,1} \cdot x \cdot z + \\ + \bar{\varphi}_{2,0,0} \cdot x^2 + \bar{\varphi}_{0,2,0} \cdot y^2 + \bar{\varphi}_{0,0,2} \cdot z^2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

polinomból a vegyes szorzatokat jelentő tagok elhagyásával származtatható, izotróp marad (felépítése a változók ciklikus felcserélése esetén nem változik) és a közelítésben sem nyújt lényegesen rosszabb teljesítményt a teljes polinomhoz viszonyítva, viszont annál jóval kevesebb tagot tartalmaz.

Az egy végeelem feletti közelítés pontossága azonban még nem minden. A darabjaiból összerakott, a végeelemek felett definiált közelítő függvények összessége által adott megközelítésről is elvárunk bizonyos dolgokat, így például azt, hogy az nemcsak a végeelemen, hanem vizsgált tartomány egészén folytonos kell legyen. Esetenként ezen túlmenően a deriváltak folytonosságát is biztosítani kell, ha valamilyen megfontolás miatt az elemek határfelületén nem jelenhetnek meg ugrások és törések. Ezek a kitételek nem általános jellegűek, hanem az adott feladathoz kötöttek.

A közelítő függvények és deriváltjainak folytonossága szempontjából különböző *folytonossági osztályokat* definiálhatunk:

- C_0 – a közelítő függvény a teljes diszkrétizált tartományon, az elsőrendű deriváltja pedig csak a végeelemek tartományán folytonos;
- C_1 – a közelítő függvény és annak első deriváltja a teljes diszkrétizált tartományon, a másodrendű deriváltja pedig csak a végeelemek tartományán folytonos;
- C_2 – a közelítő függvény és annak első és második deriváltja a teljes diszkrétizált tartományon, a harmadrendű deriváltja pedig csak a végeelemek tartományán folytonos;
-
- C_n – a közelítő függvény és annak első n deriváltja a teljes diszkrétizált tartományon, az $n+1$ -ed rendű deriváltja pedig csak a végeelemek tartományán folytonos.

A minimális folytonossági osztály általában a feladatot leíró differenciálegyenletekben szereplő legmagasabb fokú derivált m rendjétől függ: az előírandó folytonossági osztály ilyenkor C_{m-1} .

Elméletileg a C_0 folytonossági osztálynál is alacsonyabb rendű approximáció is lehetséges volna, amikor a közelítő függvény folytonosságát csak a végeelem tartományán írjuk elő (a tanulmányozott térrész egészén az például egy lépcsős függvényt alkothat), azonban a végeelem-módszer gyakorlatában ez a fajta közelítés nem fordul elő.

A C_0 folytonosság biztosítása könnyen megoldható: elegendő a szomszédos végeelemek érintkezési határa mentén az interpolációs polinomok formai azonosságát és a közös csomópontokban a függvényértékek egyenlőségét előírunk.

Egydimenziós esetben elvileg bármilyen magasrendű folytonosság könnyen biztosítható, két- vagy háromdimenziós feladatoknál viszont már a C_1 folytonosság megoldása is lényegesen

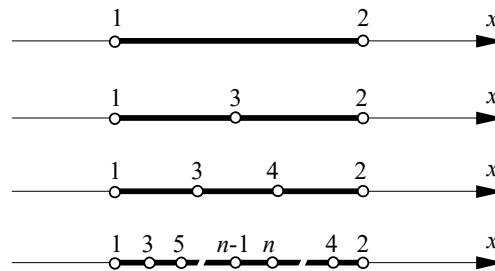
nehezebb feladat, a magasabb folytonossági osztályok a megvalósítási nehézségek miatt pedig inkább csak elméleti jelentőséggel bírnak.

4.4. Vonalelemek

4.4.1. Helyi koordináták

Egydimenziós, egy független változóval, közönséges differenciálegyenlettel leírható feladatok megoldása során gyakran analitikus vagy egyéb numerikus eljárás alkalmazása is lehetséges, azonban – főleg nagyszámú egymáshoz kapcsolódó vonalszerű résztartományokból álló szerkezetek esetén – a végelem-módszer alkalmazása előnyösebb lehet.

A tanulmányozott tartomány diszkretizálása során egymással a végpontjaikban kapcsolódó vonalelemek halmazához jutunk. A vonalelem egyszerre egydimenziós hiperkubus és szimplex, melynek peremét a végpontjaiban levő csomópontok alkotják. Magasabbfokú interpolációs polinomok megkövetelhetik további m belső csomópont felvételét is, amelyek a vonalemet $m+1$, rendszerint egymással egyenlő hosszúságú részre osztják (4.7. ábra). A csomópontok száma a végelem egyik jellemzője. Számolásuk sorrendje elvileg tetszőleges, gyakorlatilag az alkalmazott szoftver megírásakor felállított egyezményhez igazodik.



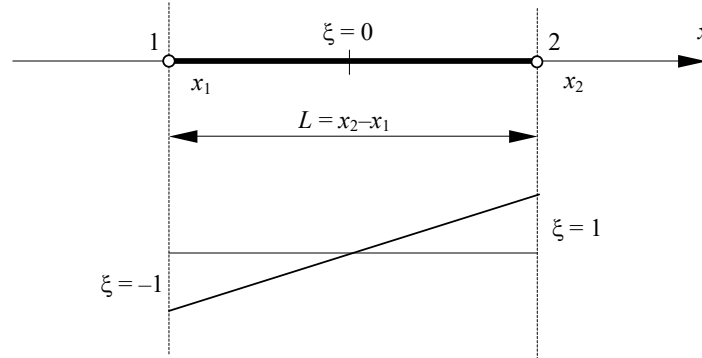
4.7. ábra. Vonalelemek

A belső csomópontok felvételével a közelített mennyiség nemlineáris változását lehet pontosabban modellezni. Az előbbi fejezetekben a közelítő függvény meghatározásánál a csomóponti függvényértékekből indulunk ki. A végelemek peremén levő csomópontokban ezek az értékek egyaránt érvényesek voltak minden, az adott csomópontban érintkező végelemre, hiszen a közelítő függvény folytonos kellett legyen a peremeken is – ez volt az a feltétel, amely végül is a végelemeket összekapcsolta egymással. A belső csomópontok esetében ilyen folytonossági feltételek nem írhatók elő, éppen ezért a lineáris egyenletrendszerben több ismeretlen lesz, mint egyenlet. Az ismeretlen megoldásfüggvény megközelítésénél a belső csomópontok tehát egyáltalán nem bizonyulnak hasznosnak, hiszen a rájuk vonatkozó feltételeket legfeljebb a peremen érvényes csomóponti értékekből tudnánk valamilyen szabály szerint előállítani (ezeket a feltételeket *szintetikusnak* is szokták nevezni).

Gyakorlati szempontból azonban a belső csomópontok felvétele mégiscsak előnyökhöz juttathat a görbült elemek geometriájának megközelítésénél, ugyanis a végelem-módszerben nemcsak a megoldásfüggvény értékét állítjuk elő a csomóponti értékek függvényeként, hanem egy adott pont koordinátáit is a csomópontok koordinátáinak függvényében adjuk meg. A végelem alakját tehát a koordinátákat interpoláló függvények határozzák meg. A geometria mindig ismert, így a belső csomópontok koordinátái is ismertek, éppen ezért a geometriát közelítő függvény szintetikus feltételek nélkül is előállítható. Végző következtetésként megjegyezhetjük, hogy a 4.7. ábrán látható végelemek közül a gyakorlatban inkább csak a két csomópontos változattal találkozhatunk, a görbült elemek geometriájának megközelítésére pedig az egy belső csomóponttal

rendelkező „parabolikus” végelem alkalmas (a közelítő függvény másodfokú, innen a parabolikus jelző).

Ha a vonalelem egydimenziós hiperkubusnak tekintjük, akkor a helyi koordináta-rendszer origóját például az elem középpontjában vehetjük fel (4.8. ábra).



4.8. ábra. Az egydimenziós hiperkubus lokális koordináta-rendszere

Az elem L hosszát két egységnek megfelelően kapjuk a normált helyi vonatkoztatási rendszert. A két végpont koordinátái ekkor $\xi = -1$, illetve $\xi = 1$, függetlenül attól, hogy a vonalelem egyenes-e vagy görbe. A globális és lokális koordináták közötti összefüggést az

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2} \cdot \xi \quad (4.19)$$

direkt és a

$$\xi = \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot (2 \cdot x - x_1 - x_2) \quad (4.20)$$

inverz transzformációk adják. A Jacobi-mátrix elfajul, az egyetlen skalár lesz:

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{x_2 - x_1}{2} \quad (4.21)$$

(ez a 4.19. reláció deriváltja), melynek „determinánsa” (a derivált értéke) mindaddig zérónál nagyobb szám, míg a vonalelem hossza nem zéró. A d/dx differenciáloperátornak a lokális rendszerben a láncszabály szerint a

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \cdot \frac{d}{d\xi} = \frac{2}{x_2 - x_1} \cdot \frac{d}{d\xi} \quad (4.22)$$

operátor felel meg.

Ha a vonalelemet szimplexnek tekintjük, akkor „térfogatát” annak L hossza fogja jelenteni. Az általános helyzetű P pont természetes koordinátáit a

$$\xi_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = \frac{a}{L}, \quad \xi_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 1 - \frac{a}{L} \quad (4.23)$$

összefüggések adják, ahol $\xi_1 + \xi_2$ nyilvánvalóan egységnyi (4.9. ábra).

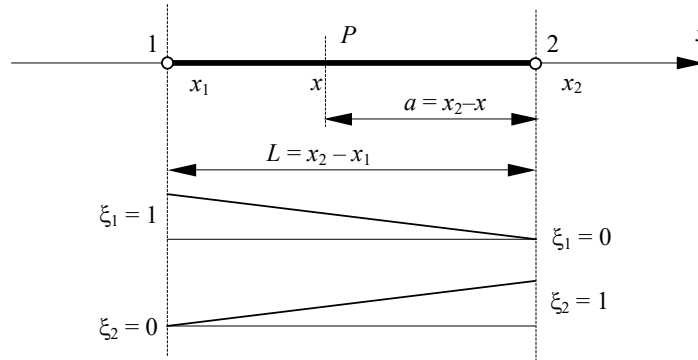
Az inverz transzformáció ez esetben

$$x = \xi_1 \cdot x_1 + \xi_2 \cdot x_2 = \xi_1 \cdot (x_1 - x_2) + x_2 = \xi_2 \cdot (x_2 - x_1) + x_1. \quad (4.24)$$

Az elfajuló, kételemes Jacobi-mátrix tagjai

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_1} = x_1 - x_2 \quad \text{és} \quad \frac{\partial x}{\partial \xi_2} = x_2 - x_1 \quad (4.25)$$

lennének, amelyek a $\xi_1 + \xi_2 = 1$ egyenletet követő $d\xi_1 + d\xi_2 = 0$ összefüggés miatt nem függetlenek egymástól. A Jacobi-mátrixba tehát elegendő csak egy tagot bevenni, így „determinánsa” is a figyelembe vett taggal lesz egyenlő.



4.9. ábra. Az egydimenziós szimplex lokális koordinátarendszere

A d/dx differenciáloperátor ez esetben a lokális rendszerben a következő formához vezet:

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_2} = \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \xi_2} - \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right). \quad (4.26)$$

4.4.2. Interpolációs polinomok

Az interpolációs polinomok felépítéséhez a 4.14. készletből elegendő csak egyetlen tagot venni, mivel egydimenziós függvény közelítését kell megoldanunk. Ez esetben a 4.15. közelítő függvény a készlet első tagjával lesz azonos, mely egy x -ben n -edfokú polinom:

$$p^{(n)}(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n. \quad (4.27)$$

Ugyanezt mátrixos formában is felírhatjuk:

$$p^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x_i = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{Bmatrix} = \{\mathbf{x}_n\}^T \cdot \{\mathbf{a}_n\}, \quad (4.28)$$

ahol $\{\mathbf{x}_n\}$ a bázisfüggvények, $\{\mathbf{a}_n\}$ pedig az általánosított koordináták vektora.

A polinom a_i együtthatóinak meghatározása az elem csomópontjaiban felírt függvényértékek, illetve az első néhány derivált előírt értékeinek alapján történik a választott folytonossági osztálynak megfelelően.

4.4.3. A C_0 illesztés

A C_0 illesztés csak a függvényértékek azonosságát írja elő az egymáshoz illeszkedő végelemek végpontjaiban.

A kétpontos C_0 osztályú vonalelem esetében összesen két feltételt kell és lehet felírni: a függvény értékeit a két csomópontban. A két feltételből két együtthatót tudunk meghatározni (a_0 -t és a_1 -et), a közelítő függvény tehát egy elsőfokú polinom lesz:

$$p^{(1)}(x) = a_0 + a_1 \cdot x. \quad (4.29)$$

Az alábbi (4.10.) ábrán megjelölt végelemre ezeket a feltételeket a következő egyenletrendszerbe tömöríthetjük:

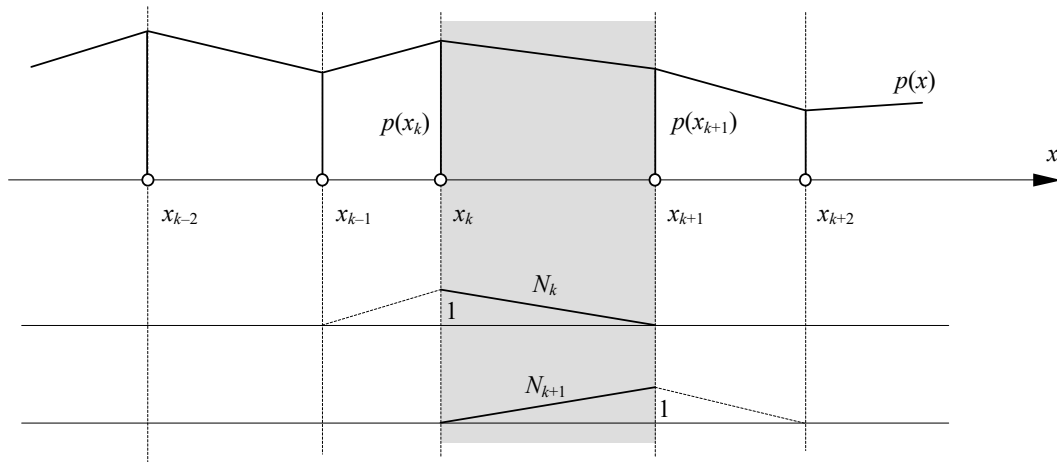
$$\begin{Bmatrix} p^{(1)}(x_k) \\ p^{(1)}(x_{k+1}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_k \\ 1 & x_{k+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix}, \quad (4.30)$$

ahol a bal oldali vektor a csomóponti értékeket tartalmazza. Ezt az összefüggést röviden a

$$\{\mathbf{p}^{(1)}\} = [\Phi_1] \cdot \{\mathbf{a}_1\} \quad (4.31)$$

formában is felírhatjuk, ahonnan a keresett együtthatók

$$\{\mathbf{a}_1\} = [\Phi_1]^{-1} \cdot \{\mathbf{p}^{(1)}\}. \quad (4.32)$$



4.10. ábra. C_0 folytonosság lineáris vonalelemek fölött

Az eddig bevezetett jelölésekkel az interpolációs polinom

$$p^{(1)}(x) = \{\mathbf{x}_1\}^T \cdot [\Phi_1]^{-1} \cdot \{\mathbf{p}^{(1)}\} = \{\mathbf{N}^{(1)}\}^T \cdot \{\mathbf{p}^{(1)}\} \quad (4.33)$$

lesz, ahol az $\{N^{(1)}\}$ vektort mint az interpolációs függvények vektorát, a $\{p^{(1)}\}$ vektort pedig mint a csomóponti értékek vektorát azonosíthatjuk, a bázisfüggvények vektora pedig

$$\{\mathbf{x}_1\}^T = [1 \quad x]. \quad (4.34)$$

Itt megjegyezhetjük, hogy néha az $\{N\}$ függvényeket is bázisfüggvényeknek nevezik, ekkor a $\{p\}$ tagjait általánosított koordinátáknak tekintik. Ez a szóhasználat azonban nem teljesen helyes, ugyanis a bázisfüggvények egymástól lineárisan függetlennek kellene legyenek, s mint látni fogjuk, az $\{N\}$ vektor tagjai nem azok. Az $\{N\}$ függvényeknek egyébként van egy harmadik nevük is: *alakfüggvények*, mivel az interpolációs polinom által leírt görbe alakját adják meg.

Az interpolációs függvények vektora a következőképpen fejtethető ki:

$$\{N^{(1)}\} = (\{\mathbf{x}_1\}^T \cdot [\Phi_1]^{-1})^T = \begin{Bmatrix} N_k(x) \\ N_{k+1}(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \\ 1 - \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix}. \quad (4.35)$$

A végeelem bármely pontjában a két interpolációs függvény, N_k és N_{k+1} összege egységnyi, tehát szigorúan véve ezért nem nevezhetők bázisfüggvényeknek (mert nem függetlenek egymástól).

Az x_k és az x_{k+1} koordináták a lokális koordináták bármelyik típusával kifejezhetők, azonban hasznos észrevennünk, hogy az utóbbi kifejezés jobboldali vektorának felső tagja éppen ξ_1 , az alsó pedig ξ_2 . Innen rögtön következik, hogy a két interpolációs függvény értéke az indexnek megfelelő pontban egységnyi, míg a másikban nulla.

Bár az interpolációs függvényeket és az interpolációs polinomokat matematikailag akár a teljes diszkrétizált tartományon értelmezhetjük, a végeelem-módszer az értelmezési tartományt leszűkíti az adott végeelem tartományára. Ugyanakkor észrevehetjük, hogy például a k csomópont nemcsak az eddig tanulmányozott, k és $k+1$ csomópontok által közrezárt vonalelem része, hanem része a szomszédos, $k-1$ és k csomópontok között fekvő végeelemnek is. Így az N_k interpolációs függvényt a szomszédos elemen is értelmezhetjük és annak teljes leírása a következő lesz:

$$\hat{N}_k = \begin{cases} 1 - \frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}} & \text{ha } x \in [x_{k-1}, x_k], \\ 1 - \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} & \text{ha } x \in [x_k, x_{k+1}], \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (4.36)$$

A 4.35. interpolációs függvényekkel az interpolációs polinomot a következő lineáris kombináció adja:

$$p^{(1)}(x) = p^{(1)}(x_k) \cdot N_k(x) + p^{(1)}(x_{k+1}) \cdot N_{k+1}(x). \quad (4.37)$$

A legegyszerűbb esetben, a C_0 folytonosságú kétpontos végeelem esetében tehát az interpolációs polinom elsőfokú (lineáris), amint az a 4.10. ábrán is látható. A végpontokban nincsenek ugrások, de a közelítő függvény ott nem sima.

A C_0 osztályú három csomópontos vonalelem esetében három feltételt kell felírni (a függvény értékeit a három csomópontban), ami három meghatározható együtthatóhoz vezet. A közelítő függvény most egy másodfokú polinom:

$$p^{(2)}(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2, \quad (4.38)$$

az említett feltételek pedig a következők:

$$\begin{Bmatrix} p^{(2)}(x_k) \\ p^{(2)}(x_{k+1}) \\ p^{(2)}(x_{k+2}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_k & x_k^2 \\ 1 & x_{k+1} & x_{k+1}^2 \\ 1 & x_{k+2} & x_{k+2}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

(a csomópontokat a 4.7. ábrán látható módon számozzuk, tehát a $k+2$ indexű pont a belső csomópont), amelyeket röviden

$$\{\mathbf{p}^{(2)}\} = [\Phi_2] \cdot \{\mathbf{a}_2\} \quad (4.40)$$

formában írunk fel. Az egyenletrendszert megoldva az együtthatók

$$\{\mathbf{a}_2\} = [\Phi_2]^{-1} \cdot \{\mathbf{p}^{(2)}\} \quad (4.41)$$

lesznek, amelyekkel az interpolációs polinom ezúttal

$$p^{(2)}(x) = \{\mathbf{x}_2\}^T \cdot [\Phi_2]^{-1} \cdot \{\mathbf{p}^{(2)}\} = \{\mathbf{N}^{(2)}\}^T \cdot \{\mathbf{p}^{(2)}\}, \quad (4.42)$$

ahol

$$\{\mathbf{x}_2\}^T = [1 \quad x \quad x^2]. \quad (4.43)$$

Az interpolációs függvények vektora most három elemet tartalmaz és a következőképpen fejthető ki:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{N}^{(2)}\} &= (\{\mathbf{x}_2\}^T \cdot [\Phi_2]^{-1})^T = \begin{Bmatrix} N_k(x) \\ N_{k+1}(x) \\ N_{k+2}(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k} \cdot \left(2 \cdot \frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k} - 1\right) \\ \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \cdot \left(2 \cdot \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} - 1\right) \\ 4 \cdot \frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k} \cdot \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} \xi_1 \cdot (2 \cdot \xi_1 - 1) \\ \xi_2 \cdot (2 \cdot \xi_2 - 1) \\ 4 \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

ahol feltételeztük, hogy a harmadik csomópont ez elem középpontjában van:

$$x_{k+2} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}. \quad (4.45)$$

Ha a három interpolációs függvény értékeit a végeelem valamely adott pontjában összegezzük, akkor megint csak azt találjuk, hogy az összeg minden pontban egységnyi lesz (az interpolációs függvények tehát most sem függetlenek).

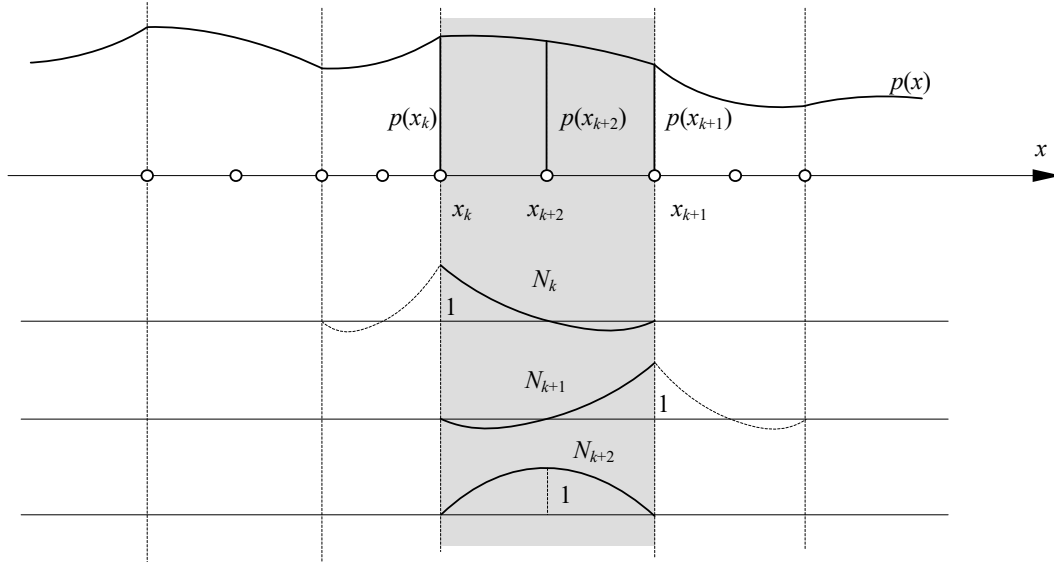
Az interpolációs függvények értelmezése a szomszéd elemekre most is kiterjeszhető, azonban a harmadik, amely az elem középpontjához tartozik, csak az adott végelem felett rendelkezik nullától különböző értékekkel.

Az x_k és az x_{k+1} koordináták most is a lokális koordináták bármelyik típusával kifejezhetők, az interpolációs függvények a lokális koordináták másodfokú polinomjaiként írhatók fel (ezért az elem *parabolikus*). Ha az interpolációs függvényeket ábrázoljuk, akkor azt találjuk, hogy ez esetben is az indexüknek megfelelő pontban értékük egységnyi, míg a többi csomópontban nulla.

A meghatározott interpolációs függvényekkel az interpolációs polinomot ez esetben a következő lineáris kombináció adja:

$$p^{(2)}(x) = p^{(2)}(x_k) \cdot N_k(x) + p^{(2)}(x_{k+1}) \cdot N_{k+1}(x) + p^{(2)}(x_{k+2}) \cdot N_{k+2}(x). \quad (4.46)$$

A C_0 folytonosságú hárompontos végelem esetében az interpolációs polinom másodfokú, a közelítő függvény tehát görbe, mely esetleg jobban simul a közelített függvényhez, mintha azt lineárisan, egyenes szakaszokkal közelítettük volna meg. A végpontokban ezúttal sincsenek ugrások, de a közelítő függvény ott most sem sima (4.11. ábra).



4.11. ábra. C_0 folytonosság parabolikus vonalelemek fölött

Ha további belső csomópontokat vennénk fel, akkor a C_0 folytonosságú illesztés egyre magasabb fokú approximációt eredményezne. Egy n csomópontú elem (melyek közül $n-2$ belső csomópont) esetén a közelítés foka $n-1$ lesz. Az interpolációs függvényeket kiszámítva észrevehetjük, hogy azokat az

$$\begin{aligned} N_j^{(n-1)}(x) &= \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \\ &= \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_{j-1}) \cdot (x - x_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot (x - x_n)}{(x_j - x_1) \cdot (x_j - x_2) \cdot \dots \cdot (x_j - x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x_j - x_{n-1}) \cdot (x_j - x_n)} \end{aligned} \quad (4.47)$$

kifejezéssel általánosíthatjuk; ezeket *Lagrange polinomoknak* nevezik. Láthatjuk, hogy az $x = x_j$ pontban a számláló azonos a nevezővel, tehát a polinom értéke ott egységnyi, az $x = x_i$ ($i \neq j$) pontok bármelyikében pedig a polinom értéke zéró. Ezen interpolációs függvényekkel a C_0 folytonos n -pontos vonalelem interpolációs polinoma

$$p^{(n-1)}(x) = p^{(n-1)}(x_k) \cdot N_k^{(n-1)}(x) + p^{(n-1)}(x_{k+1}) \cdot N_{k+1}^{(n-1)}(x) + \dots + p^{(n-1)}(x_{k+n-1}) \cdot N_{k+n-1}^{(n-1)}(x). \quad (4.48)$$

4.4.4. A C_1 illesztés

A C_1 osztály a végelemek határán nemcsak a függvényértékek, hanem az elsőrendű deriváltak folytonosságát is előírja. A legegyszerűbb C_1 -folytonos végelem a két csomópontos vonalelem, amelynek esetében így összesen négy feltételt kell felírunk. E négy feltétel egy harmadfokú polinom négy együtthatóját határozza meg:

$$p^{(3)}(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 \quad (4.49)$$

(tehát a legegyszerűbb C_1 folytonos elem feletti interpolálás harmadfokú), amelynek deriváltja

$$p^{(3)'}(x) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + 3 \cdot a_3 \cdot x^2. \quad (4.50)$$

A feltételek tehát az előbbi két polinom értékeit írják elő az x_k és az x_{k+1} pontokban:

$$\begin{Bmatrix} p^{(3)}(x_k) \\ p^{(3)'}(x_k) \\ p^{(3)}(x_{k+1}) \\ p^{(3)'}(x_{k+1}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_k & x_k^2 & x_k^3 \\ 0 & 1 & 2 \cdot x_k & 3 \cdot x_k^2 \\ 1 & x_{k+1} & x_{k+1}^2 & x_{k+1}^3 \\ 0 & 1 & 2 \cdot x_{k+1} & 3 \cdot x_{k+1}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}, \quad (4.51)$$

amelyeket röviden is felírhatunk:

$$\{\mathbf{p}^{(3)}\} = [\Phi_3] \cdot \{\mathbf{a}_3\}. \quad (4.52)$$

Az egyenletrendszer megoldása az együtthatókat adja:

$$\{\mathbf{a}_3\} = [\Phi_3]^{-1} \cdot \{\mathbf{p}^{(3)}\}, \quad (4.53)$$

ezekkel az interpolációs polinom

$$p^{(3)}(x) = \{\mathbf{x}_3\}^T \cdot [\Phi_3]^{-1} \cdot \{\mathbf{p}^{(3)}\} = \{\mathbf{N}^{(3)}\}^T \cdot \{\mathbf{p}^{(3)}\} \quad (4.54)$$

lesz, ahol

$$\{\mathbf{x}_3\}^T = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3]. \quad (4.55)$$

Az interpolációs függvények vektora most négyelemű:

$$\{\mathbf{N}^{(3)}\} = (\{\mathbf{x}_3\}^T \cdot [\Phi_3]^{-1})^T = \begin{Bmatrix} N_k^0(x) \\ N_k^1(x) \\ N_{k+1}^0(x) \\ N_{k+1}^1(x) \end{Bmatrix} \quad (4.56)$$

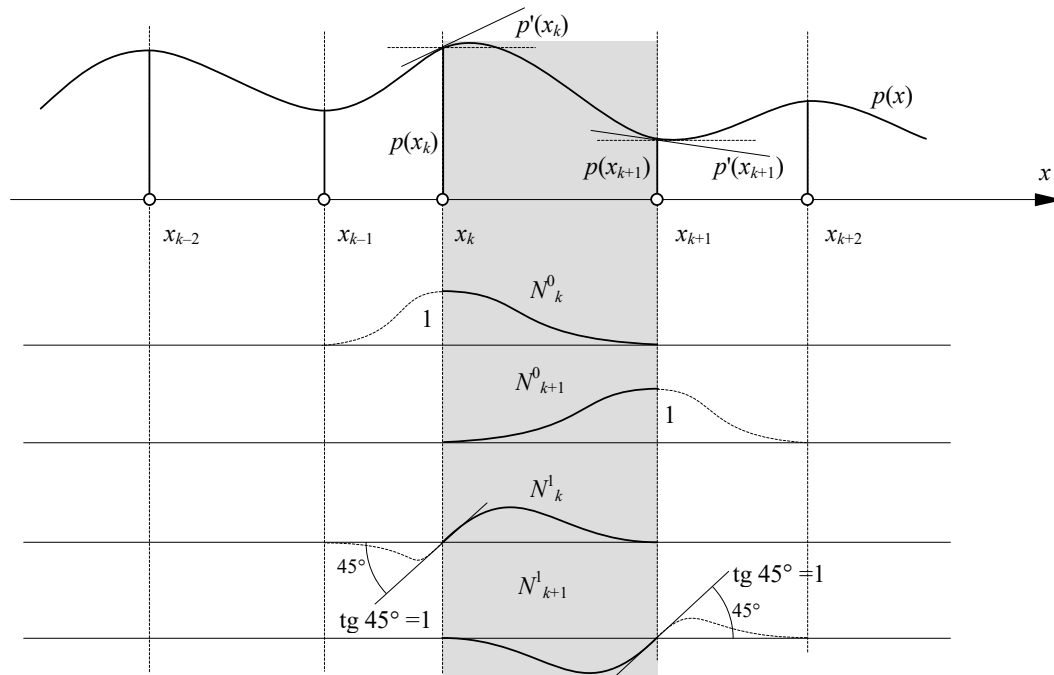
$$= \left\{ \begin{array}{l} 1 - 3 \cdot \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right)^3 \\ (x - x_k) - 2 \cdot \frac{(x - x_k)^2}{x_{k+1} - x_k} + \frac{(x - x_k)^3}{(x_{k+1} - x_k)^2} \\ 1 - 3 \cdot \left(\frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} \right)^3 \\ (x_{k+1} - x) - 2 \cdot \frac{(x_{k+1} - x)^2}{x_{k+1} - x_k} + \frac{(x_{k+1} - x)^3}{(x_{k+1} - x_k)^2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \xi_1^2 - 2 \cdot \xi_1^3 \\ L \cdot (\xi_1^2 - \xi_1^3) \\ 3 \cdot \xi_2^2 - 2 \cdot \xi_2^3 \\ -L \cdot (\xi_2^2 - \xi_2^3) \end{array} \right\},$$

elemei harmadfokú polinomok. L az elem hossza. N felső indexe a derivált rendjére vonatkozik.

Megállapítható, hogy a „0” felső indexű interpolációs függvények az alsó indexnek megfelelő csomópontban egységnyiek, a többi pontban pedig értékük zéró. A deriváltra vonatkozó, „1” felső indexű interpolációs függvények értéke minden csomópontban nulla. A „0” felső indexű függvények deriváltja minden csomópontban zéró, az „1” felső indexű függvények deriváltja viszont az alsó indexnek megfelelő csomópontban egységnyi, a többiben pedig zéró.

Az interpolációs polinom részletesen kifejtett alakja ez esetben:

$$p^{(3)}(x) = p^{(3)}(x_k) \cdot N_k^0(x) + p^{(3)}(x_{k+1}) \cdot N_{k+1}^0(x) + p^{(3)}(x_k) \cdot N_k^1(x) + p^{(3)}(x_{k+1}) \cdot N_{k+1}^1(x). \quad (4.57)$$



4.12. ábra. C_1 folytonossági osztályú kétsomópontos vonalelem feletti közelítés

A legegyszerűbb C_1 -folytonos vonalelem feletti interpoláció tehát harmadfokú; az interpolációs függvények és az interpolációs polinom ábrázolása során egyaránt harmadfokú parabolákhoz jutunk (4.12. ábra). A csomópontokban nincs ugrás és a függvény sima. A másodfokú

derivált által meghatározott görbület a csomópontokban viszont ugrásszerűen változhat, ott akár inflexiók pontok is lehetnek, mivel a másodrendű deriváltak folytonosságát a C_1 osztály nem kell biztosítsa.

Az approximáció rendjének növelése érdekében a vonalelemen belső csomópontokat is fel lehetne venni (ez a gyakorlatban nem honosodott meg). A folytonossági osztályok definíciója nem tartalmaz belső csomópontokra vonatkozó előírásokat, tehát ezekben a függvény deriváltjának értékét vagy előírjuk, vagy nem. Az előbbi lehetőség legkevesebb hat, az utóbbi pedig legkevesebb öt feltételhez vezet, a közelítés foka így legalább ötöd-, illetve negyedfokú lenne.

4.4.5. Magasabb osztályú illesztések

Amennyiben a csomópontokban a deriváltak folytonosságát is előírjuk az interpolációs polinomok a *Hermite-polinomok* (vagy *simuló-polinomok*) lesznek. Az n -ed rendű Hermite-polinom az első n -ed rendű derivált folytonosságát biztosítja a következő feltételek előírásával:

$$\frac{d^r H_{k,m}^n(x)}{dx^r} = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = x_k \text{ és } r = m \\ 0 & \text{ha } x = x_k \text{ de } r \neq m, \text{ vagy } x = x_{k+1} \end{cases} \quad (4.58)$$

ahol $r, m = 0, 1, \dots, n$,

vagyis a függvény értéke vagy deriváltjának értéke csak egy pontban lehet egységnyi, a többiben zéró. Az összefüggésben r az interpolációs polinom deriváltjának rendje. A k index a csomópont sorszámára, m pedig a derivált rendjére vonatkozik.

A Hermite-polinomok definícióját az eddigiekkel egybevetve megállapítható, hogy a C_0 osztályú kétpontos vonalelemre felírt 4.35. összefüggésben szereplő interpolációs függvények (Lagrange-polinomok) a nulladrendű Hermite polinomok:

$$\begin{cases} H_{k,0}^0(x) \\ H_{k+1,0}^0(x) \end{cases} = \begin{cases} 1 - \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \\ 1 - \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} \end{cases}, \quad (4.59)$$

míg a C_1 osztályú kétpontos végeelemre felírt 4.56. kifejezésben szereplők pedig az elsőrendű Hermite-polinomok:

$$\begin{cases} H_{k,0}^1(x) \\ H_{k,1}^1(x) \\ H_{k+1,0}^1(x) \\ H_{k+1,1}^1(x) \end{cases} = \begin{cases} 1 - 3 \cdot \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right)^3 \\ (x - x_k) - 2 \cdot \frac{(x - x_k)^2}{x_{k+1} - x_k} + \frac{(x - x_k)^3}{(x_{k+1} - x_k)^2} \\ 1 - 3 \cdot \left(\frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} \right)^3 \\ (x_{k+1} - x) - 2 \cdot \frac{(x_{k+1} - x)^2}{x_{k+1} - x_k} + \frac{(x_{k+1} - x)^3}{(x_{k+1} - x_k)^2} \end{cases}. \quad (4.60)$$

A magasabb folytonossági osztályú vonalelemek interpolációs függvényeit az előbbi alfejezetekben ismertetett eljárással fejezhetjük ki, mely művelet az approximáció fokának növelésével egyre bonyolultabbá válik.

A C_2 osztályú kétpontos végeelem a másodrendű deriváltak (a függvény görbületének) folytonosságát is biztosítja a peremen, az interpolációs függvényeit alkotó Hermite-polinomjai pedig ötödfokúak lesznek:

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{array}{l} H_{k,0}^2(x) \\ H_{k,1}^2(x) \\ H_{k,2}^2(x) \\ H_{k+1,0}^2(x) \\ H_{k+1,1}^2(x) \\ H_{k+1,2}^2(x) \end{array} \right\} &= \left. \begin{array}{l} 10 \cdot \left(\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k} \right)^3 - 15 \cdot \left(\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k} \right)^4 + 6 \cdot \left(\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k} \right)^5 \\ -4 \cdot \left(\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k} \right)^3 + 7 \cdot \left(\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k} \right)^4 - 3 \cdot \left(\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k} \right)^5 \\ \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k} \right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k} \right)^4 + \left(\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k} \right)^5 \right] \\ 10 \cdot \left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \right)^3 - 15 \cdot \left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \right)^4 + 6 \cdot \left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \right)^5 \\ -4 \cdot \left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \right)^3 + 7 \cdot \left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \right)^4 - 3 \cdot \left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \right)^5 \\ -\frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \right)^4 + \left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \right)^5 \right] \end{array} \right\} = \quad (4.61) \\
 &= \left. \begin{array}{l} 10 \cdot \xi_1^3 - 15 \cdot \xi_1^4 + 6 \cdot \xi_1^5 \\ -4 \cdot \xi_1^3 + 7 \cdot \xi_1^4 - 3 \cdot \xi_1^5 \\ 0.5 \cdot (\xi_1^3 - 2 \cdot \xi_1^4 + \xi_1^5) \\ 10 \cdot \xi_2^3 - 15 \cdot \xi_2^4 + 6 \cdot \xi_2^5 \\ 4 \cdot \xi_2^3 - 7 \cdot \xi_2^4 + 3 \cdot \xi_2^5 \\ -0.5 \cdot (\xi_2^3 - 2 \cdot \xi_2^4 + \xi_2^5) \end{array} \right\}.
 \end{aligned}$$

Megjegyzendő, hogy ezeknek a végeelemeknek a használata nem terjedt el.

4.5. Felületelemek

4.5.1. Helyi koordináták

A kétfajta felületelem – a kétdimenziós hiperkubus és a kétdimenziós szimplex – geometriája a vonalelemektől eltérően már nem azonos: míg az első egy négyoldalú tartomány, addig a másodiknak csak három oldala van. Ezért a kétfajta elemet külön kell tárgyalni.

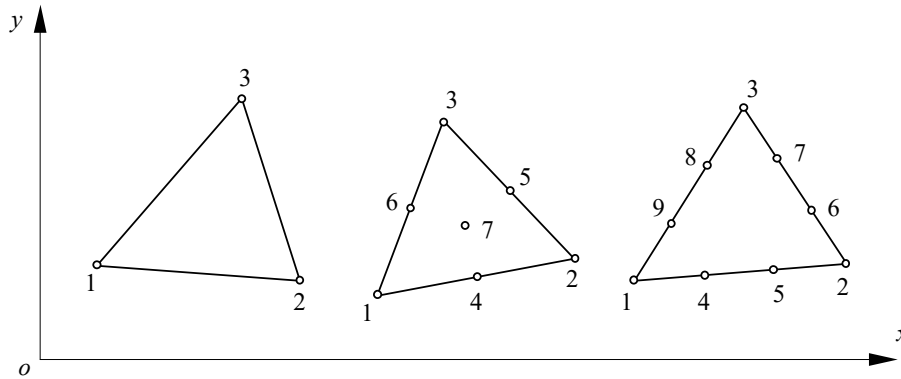
A legegyszerűbb, a legkorábban használt kétdimenziós végeelem a háromszögelem. Népszerűségének oka a diszkretizálás megvalósításának egyszerűségében rejlik.

A háromszögelem leggyakoribb változata a három sarokpontos végeelem, de a magasabb rendű approximációt biztosító élmenti, sőt belső csomópontokkal ellátott változatait is használják (4.13. ábra). A csomópontok számozását tekintve ebben az esetben sem léteznek általános érvényű szabályok vagy előírások.

A kétdimenziós szimplexet a 4.2.2. fejezetben már bemutattuk. A koordináták közötti direkt transzformációt a 4.10. reláció, míg az inverz transzformációt a 4.11. összefüggések adják, mely utóbbiakat mátrixok felhasználásával tömören a

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2 \cdot A} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (4.62)$$

formában is felírhatunk, az ott alkalmazott jelölések felhasználásával.



4.13. ábra. Háromszögelemek

A területkoordináták ismeretében a differenciálás a következők szerint történik:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} = \frac{1}{2 \cdot A} \cdot \sum_{i=1}^3 b_i \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} = \frac{1}{2 \cdot A} \cdot \sum_{i=1}^3 c_i \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

A kétdimenziós hiperkubus – a négyszögelem – leggyakoribb változatának szintén csak a négy sarkán vannak csomópontok, de ez esetben sem ritka az éleken, és esetleg a belső tartományban felvett csomópontokkal rendelkező négyszögelem. Lokális koordinátarendszerük legtöbbször centrális, mint amilyent a 4.4. ábrán láthatunk. A koordináta-transzformáció ekkor

$$x = \frac{1}{4} \cdot [(1-\xi) \cdot (1-\eta) \cdot x_1 + (1+\xi) \cdot (1-\eta) \cdot x_2 + (1+\xi) \cdot (1+\eta) \cdot x_3 - (1-\xi) \cdot (1+\eta) \cdot x_4], \quad (4.64)$$

$$y = \frac{1}{4} \cdot [(1-\xi) \cdot (1-\eta) \cdot y_1 + (1+\xi) \cdot (1-\eta) \cdot y_2 + (1+\xi) \cdot (1+\eta) \cdot y_3 - (1-\xi) \cdot (1+\eta) \cdot y_4],$$

ahol ξ és η a $[-1, 1]$ intervallumból vehetnek fel értékeket.

Az inverz $\xi = \xi(x, y)$ és $\eta = \eta(x, y)$ összefüggések analitikus kifejezése bonyolult lenne, de a gyakorlatban ezekre nincs is szükség.

A globális változók szerinti deriváltakat a Jacobi-mátrix segítségével írhatjuk fel:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix}, \quad (4.65)$$

ahol a transzformáció Jacobi-mátrixa:

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \quad (4.66)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} [(1-\xi) \cdot (1-\eta)] & \frac{\partial}{\partial \xi} [(1+\xi) \cdot (1-\eta)] & \frac{\partial}{\partial \xi} [(1+\xi) \cdot (1+\eta)] & \frac{\partial}{\partial \xi} [(1-\xi) \cdot (1+\eta)] \\ \frac{\partial}{\partial \eta} [(1-\xi) \cdot (1-\eta)] & \frac{\partial}{\partial \eta} [(1+\xi) \cdot (1-\eta)] & \frac{\partial}{\partial \eta} [(1+\xi) \cdot (1+\eta)] & \frac{\partial}{\partial \eta} [(1-\xi) \cdot (1+\eta)] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix},$$

mely képletben a jobboldali mátrix a sarokpontok koordinátáit tartalmazza.

A Jacobi-mátrix inverze

$$[\mathbf{J}]^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}, \quad (4.67)$$

ahol a mátrix determinánsa

$$|\mathbf{J}| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \{(x_1 - x_3) \cdot (y_2 - y_4) - (y_1 - y_3) \cdot (x_2 - x_4) +$$

$$+ [(x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_4) - (y_2 - y_1) \cdot (x_3 - x_4)] \cdot \xi + [(x_4 - x_1) \cdot (y_2 - y_3) - (y_4 - y_1) \cdot (x_2 - x_3)] \cdot \eta\}.$$
(4.68)

4.5.2. Interpolációs polinomok

A kétváltozós interpoláló polinom felírásakor a 4.14. polinomok közül kettőt kell vennünk. A teljes kétváltozós n -edfokú polinom a következőképpen adható meg:

$$p^{(n)}(x, y) = \sum_{k=1}^m a_k \cdot x^i \cdot y^j, \quad (4.69)$$

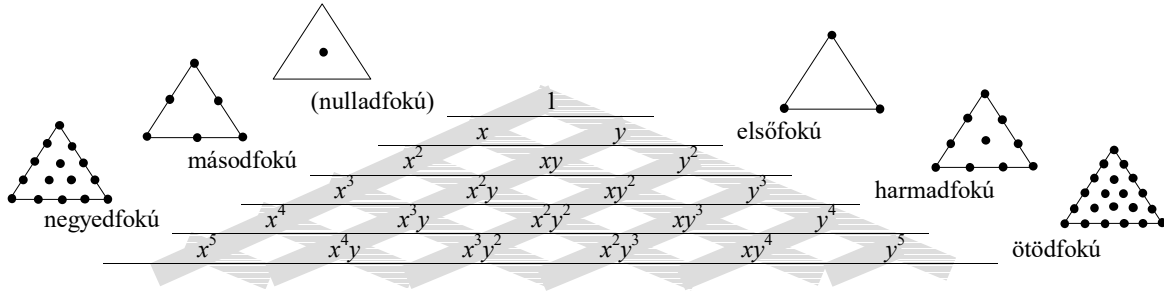
ahol

$$i + j \leq n, \quad m = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}, \quad (4.70)$$

m a polinom együtthatóinak száma.

A teljes kétváltozós polinomok tagjait legegyszerűbben a *Pascal-háromszöggel* illusztrálhatjuk (4.14. ábra). A háromszög sávjai az azonos kitevőjű tagokat tartalmazó szorzatokat

biztosítva, a nulladfokú elem tehát nem tartozik a C_0 folytonossági osztályhoz. Ezt a típust a gyakorlatban nem alkalmazzák.



4.16. ábra. C_0 folytonos 2D szimplexek

A legegyszerűbb C_0 osztályú kétdimenziós szimplex tehát az elsőfokú (lineáris) közelítést biztosító háromcsomópontos háromszögelem. Kétváltozós elsőfokú interpolációs polinoma a következő:

$$p^{(1)}(x, y) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y = \{\mathbf{x}_1\}^T \cdot \{\mathbf{a}_1\}. \quad (4.71)$$

A függvényértékek folytonosságának feltételei a három csomópontra vonatkoznak:

$$\begin{Bmatrix} p^{(1)}(x_k, y_k) \\ p^{(1)}(x_{k+1}, y_{k+1}) \\ p^{(1)}(x_{k+2}, y_{k+2}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_{k+1} & y_{k+1} \\ 1 & x_{k+2} & y_{k+2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}, \quad (4.72)$$

amelyeket tömören

$$\{\mathbf{p}^{(1)}\} = [\Phi_1] \cdot \{\mathbf{a}_1\} \quad (4.73)$$

formában is felírhatunk és ahonnan a három ismeretlen együttható

$$\{\mathbf{a}_1\} = [\Phi_1]^{-1} \cdot \{\mathbf{p}^{(1)}\}. \quad (4.74)$$

Így az interpolációs polinom

$$p^{(1)}(x, y) = \{\mathbf{x}_1\}^T \cdot [\Phi_1]^{-1} \cdot \{\mathbf{p}^{(1)}\} = \{\mathbf{N}^{(1)}\}^T \cdot \{\mathbf{p}^{(1)}\} \quad (4.75)$$

lesz, ahol

$$\{\mathbf{x}_1\}^T = [1 \quad x \quad y]. \quad (4.76)$$

Ez esetben az interpolációs függvények vektorát a következőképpen kapjuk:

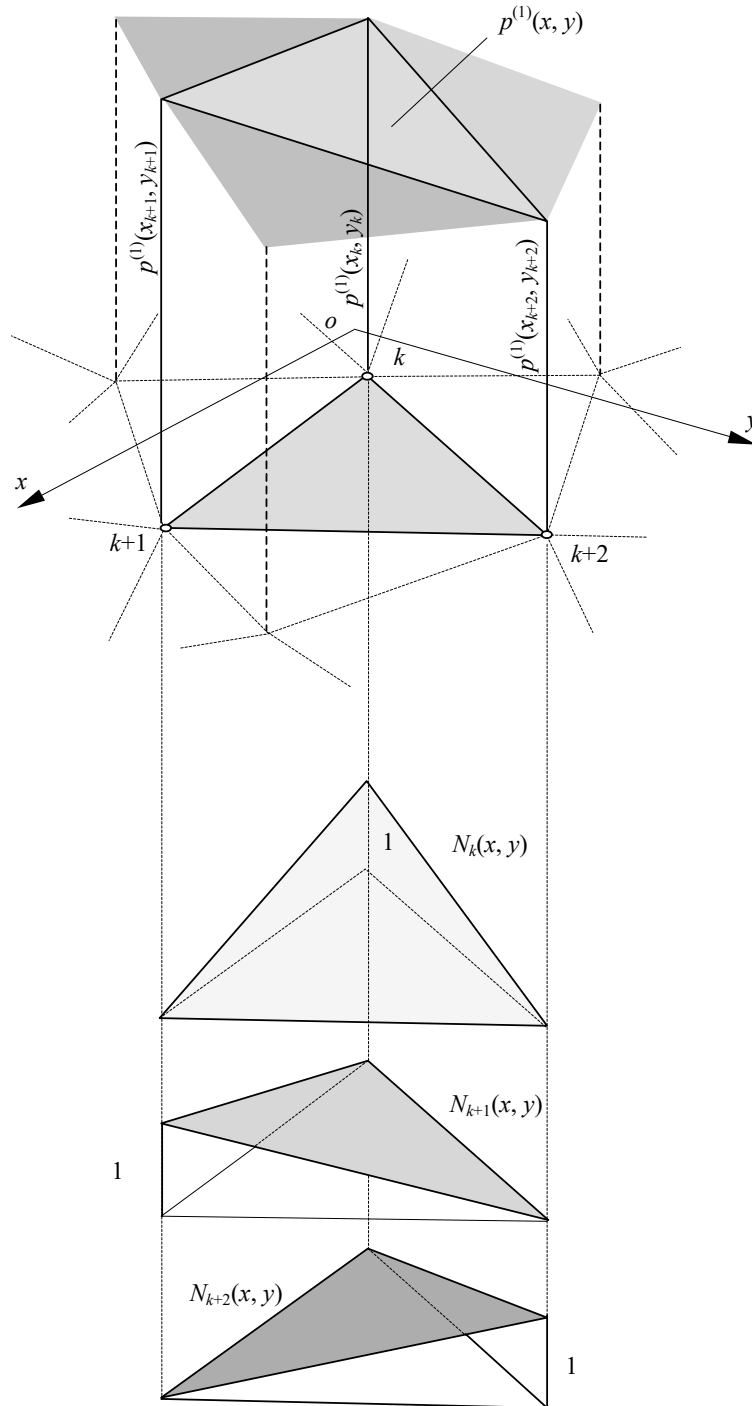
$$\{\mathbf{N}^{(1)}\} = (\{\mathbf{x}_1\}^T \cdot [\Phi_1]^{-1})^T = \begin{Bmatrix} N_k(x, y) \\ N_{k+1}(x, y) \\ N_{k+2}(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} \quad (4.77)$$

(a természetes koordinátákat a három csomópont $x_k, y_k, x_{k+1}, y_{k+1}, x_{k+2}, y_{k+2}$ koordinátáival kifejezve meglehetősen bonyolult felépítésű összefüggésekhez jutunk).

Az interpolációs függvények felhasználásával az interpolációs polinom:

$$p^{(1)}(x, y) = p^{(1)}(x_k, y_k) \cdot N_k(x, y) + p^{(1)}(x_{k+1}, y_{k+1}) \cdot N_{k+1}(x, y) + p^{(1)}(x_{k+2}, y_{k+2}) \cdot N_{k+2}(x, y), \quad (4.78)$$

melynek geometriai értelmezése a következő (4.17.) ábrán látható.



4.17. ábra. C_0 folytonos lineáris háromszögelem

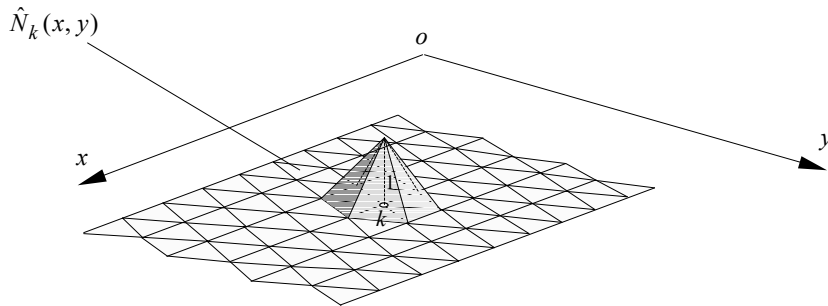
Az elsőfokú közelítéskor az interpolációs polinom által leírt felület egymáshoz illeszkedő sík háromszögekből áll.

A vonalelemnél említettük, hogy az interpolációs függvényeket szigorúan véve csak az adott végelem felett értelmezzük, de mivel a peremen levő csomópontok a szomszédos elemekkel közösek, az illető csomópontokhoz tartozó interpolációs függvényt kiterjeszthetjük a szomszédos végelemekre is, sőt, mi több: a teljes diszkrétizált tartományra is. E kiterjesztésnek csak elméleti haszna van: ezáltal a végelem-módszerben használatos közelítés a Rayleigh-Ritz módszerével azonosítható.

A lineáris vonalelemnél ez a kiterjesztés háromszög-alakú vonalakat leíró interpolációs függvényeket eredményezett (4.10. ábra). A lineáris háromszögelemnél az interpolációs függvények értelmezési tartományának kiterjesztésével nyert $\hat{N}_k(x, y)$ interpolációs függvények egy-egy gúla palástját adják meg. Ezt példázza a 4.18. ábra. Az ábrázolt esetben a gúla hatoldalú, mivel a kiemelt végelem adott csomópontja további öt végelemmel közös. A kiterjesztett interpolációs függvények értékét a csomópontok számozásának függvényében tömören a

$$\hat{N}_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} \quad (4.79)$$

formulával adhatjuk meg, ahol δ_{ij} a Kronecker-szimbólum (δ_{ij} értéke egységnyi, ha $i = j$, ellenben az nulla). E képlet csak a csomóponti értékekre érvényes.



4.18. ábra. A kiterjesztett kétváltozós interpolációs függvény ábrázolása

Az előbbiekkkel teljesen azonos módon járunk el a magasabb fokú interpolációt biztosító több csomópontos háromszögelemnél is. Tekintsük például a kvadratikus, másodfokú közelítést biztosító parabolikus háromszögelemet. Ennek oldalfelezőin további csomópontok vannak, a háromszögelemnek összesen hat csomópontja van. Észrevehetjük, hogy a végelem belsejében nincsenek csomópontok, tehát a parabolikus közelítés most nem jelenti a belső pontok felvételének szükségességét.

Az interpolációs polinom ez esetben a hat tagú teljes másodfokú kétváltozós polinom:

$$p^{(1)}(x, y) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot x^2 + a_4 \cdot y^2 + a_5 \cdot x \cdot y = \{\mathbf{x}_2\}^T \cdot \{\mathbf{a}_2\}. \quad (4.80)$$

A polinom együtthatóit meghatározó feltételek most a következők:

$$\begin{cases} p^{(2)}(x_k, y_k) \\ p^{(2)}(x_{k+1}, y_{k+1}) \\ p^{(2)}(x_{k+2}, y_{k+2}) \\ p^{(2)}(x_{k+3}, y_{k+3}) \\ p^{(2)}(x_{k+4}, y_{k+4}) \\ p^{(2)}(x_{k+5}, y_{k+5}) \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & x_k & y_k & x_k^2 & y_k^2 & x_k \cdot y_k \\ 1 & x_{k+1} & y_{k+1} & x_{k+1}^2 & y_{k+1}^2 & x_{k+1} \cdot y_{k+1} \\ 1 & x_{k+2} & y_{k+2} & x_{k+2}^2 & y_{k+2}^2 & x_{k+2} \cdot y_{k+2} \\ 1 & x_{k+3} & y_{k+3} & x_{k+3}^2 & y_{k+3}^2 & x_{k+3} \cdot y_{k+3} \\ 1 & x_{k+4} & y_{k+4} & x_{k+4}^2 & y_{k+4}^2 & x_{k+4} \cdot y_{k+4} \\ 1 & x_{k+5} & y_{k+5} & x_{k+5}^2 & y_{k+5}^2 & x_{k+5} \cdot y_{k+5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix}, \quad (4.81)$$

vagy

$$\{\mathbf{p}^{(2)}\} = [\Phi_2] \cdot \{\mathbf{a}_2\}. \quad (4.82)$$

Innen a hat együttható

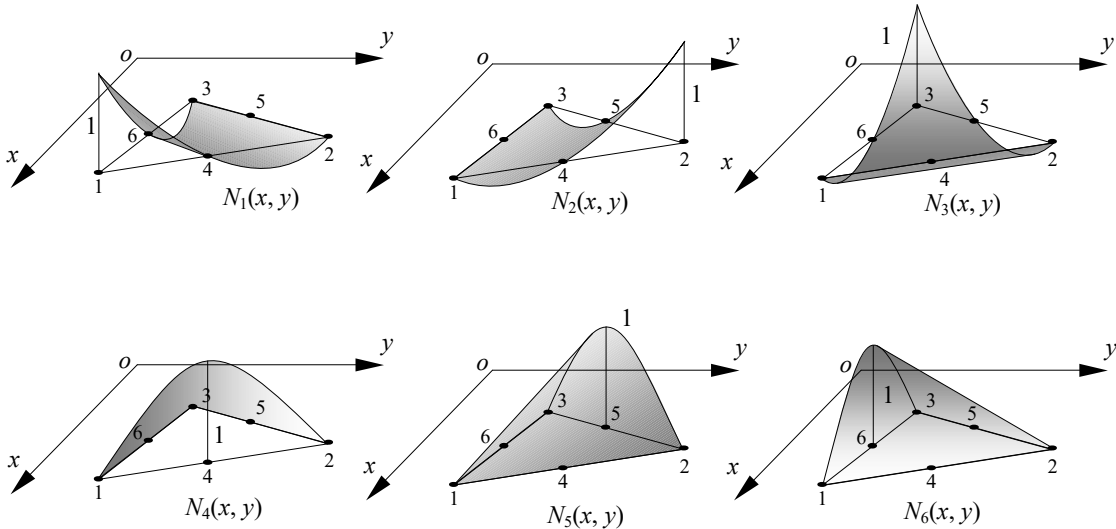
$$\{\mathbf{a}_2\} = [\Phi_2]^{-1} \cdot \{\mathbf{p}^{(2)}\}, \quad (4.83)$$

az interpolációs polinom pedig

$$p^{(2)}(x, y) = \{\mathbf{x}_2\}^T \cdot [\Phi_2]^{-1} \cdot \{\mathbf{p}_2\} = \{\mathbf{N}^{(2)}\}^T \cdot \{\mathbf{p}_2\}, \quad (4.84)$$

ahol a bázisfüggvények vektora a következő:

$$\{\mathbf{x}_2\}^T = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad y^2 \quad x \cdot y]. \quad (4.85)$$



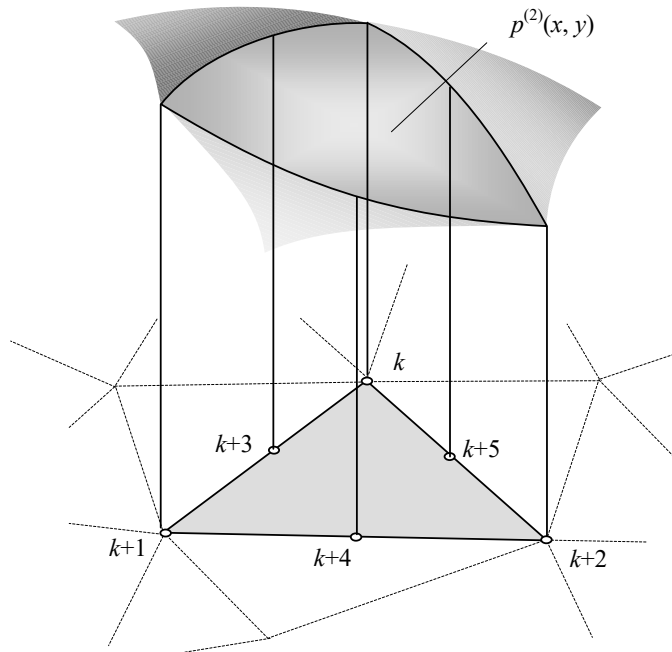
4.19. ábra. A kétdimenziós kvadratikus C_0 szimplex interpolációs függvényei
Az interpolációs függvények vektorát a következőképpen kapjuk:

$$\{\mathbf{N}^{(2)}\} = (\{\mathbf{x}_2\}^T \cdot [\Phi_2]^{-1})^T = \begin{Bmatrix} N_k(x, y) \\ N_{k+1}(x, y) \\ N_{k+2}(x, y) \\ N_{k+3}(x, y) \\ N_{k+4}(x, y) \\ N_{k+5}(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_1 \cdot (2 \cdot \xi_1 - 1) \\ \xi_2 \cdot (2 \cdot \xi_2 - 1) \\ \xi_3 \cdot (2 \cdot \xi_3 - 1) \\ 4 \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 \\ 4 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3 \\ 4 \cdot \xi_1 \cdot \xi_3 \end{Bmatrix}, \quad (4.86)$$

mely a 4.19. ábrán látható függvényekből áll. Az interpolációs függvényekkel és a függvényértékekkel az interpolációs polinom:

$$\begin{aligned}
 p^{(2)}(x, y) = & p^{(2)}(x_k, y_k) \cdot N_k(x, y) + p^{(2)}(x_{k+1}, y_{k+1}) \cdot N_{k+1}(x, y) + \\
 & + p^{(2)}(x_{k+2}, y_{k+2}) \cdot N_{k+2}(x, y) + p^{(2)}(x_{k+3}, y_{k+3}) \cdot N_{k+3}(x, y) + \\
 & + p^{(2)}(x_{k+4}, y_{k+4}) \cdot N_{k+4}(x, y) + p^{(2)}(x_{k+5}, y_{k+5}) \cdot N_{k+5}(x, y).
 \end{aligned}
 \tag{4.87}$$

Az interpolációs polinom ezúttal egy görbült felületet eredményez. A végelemek peremén a felületek nem simulnak egymáshoz, mivel a közös érintősíkot eredményező feltételeket (a deriváltak folytonosságát) nem írtuk elő (4.20. ábra).

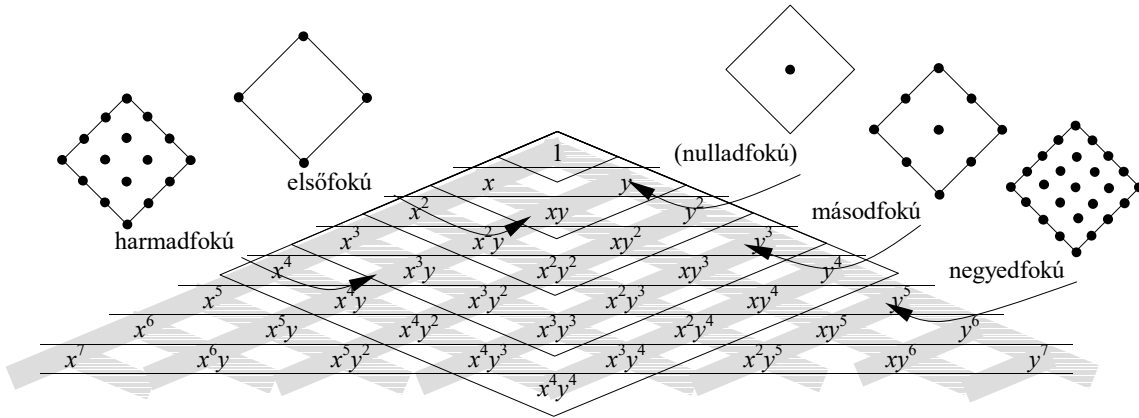


4.20. ábra. Kétdimenziós kvadratikus C_0 szimplex feletti interpolálás

A kétdimenziós, C_0 folytonossági osztályhoz tartozó hiperkubusokat szintén a Pascal-háromszöggel lehet a legjobban szemléltetni (4.21. ábra). A csomópontok száma és az interpoláció foka közötti összefüggést könnyen észre lehet venni. A háromszögelemekhez viszonyítva itt egy lényeges különbségre is felfigyelhetünk: a C_0 izotróp négyszögelemek interpolációs polinoma nem teljes. Így például a kilenc csomóponttal rendelkező másodfokú négyszögelemhez tartozó polinom csak másodfokig teljes, a harmad- és negyedfokú tagjai hiányosak. Másként úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a polinomok a teljességet meghaladó fokú tagokat is tartalmaznak.

A 4.21. ábrán felvett elemek *izotróp* elemek, mivel a közelítés foka mindkét irányban azonos. Az izotrópia nem minden esetben előnyös. Vannak esetek, amikor a megközelített függvény változása csak az egyik koordináta irányában számottevő: ilyenkor egy anizotróp elem használata jelentős megtakarításhoz vezethet. A 4.22. ábra példaként néhány anizotróp elemet mutat be.

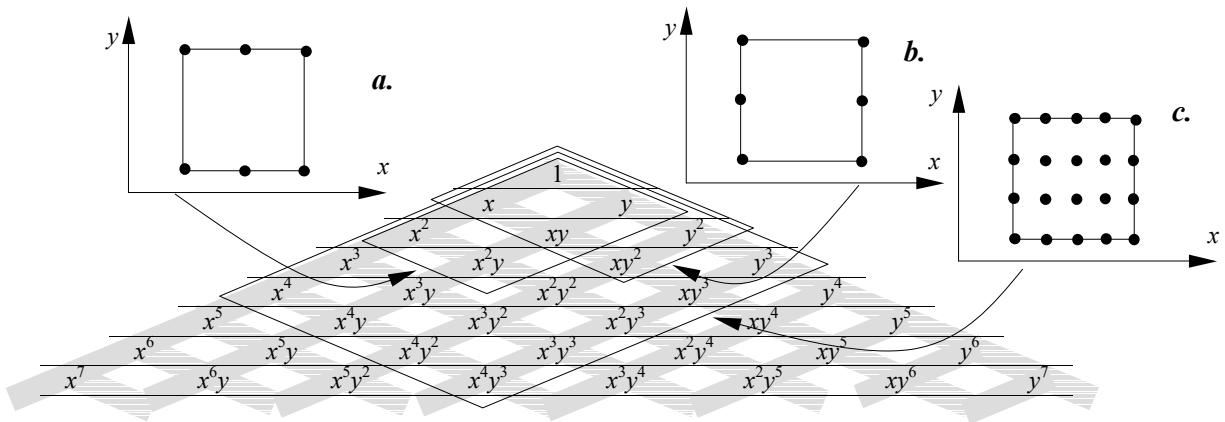
A 4.22. ábrán a-val jelölt elem az x tengely irányában kvadratikus, y irányában pedig lineáris. A b. elem viszont az y tengely irányában kvadratikus és x irányában lineáris.



4.21. ábra. Izotróp C_0 négyszögelemek

Amint az a hiperkubusokra felrajzolt Pascal-háromszögek ábráinak alapján is kitűnik, a C_0 osztályú négyszögelemek kétváltozós polinomjainak tagjai két egyváltozós polinom tagjainak szorzataként írhatók fel. A 4.22. ábra c. elemére például a bázisfüggvényeket a következő szorzat adja:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & y & y^2 & y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y & y^2 & y^3 \\ x & x \cdot y & x \cdot y^2 & x \cdot y^3 \\ x^2 & x^2 \cdot y & x^2 \cdot y^2 & x^2 \cdot y^3 \\ x^3 & x^3 \cdot y & x^3 \cdot y^2 & x^3 \cdot y^3 \\ x^4 & x^4 \cdot y & x^4 \cdot y^2 & x^4 \cdot y^3 \end{bmatrix}. \quad (4.88)$$



4.22. ábra. Anizotróp C_0 négyszögelemek

Ennek az észrevételnek az alapján az elem feletti interpolációs polinom kifejezését a következőképpen általánosítjuk:

$$p(x, y) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} p(x_i, y_j) \cdot l_i^{(n)}(x) \cdot l_j^{(m)}(y) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} p(x_i, y_j) \cdot N_{i,j}(x, y), \quad (4.89)$$

mely x -nek n -edik, y -nak pedig m -edik hatványáig tartalmaz tagokat. A zárójeles felső index most elmarad, mivel a polinom nem teljes.

Az interpolációs függvényeket tehát a következő egyváltozós Lagrange-polinomok szorzatai adják:

$$l_i^{(n)} = \prod_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^{n+1} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \quad \text{és} \quad l_j^{(m)} = \prod_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^{m+1} \frac{y - x_k}{x_j - x_k}. \quad (4.90)$$

A legegyszerűbb C_0 négyszögelem a lineáris, négy csomópontos elem. Ahogyan az a Pascal-háromszögből is leolvasható, nem teljes interpolációs polinomát

$$p(x, y) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot x \cdot y = \{\mathbf{x}\}^T \cdot \{\mathbf{a}\} \quad (4.91)$$

formában kell keresnünk. A

$$\{\mathbf{p}\} = \begin{Bmatrix} p(x_k, y_k) \\ p(x_{k+1}, y_{k+1}) \\ p(x_{k+2}, y_{k+2}) \\ p(x_{k+3}, y_{k+3}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_k & y_k & x_k \cdot y_k \\ 1 & x_{k+1} & y_{k+1} & x_{k+1} \cdot y_{k+1} \\ 1 & x_{k+2} & y_{k+2} & x_{k+2} \cdot y_{k+2} \\ 1 & x_{k+3} & y_{k+3} & x_{k+3} \cdot y_{k+3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = [\Phi] \cdot \{\mathbf{a}\} \quad (4.92)$$

feltételekből a négy együttható

$$\{\mathbf{a}\} = [\Phi]^{-1} \cdot \{\mathbf{p}\}, \quad (4.93)$$

az interpolációs polinom pedig

$$p(x, y) = \{\mathbf{x}\}^T \cdot [\Phi]^{-1} \cdot \{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{N}\}^T \cdot \{\mathbf{p}\} \quad (4.94)$$

lesz, ahol a bázisfüggvények vektora:

$$\{\mathbf{x}\}^T = [1 \quad x \quad y \quad x \cdot y]. \quad (4.95)$$

Az interpolációs függvények vektora a 4.89. összefüggés alapján közvetlenül is előállítható:

$$\{\mathbf{N}\} = (\{\mathbf{x}\}^T \cdot [\Phi]^{-1})^T = \begin{Bmatrix} N_k(x, y) \\ N_{k+1}(x, y) \\ N_{k+2}(x, y) \\ N_{k+3}(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_k^{(1)}(x) \cdot l_k^{(1)}(y) \\ l_{k+1}^{(1)}(x) \cdot l_{k+1}^{(1)}(y) \\ l_{k+2}^{(1)}(x) \cdot l_{k+2}^{(1)}(y) \\ l_{k+3}^{(1)}(x) \cdot l_{k+3}^{(1)}(y) \end{Bmatrix}. \quad (4.96)$$

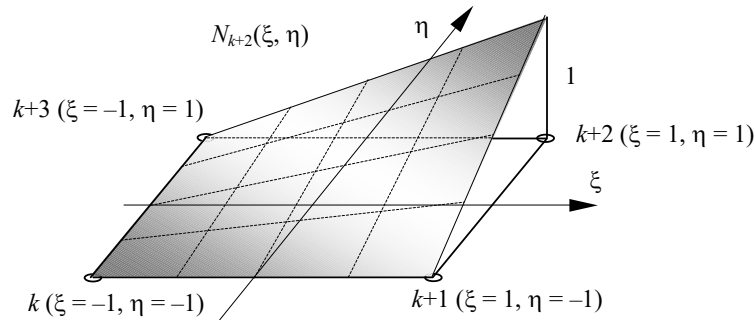
Ha a Lagrange-polinomokat a lokális koordinátákkal fejezzük ki, akkor az interpolációs függvények vektorát a következő módon kapjuk:

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_k(x, y) \\ N_{k+1}(x, y) \\ N_{k+2}(x, y) \\ N_{k+3}(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4} \cdot (1-\xi) \cdot (1-\eta) \\ \frac{1}{4} \cdot (1+\xi) \cdot (1-\eta) \\ \frac{1}{4} \cdot (1+\xi) \cdot (1+\eta) \\ \frac{1}{4} \cdot (1-\xi) \cdot (1+\eta) \end{Bmatrix}, \quad (4.97)$$

amelynek tagjait tömören az

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi \cdot \xi_i) \cdot (1 + \eta \cdot \eta_i), \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (4.98)$$

formában is megadhatjuk (ξ_i és η_i az i csomópont lokális koordinátái). E függvényeket felrajzolva a 4.23. ábrán látható felülettel azonos formájú alakzatokhoz jutunk. Az ábrázolt felület oldalai egyenesek de az általuk közrezárt felület nem sík (az egy nyeregfelület). Az interpolációs polinom a peremeiknél illesztett négyszögű, nem feltétlenül sík elemekből álló felületet ír le.



4.23. ábra. A C_0 -folytonos bilineáris négyszögelem egy interpolációs függvénye

A bemutatott elemet *bilineárisnak* mondják, mivel mindkét irányban lineáris közelítéssel rendelkezik. A felvázolt eljárással azonos módon számos egyéb magasabbfokú izotróp négyszögelem generálható. A gyakorlatilag hasznosabb kilencpontos bikvadrátikus elem interpolációs függvényei az

$$N_i(x, y) = l_i^{(2)}(x) \cdot l_i^{(2)}(y), \quad i = 1, 2, \dots, 9 \quad (4.99)$$

összefüggéssel állíthatók elő, mint másodfokú Lagrange-polinomok szorzatai. Ha a Lagrange-polinomokat a lokális koordinátákkal írjuk fel, akkor végső soron azt kapjuk, hogy a négy sarokponthoz tartozó interpolációs függvény (4.24.a. ábra):

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \cdot \xi \cdot \xi_i + \eta \cdot \eta_i \cdot (1 + \xi \cdot \xi_i) \cdot (1 + \eta \cdot \eta_i), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (4.100)$$

az oldalközépekhez tartozók (4.24.b. ábra):

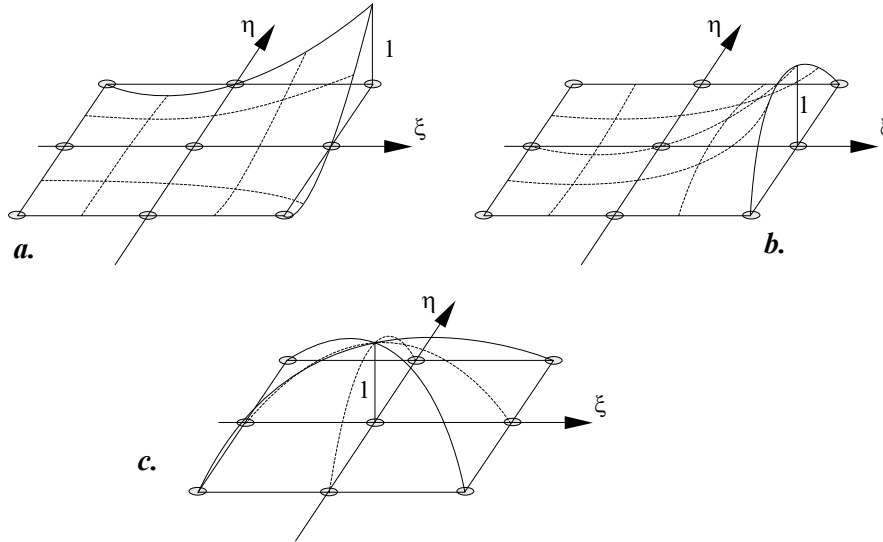
$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot \xi_i \cdot (1 + \xi \cdot \xi_i) \cdot (1 - \eta^2), \quad i = 6, 8, \quad (4.101)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \cdot \eta \cdot \eta_i \cdot (1 + \eta \cdot \eta_i) \cdot (1 - \xi^2), \quad i = 5, 7,$$

és végül az elem középpontjához tartozó interpolációs függvény (4.24.c. ábra) pedig:

$$N_i(\xi, \eta) = (1 - \xi^2) \cdot (1 - \eta^2), \quad i = 9 \quad (4.102)$$

lesz. Ábrázolásukkal görbe élű görbült felületeket kapunk.

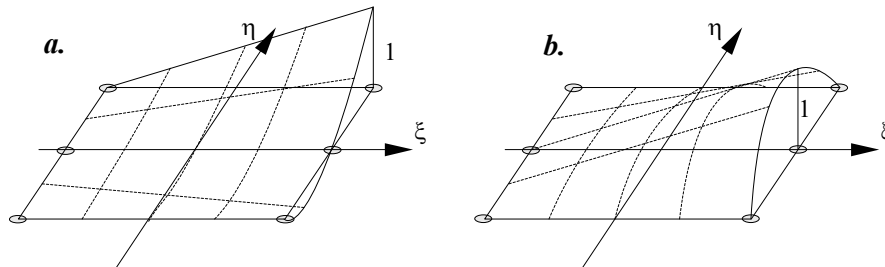


4.24. ábra. A C_0 -folytonos bikvadratikus négyzögelem interpolációs függvényei

A fenti eljárás az anizotróp elemek interpolációs polinomjainak előállítására is alkalmas. Legyen például a 4.22. ábrán b-vel jelölt elem. Interpolációs függvényeit az x -ben első- és y -ban másodfokú Lagrange-polinomok szorzata adja:

$$N_i(x, y) = l_i^{(1)}(x) \cdot l_i^{(2)}(y), \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (4.103)$$

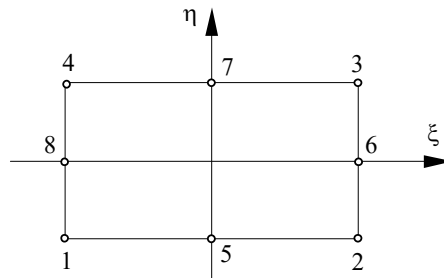
Ezek közül négy a sarokpontokra, kettő pedig az oldalközepre vonatkozik. Ha ezeket kiszámítjuk és ábrázoljuk, akkor a következő (4.25.a, illetve b.) ábrát kapjuk.



4.25. ábra. C_0 osztályú, egyik irányban lineáris, a másik irányban kvadratikus négyzögelem interpolációs függvényei

Ha visszatekintünk a szimplexek és a hiperkubusok Pascal-háromszögeire, akkor észrevehetjük, hogy az eddig ismertetett eljárás a magasabb fokú interpoláció esetén mindkét elemtípusnál belső csomópontok megjelenéséhez vezet. A belső csomópontok az ismeretlen megoldásfüggvény közelítésének szempontjából nem bizonyultak hasznosnak, mivel a hozzájuk tartozó függvényértékeket csak a peremen található csomópontokban számítottak segítségével fejezhetjük ki (kivételez ez alól a geometria megközelítése). Kézenfekvővé vált tehát a belső csomópontok eliminálása. Az így megvalósított végelemek általában a magyar nyelvű szakirodalomban is *serendipity*-elemeknek nevezik, ahol az angol szó értelme „képeség értékes dolgok találására ott ahol kevésbé valószínű”. Nevezzük ezeket az elemeket a továbbiakban *egyszerűsített* elemeknek.

Például tekintsük az előbbieken tanulmányozott bikvadratikus négyszögelemet, mely egy belső csomóponttal rendelkezik. Amennyiben a belső csomópontját elhagyjuk, egy egyszerűsített felületelemhez jutunk (4.26. ábra).



4.26. ábra. Az egyszerűsített bikvadratikus C_0 felületelem

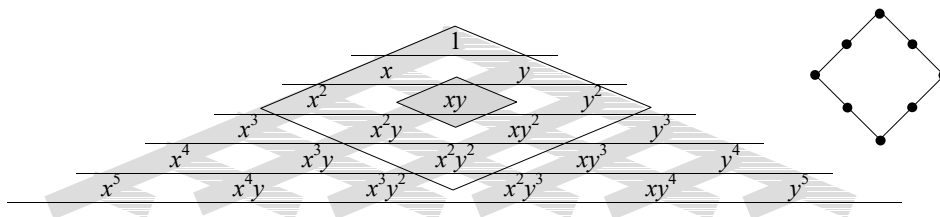
Az interpolációs polinom meghatározásához ismét a Pascal-háromszöget vesszük elő (4.27. ábra). A belső csomópontnak megfelelő $x \cdot y$ szorzat nem tartozik a polinom tagjai közé, az interpolációs polinom tehát most

$$p(x, y) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot x^2 + a_4 \cdot y^2 + a_5 \cdot x^2 \cdot y + a_6 \cdot x \cdot y^2 + a_7 \cdot x^2 \cdot y^2 = \{\mathbf{x}\}^T \cdot \{\mathbf{a}\} \quad (4.104)$$

lesz, ahol a bázisfüggvények vektora:

$$\{\mathbf{x}\}^T = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad y^2 \quad x^2 \cdot y \quad x \cdot y^2 \quad x^2 \cdot y^2]. \quad (4.105)$$

A nyolc meghatározandó együttható a nyolc csomópontban előírt függvényértékekből következik. Az interpolációs függvényekre vonatkozó elv változatlan: a függvény értéke egyetlen csomópontban lehet egységnyi, a többiben az zéró kell legyen.



4.27. ábra. Az egyszerűsített bikvadratikus négyszögelem a Pascal-háromszögben

A már ismert módszerrel meghatározott interpolációs függvények a következők lesznek:

– a négy sarokpontban:

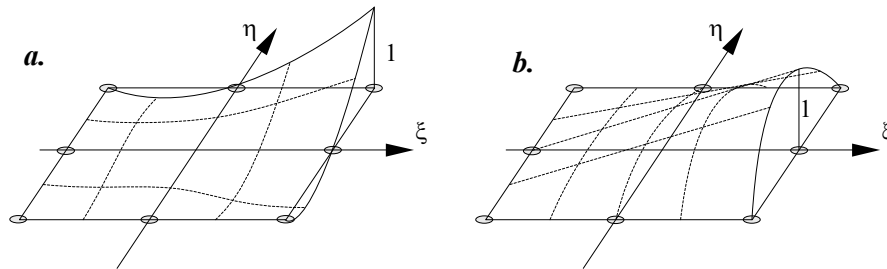
$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \cdot (\xi \cdot \xi_i \cdot \eta \cdot \eta_i - 1) \cdot (1 + \xi \cdot \xi_i) \cdot (1 + \eta \cdot \eta_i), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (4.106)$$

– az oldalközépekhez tartozók:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \cdot (1 + \xi \cdot \xi_i) \cdot (1 - \eta^2), \quad i = 6, 8, \quad (4.107)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \cdot (1 + \eta \cdot \eta_i) \cdot (1 - \xi^2), \quad i = 5, 7.$$

Ha felrajzoljuk ezeket, akkor a 4.28.a, illetve b. ábrán látható felületekhez jutunk.



4.28. ábra. C_0 osztályú egyszerűsített bikvadratikus négyszögelem interpolációs függvényei

4.5.4. A C_1 -folytonos felületelemek

A C_1 folytonosság a függvényértékek mellett az elsőrendű deriváltak folytonosságát is megköveteli, mely feltételek a p függvényértékek és a $\partial p / \partial n$ deriváltak élmenti előírását eredményezik. Az utóbbi kifejezés a közelítő függvény gradiense, az élre merőleges irányban számított deriváltja.

Amennyiben a végelem téglalap alakú és oldalai a koordinátarendszer tengelyeivel párhuzamosak, akkor a deriváltak perem menti folytonosságának biztosításához a végelem csomópontjaiban a p , $\partial p / \partial x$, $\partial p / \partial y$ és a $\partial^2 p / (\partial x \cdot \partial y)$ értékek folytonosságát kell előírni. A másodrendű derivált csomóponti folytonossága az elsőrendű deriváltak folytonosságát biztosítja az él mentén. Ha e másodrendű vegyes deriváltat nem íránk elő, akkor az elsőrendű deriváltak folytonosságát csak a csomópontokra korlátozánk.

Amennyiben a felületelem nem téglalap alakú vagy oldalai nem párhuzamosak a tengelyekkel, akkor már az említett három feltétel sem elegendő a C_1 folytonossághoz: ekkor az élmenti folytonossághoz a fentiekén kívül a $\partial^2 p / \partial x^2$ és $\partial^2 p / \partial y^2$ másodrendű deriváltak folytonosságát is elő kell írni a csomópontokban.

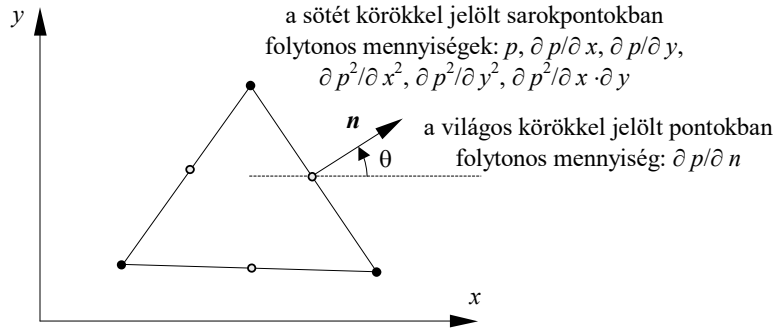
Mivel a globális rendszerrel párhuzamos szabályos téglalapháló egy eléggé ritka sajátosságos eset, a C_1 folytonosság biztosítása a felületelemek felett jóval bonyolultabbnak ígérkezik mint a vonalelemek esetén: általános esetben csomópontokként hat feltételt kell előírunk.

Ez a kétdimenziós szimplex esetén minimum $3 \times 6 = 18$ feltételt jelent, három csomópontra számolva. A Pascal-háromszöget szemrevéve azonban kiderül, hogy 18 tagú teljes kétváltozós polinom nem létezik – e problémát úgy oldották fel, hogy a szimplex élein további három csomópontot vettek fel, amelyekben csupán a normális szerinti deriváltak folytonosságát írták elő.

Így az összesen 21 feltételt az ötödfokú teljes polinomhoz kötötték, melynek éppen 21 tagja van. A csomóponti folytonosságot tekintő előírások közül három tehát az élközepeken felírt

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial n} = -\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \sin \theta + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \cos \theta \quad (4.108)$$

deriváltakra vonatkozik, ahol θ az \mathbf{n} normális és az x tengely által bezárt szög (4.29. ábra).



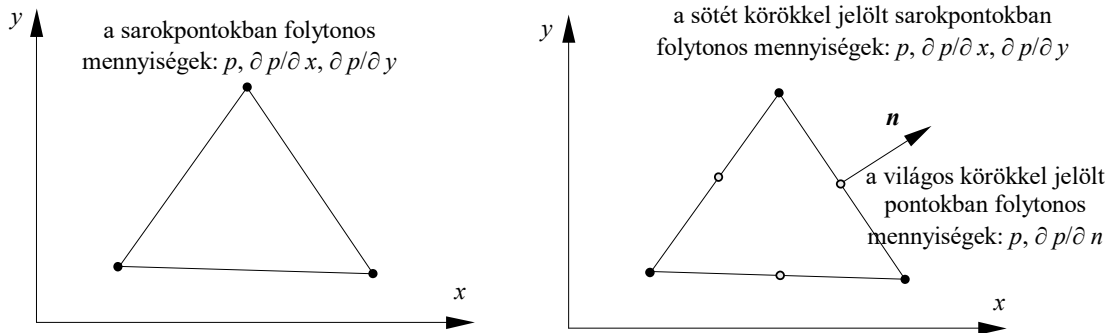
4.29. ábra. A legegyszerűbb konform C_1 -folytonos háromszögelem

A legegyszerűbb C_1 folytonosságú szimplex interpolációs függvényeit az ismert

$$\{N\} = (\{x\}^T \cdot [\Phi]^{-1})^T \quad (4.109)$$

összefüggés alapján állíthatjuk elő, ahol a 21×21 -es méretű $[\Phi]$ mátrix inverzét kell felírnunk. Analitikus úton ez igencsak nehéz lenne és a 441 kifejtett tag képletének programba ültetése is kényelmetlen feladat, éppen ezért az inverz mátrixot numerikus úton szokták előállítani, a közelítő függvényt pedig nem írják fel az eddigi analitikus formában.

A csomópontokénti hat feltétel előírása tehát jelentős erőfeszítést igényel a számítások elvégzését tekintve, még a legegyszerűbb C_1 -folytonos végelem esetében is. A magasabb fokú interpolációval a műveletek mennyisége megsokszorozódik, éppen ezért annak gyakorlati haszna nincs.



4.30. ábra. Nemkonform háromszögelemek

E nehézségek miatt felvetődött a C_1 -osztályú elemek egyszerűsítésének igénye, bizonyos engedményeket téve a deriváltak vagy a függvényértékek folytonosságának tekintetében. Az így keletkezett *nemkonform* elemek az előbbieken ismertetett *konform* elemekhez viszonyítva

kevesebb szabadságfokkal rendelkeznek, interpolációs polinomuk valamivel egyszerűbbé válik. Ezek a végelemek a C_1 folytonosságot szigorúan véve nem biztosítják, viszont a gyakorlatban egészen jó eredményeket értek el velük. A 4.30. ábra két nemkonform szimplexet mutat be, a csomópontokban felírt feltételek megjelölésével.

Az ábrán a baloldali elem esetében például csak a függvényértékeket és az elsőrendű deriváltakat írjuk elő, így egy kilenc szabadságfokkal rendelkező hárompontos végelemhez jutunk. Kilenc tagú teljes kétváltozós polinom nem létezik, ezért a bázisfüggvények $\{\mathbf{x}\}$ vektorának tagjainak felírásakor az aszimmetrikus tagokat egy javaslat (Tocher) szerint összevonják:

$$\{\mathbf{x}\}^T = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad x \cdot y \quad y^2 \quad x^3 \quad (x^2 \cdot y + x \cdot y^2) \quad y^3]. \quad (4.110)$$

Ekkor viszont az elem $[\Phi]$ mátrixa bizonyos geometriák esetében szinguláris lehet, tehát a javasolt megoldást nem lehet általánosan használni. Ezen a helyzeten segít Zienkiewicz későbbi javaslata, amely az egy csomópontra vonatkozó interpolációs függvényeket a természetes koordináták függvényében a következőképpen tekinti:

$$\begin{Bmatrix} N_1^1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ N_2^1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ N_3^1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_1 + \xi_1^2 \cdot \xi_2 + \xi_1^2 \cdot \xi_3 - \xi_1 \cdot \xi_2^2 - \xi_1 \cdot \xi_3^2 \\ (y_1 - y_2) \cdot (\xi_1^2 \cdot \xi_2 + \frac{1}{2} \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3) - (y_3 - y_1) \cdot (\xi_1^2 \cdot \xi_3 + \frac{1}{2} \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3) \\ -(x_1 - x_2) \cdot (\xi_1^2 \cdot \xi_2 + \frac{1}{2} \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3) + (x_3 - x_1) \cdot (\xi_1^2 \cdot \xi_3 + \frac{1}{2} \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3) \end{Bmatrix}, \quad (4.111)$$

a másik két csomópontra érvényes interpolációs függvények ciklikus permutációval állíthatók elő.

A 4.30. ábra jobb oldalán látható 15 szabadságfokkal rendelkező nemkonform elem már kényelmesebben használható: interpolációs polinoma a teljes negyedfokú polinom, így az interpolációs függvények előállításában a műveletek elvégzése nem hoz magával új feladatot.

A C_1 -folytonosságú kétdimenziós hipekubusok esetében is a fentiekkel azonos módon járunk el, a konform elemeknél csomópontként hat feltételt írunk elő. A Pascal-háromszögre tekintvén észrevehetjük, hogy négy csomópontos C_1 -folytonos felületelemet nem tudunk előállítani, viszont ha az élek közepén felveszünk egy-egy három szabadságfokkal (p és annak két első deriváltja: $\partial p / \partial x$, $\partial p / \partial y$) rendelkező csomópontot, akkor a 36 szabadságfokkal rendelkező végelem interpolációs polinoma felírása nem ütközik nehézségbe. Ekkor a 36×36 -os $[\Phi]$ mátrix inverzének kiszámítása szintén numerikusan történik.

A szabadságfokok száma most is nagyon nagy, így a gyakorlatban ezúttal is inkább nemkonform végelemeket használnak. Ilyen például a lemezszerkezetek számítására sikeresen használt 12 szabadságfokú négycsomópontos végelem, ahol csomópontként csak a függvényértékeket és az elsőrendű deriváltak értékét (p , $\partial p / \partial x$, $\partial p / \partial y$) írjuk elő. E végelem hiányos negyedfokú polinomát a következő bázisfüggvényekkel építjük fel:

$$\{\mathbf{x}\}^T = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad x \cdot y \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2 \cdot y \quad x \cdot y^2 \quad y^3 \quad x^3 \cdot y \quad x \cdot y^3], \quad (4.112)$$

az egy csomópontjához tartozó interpolációs függvényeket pedig a következő vektor foglalja magába:

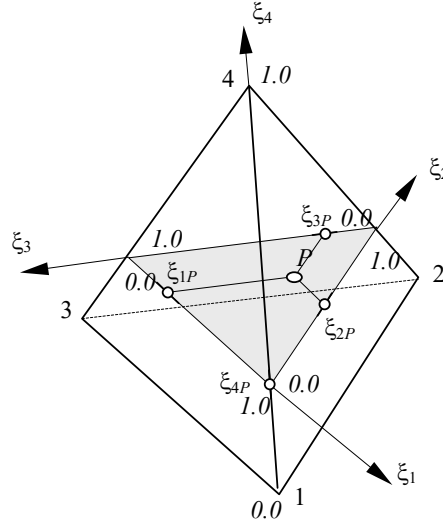
$$\begin{Bmatrix} N_1^i \\ N_2^i \\ N_3^i \end{Bmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{Bmatrix} (1 + \xi_i \cdot \xi) \cdot (1 + \eta_i \cdot \eta) \cdot (2 - \xi^2 - \eta^2 + \xi_i \cdot \xi + \eta_i \cdot \eta) \\ -\xi_i \cdot (1 + \xi_i \cdot \xi) \cdot (1 + \eta_i \cdot \eta) \cdot (1 - \xi^2) \\ -\eta_i \cdot (1 + \xi_i \cdot \xi) \cdot (1 + \eta_i \cdot \eta) \cdot (1 - \eta^2) \end{Bmatrix}. \quad (4.113)$$

Érdekességként megjegyezhető, hogy a C_1 -folytonos téglalapelemek interpolációs függvényeit az egyváltozós Hermite-polinomok szorzataiként tudjuk előállítani (ezeknek az elemeknek az élei párhuzamosak a globális koordinátatengelyekkel).

4.6. Térfogatelemek

4.6.1. Helyi koordináták

A háromdimenziós szimplex természetes koordinátáit a 4.5. ábrán látható tetraéder feldarabolásából származó négy kisebb tetraéder térfogatának a teljes térfogathoz viszonyított aránya adja. Egy adott pont koordinátái közül hármat valamelyik oldallappal párhuzamos metszetben kell felvennünk, a negyedik koordináta e síknak a tetraéder magasságához viszonyított helyzete lesz (4.31. ábra).



4.31. ábra. A 3D szimplex természetes koordinátái

A globális és a lokális koordinátarendszerek közötti transzformációkat az

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{Bmatrix} \quad (4.114)$$

összefüggés adja. Az inverz transzformáció a kétdimenziós esetenél is bonyolultabb:

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{6 \cdot V} \cdot \begin{bmatrix} d_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\ d_4 & a_4 & b_4 & c_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad (4.115)$$

ahol

$$V = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \end{vmatrix} \quad (4.116)$$

a tetraéder térfogata (tulajdonképpen a fenti determináns modulusát kell venni), az első sorban szereplő négy paraméter

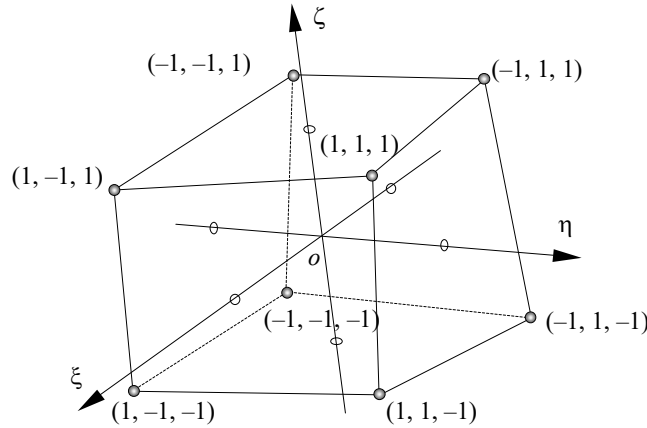
$$a_1 = - \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \quad b_1 = - \begin{vmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{vmatrix}, \quad c_1 = - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}, \quad d_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \quad (4.117)$$

a többi sorban szereplő tag pedig ciklikus permutációval állítható elő.

A térfogatkoordináták függvényében a differenciálás a következők szerint történik:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} = \frac{1}{6 \cdot V} \cdot \sum_{i=1}^4 a_i \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} = \frac{1}{6 \cdot V} \cdot \sum_{i=1}^4 b_i \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \xi_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} = \frac{1}{6 \cdot V} \cdot \sum_{i=1}^4 c_i \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i}. \end{aligned} \quad (4.118)$$

A 3D hiperkubus helyi koordinátarendszere a kétdimenziós helyi koordinátarendszer általánosítása. Ritkábban használt változata az élekhez simuló, a gyakoribb a 4.32. ábrán is látható centrális rendszer. A vonatkoztatási rendszer lehet ortogonális vagy ferde, egyenes vagy görbe. Ez esetben is mindhárom koordináta a $[0, 1]$ (ha a koordinátarendszer élhez simuló), vagy a $[-1, 1]$ (ha az centrális) intervallumból vehet fel értékeket.



4.32. ábra. A 3D hiperkubus helyi koordinátarendszere

A globális koordinátákat a lokálisak függvényében a következő módon írjuk fel:

$$x = \sum_{i=1}^8 a_i \cdot x_i, \quad y = \sum_{i=1}^8 a_i \cdot y_i, \quad z = \sum_{i=1}^8 a_i \cdot z_i, \quad (4.119)$$

ahol

$$a_i = \frac{1}{8} \cdot (1 + \xi_i \cdot \xi) \cdot (1 + \eta_i \cdot \eta) \cdot (1 + \zeta_i \cdot \zeta). \quad (4.120)$$

Az inverz $\xi = \xi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$ és $\zeta = \zeta(x, y, z)$ összefüggések analitikus kifejezésére most sincs szükség.

A globális változók szerinti deriváltakat most is a Jacobi-mátrix segítségével írjuk fel:

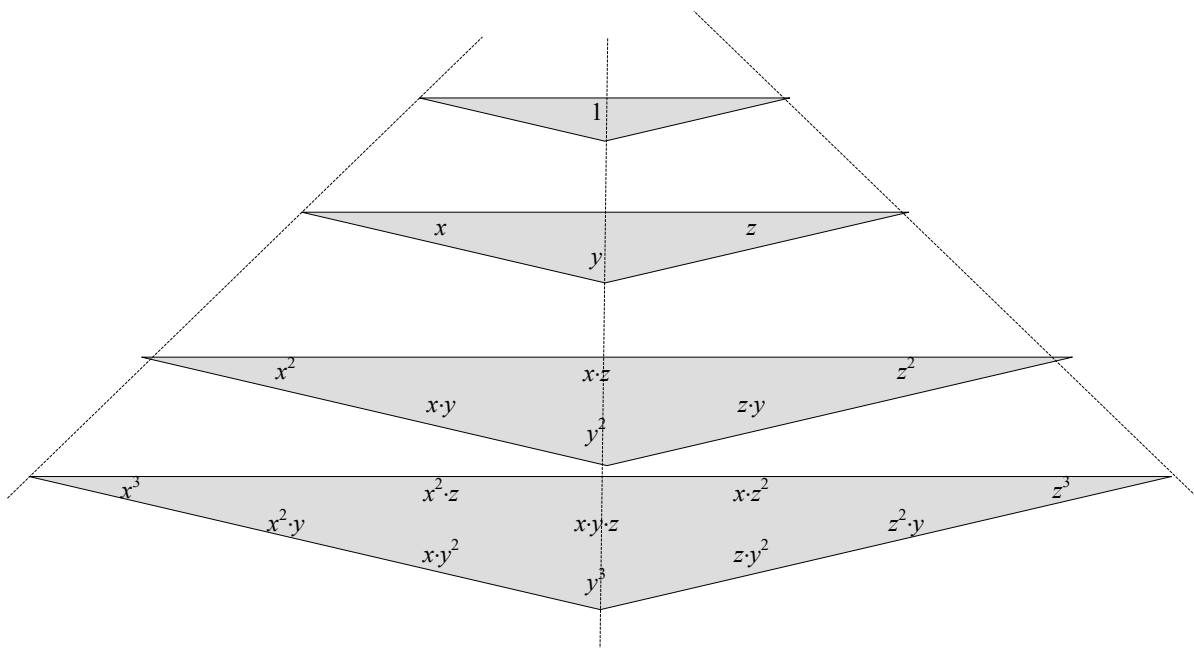
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = [\mathbf{J}]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{pmatrix}. \quad (4.121)$$

A transzformáció Jacobi-mátrixának most kilenc eleme van:

$$[\mathbf{J}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix}, \quad (4.122)$$

s a kétdimenziós esethez hasonlóan fejezhetjük ki annak determinánsát és inverzét.

4.6.2. Interpolációs polinomok



4.33. ábra. A Pascal-gúla emeletei

A háromdimenziós esetben az interpoláló függvény felírásakor a 4.14. polinomok mindegyikére szükségünk van. A teljes háromváltozós n -edfokú polinom a következő lesz:

$$p^{(n)}(x, y) = \sum_{l=1}^m a_l \cdot x^i \cdot y^j \cdot z^k, \quad (4.123)$$

ahol

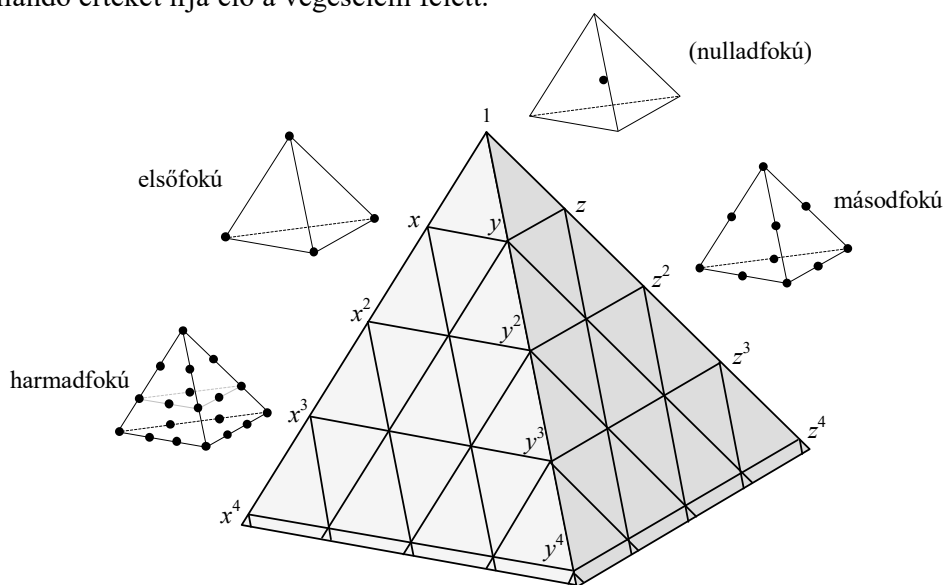
$$i + j + k \leq n, \quad m = \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{6}, \quad (4.124)$$

m a polinom együtthatóinak száma.

A teljes háromváltozós polinomok tagjait a kétváltozós polinomok Pascal-háromszögével analóg három dimenziós *Pascal-gúlával* illusztrálhatjuk (4.33. ábra). Itt is rajzolhatunk olyan sávokat, amelyek az azonos kitevőjű tagokat tartalmazó szorzatokat kötik össze. A teljes n -edfokú polinom a felülről számítva $n+1$ -edik vízszintes síkon található és az összes felette levő tagot tartalmazza, így például a teljes harmadfokú polinom 20 taggal rendelkezik (ez a 4.33. ábrán feltüntetett bázisfüggvényekkel építhető fel).

4.6.3. A C_0 -folytonos térfogatelemek

A háromdimenziós C_0 -szimplexek származtatását a Pascal-gúlával lehet szemléltetni (4.34. ábra). A térfogatelemek C_0 -folytonos illesztése a közelítő függvény folytonosságát kell biztosítsa a végelemek érintkező felületei mentén (tehát nem csak a csomópontokban és nem csak az éleken). A nulladfokú elem tehát ez esetben sem tagja a C_0 folytonossági osztálynak, mivel az most is a függvény állandó értékét írja elő a végelem felett.



4.34. ábra. C_0 -folytonos 3D szimplexek

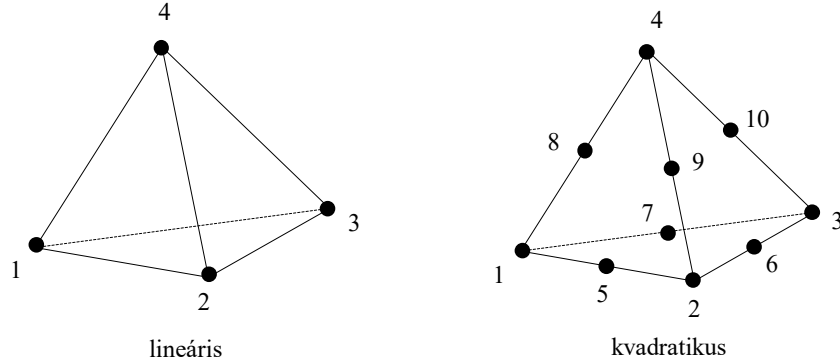
A szimplexekhez tartozó interpolációs polinomok a kétdimenziós esettel azonos módon építhetők fel, a csomópontok helyzete és a Pascal-gúla tagjai közötti megfeleltetés alapján. Például tekintsük a lineáris esetet, a négy csomópontú tetraédert (4.35. ábra). A polinom ekkor a következő lesz:

$$p^{(1)}(x, y, z) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot z = \sum_{i=1}^4 p^{(1)}(x_i, y_i, z_i) \cdot N_i(x, y, z), \quad (4.125)$$

ahol az interpolációs függvények most a természetes térfogat-koordinátákkal egyeznek meg:

$$N_i(x, y, z) = \xi_i(x, y, z), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4.126)$$

Az interpolációs függvények grafikus ábrázolása most nem lehetséges, mivel értelmezési tartományuk háromdimenziós, de azonban könnyen észrevehetjük, hogy ebben az esetben is értékük csak egyetlen csomópontban egységnyi, a többiben pedig zéró.



4.35. ábra. A gyakrabban használt C_0 -folytonos 3D szimplexek

Gyakorlati szempontból egy másik fontos típus a másodfokú (kvadratikus) interpolációt használó tíz csomóponttal rendelkező végelem. Interpolációs függvényei a következők:

$$\{N(x, y, z)\} = \left\{ \begin{array}{l} (2 \cdot \xi_1 - 1) \cdot \xi_1 \\ (2 \cdot \xi_2 - 1) \cdot \xi_2 \\ (2 \cdot \xi_3 - 1) \cdot \xi_3 \\ (2 \cdot \xi_4 - 1) \cdot \xi_4 \\ 4 \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 \\ 4 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3 \\ 4 \cdot \xi_1 \cdot \xi_3 \\ 4 \cdot \xi_1 \cdot \xi_4 \\ 4 \cdot \xi_2 \cdot \xi_4 \\ 4 \cdot \xi_3 \cdot \xi_4 \end{array} \right\}. \quad (4.127)$$

A háromdimenziós hiperkubusok interpolációs polinómát – akár csak a kétváltozós esetben – az egyváltozós Lagrange-polinomok szorzata adja:

$$p(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{k=1}^{l+1} p(x_i, y_j, z_k) \cdot l_i^{(n)}(x) \cdot l_j^{(m)}(y) \cdot l_k^{(l)}(z), \quad (4.128)$$

ahol n , m és l az x , y és z szerinti egyváltozós Lagrange-polinomok fokszáma. A végelem lehet izotróp, amikor $n = m = l$, vagy anizotróp, ha az előbbi három kitevő nem egyenlő.

Az interpolációs függvényeket ekkor tehát három egyváltozós Lagrange-polinom szorzata alkotja:

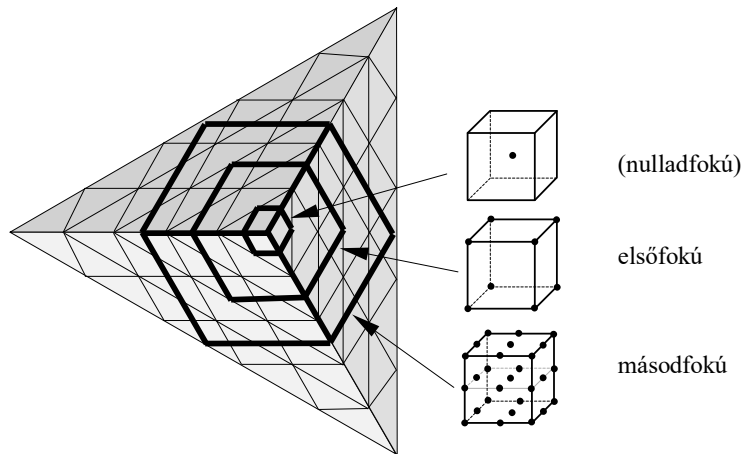
$$N_{i,j,k}(x, y, z) = l_i^{(n)}(x) \cdot l_j^{(m)}(y) \cdot l_k^{(l)}(z). \quad (4.129)$$

Trilineáris interpoláció esetén az interpolációs függvényeket egyetlen képlettel is megadhatjuk:

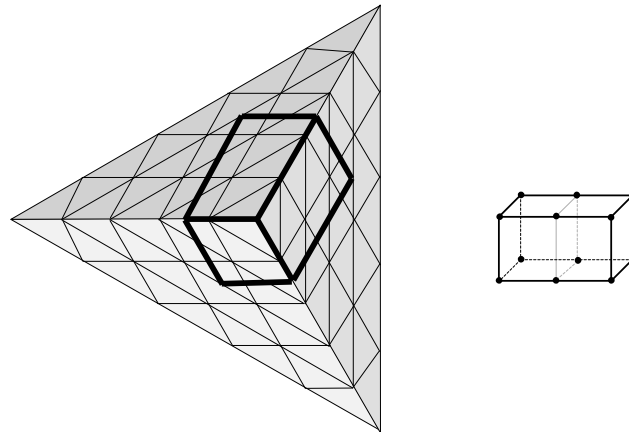
$$N_k(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} \cdot (1 + \xi \cdot \xi_k) \cdot (1 + \eta \cdot \eta_k) \cdot (1 + \zeta \cdot \zeta_k), \quad (4.130)$$

ahol k a nyolc sarokpontra vonatkozik (e képletekben azok k indexű lokális koordinátái szerepelnek).

A C_0 folytonosságú 3D hiperkubusok interpolációs polinomának szerkezetét, akár csak a tetraéderekét, a Pascal-gúlával szemléltetjük (4.36. és 4.37. ábra). Gyakorlati szempontból fontosabbak a már említett lineáris elem és a másodfokú megközelítést használó parabolikus elem. Ez utóbbi éleinek közepén, az oldallapjainak középpontjában és a hexaéder geometriai középpontjában is található egy-egy csomópont, amelyek közül az utóbbi nincs a peremen, tehát az belső csomópont.



4.36. ábra. C_0 -folytonos izotróp 3D hiperkubusok



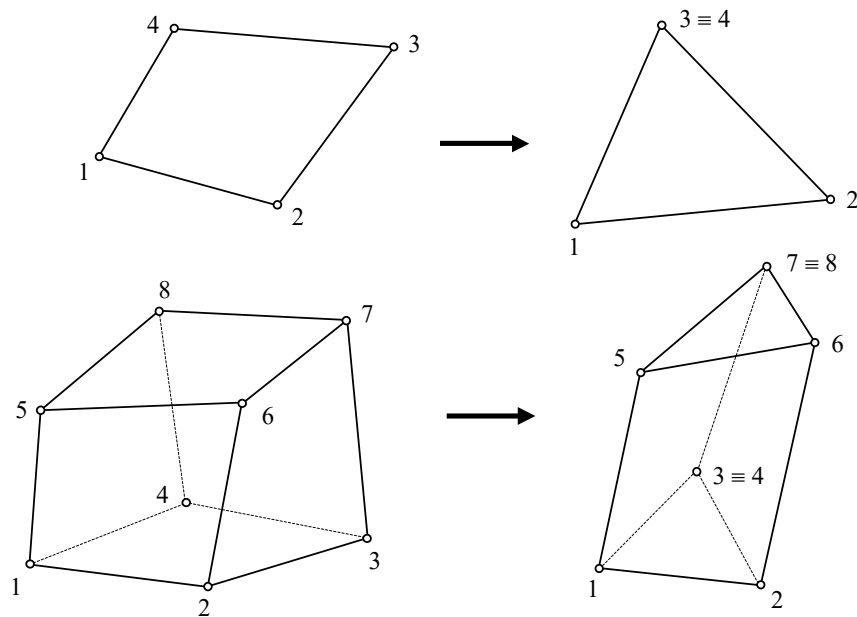
4.37. ábra. Egy C_0 -folytonos anizotróp 3D hiperkubus

A hexaéderelemekre való felosztáskor azt tapasztalhatjuk, hogy a perem geometriáját gyakran csak kisméretű elemekkel lehet elfogadható módon közelíteni. Éppen ezért a háromdimenziós hálógenerálás kedvelt végeleme a tetraéder, de hexaéderhálók használatakor is születhet elfogadható megoldás. Ekkor, ha nem akarunk túl sok kisméretű végelemet használni, a

szabálytalan peremfelület közelítésében két különböző módon járhatunk el: vagy elfajult elemeket vezetünk be, vagy prizmaelemeket használunk.

Az első megoldás egyszerűbb és gyakorlatilag minden végeleemes program esetében alkalmazható. Elve két vagy több csomópont egymásra tevéséből áll: a csomópontok számozásánál egy tényleges geometriai ponthoz több egymást fedő csomópontot rendelünk. Az elemek ilyen módon történő *degenerálása* nemcsak háromdimenziós esetben valósítható meg, gyakorta állítanak elő így háromszögelemeket négyszögelemekből valamely csomópont megkettőzésével (4.38. ábra). Ez az eljárás nagyon egyszerű, viszont az elemi mátrixok erős torzításához és ezzel fontos számítási hibákhoz vezet. A megkettőzött csomópont például jóval merevebb lesz mint a valóságban, a szimmetrikus geometriájú elemek merevsége erősen aszimmetrikussá válik. A számítási eredmények függeni fognak a csomópontok számozásától.

A csomópontok egymásra tevésével nemcsak az ábrázolt hasáb alakú végelelem hozható létre, hanem bármilyen más alakú, nullától különböző térfogatú konvex idom is (például gúla alakú elemek).



4.38. ábra. Kevesebb csomóponttal rendelkező elfajuló végelelem létrehozása

A második megoldás egy újabb típusú végelelem (a prizmaelem) létrehozásán alapszik, amely a számításokban sokkal jobban használható, mint az előző megoldással létrehozott elfajult végelelem. A C_0 -folytonos prizmaelemet (itt nyilvánvalóan háromszögprizmákról van szó) a szimplexekre és a hiperkubusokra érvényes elvek kombinációjával hozzuk létre. Például a 4.39. ábra egy olyan hibrid prizmaelemet mutat be, amelynek xy síkban fekvő alapja háromszög alakú és amelyen a közelítés másodfokú. Ebben a síkban tehát az interpolációs polinom a kétdimenziós szimplexekre vonatkozó elveket fogja követni. A prizma magasságának (a z tengely) irányában a közelítés harmadfokú – ebben az irányban az interpolációs polinom felépítésében a hiperkubusokra vonatkozó elveket kell szem előtt tartani.

A prizmaelem interpolációs polinoma tehát a következő lesz:

$$p(x, y, z) = p^{(2)}(x, y) \cdot p^{(3)}(z), \quad (4.131)$$

ahol a $p^{(2)}(x, y)$ polinom a kétváltozós szimplexeknél ismertetett

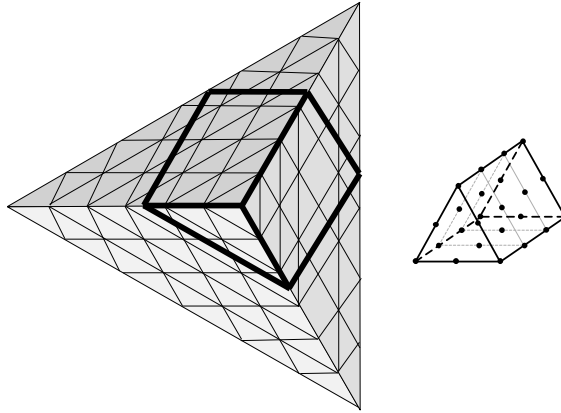
$$p^{(2)}(x, y) = \sum_{i=1}^6 p(x_i, y_i) \cdot N_i(x, y) \quad (4.132)$$

összefüggéssel, $p^{(3)}(z)$ pedig az egyváltozós hiperkubusnál felírt

$$p^{(3)}(z) = \sum_{i=1}^4 p(z_i) \cdot l_i^{(2)}(z) \quad (4.133)$$

Lagrange polinommal adható meg.

A háromdimenziós elemek feletti magasabbfokú interpolációnál – akárcsak a kétdimenziós esetben – a magasabbfokú vegyes szorzatoknak megfelelő belső csomópontok is megjelennek. Ezeknek a gyakorlati haszonnal nem rendelkező belső csomópontoknak eliminálása folytán egyszerűsített (serendipity) elemeket kapunk, amelynek csomópontjai az élek és esetleg az oldallapok mentén sorakoznak.



4.39. ábra. Egy C_0 -folytonos prizmaelem

Például, mint láttuk, az izotróp kvadratikus hexaéderelem belsejében van egy fölöslegesnek tekinthető csomópont, amelynek eltávolítása a szabadságfokok számát eggyel csökkenti. Lényegesen nagyobb a megtakarítás ha az oldallapok közepén található csomópontoktól is eltekintünk: így egy 20 szabadságfokkal rendelkező egyszerűsített végelemhez jutunk (4.40. ábra). Ennek az egyszerűsített végelemnek a sarokpontjaihoz tartozó interpolációs függvényei a következők:

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} \cdot (1 + \xi \cdot \xi_i) \cdot (1 + \eta \cdot \eta_i) \cdot (1 + \zeta \cdot \zeta_i) \cdot (\xi \cdot \xi_i + \eta \cdot \eta_i + \zeta \cdot \zeta_i - 2), \quad (4.134)$$

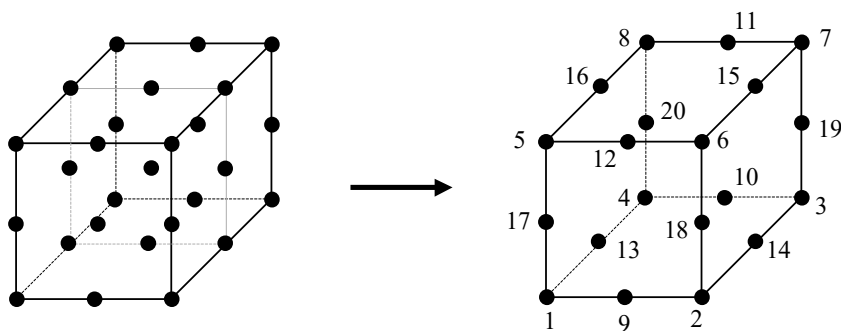
$$i = 1, 2, \dots, 8,$$

az élközépekhez tartozó interpolációs függvények pedig:

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi^2) \cdot (1 + \eta \cdot \eta_i) \cdot (1 + \zeta \cdot \zeta_i), \quad i = 9, 10, 11, 12,$$

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4} \cdot (1 - \eta^2) \cdot (1 + \xi \cdot \xi_i) \cdot (1 + \zeta \cdot \zeta_i), \quad i = 13, 14, 15, 16, \quad (4.135)$$

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4} \cdot (1 - \zeta^2) \cdot (1 + \xi \cdot \xi_i) \cdot (1 + \eta \cdot \eta_i), \quad i = 17, 18, 19, 20.$$

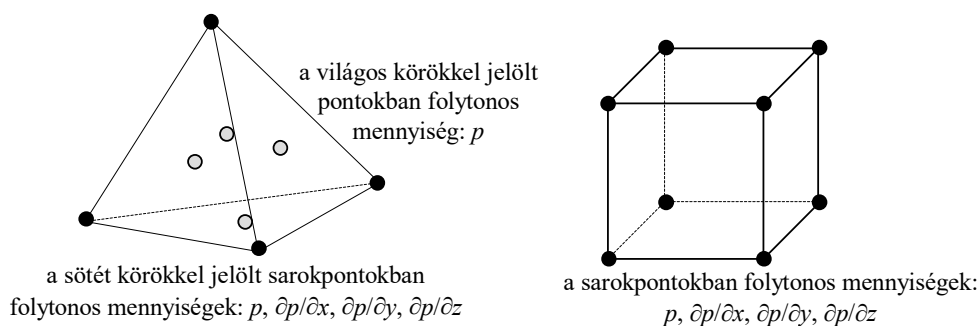


4.40. ábra. Egyszerűsített C_0 -folytonos térfogatelem

4.6.4. A C_1 -folytonos térfogatelemek

A gyakorlatban a C_1 -folytonos illesztésű térfogatelemek nem igazán honosodtak meg, mert a szabadságfokok nagy száma komoly számítási nehézségeket okoz. A téglatest alakú C_1 végelem interpolációs függvényei ezúttal is az egyváltozós Hermite-polinomok szorzataiként számíthatók ki. Az általános esetben, amikor a végelem élei nem párhuzamosak a vonatkoztatási rendszer tengelyeivel, minden csomópontban a függvény p értéke és a $\partial p/\partial x$, $\partial p/\partial y$, $\partial p/\partial z$ elsőrendű deriváltakon kívül a magasabb rendű deriváltakat is elő kell írjuk, egészen a harmadrendűekig. Csomópontként tehát igen nagy számú szabadságfok jelenik meg (17 darab).

A szabadságfokok igen nagy száma miatt a ténylegesen C_1 -folytonos végelemek nem nyertek gyakorlati alkalmazást, ez esetben is kézenfekvőbb a C_1 -folytonosságot szigorúan nem teljesítő, a gyakorlati szempontokat viszont kielégítő nemkonform elemek használata. Egy ilyen egyszerűbb, nemkonform elem például a 4.41. ábrán látható 20 szabadságfokkal rendelkező szimplex, ahol a sarokpontokban a függvényértékek mellett csak az elsőrendű deriváltakat írjuk elő. A polinom teljessége miatt további négy, az oldallapok közepén fekvő csomópontot is fel kell venni, ahol csak a függvényértékeket írjuk elő.



4.41. ábra. Nemkonform térfogatelemek

Hasonló megoldás lenne a 32 szabadságfokú nyolcpontos nemkonform hexaéderelem, amelynek csomópontjaiban a függvényértékeket és az elsőrendű deriváltakat írjuk elő. Interpolációs polinoma hiányos és negyedfokú, a következő tagokkal adható meg:

$$\{\mathbf{x}\}^T = [1 \quad x \quad y \quad z \quad x^2 \quad y^2 \quad z^2 \quad x \cdot y \quad y \cdot z \quad x \cdot z \quad x^3 \quad y^3 \quad z^3 \quad x^2 \cdot y \quad x \cdot y^2 \quad x^2 \cdot z \quad x \cdot z^2 \quad y^2 \cdot z \quad y \cdot z^2 \quad x \cdot y \cdot z \quad x^2 \cdot y^2 \quad x^2 \cdot z^2 \quad y^2 \cdot z^2 \quad x^3 \cdot y \quad x \cdot y^3 \quad y^3 \cdot z \quad y \cdot z^3 \quad x^3 \cdot z \quad x \cdot z^3 \quad x^4 \quad y^4 \quad z^4]. \quad (4.136)$$

4.7. Gyakorlati szempontok

4.7.1. Vektoriális függvények közelítése

Ebben a fejezetben az eddigiekben skaláris függvények közelítését tárgyaltuk (ilyen lehet például a hőmérséklet és a hidrosztatikai nyomás). A vizsgált mennyiség azonban lehet vektoriális is, ilyen például a rugalmasságtani feladatokban szereplő elmozdulás, – ekkor annak komponenseivel, skaláris mennyiségekként megadható vetületeivel kell dolgoznunk.

A példaként említett vektoriális $\mathbf{d}(x, y, z)$ elmozdulás vetületeit az x irányú $u(x, y, z)$, az y irányú $v(x, y, z)$ és a z irányú $w(x, y, z)$ skaláris függvények adják. C_0 folytonosság esetén minden csomópontban elő kell írunk e három skaláris mennyiség értékét, tehát a szabadságfokok száma most csomópontonként három lesz. Mindhárom komponenst az interpolációs függvények segítségével adjuk meg:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_{i=1}^n u(x_i, y_i, z_i) \cdot N_i^u(x, y, z), \\ v(x, y, z) &= \sum_{i=1}^n v(x_i, y_i, z_i) \cdot N_i^v(x, y, z), \\ w(x, y, z) &= \sum_{i=1}^n w(x_i, y_i, z_i) \cdot N_i^w(x, y, z). \end{aligned} \quad (4.137)$$

A három komponens egymástól független, tehát akár egymástól eltérő rendben közelíthetjük őket – ez esetben az N^u , N^v és N^w interpolációs függvények nem azonosak és ez a végeelem anizotrópiájának egy újabb forrása lehet. Ezt a megoldást azonban eléggé ritkán alkalmazzák, tehát az egy csomópontra vonatkozó interpolációs függvények általában minden komponensre azonosak.

A bázisfüggvények $\{\mathbf{x}\}$ vektorát most egy $[\mathbf{x}]$ mátrixszal kell helyettesítenünk. Például lineáris approximáció esetén az interpolációs polinomot a következőképpen írhatjuk fel:

$$\{\mathbf{d}\} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = [\mathbf{x}] \cdot \{\mathbf{a}\}. \quad (4.138)$$

Az $\{\mathbf{a}\}$ vektor tagjainak meghatározása az ismert eljárás alapján történik (előírjuk, hogy az interpolációs polinomok a csomópontokban a csomóponti elmozdulás-komponenseket adják vissza). A végeelem tartományán bármely pont elmozdulását a következő vektoriális összefüggés fogja leírni:

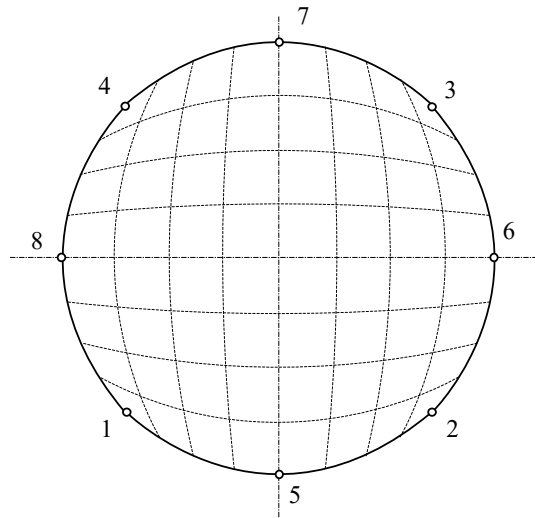
$$\{\mathbf{d}(x, y, z)\} = [N] \cdot \{\boldsymbol{\delta}\}, \quad (4.139)$$

ahol $\{\boldsymbol{\delta}\}$ a csomóponti elmozdulások vetületi vektora. Akárcsak a bázisfüggvények $\{\mathbf{x}\}$ vektora, az interpolációs függvények $[N]$ mátrixa is felépítésében különbözni fog a skaláris esetben használt formától.

4.7.2. Parametrikus elemek

A geometriai helyzet megadása rendszerint, akárcsak a függvényértékek kiszámítása, szintén a végelem feletti interpolációval történik: bármely, az adott végelemhez tartozó pont koordinátáit megadhatjuk a csomópontok koordinátáinak függvényében. Az ilyen végelelemet *paraméteresnek* (vagy *parametrikusnak*) nevezik. A geometria megközelítésére alkalmas interpolációs függvények azonosak lehetnek a tanulmányozott függvény közelítésére használt függvényekkel – ekkor az elemet *izoparametrikusnak* nevezik.

A geometria magasabbfokú közelítése görbe peremek esetében jelentősen csökkentheti a végelemek számát, például egy körlap a geometria kvadratikusan közelítésével egyetlen paraméteres négyszögelemmel is kielégítő pontossággal modellezhető (4.42. ábra).

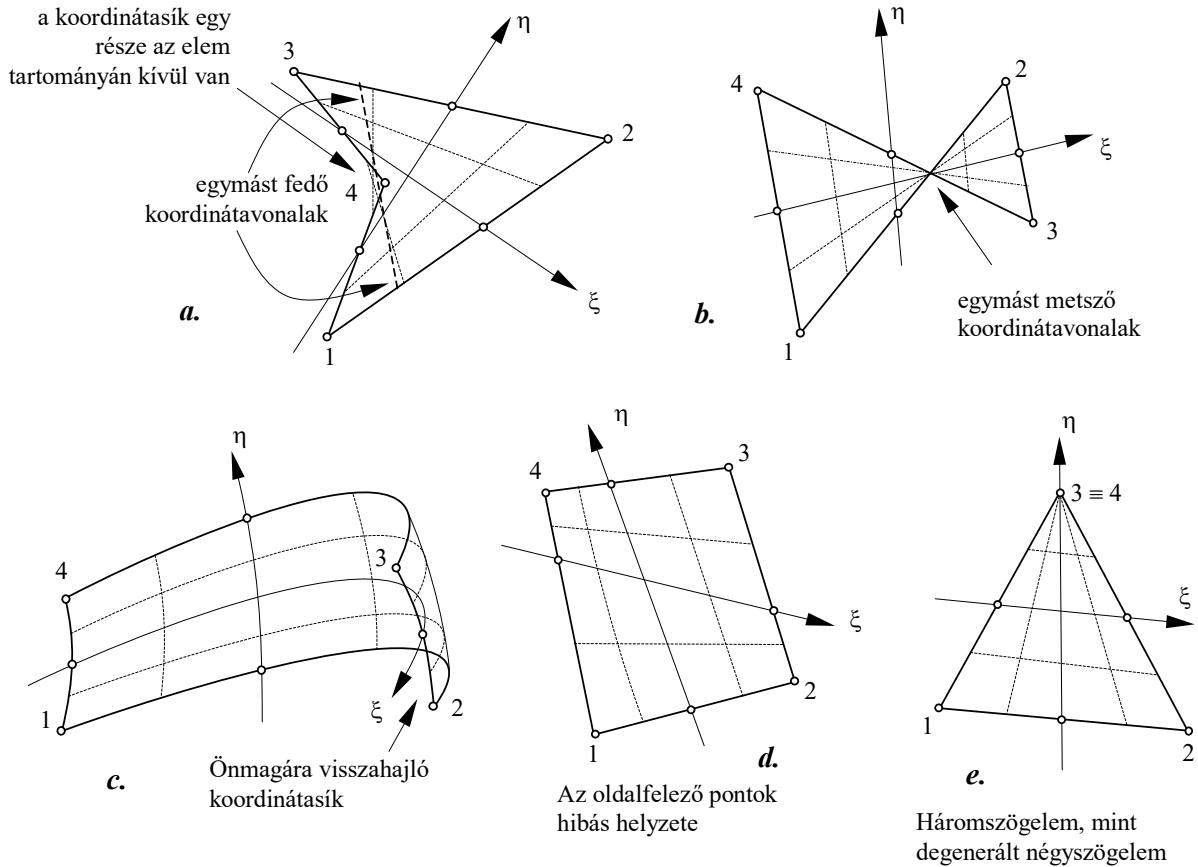


4.42. ábra. Kvadratikusan négyszögelemmel modellezett körlap

A végelemek csomópontjainak felvételekor körültekintően kell eljárni, és a várható elmozdulás mértékét is figyelembe kell venni, a torzulás miatt létrejövő szingularitások miatt. A 4.43. ábrán néhány szemléltető példát láthatunk. Az első (a.) példában a 4. számú csomópont környezetében a ξ és az η koordinátavonalai nagyon közel vannak egymáshoz és egy adott helyen egymást fedik. Így a $d\xi \cdot d\eta$ szorzat (az elemi terület) az adott helyen zéró fele tart. Következésképpen a háló létrehozásakor gondoskodnunk kell arról, hogy minden egyes végelem konvex és deformált állapotában is az marad.

A b. példában a hibás sorszámozás vagy túlzott deformáció miatt a végelem területének egy része eltűnik vagy az akár negatívvá válik. Ha a két metsző oldal felezi egymást, akkor a lokális η tengely helyzete is határozatlan lesz (ezt az oldalfelezőket összekötő vonal kellene adja), ellenben a koordinátavonalak metszéspontjában lesz az illető koordináta határozatlan.

A c. példában a végelem oldalait leíró görbe rögzített alakja miatt a végelem tartományának egy része önmagát fedi, visszahajlik. A takart részen levő pontok lokális koordinátái nincsenek egyértelműen meghatározva, egy ponthoz két különböző (ξ, η) koordináta-párt rendelhetünk.



4.43. ábra. Elfajuló elemek

A d. példa a közbelső pontok felvételekor elkövetett hibát illusztrálja: a pontok nincsenek az élek közepén vagy azok közelében, ami a lokális rendszer jelentős torzulásához, számítási hibák megjelenéséhez vezet.

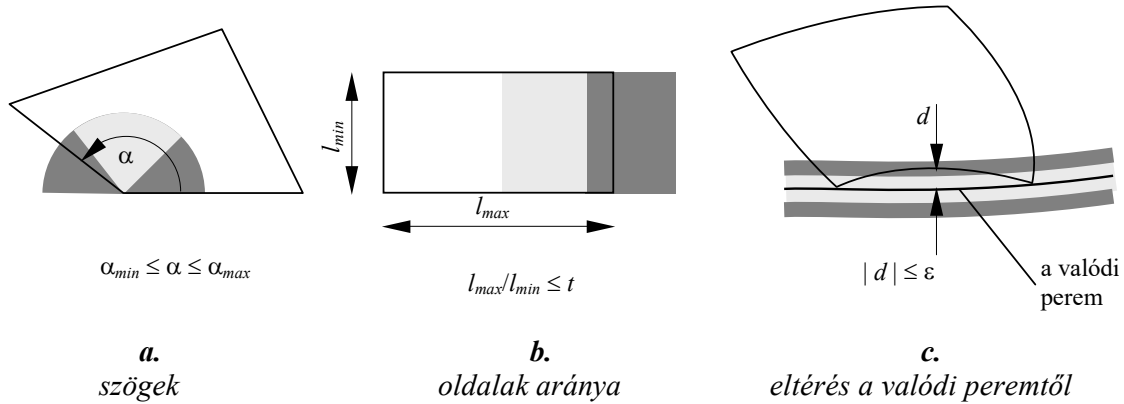
A lokális rendszer erős torzulásának esete áll fenn a négyszögelemből degenerálással származtatott háromszögelem esetén is (e. ábra). Bár e származtatás gyakran alkalmazott megoldás, a túlzott mértékű használata az általuk bevitt számítási hibák miatt kerülendő.

A fordított körbejárási irány miatt a végeelem területe negatív lesz (ezt az esetet nem ábrázoltuk).

4.7.3. A háló minőségére vonatkozó előírások

A végeelemes háló létrehozásának első lépése rendszerint a pusztán geometriai szempontokat figyelembe vevő durva háló megrajzolása. Ez az adott alakzatot lefedő, a lehető legkevesebb végelemből álló háló. Ha a diszkrétizált tartomány elkülönülő rétegekből áll, akkor a belső elválasztó felületeket a külső peremfelületekhez hasonlóan kell kezelni. A végeelemek oldalai e felületekhez kell igazodjanak, ugyanis a végeelem anyaga homogén kell legyen. Ha a diszkrétizált test anyaga anizotróp, akkor a végeelemek lokális koordinátarendszere az anizotrópia irányához kell igazodjon.

A durva háló finomításakor a geometriai szempontokon kívül már figyelembe kell venni a tanulmányozott függvény értékének várható alakulását, a hálót például a feszültséggyűjtő helyek környékén sűríteni kell.



4.44. ábra. A háló minőségi jellemzői (világosabb színnel a megengedhető tartományok)

A számítások kielégítő pontosságához a végeleemes háló eleget kell tegyen bizonyos minőségi előírásoknak, amelyek a következő mennyiségekre vonatkoznak (4.44. ábra, a világosabb szín a megengedett tartományt jelöli):

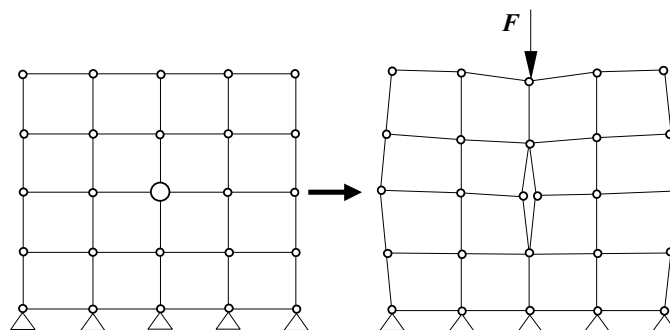
- az élek által bezárt szögek megengedhető intervalluma;
- az élhosszak arányának maximális értéke (leghosszabb él/legrövidebb él);
- a peremtől, határfelületektől való eltérés maximális értéke;
- a fentieknek eleget nem tevő elemek maximális előfordulási aránya;
- a degenerált elemek maximális előfordulási aránya.

Az ideális végelelem geometriája a szabályos szimplex, illetve hiperkubus.

Általános elvárás, hogy a háló a peremfelületek közelében minél szabályosabb legyen, ugyanis a vizsgált függvények általában a perem közelében változnak a leggyorsabban.

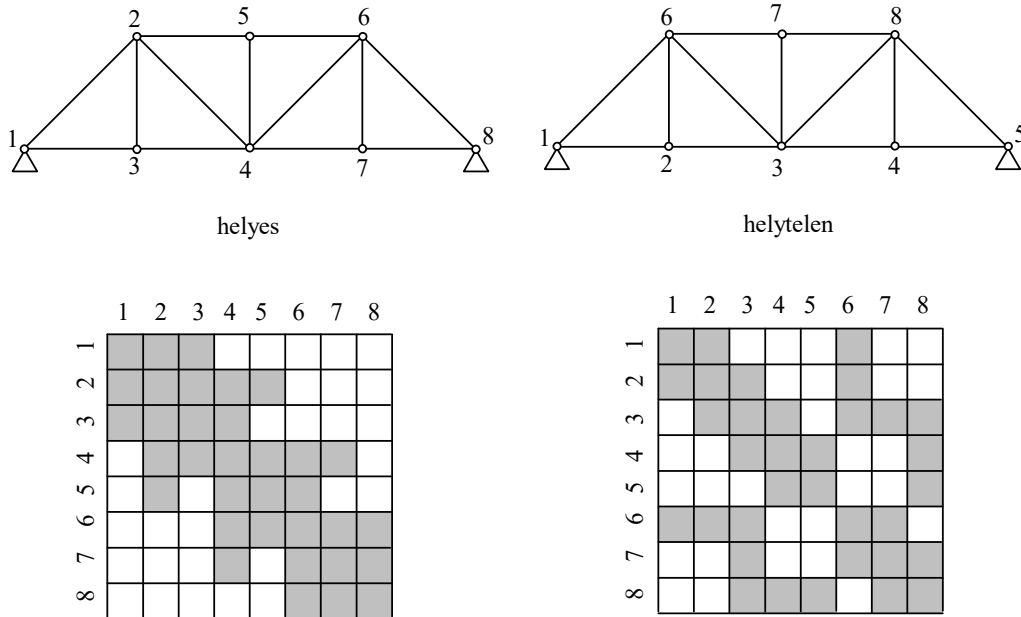
A végelelemekre osztás egyik feladata a csomópontok és a végelelemek megszámozása. A csomópontok számozásakor néhány általános érvényű szempontot figyelembe kell venni:

- a számozás 1-től felfele folyamatosan történik (egy számot sem lehet kiugrani vagy megismételni; ezt a feltételt a számításokat elvégző program követeli meg);
- ha egy csomópont számozását megismételjük, akkor ott két vagy több egymást fedő csomópontot kell feltételeznünk (vágások, repedések – 4.45. ábra);
- egy végelelem csomópontjainak számozásakor a sorszámok közötti minimális különbségre kell törekedni (4.46. ábra; ez a feltétel a merevségi mátrix szerkezetének optimalizálásával kapcsolatos).



4.45. ábra. Diszkontinuitások modellezése csomópont-kettőzéssel

Míg az első két feltétel könnyen értelmezhető, az utóbbi némi magyarázatra szorul. Az első fejezetben már szó volt a szerkezet merevségi mátrixának összeállításáról: a végelem mátrixának elemei a csomópontok sorszámainak megfelelő helyet foglalják el a strukturális mátrixon belül. Szimmetriájuknak köszönhetően a strukturális mátrix is szimmetrikus lesz, amelynek elemei a főátló mentén csoportosulnak. Ez a két tény egy számítási fogás bevezetését teszi lehetővé: a szimmetria miatt elegendő csupán a főátló egyik oldalán fekvő elemeket tárolni, méghozzá ezek közül is csak azokat, amelyek a nemzéró értékek sávjában vannak. Ennek a sávnak a szélességét az egy végelemhez tartozó csomópontok sorszámainak különbsége adja.

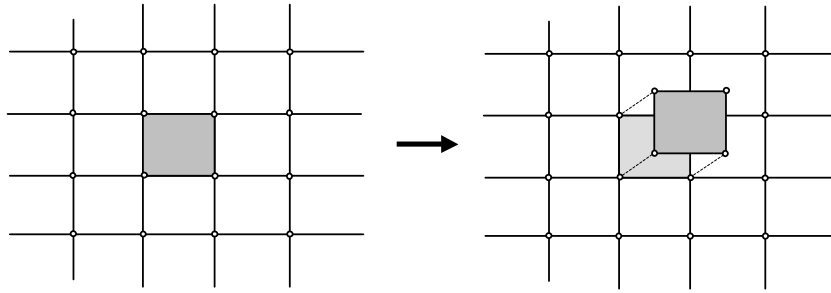


4.46. ábra. Csomópontok számozása és a merevségi mátrix formája

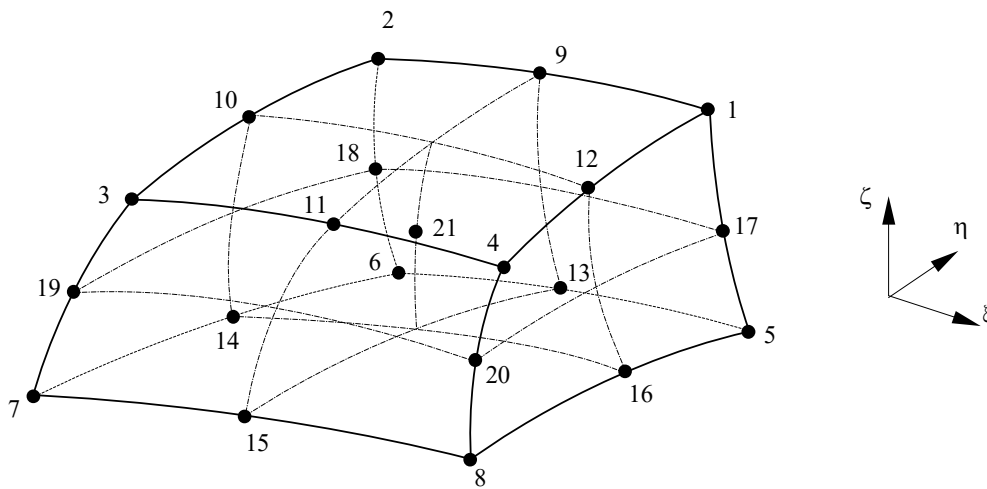
A 4.46. ábrán a szerkezet csomópontjait két különböző módon számoztuk be. Míg a bal oldalon levő számozás egy viszonylag kompakt strukturális mátrixhoz vezet addig a jobboldali számozás egy laza szerkezetű mátrixot ad, melynek elemei a főátlótól nagy távolságra vannak szétszórva.

A csomópontok sorszámozását a hálózóprogramok két lépésben végzik. Először a csomópontokat létrehozásuk sorrendjében folyamatosan megszámozzák, majd az így nyert, az optimálistól általában messze álló számozást valamilyen algoritmussal javítják. Egy ilyen algoritmus az olajcsepp- vagy bozóttűz-analógia (*fire-front*): a sorszámozást egy adott pontban kezdi meg és ahogy az olajcsepp szétterül a pocsolya felszínén vagy ahogy a bozóttűz terjed, a kiindulási ponttól kifelé haladva koncentrikus vonalak vagy felületek mentén számozza meg a csomópontokat.

A végelemek sorszámozása általában tetszőleges, rendszerint – néhány később ismertetett kivételtől eltekintve – nincs közvetlen hatása a számítások kimenetére. A számozásnál követendő szempont lehet az azonos anyagú végelemek sorrendisége, az eredményeket tartalmazó listában a végelemekre vonatkozó adatok ugyanis sorszámuknak megfelelő sorrendben jelenik meg. A végelemek számozása is 1-től kezdődően folyamatosan történik. Ha egy végelem sorszámozását megismételjük, akkor ott két (vagy több) egymást fedő végelemet kell feltételeznünk (kompozit anyagok – 4.47. ábra).

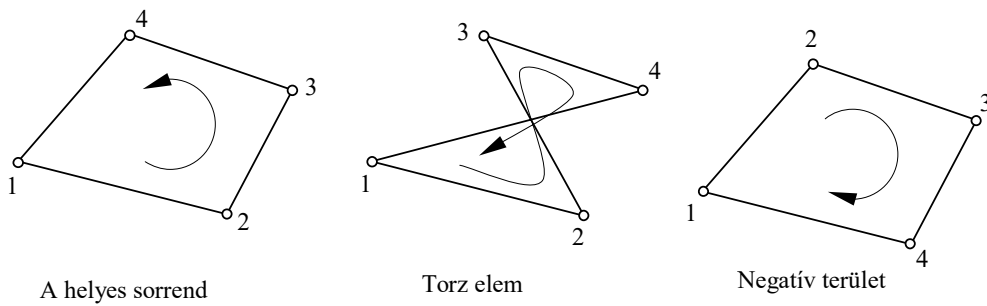


4.47. ábra. Kompozit anyagok modellezése végelem-kettőzéssel



4.48. ábra. Csomópontok felsorolási sorrendje (példa)

A végelemek azonosítása csomópontjainak felsorolásával történik. A csomópontok felsorolásának sorrendje az adott szoftver kívánalmainak kell megfeleljen, melynek illusztrálására a 4.48. ábra a SAP program háromdimenziós izoparametrikus végelemét mutatja be (a 21. csomópont csak a végelem középpontjában kiszámított eredmények lokalizálására szolgál). Az előírt sorrendtől való eltérés hibákhoz vezet (4.49. ábra).



4.49. ábra. A téves csomópont-felsorolás hatása

5. A SZERKEZETEK SZÁMÍTÁSÁBAN HASZNÁLT GYAKORIBB VÉGESELEM-TÍPUSOK

5.1. Vonalelemek

A rugalmasságtani feladatokban használt vonalelemeket a rúdtartók modellezésére használjuk; e kategória az egyenes tartókon kívül magába foglalja a görbült íveket és a köteleket is. Ezeknek az elemeknek a merevségi mátrixát analitikus úton, a közvetlen megfogalmazással pontosan meg lehet állapítani, éppen ezért a szerkezetek elemzésében a 4.4. fejezetben bemutatott vonalelemekkel szemben a közvetlen megfogalmazással előállított elemeket részesítik előnyben.

5.2. Felületelemek

A felületelemeket sík feszültségi vagy sík alakváltozási állapottal jellemezhető szerkezetek tanulmányozásakor, valamint sík vagy görbült felületek (felülettartók) modellezésében használhatjuk.

A sík tartókat igénybevételük szerint osztályozzuk, azok lehetnek *tárcsák*, amelyek csak a síkjukba eső igénybevételeket átvevő sík membránoknak tekinthető elemek, illetve *lemezek*, amelyek a síkjukra merőleges igénybevételeket veszik át. A sík *héjak* egyesítik a tárcsák és a lemezek tulajdonságait.

A görbült felülettartókat héjaknak nevezzük. A *membránok* olyan héjak, amelyek csak a középfelületükre eső terheléseket veszik át.

Mivel a görbült felületek is leírhatók két koordinátával (amelyeket az illető felületen veszünk fel), azokat is két dimenziósnek tekinthetjük. Ahhoz, hogy e görbült felületeket megkülönböztessük a sík, „közönséges” két dimenziós felületektől, azokat néha szokták még 2.5 dimenzióval rendelkező objektumoknak tekinteni (ennek analógiájával a görbült vonalelemeket 1.5 dimenzióval rendelkező végelemeknek kellene neveznünk). Természetesen fél dimenziók nem léteznek és ezek az elnevezések triviálisak, nem matematikai fogalmak.

5.2.1. Tárcsák

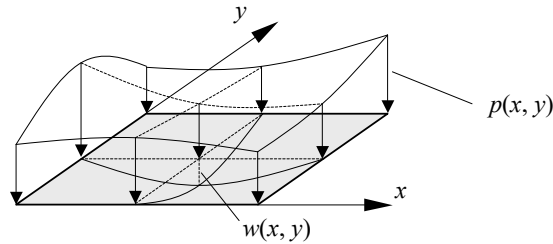
A tárcsákat peremfeltételeiktől függően valamilyen sík állapottal jellemezhetjük (ha a vastagságuk változását nem gátoljuk meg, akkor sík feszültségi állapot jön létre bennük).

A sík állapotok végeelemes modellezésében elegendő a C_0 osztályú elemekhez folyamodni. Csomópontként két szabadságfokot definiálunk az u és v elmozdulás-összetevők irányában. A gyakorlati igényeknek általában a lineáris háromszögelem és a lineáris négyszögelem is megfelel, azonban egy erősen görbült peremmel rendelkező tartomány lefedésekor megtörténhet, hogy egy parabolikus közelítésű elem gazdaságosabb megoldást jelent (ilyenkor kevesebb végeelemet kell létrehoznunk).

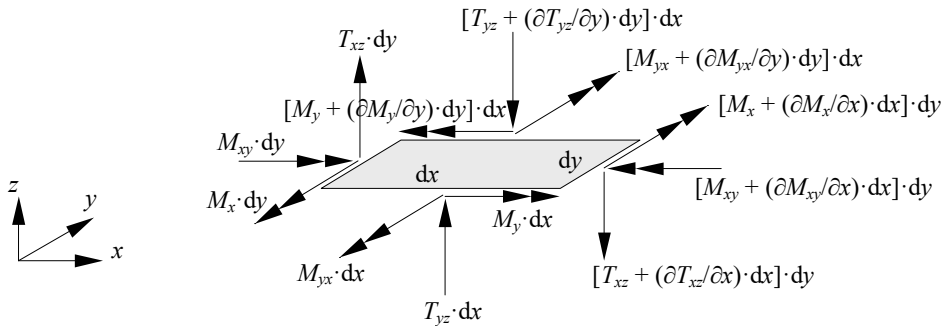
5.2.2. A lemezekre vonatkozó elméletek

A lemezeket (5.1. ábra) klasszikus elméletük szerint (Kirchhoff) hajlított elemeknek tekintjük és a nyíróerők hatását elhanyagoljuk. A bennük fellépő feszültségi és deformációs állapot nem sík és az előbbi C_0 osztályú elemek már nem vezetnek elfogadható eredményekhez. A nyíróerők elhanyagolása miatt a terheletlen lemez középsíkjára emelt merőleges egyenes szakasz a terhelést követő alakváltozás után is egyenes és a meggörbült középfelületre merőleges marad. Továbbá, a lemezek tanulmányozásakor elhanyagoljuk a lemez középsíkjában fellépő alakváltozásokat, a középsíkot nyújthatatlannak tekintjük. Feltételezzük, hogy a középsíkra merőleges irányban ható normál feszültség elhanyagolható (az ebben az irányban fellépő alakváltozást nem gátoljuk meg).

Amennyiben a lemez tartományán egy $dx \times dy$ területű felületelemet különítünk el, akkor annak négy oldalán (a lemez t vastagságán) az 5.2. ábrán felrajzolt erők és nyomatékok fognak hatni.



5.1. ábra. Hajlított lemez



5.2. ábra. A hajlított lemez keresztmetszetén ható erők és nyomatékok

Az ábrázolt mennyiségeket az oldal egységnyi hosszán értelmezett fajlagos nyíróerők és nyomatékok segítségével adtuk meg (e fajlagosított mennyiségeket keresztmetszeti erőknek, illetve keresztmetszeti nyomatékoknak nevezik és gyakran kis betűkkel jelölik). A kettős indexszel ellátott nyomatékok a lemez csavarását (torzióját) idézik elő, míg az M_x és az M_y fajlagos nyomatékok azt hajlítani fogják. Feltételezzük, hogy a fajlagos nyomatékok és nyíróerők az elem tartományán lineárisan változnak; e változás sebességét (mértékét) a feltüntetett parciális deriváltak adják. Az ábra alapján az elkülönített elem egyensúlyát a következő vetületi egyenletek adják (elhanyagoljuk az infinitezimális tagok szorzatait):

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} &= T_{xz}, \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} &= T_{yz}, \\ \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} &= -p(x, y). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Az első két egyenletet az elem valamely, y , illetve x tengellyel párhuzamos oldalára felírt nyomatékok egyensúlyát adja, a harmadik egyenlet pedig a függőleges vetületek zérus eredőjét írja elő. Mivel az M_{xy} fajlagos csavarónyomaték az adott oldalon fellépő τ_{xy} nyírófeszültségekből származik, ugyanis

$$\begin{aligned}
T_{xz} &= \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xz} dz, & T_{yz} &= \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{yz} dz, \\
M_x &= \int_{-t/2}^{+t/2} z \cdot \sigma_x dz, & M_y &= \int_{-t/2}^{+t/2} z \cdot \sigma_y dz, \\
M_{xy} &= \int_{-t/2}^{+t/2} z \cdot \tau_{xy} dz, & M_{yx} &= \int_{-t/2}^{+t/2} z \cdot \tau_{yx} dz,
\end{aligned} \tag{5.2}$$

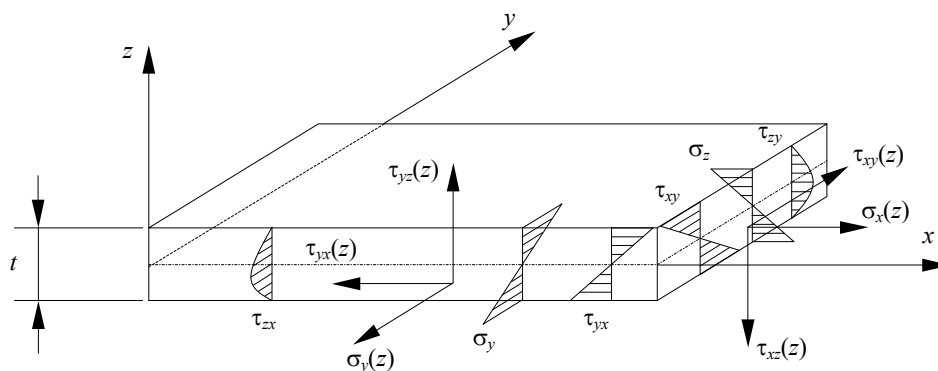
(5.3. ábra) és mivel a fajlagos M_{yx} csavarónyomatékot a τ_{yx} nyírófeszültség adja, τ dualitásából eredően

$$M_{xy} = M_{yx}. \tag{5.3}$$

A felsorolt feltételezések alapján a hajlításból származó σ_x és a σ_y normálfeszültségek a lemez t vastagságán lineáris eloszlást mutatnak, a középsíkon e feszültségek értéke nulla. Ez az eloszlás a hajlított rudakra vonatkozó Navier-képlettel megadott eloszlással analóg.

A csavarásból származó $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ nyírófeszültségek eloszlása a rugalmasságtan hipotézisei szerint szintén lineáris és a középsíkon ezek értéke is zéró.

A nyírásból származó további négy csúsztatófeszültség a rúdtartókra megállapított Juravski képlet szerint parabolikus eloszlású, azok legnagyobb értéküket a középsíkban érik el.



5.3. ábra. A hajlított lemez keresztmetszetén fellépő feszültségek

Az 5.3. észrevétellel a lemez sztatikai egyensúlyának 5.1. egyenleteit egyetlen képletté vonhatjuk össze (az első kettőt deriváljuk, majd behelyettesítjük a harmadikba):

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p(x, y). \tag{5.4}$$

A lemez lehajlását tanulmányozván (5.4. ábra) észrevehetjük, hogy a középsík egy adott pontjában a keresztmetszet elfordulását a pont függőleges irányú w elmozdulásával a következő geometriai reláció köti össze:

$$\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y} \tag{5.5}$$

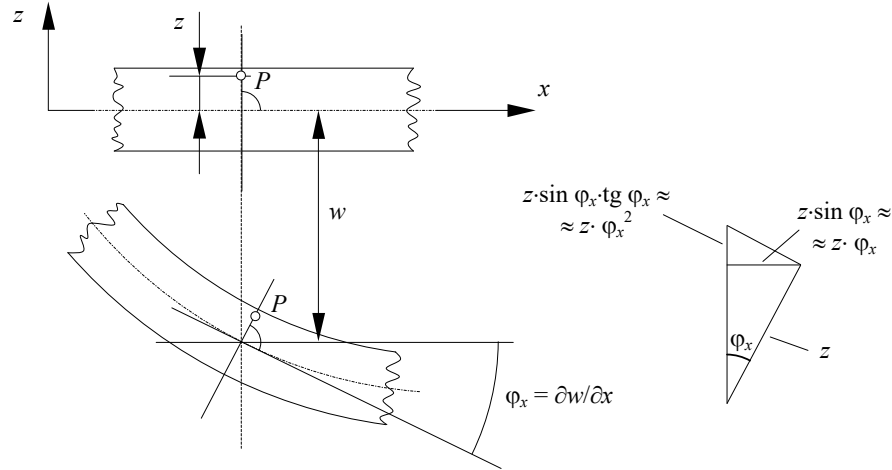
(például egy dx távolságon a lehajlás mértéke a $(\partial w / \partial x) \cdot dx$ mennyiséggel változik, amely egy $\text{tg } \varphi_x = \partial w / \partial x$ elfordulásnak felel meg, és mivel az elfordulás szöge kicsi, $\text{tg } \varphi_x \approx \varphi_x$).

Az elfordulást követően a keresztmetszet valamilyen z magasságában levő P pont vízszintes és függőleges irányban is elmozdul. Mivel feltételeztük, hogy a lemez középsíkjára emelt normális

egyenes a deformációt követően is normális és egyenes marad, az elfordulás szögével a vízszintes irányú elmozdulás

$$u = -z \cdot \varphi_x = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \cdot \varphi_y = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (5.6)$$

(a képletekben felhasználtuk, hogy $\sin \varphi_x \approx \varphi_x$) a függőleges irányú, a középfelülethez viszonyított relatív elmozdulás pedig az elfordulás szögének kicsinyisége miatt elhanyagolható.



5.4. ábra. A lemez lehajlása

Amennyiben az így kapott elmozdulásokat behelyettesítjük a rugalmasságtani feladat geometriai aspektusát leíró 2.1. egyenletekbe, akkor a fajlagos alakváltozásokat a lehajlás függvényeként megadó relációkhoz jutunk:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2 \cdot z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} = \gamma_{yx}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

E fajlagos alakváltozásokkal a fizikai aspektus 2.7. egyenleteiből a σ_x , σ_y és a $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ feszültségek meghatározhatók. A további öt fajlagos feszültséget nullának tekintjük: a kezdetben feltételeztük, hogy σ_z elhanyagolható és ugyanígy a nyíróerők hatásától is eltekinttünk, tehát $\tau_{xz} = \tau_{zx} \approx 0$ és $\tau_{yz} = \tau_{zy} \approx 0$.

E feszültségekkel az 5.2. egyenletekből M_x , M_y és $M_{xy} = M_{yx}$ kiszámítható, majd azokat az 5.4. egyensúlyi egyenletbe behelyettesítve a

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad (5.8)$$

negyedrendű differenciálegyenlethez jutunk, amely a rugalmas lemezelmélet Sophie Germain-féle alapegyenlete (a biharmonikus lemezeqyenlet). A jobb oldal nevezőjében szereplő D mennyiség a lemez hajlítómerevsége:

$$D = \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}. \quad (5.9)$$

Az 5.8. alapegyenlet megoldása a $w(x, y)$ lehajlás-függvény, amelynek deriváltjai az 5.5. elfordulásokat és az 5.7. fajlagos alakváltozásokat adják, az utóbbiakkal a lemezben fellépő feszültségi állapot is meghatározható lesz.

Az alapegyenlet megállapításakor feltételeztük, hogy a lemez anyaga homogén és izotróp. Amennyiben ez a feltételezés nem állja meg a helyét, akkor az anyagegyenletet a megfelelő rugalmassági mátrixszal kell felírunk. A gyakorlati szempontból fontosabb ortotróp lemezek esetében, ha x és y az ortotrópia irányával azonos, ez az egyenlet a következő lesz:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1 - \nu_{xy} \cdot \nu_{yx}} & \frac{\nu_{yx} \cdot E_x}{1 - \nu_{xy} \cdot \nu_{yx}} & 0 \\ \frac{\nu_{xy} \cdot E_y}{1 - \nu_{xy} \cdot \nu_{yx}} & \frac{E_y}{1 - \nu_{xy} \cdot \nu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (5.10)$$

ahol a rugalmasságtani jellemzők között a 2.18.-2.19. összefüggések érvényesek (itt nyilván a sík feszültségi állapot hipotézisében vagyunk). Az 5.2. integrálok kiszámításával, az 5.7. összeférhetőségi egyenletekkel és az elfordulások 5.5. egyenleteivel a nyomatékok és az elfordulások között a következő lineáris kapcsolatot kapjuk:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -\frac{t^3}{12} \cdot \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1 - \nu_{xy} \cdot \nu_{yx}} & \frac{\nu_{yx} \cdot E_x}{1 - \nu_{xy} \cdot \nu_{yx}} & 0 \\ \frac{\nu_{xy} \cdot E_y}{1 - \nu_{xy} \cdot \nu_{yx}} & \frac{E_y}{1 - \nu_{xy} \cdot \nu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (5.11)$$

Megjegyzendő, hogy a jobboldali vektor a lemez középfelületének x és y irányú görbületeit tartalmazza (a ρ_x , illetve a ρ_y görbületi sugarak inverzeit), a harmadik tag pedig a lemez egységnyi hosszon mért elcsavarodásának (torziójának) szöge.

A Kirchhoff által bevezetett, a középfelületre merőlegesnek maradó normálisok hipotézise nem minden helyzetben állja meg a helyét. Előállhat olyan helyzet is, amikor a nyíróerők elhanyagolása miatt a számítási eredmények nem lesznek kielégítő pontosságúak. Ezért a lemezek klasszikus Kirchhoff-féle elméletét utólag, az említett hipotézis elhagyásával tovább fejlesztették, így keletkezett a nyíróerőket is figyelembe vevő Mindlin-lemezelmélet.

Mindlin szerint a normálisok elfordulását nemcsak a lemez $w(x, y)$ lehajlása okozza, hanem a T_{xz} és a T_{yz} nyíróerőkből származó torzulás is. Az elfordulás szögét adó 5.5. egyenletek érvényüket veszítik. Tehát például φ_x nem egyenlő a $\partial w / \partial x$ parciális deriválttal, mert az a nyírófeszültségből származó szögváltozást is magába foglalja:

$$\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \gamma_{xz}, \quad \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \gamma_{yz}. \quad (5.12)$$

Ekkor az 5.10. mátrixos egyenletet a

$$\tau_{xz} = G_{xz} \cdot \gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G_{yz} \cdot \gamma_{yz} \quad (5.13)$$

relációkkal kell kiegészítenünk; a z irányú (a lemez vastagságában ható) σ_z normálfeszültséget továbbra is elhanyagoljuk. A nyíróerők és a csúszató feszültségek között az 5.2. egyenletek megfelelő tagjai tartják a kapcsolatot. A fenti nyírófeszültségek z irányú eloszlását Juravski eljárásával határozhatjuk meg és a Juravski képlettel lényegében azonos függvényekhez jutunk.

Ha γ_{xz} -t és γ_{yz} -t kifejezzük az 5.12. egyenletekből, majd behelyettesítjük τ_{xz} , illetve τ_{yz} 5.13. képletébe, akkor azok integrálásával megkapjuk a nyíróerőket:

$$T_{xz} = t \cdot G_{xz} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_x \right), \quad T_{yz} = t \cdot G_{yz} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_y \right). \quad (5.14)$$

Ezekkel a Mindlin-elmélet szerint a nyomaték-görbület egyenlet tehát a következő lesz:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{t^3}{12} \cdot \frac{E_x}{1 - \nu_{xy} \cdot \nu_{yx}} & \frac{t^3}{12} \cdot \frac{\nu_{yx} \cdot E_x}{1 - \nu_{xy} \cdot \nu_{yx}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^3}{12} \cdot \frac{\nu_{xy} \cdot E_y}{1 - \nu_{xy} \cdot \nu_{yx}} & \frac{t^3}{12} \cdot \frac{E_y}{1 - \nu_{xy} \cdot \nu_{yx}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t^3}{12} \cdot G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \cdot G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t \cdot G_{zx} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \\ \varphi_y - \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varphi_x - \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad (5.15)$$

ahol a nyírási modulusokat a 2.19. relációból állíthatjuk elő az indexek ciklikus permutációjával.

Az 5.11. és az 5.15. egyenleteket izotróp anyagokra is felírhatjuk, akkor ezek együtthatóinak mátrixai leegyszerűsödnek.

A mérnöki gyakorlat azt mutatja, hogy a Kirchhoff lemezelmélet a vékony lemezek esetében kielégítően pontos (amikor a lemez vastagsága nem haladhatja meg a lemez legrövidebb síkbeli méretének ötödét/tizedét), vastagabb lemezek számítására – bár az bonyolultabb – inkább a Mindlin elmélet alkalmasabb.

5.2.3. Lemezelemek

Ha a lemezt végelemekkel akarjuk modellezni, akkor az illető végeelem merevségi mátrixának megállapításakor a 2. fejezetben bemutatottak szerint a kiindulási pontot a lemez deformációs energiájának képlete képi:

$$E = \int_V \frac{1}{2} \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T \cdot [\mathbf{E}] \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\} dV, \quad (5.16)$$

ahol a Kirchhoff-elméletben a fajlagos alakváltozások vektora az 5.7. relációk szerint

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \left[-z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 0 \quad -2 \cdot z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \quad 0 \quad 0 \right]^T, \quad (5.17)$$

a Mindlin-elméletben az pedig

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} -z \cdot \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} & -z \cdot \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} & 0 & -z \cdot \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) & -\left(\varphi_y - \frac{\partial w}{\partial y} \right) & -\left(\varphi_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{bmatrix}^T. \quad (5.18)$$

Az 5.16. integrál infinitezimális dV térfogatelemét a lemez t vastagságának irányában felvett dz magasságú és a középsíkban $dA = dx \cdot dy$ alapterületű elemi hasábnak tekinthetjük. Ekkor z szerint integrálás után a lemez deformációs energiáját

$$E = \int_A \frac{1}{2} \cdot \{\boldsymbol{\varphi}\}^T \cdot [\mathbf{D}] \cdot \{\boldsymbol{\varphi}\} dA, \quad (5.19)$$

alakra hozzuk, ahol a $[\mathbf{D}]$ mátrix az 5.11. és az 5.15. relációkban szereplő arányossági mátrix valamelyikének felel meg, a $\{\boldsymbol{\varphi}\}$ vektor pedig az említett relációkban szereplő görbületek és elfordulások vektora.

A Kirchhoff-elmélet szerint a deformációs energia a w lehajlás (elmozdulás) második deriváltjaitól függ, tehát a keresett végelem C_1 folytonosságú kell legyen (mivel az elsőrendű deriváltak a peremen folytonosak kell legyenek). Szabadságfokai az elem síkjára merőleges w elmozdulás, illetve annak $\partial w / \partial x$ és $\partial w / \partial y$ deriváltjai. E deriváltak a lemez pontjainak elfordulásával azonosak.

A C_1 -folytonosságnak megfelelően a lemezelemek érintkező peremei mentén a görbület is folytonos lenne. A 4. fejezetben azonban kiderült, hogy az ilyen C_1 folytonosságú elemek használata meglehetősen kényelmetlen (a legegyszerűbb ilyen háromszögelem a 4.29. ábrán látható, hat csomóponttal és huszonegy szabadságfokkal rendelkezik), s ezért inkább a megkövetelt folytonossági osztálynak szigorúan véve nem megfelelő nemkonform elemeket részesítjük előnyben. Egy ilyen lehetőség lenne a 4.30. ábrán látható kilenc szabadságfokkal rendelkező háromszögelem, amelynek csomóponti szabadságfokai a lehajlás és annak két első parciális deriváltja. Valamivel pontosabb eredményeket ad a 4.30. ábra jobb oldalán látható hat csomóponttal és tizenöt szabadságfokkal rendelkező elem.

A négyszögelemek közül a legegyszerűbb konform elem nyolc csomóponttal és harminchat szabadságfokkal rendelkezne, ezért ez esetben is megelégszünk a szerényebb, nemkonform elemek által nyújtott lehetőségek kiaknázásával. Egy ilyen egyszerű nemkonform elem lenne a 4.112. interpolációs függvényekkel rendelkező négy csomópontú és tizenkét szabadságfokú végelem (ennek interpolációs polinoma hiányos). Ennél valamivel pontosabb a nyolc csomóponttal és tizenhat szabadságfokkal rendelkező négyszögelem, amelynek sarokpontjaiban a lehajlást és két parciális deriváltját, az élek közepén levő csomópontokban pedig a normális irányú deriváltat írjuk elő.

A Mindlin-elméletben az alakváltozási energia képletében az elfordulás és a lehajlás deriváltjai között már nincs azonosság. E képletben csak elsőrendű deriváltak szerepelnek, ezért elegendő a lehajlás és a két elfordulás (w , φ_x és φ_y) C_0 folytonos közelítése. E mennyiségeket külön-külön, egymástól függetlenül írjuk elő. A használt végelem-típusok a 4. fejezetben ismertetett lineáris háromszög és bilineáris négyszögelem (három, illetve négy csomópont), a kvadratikus háromszög és a bikvadratikus négyszögelem (hat, illetve kilenc csomópont), illetve az utóbbi egyszerűsítésével, az elem középpontjában levő csomópont elhagyásával kapott „serendipity” elem. Mindegyik csomópontjában egy-egy matematikai és három-három fizikai szabadságfok van (mivel az említett w , φ_x , φ_y mennyiségeket külön-külön interpoláljuk).

Következtetésként elmondhatjuk, hogy az analitikus számításokban ugyan a Kirchhoff-elmélet alkalmazása egyszerűbb, de a végelem-módszerben a Mindlin elemek jelentős egyszerűsítést vezetnek be (elkerüljük a C_1 folytonosság bevezetésének szükségességét).

A végeelem merevségi mátrixát minden esetben egy

$$[\mathbf{k}]_e = \int_{A_e} [\mathbf{B}]_e^T \cdot [\mathbf{D}]_e \cdot [\mathbf{B}]_e dA \quad (5.20)$$

képlet adja, ahol a $[\mathbf{B}]_e$ mátrix a használt végeelem-típus interpolációs függvényeinek deriváltjait tartalmazza, a fajlagos alakváltozások és a szabadságfokokban értelmezett mennyiségek közötti

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_e = [\boldsymbol{\partial}] \cdot [\mathbf{N}]_e \cdot \{\boldsymbol{\delta}\}_e = [\mathbf{B}]_e \cdot \{\boldsymbol{\delta}\}_e \quad (5.21)$$

képlet értelmében.

Egy Kirchhoff-elem esetében a közelített mennyiség a lemez lehajlása:

$$w_e = [\mathbf{N}]_e \cdot \{\mathbf{w}\}_e, \quad (5.22)$$

ahol például az említett tizenkét szabadságfokú négyszögelem használata esetén a 4.112. bázisfüggvényekkel és a csomóponti koordinátákkal meghatározott 12×12 -es $[\boldsymbol{\Phi}]_e$ mátrixszal felépített tizenkét elemű, egysoros $[\mathbf{N}]_e$ mátrixot a csomóponti lehajlásokat és a lehajlás első deriváltjainak csomóponti értékeit tartalmazó $\{\mathbf{w}\}_e$ vektorával szorozzuk össze.

A fajlagos alakváltozás vektorát a végeelem valamely pontjában, a zérus tagok elhagyásával

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_e = \left\{ \begin{array}{c} -z \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -z \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2 \cdot z \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \cdot \partial y} \end{array} \right\} \cdot w_e = \{\boldsymbol{\partial}\} \cdot w_e \quad (5.23)$$

formában kapjuk, ahol a csomóponti értékekkel kiszámolt lehajlást behelyettesítve a keresett

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_e = \{\boldsymbol{\partial}\} \cdot w_e = \{\boldsymbol{\partial}\} \cdot [\mathbf{N}]_e \cdot \{\mathbf{w}\}_e = [\mathbf{B}]_e \cdot \{\mathbf{w}\}_e \quad (5.24)$$

összefüggéshez jutunk. Itt tehát $[\mathbf{B}]_e$ egy 3×12 -es mátrix.

Egy Mindlin-elem esetében a közelített mennyiségek a lehajlás és a két elfordulás:

$$w_e = [\mathbf{N}]_e \cdot \{\mathbf{w}\}_e, \quad \varphi_{x,e} = [\mathbf{N}]_e \cdot \{\boldsymbol{\varphi}_x\}_e, \quad \varphi_{y,e} = [\mathbf{N}]_e \cdot \{\boldsymbol{\varphi}_y\}_e, \quad (5.25)$$

ahol e mennyiségeket akár lineárisan is interpolálhatjuk. Ha egy négy csomópontú lineáris négyszögelemet használunk, akkor a 2.4. fejezetben leírtak szerint kell eljárni, csakhogy az ott használt nyolcelemű, u és v csomóponti elmozdulásokat tartalmazó $\{\boldsymbol{\delta}\}_e$ vektort most egy tizenkét elemű, a csomóponti w lehajlást és a φ_x és φ_y elfordulásokat tartalmazó vektorral kell helyettesítenünk:

$$\left\{ \begin{array}{c} w(x, y) \\ \varphi_x(x, y) \\ \varphi_y(x, y) \end{array} \right\}_e = \{\mathbf{d}\}_e = \left[\begin{array}{ccc} [\mathbf{N}(x, y)]_e & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{N}(x, y)]_e & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{N}(x, y)]_e \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} \{\mathbf{w}\}_e \\ \{\boldsymbol{\varphi}_x\}_e \\ \{\boldsymbol{\varphi}_y\}_e \end{array} \right\} = [\mathbf{N}]_e \cdot \{\boldsymbol{\delta}\}_e. \quad (5.26)$$

A fajlagos alakváltozásokat a szabadságfokokban értelmezett mennyiségekkel a következőképpen írhatjuk fel (a zérus értékű tagot itt is mellőzzük):

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_e = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} 0 & -z \cdot \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & & -z \cdot \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -z \cdot \frac{\partial}{\partial y} & -z \cdot \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix}_e = [\boldsymbol{\partial}] \cdot \{\boldsymbol{d}\}_e, \quad (5.27)$$

a csomóponti értékekkel pedig

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_e = [\boldsymbol{\partial}] \cdot \{\boldsymbol{d}\}_e = [\boldsymbol{\partial}] \cdot [\boldsymbol{N}]_e \cdot \{\boldsymbol{\delta}\}_e = [\boldsymbol{B}]_e \cdot \{\boldsymbol{\delta}\}_e. \quad (5.28)$$

E példában $[\boldsymbol{B}]_e$ méretei 5×12 .

5.2.4. A lemezek peremfeltételei

A peremfeltételek a terhelésre és a megtámasztásokra vonatkoznak. Úgy a Kirchhoff, mint a Mindlin elmélet a lemez síkjában ható terheléstől eltekint, tehát a terhelés csak merőleges irányú nyíróerő, valamint hajlító és csavaró nyomaték lehetne, az 5.2. ábrán látható vektoroknak megfelelően.

A fajlagos csavarónyomatékok dualitása miatt (5.3.) azonban nem lehet a terhelést tetszőlegesen megadni, összetevőit egymástól függetlenül előírni. Ha például egy lemez valamely oldalát mereven befogjuk, akkor az elmozdulások meggátolása miatt a befogott oldal síkjában nem jelenhet meg nyírófeszültség s így csavarónyomaték sem. Ekkor a lemeznek az előbbire merőleges oldalán sem szabad megjelenjen csavarónyomaték, legalábbis a sarok környezetében, azok dualitása miatt. Ellenkező esetben a peremfeltételek nem lesznek kompatibilisek. Más szavakkal: matematikailag csak két független peremfeltétel írható fel.

Ez az összeférhetlenség a lemezelmélet alaphipotéziseiből fakad, amelynek feloldására a felírható fizikai peremfeltételek számát háromról kettőre csökkentették. Ennek érdekében a lemez keresztmetszetén értelmezett fajlagos csavarónyomatékot z irányú, a keresztmetszeten eloszló erőpárok nyomatékának tekintették. Ezek az erőpárok tehát végső soron a keresztmetszeten két egymással ellentétes irányú fajlagos nyíróerőt alkotnak (5.5. ábra).

A keresztmetszetről elkülönített dx hosszúságú felületelemekre egy bizonyos csavarónyomaték hat. Az ábrázolt két felületelemre:

$$M_1 = M_{yx} \cdot dx \text{ és } M_2 = \left(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dx. \quad (5.29)$$

E nyomatékokat az ábrázolt erőpárok nyomatékainak tekintjük:

$$M_1 = T_1 \cdot dx \text{ és } M_2 = T_2 \cdot dx, \quad (5.30)$$

ahonnan a nyíróerők

$$T_1 = M_{yx} \text{ és } T_2 = M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \cdot dx. \quad (5.31)$$

A két szomszédos elem peremén ható eredő nyíróerő ekkor

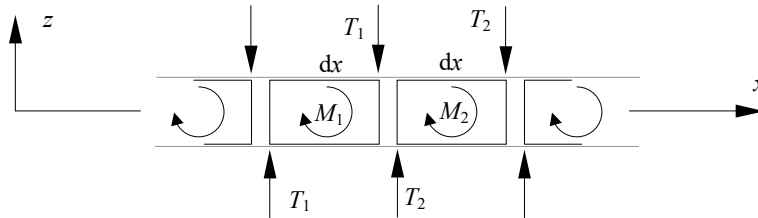
$$T = T_2 - T_1 = \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \cdot dx, \quad (5.32)$$

ami egy fajlagos

$$T_{yz}' = \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \quad (5.33)$$

erőnek felel meg. Ezt az erőt a tényleges T_{yz} összetevővel összegezzük:

$$T_{yz}^* = T_{yz} + T_{yz}' = T_{yz} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}. \quad (5.34)$$



5.5. ábra. A csavarónyomatékok nyírőerőkkel való helyettesítése

A másik koordináta irányában hasonlóan kapjuk:

$$T_{xz}^* = T_{xz} + T_{xz}' = T_{xz} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}. \quad (5.35)$$

E két fajlagos erőt „általánosított” nyírőerőnek nevezik és tehát a tényleges nyírőerőn kívül a csavarónyomatékokat ekvivalens módon helyettesítő tagot is magába foglalja. Észrevehetjük, hogy a tekintett keresztmetszet két végén az elemi erőpárt alkotó egyik erővektort nem kompenzálja a szomszédos elemre ható, ellentétes irányú erő (mert azon az oldalon nincs szomszédos elem). Éppen ezért az 5.31. képletnek megfelelően e végpontokra egy-egy koncentrált erőt kell állítanunk. E koncentrált erőnek a nagysága például az x tengely mentén fekvő oldalra ható csavarónyomatékból M_{yx} -nek adódik (a fajlagos nyomaték értéke abban a pontban), míg az arra merőleges y tengellyel párhuzamos oldalra ható csavarónyomatékból egy M_{xy} intenzitású koncentrált erőt számíthatunk. A sarokpontban e két erő egymásra tevődik és ott a csavarónyomatékok helyettesítésének érdekében egy

$$F_z = M_{xy} + M_{yx} = 2 \cdot M_{xy} = 2 \cdot M_{yx} \quad (5.36)$$

koncentrált erőt kell előírunk.

A csavarónyomatékoknak nyírőerőkkel való helyettesítésével tehát a lemez terhelését kétfajta mennyiség jelenti: a lemez síkjára merőleges nyírőerő és a hajlítónyomaték.

A lemez megtámasztását jelentő kényszerek reakcióerőket eredményeznek, amelyek szintén csak merőleges irányú nyírőerők és hajlítónyomatékok lehetnek.

A lemez peremének merev befogása minden irányú elmozdulást és elfordulást meggátol:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (5.37)$$

(n a peremre normális irányt, t pedig a lemez síkjába eső tangenciális irányt jelenti). A fellépő reakciók a befogott perem vonalán eloszló merőleges irányú erő és hajlítónyomaték. A fent említett okok miatt az átvett csavarónyomaték zérus értékű kell legyen.

A támasz vagy a csukló (mivel a lemezt vízszintes irányban nem terheljük, teljesen mindegy, hogy melyik típusról beszélünk) a lehajlást gátolja meg, ugyanakkor a lemez az alátámasztási vonal mentén nem tud megdőlni:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \quad (5.38)$$

A fellépő reakcióerő merőleges, a csavarónyomaték itt is nulla, mert az alátámasztott oldal síkja nem deformálódik. Az alátámasztási vonalon megjelenő hajlítónyomaték csak a lemez terheléséből eredhet (sem a csukló, sem a támasz nem vesz át ilyen nyomatékot).

A szabad perem szabadon lehajlik és elfordul, reakcióerők és nyomatékok nincsenek.

A felsorolt klasszikus megtámasztási lehetőségeken kívül még egyéb peremfeltételek is előfordulhatnak. Elképzelhető az az eset is, amikor a peremnek csak az elfordulását gátoljuk meg, de a lehajlását nem. Egy másik lehetőség a lemez rugalmas alátámasztása vagy megfogása, amikor a perem lehajlása, illetve elfordulása arányos a megfelelő reakcióerővel, illetve nyomatékkal.

A végeelem-módszerben a terhelés csomópontokban megjelenő koncentrált erő és nyomaték, valamint az élek mentén, illetve a felületen eloszló erő és nyomaték lehet. Ez az erő a 5.34.-5.35. általánosított nyíróerőt is jelenti. A potenciál kifejezéséből (amit feszültség×fajlagos alakváltozás, erő×elmozdulás és nyomaték×elfordulás jellegű tagok összege ad) a terhelésvektort a 2.60. egyenlettel analóg formában határozhatjuk meg:

$$\{r\}_e = - \int_{A_e} [B]_e^T \cdot [D]_e \cdot \{\delta_0\}_e dA + \int_{A_e} [N]_e^T \cdot \{f\}_e dA + \int_{l_e} [N]_e^T \cdot \{q\}_e dl + \sum_i \{F_i\}_e, \quad (5.39)$$

ahol az első tag a kezdeti deformációs állapotnak felel meg, a további integrálok alatt szereplő vektorok pedig rendre a végeelem felületén, körvonalán, illetve csomópontjaiban megadott erőket és nyomatékokat jelentik.

5.2.5. Sík héjak

A sík héjak tulajdonképpen olyan lemezek, amelyek a síkjukban ható terhelést is átveszik. Az eddigiekben olyan sík elemekkel foglalkoztunk, amelyeket vagy csak a síkjukban ható erő terhelt (ezek voltak a tárcsák), vagy pedig csak a síjukra merőlegesen terheltük és hajlítottuk (ezek voltak a lemezek). A sík héjat e kettő kombinációjaként foghatjuk fel.

A tárcsaelemek (sík membránok) feszültségi és deformációs állapotát az u_T és v_T elmozdulások határozzák meg, a 2.4. fejezetben bemutatottak szerint. E mennyiségek a tárcsa vastagságán állandó értékkel bírnak (tehát e két mennyiség csak x -től és y -től függ, de z -től nem).

A Kirchhoff-lemezelméletben e két elmozdulás és a w lehajlás, illetve az elfordulás szöge között az 5.6. relációk teremtenek kapcsolatot. A Mindlin-elméletben az elfordulás és az elmozdulás között megmarad az

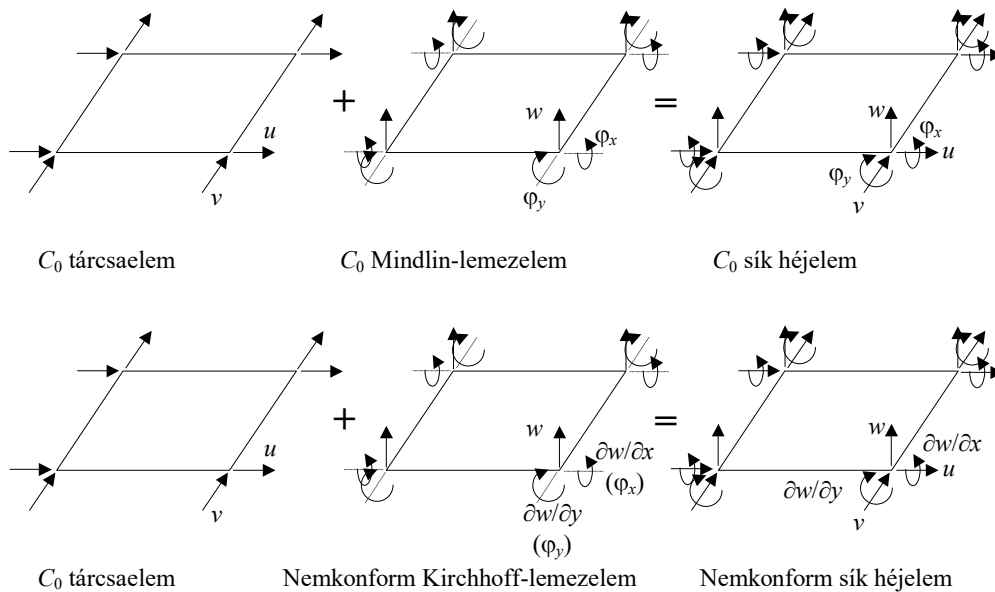
$$u_L(z) = -z \cdot \varphi_x, \quad v_L(z) = -z \cdot \varphi_y \quad (5.40)$$

kapcsolat, de az elfordulás szöge és a lehajlás között már nincs szoros összefüggés (ez utóbbit az 5.12. képletek írják le). Észrevehetjük, hogy mindkét elmélet szerint a lemez középsíkjában u is és v is zéró, azaz a középsík nyújthatatlan.

Ha megtartjuk a kis deformációk és a lineáris anyag hipotéziseit, akkor kijelenthetjük, hogy az elem középsíkjának kiterjedését a tárcsa igénybevétele fogja meghatározni, s erre rátevődik a lemez terheléséből (annak meggyöngyüléséből) származó hatás. A sík héj valamely pontjában tehát

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_T(x, y) + u_L(x, y, z) = u_T(x, y) + z \cdot \varphi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_T(x, y) + v_L(x, y, z) = v_T(x, y) + z \cdot \varphi_y(x, y). \end{aligned} \quad (5.41)$$

A tárcsaállapot és a hajlítási állapot a fentiek szerint nincs kapcsolatban egymással, ezért a sík héjat előállíthatjuk a kétfajta sík elem szuperpozíciójával is. Ezt az elvet a végelem-módszerben közvetlenül hasznosíthatjuk: a sík héj modellezésére használt végelem egy tárcsaelem és egy lemezelem „egyesítésével” állítható elő. A kétfajta végelem geometriája, beleértve a csomópontok számát is, azonos kell legyen, a közelítés rendje és a folytonossági osztály azonban elemenként különböző is lehet.



5.6. ábra. Sík héjelemek előállítása

Példaként az 5.6. ábrán a sík héjelemek közül a felsőt egy négy csomóponttal rendelkező, C_0 folytonos lineáris tárcsaelem és egy szintén négy csomóponttal rendelkező, ugyancsak C_0 folytonos lineáris Mindlin lemezelem kombinációjával állítottuk elő, az alsó héjelemet pedig ugyanannak a tárcsaelemnek egy négy csomópontú, nemkonform és nemlineáris (harmadfokú) Kirchhoff lemezelemnek a felhasználásával kaptuk meg.

Az első példa C_0 -folytonos sík héjeleme a szabadságfokokban értelmezett mennyiségeket (a három elmozdulást és a két elfordulást) lineárisan interpolálja, míg a második példa nemkonform eleme a lehajlítást és annak első parciális deriváltjait a 4.112. bázisfüggvényekkel felírt polinommal közelíti (azonban u és v közelítése továbbra is lineáris marad).

A sík héjelemek merevségi mátrixát és terhelésvektorát is az alkotó tárcsa- és lemezelemek megfelelő mátrixaival és vektoraival állítjuk elő.

Mindkét példában a tárcsaelem szabadságfokainak száma 8, a lemezelemé pedig 12, a belőlük alkotott sík héjelemé pedig 20. A szabadságfokokat többféle módon is csoportosíthatjuk, azt például megtehetjük a következőképpen is:

$$\begin{array}{l}
\text{tárcsa :} \\
\left. \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \dots \end{array} \right\} \\
\\
\text{lemez :} \\
\left. \begin{array}{c} w_1 \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ w_2 \\ \varphi_{x2} \\ \varphi_{y2} \\ \dots \end{array} \right\}
\end{array}
\rightarrow \text{sík héj:} \left. \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \varphi_{x2} \\ \varphi_{y2} \\ \dots \end{array} \right\}. \quad (5.42)$$

A héjelem merevségi mátrixa következésképpen egy 20×20 -as mátrix lesz, amelybe a tárcsaelem és a lemezelem mátrixainak tagjait a szabadságfokoknak megfelelő helyre írjuk be.

5.2.6. Görbült felületek

Tekintsünk egy görbült felületen felvett infinitezimális felületelemet (5.7. ábra). Geometriáját egy, a felülethez igazodó koordinátarendszer tengelyeinek irányában felvett görbületekkel (a megfelelő görbületi sugarak inverzével, $k_x = 1/r_x$ és $k_y = 1/r_y$) adhatjuk meg a legegyszerűbben.

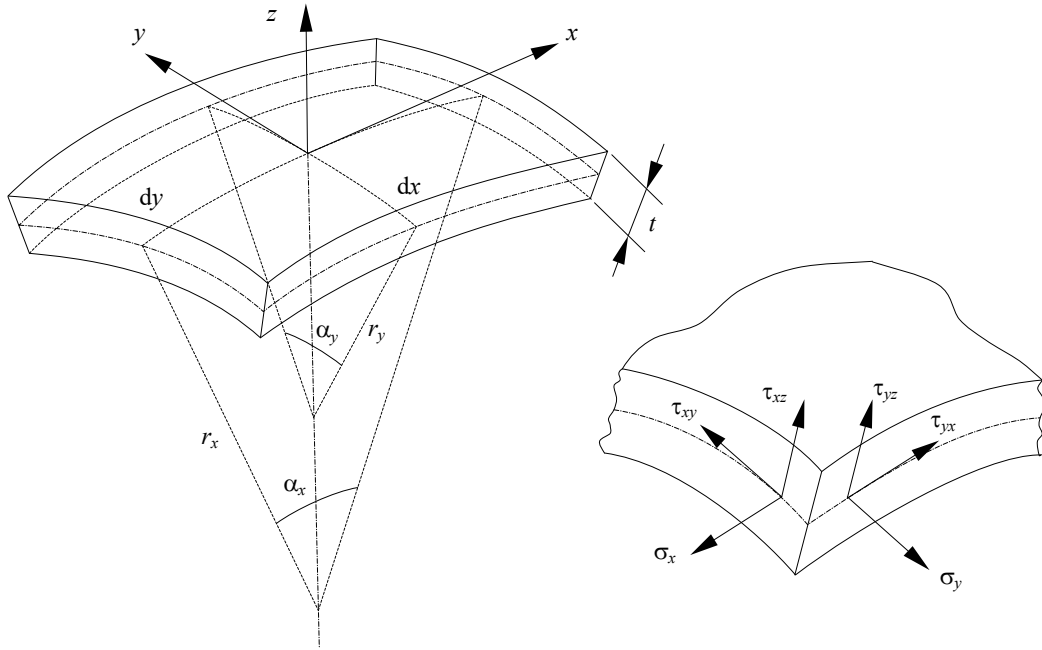
Akárcsak a sík lemezek esetében, most is feltételezzük, hogy a lemez keresztmetszetén csak az ábrázolt feszültségek hatnak, a σ_z feszültség értéke tehát zéró. A sík lemezeknél említett hipotézisek értelmében a hajlított héjban ébredő feszültségek az 5.3. ábrán látható eloszlást követik.

A feszültségekből a felületelemet lehatároló keresztmetszeteken számított eredő fajlagos (a középfelületen felvett egységnyi hosszúságú ív hosszán ható) erők és nyomatékok most a következők:

$$\begin{aligned}
N_x &= \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_x \cdot \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) dz, & N_y &= \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_y \cdot \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz, \\
N_{xy} &= \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xy} \cdot \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) dz, & N_{yx} &= \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{yx} \cdot \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz, \\
T_{xz} &= \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xz} \cdot \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) dz, & T_{yz} &= \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{yz} \cdot \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz, \\
M_x &= \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_x \cdot \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) \cdot z dz, & M_y &= \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_y \cdot \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) \cdot z dz, \\
M_{xy} &= \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xy} \cdot \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) \cdot z dz, & M_{yx} &= \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{yx} \cdot \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) \cdot z dz,
\end{aligned} \quad (5.43)$$

ahol a zárójel az ív z -vel változó hosszát jelenti. Az ív hossza a megfelelő görbületi sugárral és nyílásszöggel $l(z) = r(z) \cdot \alpha$, amely $z=0$ -ra, a középfelületen, a fenti erők és nyomatékok definíciója szerint egységnyi kell legyen. Így tehát a nyílásszögek nagysága $\alpha_x = 1/r_x$ és $\alpha_y = 1/r_y$,

amelyek az illető irányban mérhető görbülettel azonosak. E nyílásszögekkel a középfelülettől z távolságra az ív hosszát $l(z) = (r + z) \cdot \alpha = 1 + z/r$ -nek kapjuk.



5.7. ábra. Görbült felületelem

A feszültségek eloszlását ismervén az 5.43. integrálok kiszámíthatók. Észrevehetjük, hogy a héjak esetében, bár Kirchhoff hipotézisei szerint a σ_x és σ_y , valamint a τ_{xy} és a τ_{yx} feszültségek eloszlása lineáris és a középfelületen értékük nulla, az azok eredőjeként számított N_x , N_y , N_{xy} és N_{yx} keresztmetszeti erők a felület görbülete miatt mégsem lesznek zérus nagyságúak. Ugyanakkor, a görbületek különbözősége miatt most a csavarónyomatékok kettősségéről sem beszélhetünk (de a nyírófeszültségek dualitása természetesen most is érvényben van), tehát ha $r_x \neq r_y$ akkor $M_{xy} \neq M_{yx}$. Hasonló okok miatt $N_{xy} \neq N_{yx}$.

A modellezésben, akárcsak a sík elemek esetében, most is különféle sajátos eseteket különböztethetünk meg.

Amennyiben a lemez vastagsága a görbületi sugarakhoz viszonyítva elhanyagolható ($t \ll r$), akkor a fenti összefüggésekben a zárójel értéke közelít az egységhez. Ilyenkor *vékony* héjakról beszélünk (ellenkező esetben a héj *vastag*).

Amennyiben a vékony héjat tisztán hajlított elemnek tekintenénk, akkor visszakapnánk a sík lemezekre megállapított 5.2. képleteket. Ilyenkor csak hat keresztmetszeti igénybevétel kellene számolnunk, mivel a középfelülethez érintőleges erőket számításán kívül hagynánk. Bár a sík elemeknél a középfelületen ható erők elhanyagolása gyakori hipotézis, a görbült felületek számításánál ez nem egy szokványos eljárás (tehát a hajlított sík lemezzel analóg hajlított görbült lemez fogalma nem használatos). Annál gyakoribb a nyíróerők, a hajlító- és a csavarónyomatékok hatásának elhanyagolása, amelyet az igen vékony héjaknál alkalmazhatunk. Ez esetben a héjat *membránnak* tekintjük, amelyben csak a középfelületéhez érintőleges irányú

$$N_x = \sigma_x \cdot t, \quad N_y = \sigma_y \cdot t, \quad N_{xy} = N_{yx} = \tau_{xy} \cdot t \quad (5.44)$$

keresztmetszeti erők lépnek fel. A membránelmélet a fenti képletben szereplő feszültségeket az elem vastagságán állandó értékűnek tekinti.

Az infinitezimális héjelemre ható keresztmetszeti erőket és nyomatékokat az 5.43. mennyiségek adják. A kiragadott elem egyensúlyát hat vetületi egyenlet írja le (három az erőkre, három pedig a nyomatékokra vonatkozik); ezek a sztatikai aspektus egyenletei. Csatolván a geometriai és a fizikai aspektus egyenleteit egy olyan differenciálegyenletrendszerhez jutunk, amelynek megoldása a tanulmányozott héj feszültségi és alakváltozási állapotához vezet. Ez a fajta megoldás azonban csak látszólag ilyen egyszerű, ugyanis a szokványos x és y betűjelzésekkel ellátott koordináták most felületi koordináták, a z irány pedig a felület normálisának irányával azonos. Mivel vizsgálódásainkban általában egy globális derékszögű XYZ koordinátarendszerhez szoktunk ragaszkodni, a felülethez rendelt koordinátákat ez utóbbiak függvényeként kell megadnunk. A héjak és membránok elméletével foglalkozó könyvek általában a gyakorlati szempontból fontos forgásfelületeket tárgyalják részletesebben, amelyeket rendszerint hengeres vagy gömbi koordinátarendszerben írnak le és így a héjakat és a membránokat leíró egyenletek sajátosságos eseteit mutatják be. Ezen eredményekre támaszkodva a végeelem-módszerben is speciális forgáshéj-elemeket dolgoztak ki, amelyek bemutatásával azonban most nem foglalkozunk.

Az általános alakú héj végeelemes modellezése során a szerkezetet diszkrét elemekre kell bontanunk, amelyek geometriáját bizonyos alakfüggvények adják meg (tehát az nem tetszőleges). E modellezés során úgy kell eljárunk, hogy a végeelemekkel kirakott felület minél jobban megközelítse a tanulmányozott héjat.

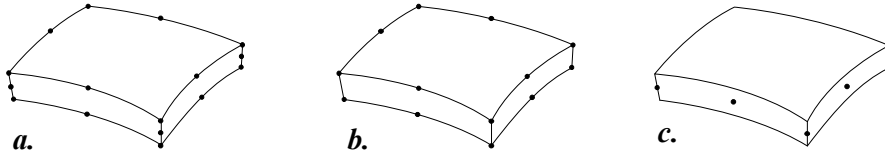
A geometria ezen megközelítésének a legegyszerűbb módozata a görbült felületnek sík elemekkel (facettákkal, fazettákkal) való helyettesítése. Az így kapott felület természetesen már nem síma, hiszen élei és csúcsai vannak, viszont a modellezés szempontjából az jelentős egyszerűsítéseket vezet be. Ezen eljárással a görbült héj (és membrán) modellezésére sík héj (illetve membrán) elemeket használunk. Itt meg kell jegyeznünk azt, hogy a sík elemeknél az u , v és w elmozdulásokat és azok deriváltjait a globális koordináták irányában vettük fel, a görbült felületek modellezésében ezen mennyiségeket pedig a felületi koordináták irányában kell tekintenünk. A sík elemnek az eddig ismertetett eljárásokkal meghatározott $[k]_e$ merevségi mátrixa ilyenképpen a felülethez rendelt koordinátarendszerben érvényes formát fogja jelenteni, amelyet a szerkezet merevségi mátrixának összeállítása előtt át kell transzformálnunk a globális rendszerbe. A megoldás során a globális rendszerben megadott mennyiségekhez jutunk, azonban a görbült felületek tanulmányozásánál a középsíkban és a normális irányában definiált mennyiségekre van szükségünk – emiatt a posztprocesszálas során egy új lépést is be kell vezetni ez utóbbiak kiszámítására.

A héjak modellezésének egy másik lehetősége a háromdimenziós végeelemek használata. Egy ilyen lehetséges végeelem a 4.48. ábrán látható parabolikus közelítésű C_0 elem, amelyet az alábbi (5.8.a. ábrán) egyszerűsített formában is bemutatunk. Húsz csomópontjában összesen hatvan szabadságfokkal rendelkezik; a 4.48. ábrán látható 21. számú csomópontot csak az adatok megjelenítésére használja a SAP program. E nagyszámú szabadságfok a gyakorlat szempontjából rendszerint még az igen vastag héjak esetében is szükségtelen, éppen ezért a vastagság irányában megelégszünk az elmozdulások lineáris közelítésével és így a középfelületen levő négy csomópontot elhagyva egy anizotróp közelítésű, tizenhat csomóponttal és negyvennyolc szabadságfokkal rendelkező elemhez jutunk (5.8.b. ábra).

Ez utóbbi végeelem merevségi mátrixának a vastagság irányában (z) történő alakváltozásra vonatkozó tagjai jóval nagyobbak a mátrix egyéb tagjainál (a végeelem a vastagság irányában merevebbnek mutatkozik), tehát a megoldás során numerikus instabilitásokra lehet számítani. Ezek megkerülésének érdekében a végeelemet tovább módosíthatjuk olyan formán, hogy elhanyagoljuk a vastagság megváltozására vonatkozó tagokat, a vastagság irányában a szomszédos csomópontok elmozdulását egyenlővé tesszük. Ilyen módon e csomópont-párok vastagság irányú szabadságfoka

közül az egyik fölöslegessé válik, tehát a két csomópontnak összesen öt szabadságfoka marad. Ezt az öt szabadságfokot egyetlen, a középfelületen levő csomópontba lehet koncentrálni és így egy nyolc csomóponttal és negyven szabadságfokkal rendelkező általános héjelemhez jutunk (5.8.c. ábra).

További egyszerűsítési lehetőség lenne a középső csomópontok elhagyása, így egy négy csomóponttal és húsz szabadságfokkal rendelkező, lineáris közelítésű végelemhez jutunk.



5.8. ábra. Héjak modellezésére használt 3D elemek

Az 5.8.c. általános héjelem (látszólag) két dimenziós, t vastagsága mint csomópontként megadott paraméter szerepel. Valamely i csomópontjában definiálhatunk egy

$$\mathbf{V}_i = t_i \cdot \mathbf{e}_z^i = t_i \cdot \begin{Bmatrix} l_z^i \\ m_z^i \\ n_z^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_j - X_k \\ Y_j - Y_k \\ Z_j - Z_k \end{Bmatrix} \quad (5.45)$$

vektort (a jelölések az 5.9. ábrán), amely az alsó sarokponttól a felső fele mutat. A diszkretizált szerkezet geometriájának leírásakor két módon járhatunk el: megadhatjuk a sarokpontok (példánkban a j és k pontok) koordinátáit, vagy pedig megadjuk a középsíkban levő pont (példánkban az i pont) koordinátáit, a fenti vektor iránytényezőit és a lemez vastagságát. Ez a \mathbf{V}_i vektor a hég deformálatlan állapotában célszerűen az i pontban a középfelületre emelt normális irányába mutat.

Az 5.9. ábrán egyébként három koordinátarendszert is láthatunk: a nagy betűvel jelölt XYZ globális rendszert, a kis betűvel jelölt xyz felületi koordinátarendszert és a végelem görög betűvel jelölt $\xi\eta\zeta$ lokális rendszerét.

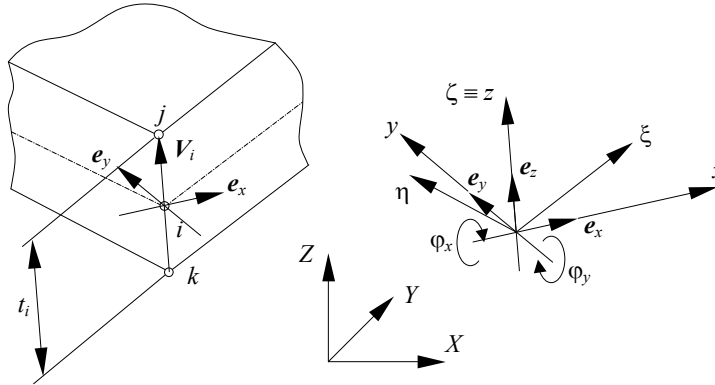
A \mathbf{V}_i vektor egységvektorával a héjelem valamely tetszőleges P pontjának koordinátáit a következő formulával adhatjuk meg:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1,n} N_i(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1,n} N_i(\xi, \eta) \cdot \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \begin{Bmatrix} l_z^i \\ m_z^i \\ n_z^i \end{Bmatrix}, \quad (5.46)$$

ahol $X_i = (X_j + X_k)/2$ és így tovább, az N_i interpolációs függvények pedig a ζ koordinátától függetlenek. Az első összeg a középfelületen határoz meg egy, a ξ és η lokális koordinátáknak megfelelő Q pontot, a második tag pedig az abban a pontban emelt normálison felvett ζ távolságra levő P pont Q -ból húzott helyzetvektorának vetületeit adja meg. Az összegzésnél szereplő n a csomópontok számát jelenti.

Amennyiben az 5.8.c. ábrán látható nyolc csomópontos végelemre szorítkozunk, úgy a centrális lokális koordinátarendszerben a megfelelő interpolációs függvényeket a 4.106. és a 4.107. kifejezések adják, ábrázolásuk pedig a 4.28. ábrán látható (tehát egy egyszerűsített bikvadratikussal van szó).

Az 5.45. képletben szereplő e_z egységvektort a vetületeivel, iránytényezőivel adtuk meg és az tehát a kezdetben a héj középfelületére állított normális irányába mutat.



5.9. ábra. Az 5.8.c. ábrán látható végelem egy csomópontja

A középfelületre állított merőlegesek (mint például a jk szakasz) elfordulásának mértékét két egymásra merőleges tengely körül kell megadnunk. E két tengely nyilvánvalóan a középfelülethez húzott, két egymásra és az e_z egységvektorra merőleges érintő kell legyen. Kijelölésükre általános érvényű szabály nincs, azok lehetnek például a főgörbületi irányok (amelyekről tudjuk, hogy egymásra merőlegesek), az ortotropia főirányai (amelyek definíció szerint merőlegesek egymásra) vagy bármilyen más, mérnöki szempontból kedvezőnek mutató, a fenti előírásoknak megfelelő irány. E két irányban felvett, az i ponton keresztül húzott egységvektorokat szintén a vetületeikkel, iránytényezőikkel adhatjuk meg mint

$$e_x^i = \begin{Bmatrix} l_x^i \\ m_x^i \\ n_x^i \end{Bmatrix}, \text{ illetve } e_y^i = \begin{Bmatrix} l_y^i \\ m_y^i \\ n_y^i \end{Bmatrix}; \quad (5.47)$$

a vektorok irányítását úgy választjuk meg, hogy az egy jobbos viszonyítási rendszer bázisát alkossa.

Nos, legyen a tanulmányozott jk szakasz elfordulásának mértéke az első tengely körül φ_x^i és a második tengely körül φ_y^i , és hasonló módon adjuk meg a többi csomópontra állított normálisok elfordulásának szögeit is.

A középfelületen levő pontok a héj deformációját követően elmozdulnak, ezt az elmozdulást a csomópontok elmozdulásaival interpoláljuk a szokásos módon. A középfelületen kívül eső pontok elmozdulásához a keresztmetszet elfordulása is hozzájárul:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1,n} N_i(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1,n} N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \begin{bmatrix} -l_y^i & l_x^i \\ -m_y^i & m_x^i \\ -n_y^i & n_x^i \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varphi_x^i \\ \varphi_y^i \end{Bmatrix}, \quad (5.48)$$

mely képlet felírásánál feltételeztük, hogy az elfordulás szöge kicsi. Az első összeg tehát az említett, középfelületen levő Q pont elmozdulását adja, a második összeg pedig a P pont Q körüli elfordulását követő elmozdulás vetületeit közelíti.

A geometriai aspektus 2.3. egyenletei szerint a fajlagos alakváltozásokat a fenti elmozdulások globális koordináták szerinti parciális deriváltjai adják. Az elmozdulások lokális tengelyek szerinti deriváltjait az 5.48. egyenlet tagjainak deriválásával kapjuk:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \vdots \\ \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1,n} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & 0 & -\zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot l_y^i & \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot l_x^i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & 0 & -\zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot l_y^i & \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot l_x^i \\ 0 & 0 & 0 & -\zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot N_i \cdot l_y^i & \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot N_i \cdot l_x^i \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & -\zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot m_y^i & \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot m_x^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot N_i \cdot n_y^i & \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot N_i \cdot n_x^i \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \varphi_x^i \\ \varphi_y^i \end{Bmatrix}. \quad (5.49)$$

E képletből az N_i interpolációs függvények ζ szerinti deriváltjai azért hiányoznak, mert e függvények e koordinátától függetlenek. E deriváltakat a Jacobi-mátrix segítségével tudjuk a globális koordináták szerinti deriváltakká átalakítani:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} \\ \frac{\partial u}{\partial Y} \\ \frac{\partial u}{\partial Z} \\ \vdots \\ \frac{\partial w}{\partial Z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{J}]^{-1} & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{J}]^{-1} & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{J}]^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \\ \vdots \\ \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}, \quad (5.50)$$

ahol a $[\mathbf{0}]$ jelölés 3×3 -as nullmátrixokat takar, a

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} & \frac{\partial Z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} & \frac{\partial Z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial X}{\partial \zeta} & \frac{\partial Y}{\partial \zeta} & \frac{\partial Z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

Jacobi-mátrix tagjait pedig az 5.46. koordináták deriválásával kapjuk:

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1,n} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \left(X_i + \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot l_z^i \right) & \sum_{i=1,n} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \left(Y_i + \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot m_z^i \right) & \sum_{i=1,n} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \left(Z_i + \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot l_z^i \right) \\ \sum_{i=1,n} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \left(X_i + \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot l_z^i \right) & \sum_{i=1,n} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \left(Y_i + \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot m_z^i \right) & \sum_{i=1,n} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \left(Z_i + \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot n_z^i \right) \\ \sum_{i=1,n} N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot l_z^i & \sum_{i=1,n} N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot m_z^i & \sum_{i=1,n} N_i \cdot \frac{t_i}{2} \cdot n_z^i \end{bmatrix}. \quad (5.52)$$

A fajlagos alakváltozásokat adó összefüggést az előbbieket felhasználásával végső soron az $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_e = [\mathbf{B}]_e \cdot \{\boldsymbol{\delta}\}_e$ formában kapjuk, ahol a $\{\boldsymbol{\delta}\}_e$ vektor a csomópontok $u_i, v_i, w_i, \varphi_x^i$ és φ_y^i elmozdulásait, illetve elfordulásait tartalmazza. E vektor $5 \cdot n$ elemet tartalmaz (ahol n a csomópontok száma), az interpolációs függvény deriváltjait tartalmazó $[\mathbf{B}]_e$ mátrix mérete pedig $6 \times (5 \cdot n)$. Az elmozdulásokat a globális, az elfordulásokat pedig a felületi koordinátarendszerben értelmezzük.

A fizikai aspektus 2.9. egyenletrendszerét a héjelmélethez igazítjuk, ortotróp héjak esetében az ortotrópia irányai szerint írjuk fel. Ha az ortotrópia főirányai a felületi x és y irányok akkor

$$\{\boldsymbol{\sigma}'\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{yx} & E_{yy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{zx} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = [\mathbf{E}'] \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}'\}. \quad (5.53)$$

Az összefüggésben szereplő $[\mathbf{E}']$ rugalmassági mátrixot a 2.16. képlettel megadottal összehasonlítva észrevehetjük, hogy annak harmadik sora és oszlopa tulajdonképpen hiányzik. Ennek magyarázata abban rejlik, hogy a héjelméletben a vastagság irányában fellépő σ_z mennyiséget elhanyagoljuk. E tag elhanyagolása miatt az egyébként izotróp anyagú héjakra is a globális rendszerben felírt feszültség-fajlagos alakváltozás anyagtörvény anizotróp lesz.

Ezt a lokális mátrixot a 2.65. transzformáció felhasználásával átírjuk a globális rendszerben érvényes alakra:

$$[\mathbf{E}] = [\mathbf{T}_\sigma]^{-1} \cdot [\mathbf{E}'] \cdot [\mathbf{T}_\varepsilon] = [\mathbf{T}_\varepsilon]^T \cdot [\mathbf{E}'] \cdot [\mathbf{T}_\sigma] \quad (5.54)$$

(itt felhasználtuk a transzformációs mátrixoknak a 2.5. fejezet végén felsorolt tulajdonságait), a végelem 2.59. merevségi mátrixát pedig ezzel számítjuk ki.

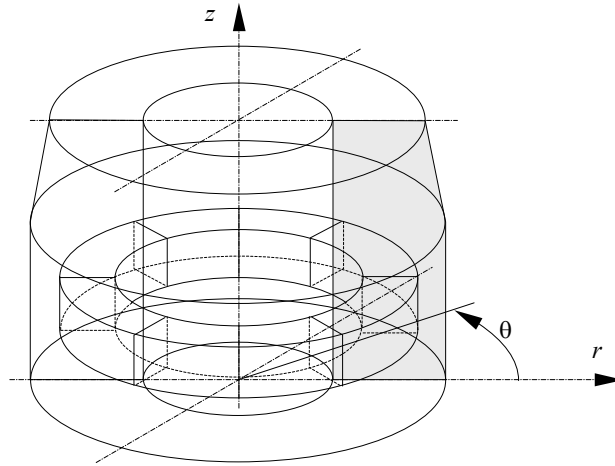
Az egyenletrendszer megoldásával első lépésben a globális rendszer tengelyei mentén értelmezett fajlagos alakváltozásokat és feszültségeket kapjuk meg. A mérnöki gyakorlatban azonban a héj középfelületéhez érintőleges és arra merőleges komponensekre vagyunk kíváncsiak, éppen ezért a posztprocesszálas során az $\{\boldsymbol{\varepsilon}'\} = [\mathbf{T}_\varepsilon] \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ és a $\{\boldsymbol{\sigma}'\} = [\mathbf{T}_\sigma] \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\}$ relációkkal azokat is kiszámoljuk. Megjegyzendő, hogy a $[\mathbf{T}_\varepsilon]$ és a $[\mathbf{T}_\sigma]$ mátrixok tagjai pontról pontra változnak.

5.3. Térfogatelemek

A három dimenziós testek rugalmasságtani modellezésében C_0 folytonosságú végelemeket használunk. A közkedvelt típusok a következők: a lineáris, négy csomópontos és a parabolikus, tíz csomóponttal rendelkező tetraéder-elem (4.35. ábra), a nyolc csomópontos hexaéder-elem és a belőle származtatható, kevesebb csomóponttal rendelkező elemek (a 4.38. ábra alján) és a parabolikus közelítésű egyszerűsített hexaéder-elem (a 4.40. ábra jobb oldalán).

A forgástestek modellezésénél speciális, cilindrikus koordinátarendszerben definiált végelemek is használhatunk (héjelemeket és térfogatelemeket). Ezek az elemek a geometriai modellezés és a hálózás szempontjából igen egyszerűen használhatók és hatékonyak (a behálózott sík fél-keresztmetszet megforgatásával kapjuk a három dimenziós hálót), viszont a merevtest-elmozdulás jelentős számítási pontatlanságokhoz vezethet. Ugyanis ha a testet saját tengelyével párhuzamosan elmozdítjuk, akkor a csomópontok r és θ koordinátája is megváltozik, s ez a

változás a számítások során, ha csak nem vezetünk be további ellenőrző és korrekciós lépéseket, a valóságban nem létező fajlagos deformációk és feszültségek megjelenését eredményezi.



5.10. ábra. Forgástest végeselemes modellezése

6. A LINEÁRIS VÉGESELEM-ANALÍZIS NUMERIKUS MÓDSZEREI

6.1. Az elemi mátrixok és vektorok kiszámítása

6.1.1. A numerikus integrálás

A végeelem-módszerben az elemi mátrixok és vektorok tagjait a végelemek feletti integrálással kell kiszámítanunk. A végeelem merevégi mátrixát például egy

$$[k] = \int_{\omega} [B]^T \cdot [E] \cdot [B] d\Omega \quad (6.1)$$

alakú integrál, míg az elemi terhelés vektorát például az

$$\{r\} = \int_{\omega} [N]^T \cdot \{f\} d\Omega + \int_{\gamma} [N]^T \cdot \{p\} d\Gamma \quad (6.2)$$

alakú összeg adja, ahol ω a végeelem tartományát, γ pedig annak peremét jelenti.

Mindkét mennyiség tagjai

$$I = \int_{\omega} f(\Omega) d\Omega \quad (6.3)$$

formájú integrálok, ahol az $f(\Omega)$ integrandusok az interpolációs polinomokból és deriváltjaikból levezetett kifejezések. A $d\Omega$ infinitezimális tartomány felvétele a helyi és az általános vonatkoztatási rendszerben egyaránt lehetséges, ekkor az integrandus változói és határértékei is megfelelően a helyi, illetve az általános koordináták kell legyenek. A helyi rendszer használatakor a kifejezés kiszámítását egy transzformáció kell kövesse, a globális rendszerben érvényes értékek felállításának érdekében.

Az integrálok analitikus úton történő kiszámítása általában (például amikor az integrandus nem polinom) nehézségekbe ütközik, ezért inkább numerikus eljárásokkal, közelítő módszerekkel fejezzük ki értéküket.

A 6.3. integrál egyváltozós változata

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (6.4)$$

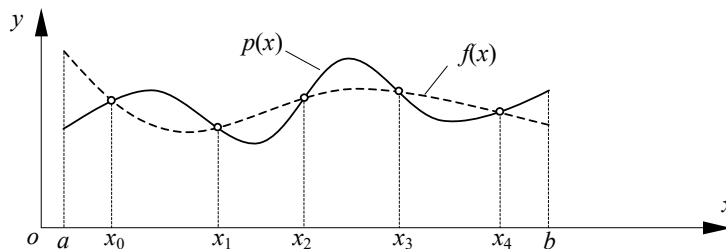
lenne, ahol a és b a végeelem geometriája által meghatározott integrálási határok. Ez utóbbiak által lehatárolt $[a, b]$ intervallumon az $f(x)$ integrandus értelmezett kell legyen.

Általánosságként elmondható, hogy az $f(x)$ függvény numerikus integrálásának legegyszerűbb megoldása az integrandusnak egy olyan $p(x)$ polinommal való helyettesítése, amelyre az

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p(x) dx \quad (6.5)$$

közelítés kielégítően pontos (a polinom primitív függvényének felírása nem jelent említésre méltó problémát, tehát a jobboldali integrál kiszámítása sem). A $p(x)$ polinom megválasztásakor többféleképpen is el lehetne járni, de az legyen most egy olyan interpolációs polinom, amely az $[a, b]$ intervallum bizonyos x_i pontjaiban (ahol $i = 0, 1, \dots, n$) éppen az integrandusnak ugyanazon pontokban számított értékét adja (6.1. ábra):

$$f(x_i) = p(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (6.6)$$



6.1. ábra. Az integrandus interpolálása

Amennyiben a függvényértékek egyezését $n+1$ pontban írtuk elő a $p(x)$ polinom n -edfokú lesz (annak $n+1$ együtthatója lehet):

$$p(x) = p_0 + p_1 \cdot x + p_2 \cdot x^2 + \dots + p_n \cdot x^n = \{\mathbf{x}\}^T \cdot \{\mathbf{p}\}. \quad (6.7)$$

A függvényértékek egyezését előíró 6.6. feltételek tömören az

$$\{\mathbf{f}\} = \begin{Bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \dots \\ f(x_n) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \dots \\ p_n \end{Bmatrix} = [\mathbf{V}] \cdot \{\mathbf{p}\} \quad (6.8)$$

formára hozhatók, ahol $[\mathbf{V}]$ a Vandermonde-mátrix. E mátrixnak – hacsak nem fordulnak elő egybeeső pontok – a determinánsa sohasem zéró, következésképpen a fenti egyenletrendszernek, ahol az ismeretlenek a p_i együtthatók, létezik megoldása:

$$\{\mathbf{p}\} = [\mathbf{V}]^{-1} \cdot \{\mathbf{f}\}. \quad (6.9)$$

A közelítő polinom ezzel

$$p(x) = \{\mathbf{x}\}^T \cdot \{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{x}\}^T \cdot [\mathbf{V}]^{-1} \cdot \{\mathbf{f}\} \quad (6.10)$$

lesz, a 6.5. integrál pedig

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p(x) dx = \int_a^b \{\mathbf{x}\}^T dx \cdot [\mathbf{V}]^{-1} \cdot \{\mathbf{f}\} = \{\mathbf{X}\}^T \cdot [\mathbf{V}]^{-1} \cdot \{\mathbf{f}\}, \quad (6.11)$$

ahol az integrál alóli kiemelés a tagok konstans volta miatt lehetséges. $\{\mathbf{x}\}$ integráljának kiszámítása analitikusan is elvégezhető, mivel j -ed fokú monomok primitív függvényeit kell felírunk:

$$X_j = \int_a^b x^j dx = \frac{1}{j+1} \cdot x^{j+1} \Big|_a^b, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (6.12)$$

Az utolsó két összefüggéssel tehát az integrál közelítő értéke könnyen kiszámítható. A közelítés pontossága az illesztési pontok számától és helyzetétől függ. $n+1$ pont felvételével n -ed fokú polinomok vagy ahhoz közel álló függvények integrálja jó közelítéssel számítható ki, de a magasabb fokú polinomok vagy az interpolációs polinomtól erősen eltérő függvények esetében a hiba már jelentős lehet.

Ha sok pontot veszünk fel, a közelítés pontossága javulhat, de a $[V]$ mátrix invertálásához szükséges idő is rohamosan növekszik. Az interpolációs pontok felvételének tekintetében a legegyszerűbb megoldás az $[a, b]$ intervallum n egyenlő, h hosszúságú részre osztása, ekkor az integrál közelítését adó Newton-Cotes formulákhoz jutunk. Ilyen például a lineáris interpolációra alapozó *trapézszabály*:

$$I = \int_a^b f(x) dx = h \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot f(a) + \frac{1}{2} \cdot f(a+h) \right], \quad h = b - a, \quad (6.13)$$

és a kvadratikus közelítésű *Simpson-szabály* (6.2. ábra):

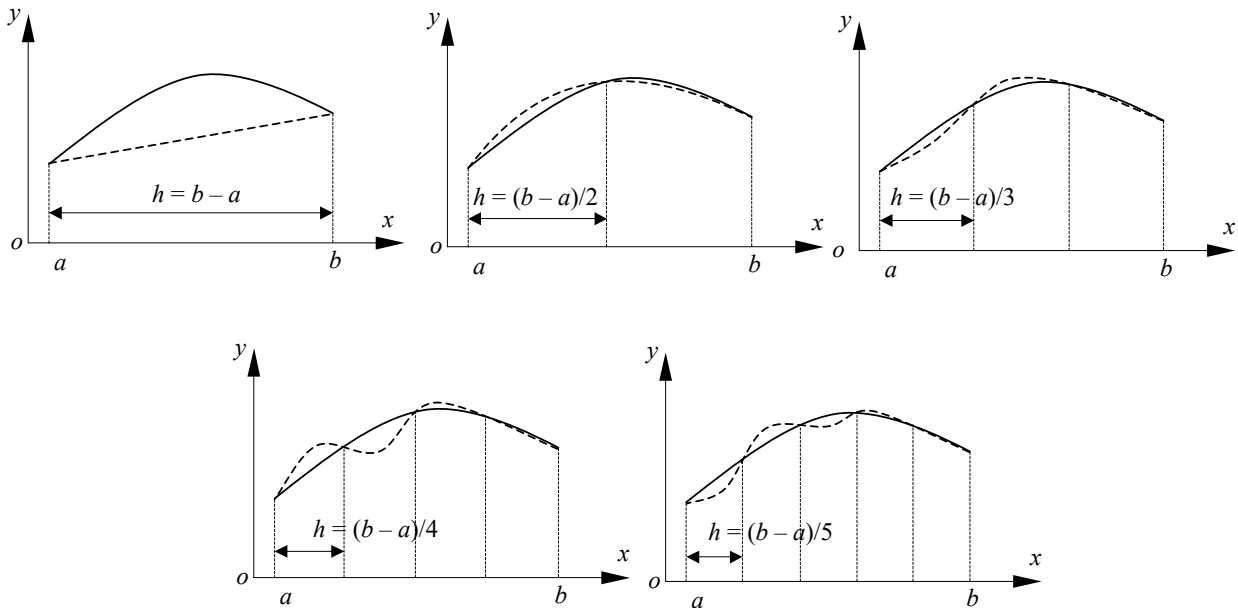
$$I = h \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot f(a) + \frac{4}{3} \cdot f(a+h) + \frac{1}{3} \cdot f(a+2 \cdot h) \right], \quad h = \frac{b-a}{2}. \quad (6.14)$$

A Newton-Cotes formulákat

$$I = (b-a) \cdot \sum_{i=0}^n w_i \cdot f_i \quad (6.15)$$

formában általánosíthatjuk, mely szerint az integrál értékét a függvényértékek súlyozott összege adja. A súlyzóteényezőket a következő (6.1.) táblázat foglalja össze.

Megjegyzendő, hogy a határozott integrál pontosabb kiszámításához az $[a, b]$ intervallumot Δx hosszúságú tartományokra lehet felosztani és ekkor a fenti formulákat e tartományokon kell alkalmazni. Az I integrál értékét a Δx tartományokon számított mennyiségek összegzésével kapjuk.



6.2. ábra. Különböző fokú interpolálás

A Newton-Cotes formulákat a fenti formájukban a végeelem-módszerben is használhatnánk. Az n intervallum (az $n+1$ interpolációs pont) egyenlő távolságokra való felvétele legfennebb az n -ed fokú polinom integrálásának pontosságát biztosítja bármilyen körülmények között, a magasabb fokú polinomok esetében az eltérés jelentős lehet. Éppen ezért az interpolációs pontok helyzetének felvételét és a hozzájuk tartozó súlyzóegyütthetők megállapítását megpróbálták olyan

módon optimalni, hogy az n -nél magasabb fokú polinom integrálása is lehetővé váljon az elvart pontosságon belül (ez az igény a műveletek számának csökkentésének érdekében származik). Az integrál közelítése most is egy

$$I = \sum_{i=0}^n w_i \cdot f(x_i) \quad (6.16)$$

súlyozott összeggel történik, azonban itt az x_i koordináták és a w_i tényezők egyaránt ismeretlenek. Feltételezzük viszont, hogy létezik az előbbi esettel ellentétben egy magasabb, $m > n$ -ed fokú polinom (ahol n az intervallumok száma), melyre

$$f(x) \approx p(x) = p_0 + p_1 \cdot x + p_2 \cdot x^2 + \dots + p_m \cdot x^m. \quad (6.17)$$

Intervallumok száma (az interpoláció foka)	w_i súlyzó tényezők					
n	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
1	1/2	1/2				
2	1/6	4/6	1/6			
3	1/8	3/8	3/8	1/8		
4	7/90	32/90	12/90	32/90	7/90	
5	19/288	75/288	50/288	50/288	75/288	19/288

6.1. táblázat. A Newton-Cotes formulák együtthatói

Ekkor az utolsó két összefüggés értelmében az integrál közelítő értéke

$$I \approx w_0 \cdot (p_0 + p_1 \cdot x_0 + \dots + p_m \cdot x_0^m) + \dots + w_n \cdot (p_0 + p_1 \cdot x_n + \dots + p_m \cdot x_n^m) \quad (6.18)$$

lesz. A közelítő polinom integrálját analitikus módon is ki tudjuk számítani:

$$I \approx \int_a^b p(x) dx = \sum_{j=0}^m p_j \cdot \frac{x^{j+1}}{j+1} \Big|_a^b. \quad (6.19)$$

A két utolsó összefüggés azonos p_j együtthatójú tagjait egyenlővé téve egy $m+1$ egyenletből álló rendszert kapunk, ahol az ismeretlenek száma $2 \cdot (n+1)$. Az ismeretlenek a w_i súlyzóegyütthatók és az interpolációs pontok x_i koordinátái. A megoldhatóság feltétele tehát a közelítő polinom m foka és az interpolációs pontok n száma közötti

$$m = 2 \cdot n + 1 \quad (6.20)$$

összefüggéshez vezet, melynek fennállása esetén az x_i , w_i értékpárok egyértelműen megállapíthatók. Ez az eljárás a *Gauss-Legendre módszer*.

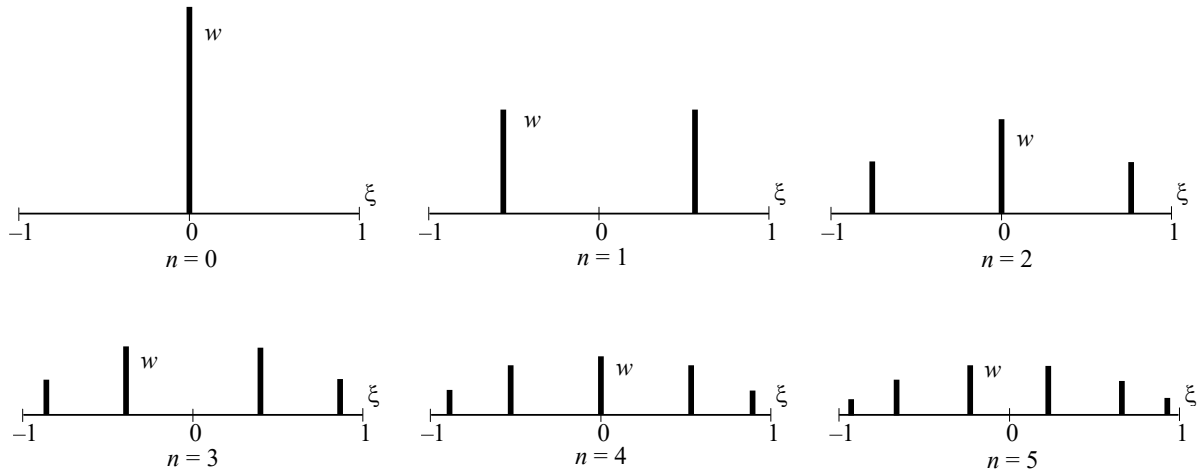
Jóval egyszerűbbé válik a számítás, ha az integrálokat a lokális koordinátarendszerben számítjuk ki, például a $[-1, 1]$ értelmezési tartományon. Ekkor a 6.19. integrál egyszerűbb formára hozható, példánkban:

$$\int_{-1}^1 p(\xi) d\xi = 2 \cdot p_0 + \frac{2}{3} \cdot p_2 + \dots + \frac{[1 - (-1)^{m+1}]}{m+1} \cdot p_m, \quad (6.21)$$

az említett egyenletrendszer pedig

$$\begin{cases} w_0 + w_1 + \dots + w_n = 2 \\ w_0 \cdot \xi_0 + w_1 \cdot \xi_1 + \dots + w_n \cdot \xi_n = 0 \\ \dots \\ w_0 \cdot \xi_0^m + w_1 \cdot \xi_1^m + \dots + w_n \cdot \xi_n^m = \frac{[1 - (-1)^{m+1}]}{m+1} \end{cases} \quad (6.22)$$

lesz. A különböző n -ekre kapott illesztési pontokat és súlyzótenyezőket a 6.3. ábra mutatja be és a 6.2. táblázat sorolja fel.



6.3. ábra. A Gauss-Legendre integrálás illeszkedési pontjai és súlyzótenyezői

Illeszkedési pontok száma $n+1$	Illeszkedési pontok koordinátája ξ_i	Súlyzóegyütthetők w_i
1	0.000 000 000 0	2.000 000 000 0
2	$\pm 0.577 350 269 1$	1.000 000 000 0
3	0.000 000 000 0 $\pm 0.774 596 669 2$	0.888 888 888 8 0.555 555 555 5
4	$\pm 0.339 981 043 5$ $\pm 0.861 136 311 5$	0.652 145 154 8 0.347 854 845 1
5	0.000 000 000 0 $\pm 0.538 469 310 1$ $\pm 0.906 179 845 9$	0.568 888 888 8 0.478 628 670 4 0.236 926 885 0
6	$\pm 0.238 619 186 0$ $\pm 0.661 209 386 4$ $\pm 0.932 469 514 2$	0.467 913 934 5 0.360 761 573 0 0.171 324 492 3

6.2. táblázat. A Gauss-Legendre integrálás illeszkedési pontjai és súlyzótenyezői

Az így kapott súlyzótenyezők és koordináták felhasználásával az integrálás néhány szorzással és összeadással megoldható, az elvégzendő műveletek száma pedig alacsonyabb, mintha a pontokat

egyenletes beosztással vettük volna. Ezért a Gauss-Legendre-módszer a végelelemes számításokban igen nagy fontossággal bír.

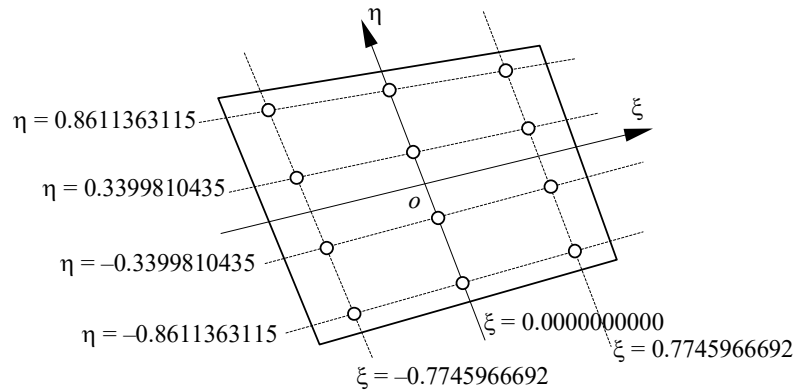
A két- és háromváltozós integrálok közelítése hasonló módon, a függvényértékek súlyozott összegzésével történik:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_i \cdot w_j \cdot f(\xi_i, \eta_j), \quad (6.23)$$

illetve

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \approx \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l w_i \cdot w_j \cdot w_k \cdot f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k). \quad (6.24)$$

A koordinátákat és a súlyzóegyütthatókat az előbbi táblázatból olvashatjuk ki. Az illeszkedési pontokat a (ξ_i, η_j) koordináta-páros, illetve a (ξ_i, η_j, ζ_k) hármas adja. A pontok száma irányonként változhat az esetleges anizotropia miatt. A 6.4. ábrán például a ξ tengely irányában az alacsonyabb fokú interpoláció miatt csak három illeszkedési pont van, míg az η tengely irányában a magasabb fokú közelítés miatt négy – így összesen 12 pontot kapunk.



6.4. ábra. A Gauss-Legendre integrálás illeszkedési pontjai kétdimenziós tartományon (példa)

A szimplexek feletti integrálás a természetes koordináták függvényében az előbbiektől eltérő módon is megvalósítható. A végelelemes számításokban az integrálandó kifejezésekben a természetes koordináták különböző egész, nem-negatív kitevőjű hatványainak szorzata szerepel. E szorzatok integráljának kiszámítására a következő általánosított formulákat vezették le:

$$\int_L \xi_1^\alpha \cdot \xi_2^\beta dL = \frac{\alpha! \cdot \beta!}{(\alpha + \beta + 1)!} \cdot L, \quad (6.25)$$

$$\int_A \xi_1^\alpha \cdot \xi_2^\beta \cdot \xi_3^\gamma dA = \frac{\alpha! \cdot \beta! \cdot \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} \cdot 2 \cdot A, \quad (6.26)$$

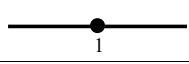
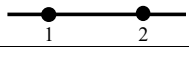
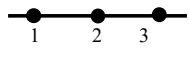
$$\int_V \xi_1^\alpha \cdot \xi_2^\beta \cdot \xi_3^\gamma \cdot \xi_4^\delta dV = \frac{\alpha! \cdot \beta! \cdot \gamma! \cdot \delta!}{(\alpha + \beta + \gamma + \delta + 3)!} \cdot 6 \cdot V, \quad (6.27)$$

ahol L , A illetve V a szimplex hossza, területe, illetve térfogata. Ez esetben is hasznosabb lehet viszont az integrálokat a súlyozott függvényértékek összegeként megadni; a pontok természetes koordinátáit és a megfelelő súlyzótenyezőket a 6.3.-6.5. táblázatok foglalják magukba.

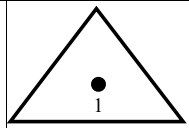
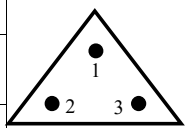
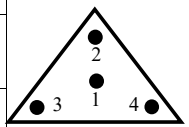
Az integrálok kiszámításában a helyi koordináták használata tehát lényeges egyszerűsítéseket visz be. A helyi és az általános koordinátarendszerben kiszámított értékek közötti kapcsolatot a koordináta-transzformációk adják, például:

$$\int_V f(x, y, z) dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) \cdot |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta, \quad (6.28)$$

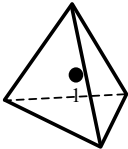
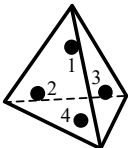
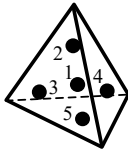
ahol $|J|$ a transzformáció Jacobi-mátrixának determinánsa.

Pontok száma n	i	Illeszkedési pontok koordinátái		Súlyzóegyütthetők w_i	
		ξ_{1i}	ξ_{2i}		
1 (elsőfokú)	1	0.500 000 000 0	0.500 000 000 0	1.000 000 000 0	
2 (másodfokú)	1	0.211 324 865 5	0.788 675 134 5	0.500 000 000 0	
	2	0.788 675 134 5	0.211 324 865 5	0.500 000 000 0	
3 (harmadfokú)	1	0.112 701 665 4	0.887 298 334 6	0.277 777 777 8	
	2	0.000 000 000 0	0.000 000 000 0	0.444 444 444 4	
	3	0.887 298 334 6	0.112 701 665 4	0.277 777 777 8	

6.3. táblázat. Numerikus integrálás egydimenziós szimplex felett

Pontok száma n	i	Illeszkedési pontok koordinátái			Súlyzóegyütthetők w_i	
		ξ_{1i}	ξ_{2i}	ξ_{3i}		
1 (elsőfokú)	1	0.333 333 333 3	0.333 333 333 3	0.333 333 333 3	1.000 000 000 0	
3 (másodfokú)	1	0.666 666 666 7	0.166 666 666 7	0.166 666 666 7	0.333 333 333 3	
		0.166 666 666 7	0.666 666 666 7	0.166 666 666 7	0.333 333 333 3	
	2	0.166 666 666 7	0.166 666 666 7	0.666 666 666 7	0.333 333 333 3	
4 (harmadfokú)	1	0.333 333 333 3	0.333 333 333 3	0.333 333 333 3	-0.562 500 000 0	
		0.333 333 333 3	0.333 333 333 3	0.333 333 333 3	0.520 833 333 3	
	2	0.600 000 000 0	0.200 000 000 0	0.200 000 000 0	0.520 833 333 3	
	3	0.200 000 000 0	0.600 000 000 0	0.200 000 000 0	0.520 833 333 3	
4	4	0.200 000 000 0	0.200 000 000 0	0.600 000 000 0	0.520 833 333 3	
		0.600 000 000 0	0.200 000 000 0	0.200 000 000 0	0.520 833 333 3	

6.4. táblázat. Numerikus integrálás kétdimenziós szimplex felett

Pontok száma n	i	Illeszkedési pontok koordinátái		Súlyzóegyütthetők w_i	
		ξ_{1i}	ξ_{2i}		
		ξ_{3i}	ξ_{4i}		
1 (elsőfokú)	1	0.250 000 000 0	0.250 000 000 0	1.000 000 000 0	
		0.250 000 000 0	0.250 000 000 0		
4 (másodfokú)	1	0.585 410 020 0	0.138 196 600 0	0.250 000 000 0	
		0.138 196 600 0	0.138 196 600 0		
	2	0.138 196 600 0	0.585 410 020 0	0.250 000 000 0	
		0.138 196 600 0	0.138 196 600 0		
	3	0.138 196 600 0	0.138 196 600 0	0.250 000 000 0	
		0.585 410 020 0	0.138 196 600 0		
	4	0.138 196 600 0	0.138 196 600 0	0.250 000 000 0	
		0.138 196 600 0	0.585 410 020 0		
5 (harmadfokú)	1	0.250 000 000 0	0.250 000 000 0	-0.800 000 000 0	
		0.250 000 000 0	0.250 000 000 0		
	2	0.333 333 333 3	0.166 666 666 7	0.450 000 000 0	
		0.166 666 666 7	0.166 666 666 7		
	3	0.166 666 666 7	0.333 333 333 3	0.450 000 000 0	
		0.166 666 666 7	0.166 666 666 7		
	4	0.166 666 666 7	0.166 666 666 7	0.450 000 000 0	
		0.333 333 333 3	0.166 666 666 7		
	5	0.166 666 666 7	0.166 666 666 7	0.450 000 000 0	
		0.166 666 666 7	0.333 333 333 3		

6.5. táblázat. Numerikus integrálás háromdimenziós szimplex felett

6.1.2. Alkalmazás

Az elmondottak illusztrálására tekintsük a kétdimenziós lineáris izoparametrikus végelem (6.5. ábra) merevségi mátrixának kiszámítását. A felvett szabadságfokok a csomópontok x és y tengely irányú elmozdulásai, u_i és v_i .

A végelem interpolációs polinomjának interpolációs függvényei a 4. fejezetben leírtak alapján:

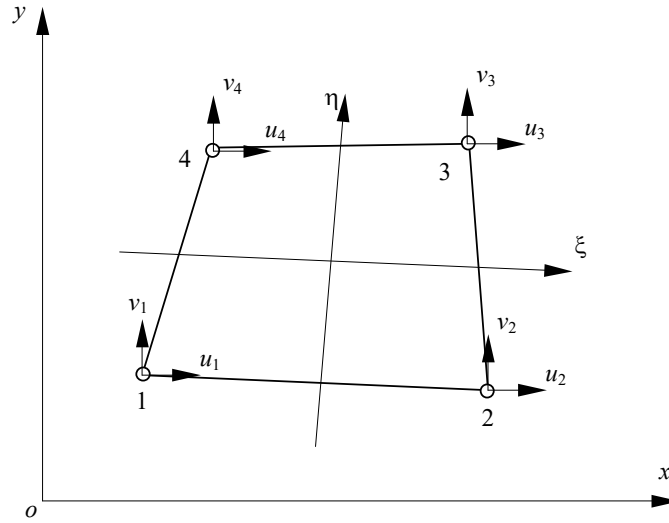
$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - \eta), & N_2 &= \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 - \eta), \\
 N_3 &= \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \eta), & N_4 &= \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 + \eta).
 \end{aligned}
 \tag{6.29}$$

A végelem bármely pontjának elmozdulását (annak két komponensét) a csomópontokban számított értékek, mint általánosított koordináták és az előbbi interpolációs függvények, mint bázisfüggvények által alkotott interpolációs polinomok adják:

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= u_1 \cdot N_1 + u_2 \cdot N_2 + u_3 \cdot N_3 + u_4 \cdot N_4, \\ v(\xi, \eta) &= v_1 \cdot N_1 + v_2 \cdot N_2 + v_3 \cdot N_3 + v_4 \cdot N_4, \end{aligned} \quad (6.30)$$

vagy, tömörebben:

$$\{\mathbf{d}(\xi, \eta)\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \dots \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = [\mathbf{N}] \cdot \{\boldsymbol{\delta}\}. \quad (6.31)$$



6.5. ábra. Kétdimenziós lineáris izoparametrikus végelem

Mivel az elem izoparametrikus, a geometriai helyzetet (az x és y koordinátákat) ugyanazokkal a függvényekkel interpoláljuk, mint az elmozdulás vetületeit:

$$\{\mathbf{x}(\xi, \eta)\} = \begin{Bmatrix} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \dots \\ x_4 \\ y_4 \end{Bmatrix}. \quad (6.32)$$

Ez utóbbi képletben a jobb oldali vektor a csomópontok globális koordinátarendszerben felvett koordinátáit tartalmazza.

A végelem merevségi mátrixa az ismert összefüggés szerint

$$[\mathbf{k}] = \int_S [\mathbf{B}]^T \cdot [\mathbf{E}] \cdot [\mathbf{B}] dS, \quad (6.33)$$

ahol az integrálási tartomány, mivel kétdimenziós végelelemről van szó, az elem S felülete. Az $[\mathbf{E}]$ rugalmassági mátrix a feladat jellegétől függően a sík feszültségi vagy a sík deformációs állapotok valamelyikének felel meg. A $[\mathbf{B}]$ mátrix az interpolációs függvények deriváltjait tartalmazza, a fajlagos alakváltozások és a csomóponti elmozdulások közötti kapcsolatot adja:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{B}] \cdot \{\boldsymbol{\delta}\}, \quad (6.34)$$

mely kapcsolatot bővebben a következő módon írható fel:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \partial u/\partial x \\ \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x \\ \partial v/\partial y \end{Bmatrix}. \quad (6.35)$$

Ez utóbbi összefüggés az elmozdulások globális koordináták szerinti deriváltjait tartalmazza, amelyek interpolációs függvényeit a lokális rendszerben határoztuk meg. A deriváltak közötti relációt a láncszabály adja, melyet most mátrixos formában írunk fel:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}] \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (6.36)$$

Ennek megfordításával

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix}. \quad (6.37)$$

A globális koordináták interpolálásával (6.32.) a kifejezésben szereplő Jacobi-mátrix a következő lesz:

$$[\mathbf{J}(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}, \quad (6.38)$$

amelyet a 6.29. függvények deriválásával könnyen felírhatunk:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} &= -\frac{1}{4} \cdot (1 - \eta), & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} &= -\frac{1}{4} \cdot (1 - \xi), \\ \frac{\partial N_2}{\partial \xi} &= \frac{1}{4} \cdot (1 - \eta), & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} &= -\frac{1}{4} \cdot (1 + \xi), \\ \frac{\partial N_3}{\partial \xi} &= \frac{1}{4} \cdot (1 + \eta), & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} &= \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi), \\ \frac{\partial N_4}{\partial \xi} &= -\frac{1}{4} \cdot (1 + \eta), & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} &= \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi). \end{aligned} \quad (6.39)$$

A Jacobi-mátrix inverze

$$[\mathbf{J}]^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}, \quad (6.40)$$

ahol a determináns

$$|\mathbf{J}| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi}. \quad (6.41)$$

Ezek alapján a 6.35. kifejezésben a globális koordináták szerinti deriváltakról áttérhetünk a lokális koordináták szerinti deriváltakra. A 6.37. relációból

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \bar{J}_{1,1} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} + \bar{J}_{1,2} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \bar{J}_{2,1} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} + \bar{J}_{2,2} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta}, \end{aligned} \quad (6.42)$$

ahol a $\bar{J}_{i,j}$ együtthatók a Jacobi-mátrix inverzének tagjai, melyeket a 6.38. és az azt követő kifejezések alapján határozunk meg. A fajlagos alakváltozások és az elmozdulások közötti 6.35. kapcsolat tehát a következőképpen írható fel:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{J}_{1,1} & \bar{J}_{1,2} & 0 & 0 \\ \bar{J}_{2,1} & \bar{J}_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{J}_{1,1} & \bar{J}_{1,2} \\ 0 & 0 & \bar{J}_{2,1} & \bar{J}_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix}. \quad (6.43)$$

Az u és a v elmozdulásokat a csomóponti értékek függvényében interpoláljuk, tehát:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{J}_{1,1} & \bar{J}_{1,2} & 0 & 0 \\ \bar{J}_{2,1} & \bar{J}_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{J}_{1,1} & \bar{J}_{1,2} \\ 0 & 0 & \bar{J}_{2,1} & \bar{J}_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}. \quad (6.44)$$

Ez utóbbi kifejezésben az első három tag szorzata adja a $[\mathbf{B}(\xi, \eta)]$ mátrixot. E három mátrix közül az első egy pozicionáló mátrix, a második pedig a Jacobi-mátrix inverzének tagjait tartalmazza. A szorzat harmadik tényezője az interpolációs függvények deriváltjainak mátrixa

(6.38. képletek). A két utóbbi mátrix koordinátáktól függő tagokat foglal magába, következésképpen a $[\mathbf{B}(\xi, \eta)]$ mátrix értéke függ a geometriai helyzettől.

A 6.44. képletből kiindulva azt mondhatjuk, hogy a $[\mathbf{B}(\xi, \eta)]$ mátrix a fajlagos deformációk interpolációs polinomának interpolációs (vagy bázis-) függvényeit tartalmazza.

A merevségi mátrix globális koordináta-rendszerben kifejezett 6.33. képletét, amelyben a globális vonatkoztatási rendszerben meghatározott $[\mathbf{B}(x, y)]$ mátrix szerepel, a 6.28. formájú transzformációval hozhatjuk a lokális koordinátákkal megadott alakra:

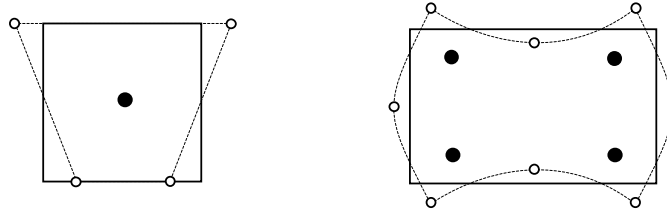
$$[\mathbf{k}] = \int_S [\mathbf{B}]^T \cdot [\mathbf{E}] \cdot [\mathbf{B}] dS = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}(\xi, \eta)]^T \cdot [\mathbf{E}] \cdot [\mathbf{B}(\xi, \eta)] \cdot |\mathbf{J}(\xi, \eta)| d\xi d\eta. \quad (6.45)$$

A fenti integrált a $[\mathbf{B}(\xi, \eta)]$ mátrix elemeinek és a Jacobi-mátrix determinánsának adott (ξ_i, η_j) koordinátájú pontokban való meghatározásával a Gauss-Legendre módszer alkalmazásával számítjuk ki:

$$[\mathbf{k}] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_i \cdot w_j \cdot [\mathbf{B}(\xi_i, \eta_j)]^T \cdot [\mathbf{E}] \cdot [\mathbf{B}(\xi_i, \eta_j)] \cdot |\mathbf{J}(\xi_i, \eta_j)|. \quad (6.46)$$

6.1.3. Gyakorlati jellegű megjegyzések

A Gauss-Legendre módszer szerinti integrálás pontossága az illeszkedési pontok számával együtt nő. A hibák csökkentésén túlmenően az integrálási pontok számának növelése a numerikus instabilitások elkerülésének szempontjából is javasolt. Ezek az instabilitások a szakirodalomban különböző elnevezésekkel fordulnak elő (például *hourglassing*), lényegük az integrálási pontok olyan kevésbé szerencsés megválasztásában áll, mely pontokban a függvény értéke éppen zero vagy ahhoz nagyon közel van. A 6.6. ábra két ilyen helyzetet mutat be; mindkét esetben az integrálási pontokban a fajlagos alakváltozások értéke zérónak vagy ahhoz igen közelinek adódik.



6.6. ábra. A numerikus integrálás hibás eredményét okozó elmozdulás-módok

Az integrálási pontok számának növelése ellen viszont több tény is szól, melyek közül az első az elvégzendő műveletek számának növekedése. Ugyanakkor észrevették azt, hogy az alacsonyabb rendű közelítés által okozott pontatlanságok a polinomiális interpoláció által bevitt hibaforrásokkal ellenkező hatást fejtenek ki, mintegy azokat kompenzálják (ha több integrálási pontot alkalmazunk, a végelem a valóságnál merevebb lesz).

Egyértelmű előírások a numerikus integrálás rendjét illetően nincsenek, a 6.20. összefüggés alapján azonban elmondható, hogy egy m -ed fokú interpolációs polinom esetében az integrálás rendje legalább $(m-1)/2$ felfele kerekített értékével kell egyenlő legyen az integrálok pontos kiszámításának érdekében.

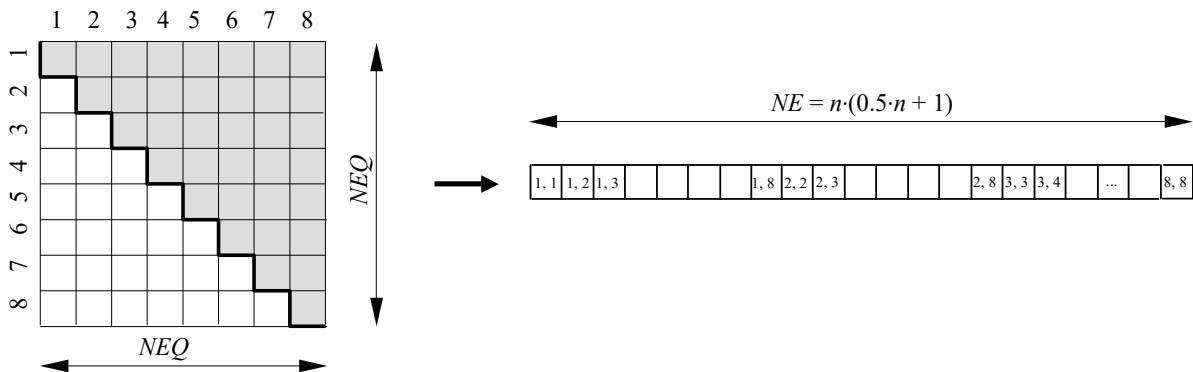
A tapasztalat azt mutatja, hogy a C_0 és a C_1 folytonossági osztályok esetén irányonként annyi illeszkedési pontot kell felvennünk, ahány csomópont van a végelem megfelelő irányban levő

élén (ez lenne az optimális integrálási rend). A forgalomban levő programok egy része az instabilitások elkerüléséhez elegendő minimális integrálási renddel dolgoznak, mások pedig az instabilitások megjelenését próbálják kiszűrni. Ha a tapasztalat nem vezet egyéb következtetésekhez, akkor nem tanácsos a gyakorlatban bevált integrálási rendtől eltérni.

6.2. A globális mátrixok összeállítása és tárolása

A globális mátrixok és vektorok összeállítása az elemi mennyiségek kiszámításával egyidőben történik: miután egy végeelem mátrixának kiszámítása megtörtént, elemeit a globális mátrix megfelelő elemeihez adjuk hozzá, ahogyan azt az 1.1.6. fejezet bemutatta. Míg a strukturális vektorok tárolása nem okoz különösebb problémát, a mátrixok esetében ugyanez nem mondható el.

A mátrixok tárolásában a legegyszerűbb megoldás a teljes mátrix használata lenne, kétváltozós tömb formájában. A végeelem-módszer elemi mátrixai azonban szimmetrikusak és ennek köszönhetően a strukturális mátrixok is szimmetrikusak lesznek. Ez a tulajdonság egy megtakarítást tesz lehetővé: a szimmetria miatt elegendő csupán a főátló egyik oldalán levő tagokat tárolni (beleértve az átlón levő tagokat is), egy alsó vagy felső háromszögmátrix formájában. Mivel háromszög alakú tömb nem létezik, a háromszöget soronként vagy oszloponként egy vektorba kell rendezni. Az elemek helyzetének megállapítása nem jelent nehézséget: ha tudjuk, hogy a mátrix oszlopainak és sorainak száma n , akkor a vektor első n eleme például a mátrix első sorát, a következő $n-1$ eleme a mátrix második sorában a főátlótól levő és az attól jobbra fekvő elemeket jelenti és így tovább (6.7. ábra).



6.7. ábra. Háromszögmátrix tárolása

A háromszögmátrix azonban igen sok zérus elemet tartalmazhat és nagyobb szerkezetek esetén még mindig kényelmetlenül sok helyet foglalhat el a számítógép memóriájában. A nem-zéró tagok optimális csomópontszámhozás esetén egy átló menti sávban található, tehát elegendő lenne az e sávban fekvő elemeket tárolni. Ezt a lehetőséget két eljárás is kihasználja.

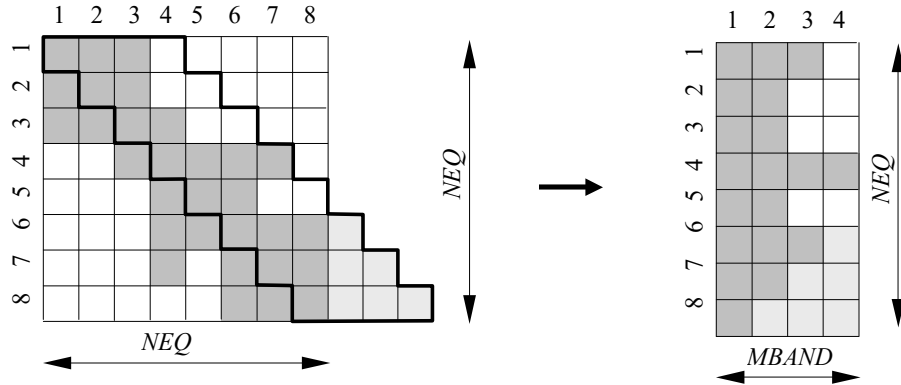
Sávmátrix (szalagmátrix, angolul *band-matrix*) használata esetén a tárolandó részt az a főátlóval párhuzamos, attól jobbra levő sáv jelenti, amely a nem-zéró elemeket foglalja magába. A sávszélességet ($MBAND$) az átlótól legtávolabb fekvő nem-zéró elem adja, míg a mátrix sorainak (NEQ) száma változatlan marad (megegyezik a szabadságfokok, azaz az egyenletrendszer egyenleteinek számával). E sáv nem ad egy szabályos paralelogrammát: a mátrix jobb alsó sarkát zérus elemekkel kell kitöltenünk (6.8. ábra).

Az indexek átszámítása most sem okoz gondot: az eredeti globális mátrix i, j indexű, tárolásra kerülő eleme a sávmátrix i, k celláját foglalja el, ahol

$$k = j - i + 1. \quad (6.47)$$

Ezzel az összefüggéssel a két forma közötti megfeleltetés bármikor egyszerűen elvégezhető, a jobb alsó, zérus elemeket tartalmazó háromszög alakú tartomány kivételével.

A sávmátrix használata megfelelő csomópontszámozás mellett jelentős tárolási kapacitás-megtakarítást tesz lehetővé, az indexek átszámítására fordított idő elenyészik a háttérmemória kezeléséhez szükséges idő mellett.



6.8. ábra. A sávmátrix szemléltetése

A sávmátrixot szemügyre véve észrevehetjük, hogy az viszonylag sok nullát tartalmazhat és a jobb alsó háromszöget is fölöslegesen foglaltuk le. Ez a helyzet a nagyobb mátrixoknál még feltűnőbbé válik. A csomópont-számozást sem mindig sikerül az éppen legkisebb sáv szélességet adó módon megoldani. A *kontúrvonal* (angolul *sky-line*) használata esetén a tárolandó részt az átló feletti legmagasabban fekvő (vagy az átlótól jobbra levő legtávolabbi) nem-zéró tag határozza meg, tehát a sávmátrixnál is gazdaságosabban használhatjuk fel a memóriát. A globális mátrix ekkor is egy vektorban lesz összecsomagolva. A címek átszámítása azonban most jóval nehezebb, mivel az oszlopok magassága véletlenszerűen változik. Éppen ezért a mátrix tárolására szánt vektoron kívül most egy második vektort is létre kell hoznunk, mely az átlón levő tagok címét tárolja (6.9. ábra).

Az ábrán a felső, NE elemű vektor tartalmazza az összecsomagolt globális mátrixot, vagyis annak a főátló és a kontúrvonal közötti oszlopait. Az elemek felsorolása oszloponként, alulról felfele történik. A főátlón levő elemek címét az alsó, $NEQ+1$ elemű $\{A\}$ vektor tartalmazza, így a_1 a $k_{1,1}$ elem, a_2 a $k_{2,2}$ elem címe és így tovább.

A globális mátrix i, j indexű, kontúrvonal és főátló közötti eleme a vektorban a

$$k = a_j + i - j \quad (6.48)$$

indexnek megfelelő helyet foglalja el, ahol az a_j címet az $\{A\}$ vektor adja. A kiolvasásnál meg kell győződni arról, hogy az adott elem valóban a kontúrvonal alatt van: ha a kiszámított index

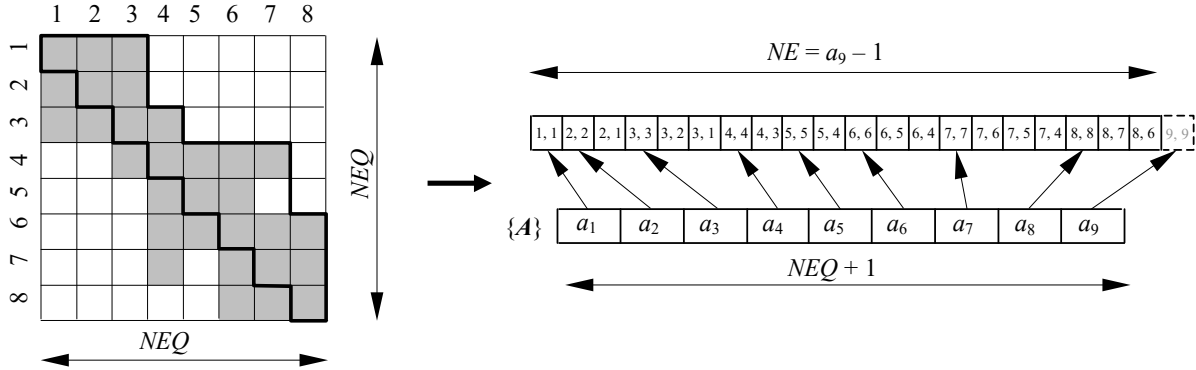
$$k \geq a_{j+1}, \quad (6.49)$$

akkor az azt jelenti, hogy a merevségi mátrix i, j indexű tagja a kontúrvonal feletti zérus tag. A számítások algoritmizálásának megkönnyítésére az $\{A\}$ vektor utolsó tagja a nemlétező $NEQ+1$ -edik átlón levő tagra $(k_{9,9})$ mutat.

Az utóbbi két módszer alkalmazása gyökeresen különbözik. A sávmátrix használata esetén az elemi mátrixok kiszámítását megelőzően ki kell számítani a sáv $MBAND$ szélességét, amelyet a végelemek csomópontjainak számozása határoz meg:

$$MBAND = \max(n_{max} - n_{min} + 1) \cdot ND, \quad (6.50)$$

ahol a sorszámok maximális különbsége és a csomópontonkénti szabadságfokok ND száma szerepel. A sáv szélesség meghatározása gyakorlatilag úgy történik, hogy minden végeselemet sorra véve meghatározzuk a legnagyobb sorszámkülönbséget. A sáv szélesség meghatározása után le kell foglalni egy $NEQ \times MBAND$ nagyságú tömböt, amelynek elemeit zérókkal inicializáljuk. Minden egyes elemi mátrix kiszámítása után a 6.47. összefüggéssel meghatározzuk tagjainak a sávmátrixban elfoglalt helyét és hozzáadjuk a már ott tárolt értékekhez.



6.9. ábra. A kontúrvonal módszere

A kontúrvonal használata esetén előzetesen meg kell határoznunk az $\{A\}$ vektor elemeit. Ehhez egy ideiglenesen használt NEQ elemű $\{H\}$ vektort foglalunk le és inicializálunk, amely a kontúrvonal alatti oszlopok magasságát (*aktív oszlop magasság*) fogja tárolni.

Egy i, j indexű elem magasságát az átlótól mért távolsága, vagyis a

$$h = i - j + 1 \quad (6.51)$$

mennyiség adja. A hozzáadandó tagot az elemi mátrix egy oszlopának legmagasabban (az első sorában) fekvő eleme alkotja, melyre kiszámítjuk a h magasságot. Ha az így kiszámított h mennyiség a $\{H\}$ vektorban tárolt H_i -nél nagyobb, akkor ez azt jelenti, hogy az új elem az aktuális kontúrvonal felett helyezkedik el. Ekkor a H_i elem értékét h -ra állítjuk, amely az illető oszlop új aktív magasságát jelenti.

A műveleteket az összes elemi mátrix minden oszlopára megismételjük míg végül megkapjuk a végleges oszlop magasságokat. Az oszlop magasságok segítségével felépítjük az $\{A\}$ vektort, melynek elemeit az

$$a_i = a_{i-1} + h_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, NEQ + 1 \quad (6.52)$$

rekurzív képlettel határozzuk meg, ahol az első elem $a_1 = 1$.

A globális mátrixot tároló vektor hossza

$$NE = \sum_{i=1}^{NEQ} h_i = a_{NEQ+1} - 1 \quad (6.53)$$

lesz. A vektor hosszának meghatározása után le kell foglalni egy NE nagyságú tömböt, amelynek elemeit zérókkal inicializáljuk. Minden egyes elemi mátrix kiszámítása után meghatározzuk elemeinek a vektorban elfoglalt helyét és azokat hozzáadjuk a már ott tárolt értékekhez.

6.3. Az egyenletrendszer megoldása

6.3.1. Az LU és az LLT dekompozíció

A strukturális egyensúlyt, mint láttuk, egy

$$[\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (6.54)$$

alakú lineáris egyenletrendszer fejezi ki, ahol az ismeretlenek (a szabadságfokok) száma megegyezik az egyenletek számával. Az egyenletrendszer megoldásának klasszikus módszere az 1.2.7. fejezetben ismertetett Gauss-elimináció. Nagyobb egyenletrendszerek esetén a műveletek nagy száma és a sorozatos kerekítések miatt a Gauss-módszer hatékonysága alacsony, ezért más megoldási eljárásokat kell bevezetni.

A Gauss-módszer első két lépésének ismétlése a strukturális $[\mathbf{K}]$ mátrixnak egy háromszögmátrixszá való átalakítását eredményezte. Az LU-dekompozíció (más néven faktorizálás) módszere szintén háromszögmátrixok kialakítására alapoz, melyek közül az egyik egy alsó háromszög- ($[\mathbf{L}]$ – lower triangular), a másik pedig egy felső háromszögmátrix ($[\mathbf{U}]$ – upper triangular mátrix). E mátrixok csak a főátlón és az alatt, illetve felett tartalmaznak zérótól különböző elemeket és kielégítik a

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{L}] \cdot [\mathbf{U}] \quad (6.55)$$

összefüggést. Ekkor a 6.54. egyenletrendszer megoldása, amelyet most

$$[\mathbf{L}] \cdot ([\mathbf{U}] \cdot \{\mathbf{D}\}) = \{\mathbf{F}\} \quad (6.56)$$

alakban írunk fel, visszavezethető két különálló

$$[\mathbf{L}] \cdot \{\mathbf{E}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (6.57)$$

és

$$[\mathbf{U}] \cdot \{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{E}\} \quad (6.58)$$

egyenletrendszer megoldására. Mivel mindkét mátrix háromszögmátrix, mindkét egyenletrendszer megoldása csupán a visszahelyettesítés műveleteit foglalja magába.

Az alsó és a felső háromszögmátrixok elemeit a 6.55. egyenlet tagjainak megfeleltetése adja:

$$\begin{bmatrix} L_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_{2,1} & L_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & L_{3,3} & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ L_{n,1} & L_{n,2} & L_{n,3} & \dots & L_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} & \dots & U_{1,n} \\ 0 & U_{2,2} & U_{2,3} & \dots & U_{2,n} \\ 0 & 0 & U_{3,3} & \dots & U_{3,n} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & U_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} & \dots & K_{1,n} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & K_{2,3} & \dots & K_{2,n} \\ K_{3,1} & K_{3,2} & K_{3,3} & \dots & K_{3,n} \\ \dots & & & & \\ K_{n,1} & K_{n,2} & K_{n,3} & \dots & K_{n,n} \end{bmatrix}, \quad (6.59)$$

ahonnan

$$\begin{aligned} L_{i,1} \cdot U_{1,j} + L_{i,2} \cdot U_{2,j} + \dots + L_{i,i} \cdot U_{i,j} &= K_{i,j} & \text{ha } i < j, \\ L_{i,1} \cdot U_{1,j} + L_{i,2} \cdot U_{2,j} + \dots + L_{i,i} \cdot U_{i,j} &= K_{i,j} & \text{ha } i = j, \\ L_{i,1} \cdot U_{1,j} + L_{i,2} \cdot U_{2,j} + \dots + L_{i,j} \cdot U_{i,j} &= K_{i,j} & \text{ha } i > j. \end{aligned} \quad (6.60)$$

A fenti egyenletrendszer n^2 egyenletből áll és $n^2 + n$ ismeretlen van (az $L_{i,j}$ és az $U_{i,j}$ tagok). Megoldásának érdekében n ismeretlennek tetszőleges értéket kell adnunk. Egy megoldási eljárás (Crout) az $L_{i,i}$ tagokat egységnyinek tekinti:

$$L_{i,i} = 1, \quad (6.61)$$

a két háromszögmátrix tagjait pedig j -nek 1-től n -ig rendre értékeket adva a következő lépések ismétlésével számítja ki (a Σ alatt szereplő tagok ekkorra a megelőző lépésekből ismertek):

– minden $i \leq j$ -re

$$U_{i,j} = K_{i,j} - \sum_{m=1}^{i-1} L_{i,m} \cdot U_{m,j}; \quad (6.62)$$

– minden $i > j$ -re

$$L_{i,j} = \frac{1}{U_{j,j}} \cdot \left(K_{i,j} - \sum_{m=1}^{j-1} L_{i,m} \cdot U_{m,j} \right). \quad (6.63)$$

Helymegtakarítás céljából az L és U komponenseket ugyanabban a tömbben tárolják, hiszen csak az átlón fekvő tagok fedik egymást. Az átlón levő $L_{i,i}$ tagok pedig mind egységnyiek, így az

$$\begin{bmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} & \dots & U_{1,n} \\ L_{2,1} & U_{2,2} & U_{2,3} & \dots & U_{2,n} \\ L_{3,1} & L_{3,2} & U_{3,3} & \dots & U_{3,n} \\ \dots & & & & \\ L_{n,1} & L_{n,2} & L_{n,3} & \dots & U_{n,n} \end{bmatrix} \quad (6.64)$$

tömb minden komponenset egyértelműen meghatároz.

A szerkezet merevségi mátrixa szimmetrikus, tehát bármely i és j esetén $K_{i,j} = K_{j,i}$, és pozitívan meghatározott (pozitív definit), azaz bármely $\{\mathbf{v}\}$ vektor esetén

$$\{\mathbf{v}\}^T \cdot [\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{v}\} > 0. \quad (6.65)$$

E tulajdonságok lehetővé teszik az LU dekompozíció egy speciális esetének alkalmazását, amelyet Cholesky vagy LLT dekompozíciónak neveznek. Ekkor a $[\mathbf{K}]$ mátrix felbontásakor kikötjük, hogy a felső háromszögmátrix az alsó transzponáltja legyen:

$$[\mathbf{U}] = [\mathbf{L}]^T. \quad (6.66)$$

A merevségi mátrix tehát a következőképpen írható fel:

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{L}] \cdot [\mathbf{L}]^T. \quad (6.67)$$

Mivel bármely i és j esetén $L_{i,j} = U_{j,i}$ a felírható egyenletek száma megegyezik az ismeretlenek számával, tehát most a $[\mathbf{K}]$ mátrixot nem bonthatjuk fel tetszőlegesen. Az előbbi (6.67.) egyenletben a mátrixok szorzását elvégezve és a megfelelő tagokat egyenlővé téve a 6.62. és a 6.63. egyenletekkel analóg

$$L_{i,i} = \sqrt{K_{i,i} - \sum_{m=1}^{i-1} L_{i,m}^2} \quad (6.68)$$

és

$$L_{j,i} = \frac{1}{L_{i,i}} \cdot \left(K_{i,j} - \sum_{m=1}^{i-1} L_{i,m} \cdot L_{j,m} \right) \quad (6.69)$$

rekurzív kifejezésekhez jutunk, a tagokat most is j -nek 1-től n -ig rendre értékeket adva lépésenként számítjuk ki.

A merevségi mátrix 6.65. tulajdonsága, mely szerint az „pozitív definit”, fizikai megfontolásokból származik. Ha például a rugalmasságtani feladatról van szó, akkor a 6.65. szorzatok a rugalmas alakváltozásból származó potenciális energiát jelentik (pontosabban annak kétszeresét), ahol a $\{\mathbf{v}\}$ vektor egy tetszőleges, zérótól különböző elmozdulásnak felel meg. Az energia mindig pozitív mennyiség tehát e szorzatok is mindig nullánál nagyobb számot adnak. E tulajdonság a 6.68. képletben szereplő gyökvonás miatt fontos.

Érdemes megjegyezni azt, hogy az LU dekompozíciót egy négyzetes $[\mathbf{M}]$ mátrix inverzének kiszámítására is felhasználhatjuk: ekkor a 6.56. egyenletben az $\{\mathbf{F}\}$ vektor az $[\mathbf{M}]$ -mel azonos méretű $[\mathbf{I}]$ egységmátrix oszlopait tárolja és a megoldásként kapott $\{\mathbf{D}\}$ vektorban az $[\mathbf{M}]^{-1}$ inverz mátrix megfelelő oszlopát ismerhetjük fel. A dekompozíciót csak egyszer kell elvégezni de a 6.57.-6.58. visszahelyettesítéseket minden oszlopra külön ki kell számolni.

6.3.2. Iteratív eljárások

Az eddig ismertett „direkt” eljárások (a Gauss-módszer különböző formái és az előbbi fejezetben ismertett dekompozíciókon alapuló megoldási módszerek) mellett ismeretesek iteratív eljárások is, amelyek egy közelítő megoldás lépésenkénti finomításával érik el a kívánt pontosságú eredményt. Nagyobb egyenletrendszerek esetében a sorozatos kerekítések miatt az eddigi direkt eljárásokkal kiszámolt megoldás pontatlan lehet, ezért azt egy iteratív eljárással finomíthatjuk. Sok esetben azonban a finomítandó megoldásvektor nem egy előzetes direkt eljárás eredménye, hanem egy tetszőleges mennyiség – ez esetben a megoldóprogram csak egy iteratív algoritmust tartalmaz.

Egy ilyen iteratív eljárás tehát egy kezdeti $\{\mathbf{D} + \Delta\mathbf{D}\}$ megoldásvektorból indul ki, amely a $\{\Delta\mathbf{D}\}$ mennyiséggel tér el a tényleges $\{\mathbf{D}\}$ megoldástól. Ha ezt a vektort behelyettesítjük a megoldandó 6.54. egyenletrendszer bal oldalán álló szorzatba, akkor a kapott eredmény egy bizonyos $\{\Delta\mathbf{F}\}$ mennyiséggel fog eltérni az egyenletrendszer jobb oldalán álló szabadtagok $\{\mathbf{F}\}$ vektorától:

$$[\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{D} + \Delta\mathbf{D}\} = \{\mathbf{F} + \Delta\mathbf{F}\}. \quad (6.70)$$

Ha ebből a kifejezésből kivonjuk az eredeti 6.54. egyenletrendszer megfelelő tagjait, akkor azt kapjuk, hogy

$$[\mathbf{K}] \cdot \{\Delta\mathbf{D}\} = \{\Delta\mathbf{F}\}. \quad (6.71)$$

A $\{\Delta\mathbf{F}\}$ mennyiséget a 6.70. egyenletből ki lehet fejezni és azt behelyettesítve az előbbi egyenletrendszer a következőképpen módosul:

$$[\mathbf{K}] \cdot \{\Delta\mathbf{D}\} = [\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{D} + \Delta\mathbf{D}\} - \{\mathbf{F}\}. \quad (6.72)$$

E forma jobb oldala ismert elemeket tartalmaz, hiszen $\{\mathbf{D} + \Delta\mathbf{D}\}$ a finomítandó megoldásvektor, $\{\mathbf{F}\}$ pedig a szabadtagokat jelentő terhelésvektor. Ezt az egyenletrendszert $\{\Delta\mathbf{D}\}$ -ben oldjuk meg, amely a finomítandó megoldás korrekcióját jelenti. A finomított megoldást az

eredeti vektor és a $\{\Delta \mathbf{D}\}$ vektor különbsége adja. Amennyiben e korrekció mértéke meghalad egy bizonyos kijelölt határértéket, akkor a 6.72. egyenletrendszert az így kapott finomított vektorral újból megoldjuk és ezt a folyamatot iteratívan ismétljük a kívánt pontosság eléréséig.

Ha a merevségi mátrixot előzetesen LU vagy LLT dekompozícióval faktorizáltuk, akkor ez az iteratív eljárás csupán szorzásokból és visszahelyettesítésekből fog állni. Ez az eljárás azonban még nem a legökényetesebb, mert a merevségi mátrix dekompozícióját is el kell végezni, amely már önmagában is számítási hibákat vezet be. Léteznek olyan eljárások is, ahol a merevségi mátrix inverzének kiszámítására nem kerül sor, ezek a továbbiakban ismertetett *konjugált gradiens* módszerére alapoznak.

A megoldandó $[\mathbf{A}] \cdot \{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{b}\}$ lineáris egyenletrendszer együtthatóinak $n \times n$ méretű szimmetrikus és pozitív definit $[\mathbf{A}]$ mátrixára nézve az $\{\mathbf{u}\}$ és $\{\mathbf{v}\}$ nullától különböző vektorokat egymás konjugáltjainak nevezzük, ha

$$\{\mathbf{u}\}^T \cdot [\mathbf{A}] \cdot \{\mathbf{v}\} = 0. \quad (6.73)$$

Amennyiben meg tudunk határozni n darab $\{\mathbf{p}_i\}$ vektort, amelyek páronként egymás konjugáltjai az $[\mathbf{A}]$ -ra nézve, akkor azok egy bázist alkotnak az \mathbf{R}^n térben és a lineáris egyenletrendszer megoldását

$$\{\mathbf{x}\} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \{\mathbf{p}_i\} \quad (6.74)$$

formában adják meg. Az általánosított koordinátákat bizonyíthatóan az

$$\alpha_i = \frac{\{\mathbf{p}_i\}^T \cdot \{\mathbf{b}\}}{\{\mathbf{p}_i\}^T \cdot [\mathbf{A}] \cdot \{\mathbf{p}_i\}} \quad (6.75)$$

hányadosokként kapjuk.

Azt is be lehet bizonyítani, hogy az egyenletrendszer megoldása az

$$f(\{\mathbf{x}\}) = \frac{1}{2} \cdot \{\mathbf{x}\}^T \cdot [\mathbf{A}] \cdot \{\mathbf{x}\} - \{\mathbf{b}\}^T \cdot \{\mathbf{x}\} + c \quad (6.76)$$

kvadrátikus forma minimumához vezet; itt c egy tetszőleges állandó. E kvadrátikus forma egy vektoriális argumentumú függvény, amely egy skaláris számot ad vissza. E forma gradiense

$$\text{grad}(f(\{\mathbf{x}\})) = [\mathbf{A}] \cdot \{\mathbf{x}\} - \{\mathbf{b}\}, \quad (6.77)$$

tehát ha $\{\mathbf{x}\}$ a tekintett egyenletrendszer megoldása, akkor az előbbi gradiens zérus lesz.

Az egyenletrendszer megoldása a bázist alkotó n darab vektor meghatározására vezetődik vissza, azonban ez az út nem a legkézenfekvőbb megoldási eljárás. Ehelyett a konjugált gradiens módszere egy iteratív eljárásról alapszik, amelynek során az első lépésben a megoldást egy tetszőlegesen megválasztott $\{\mathbf{x}_0\}$ vektorral közelítjük. Ezt a vektort a gradiens képletébe behelyettesítve, hacsak az nem éppen a keresett megoldásvektorral azonos, egy zérustól különböző vektort fogunk kapni, negatív előjellel vett értéke az

$$\{\mathbf{r}_0\} = \{\mathbf{b}\} - [\mathbf{A}] \cdot \{\mathbf{x}_0\} = -\text{grad}(f(\{\mathbf{x}_0\})) \quad (6.78)$$

reziduális vektor lesz. Ez a csökkenő értékek irányába mutat (a gradiens maga a legnagyobb növekedés, tehát pont ellenkező irányába mutat), de egyáltalán nem biztos, hogy az n dimenziós térben a minimumpont éppen e vektor tartóegyenesén van. Ahhoz, hogy szemléletesebb képet alkossunk, tegyük fel, hogy a vektor két elemű és így \mathbf{R}^2 értelmezési tartománya az xy

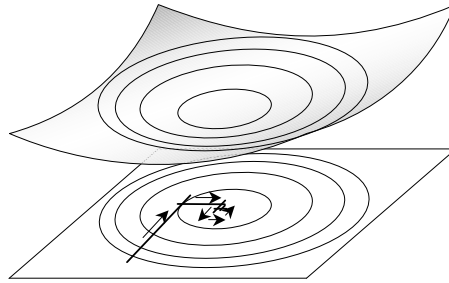
koordinátákkal ábrázolható. A kvadrátikus formának az értelmezési tartomány feletti ábrázolásával egy parabolikus felületet nyerünk, amelynek legmélyebben fekvő pontja jelenti a lineáris egyenletrendszer megoldását (a felület e formáját az $[A]$ mátrixra tett kikötések következményeként nyeri). Valamely pontban a gradiensvektor merőleges a felület ott meghúzott szintgörbéjére, tartóegyenese azonban a mélyebben fekvő szintgörbékkel egy bizonyos, derékszögtől különböző szöget zárhat be. Azt tudjuk, hogy a mélypontot lefele kell keresnünk, tehát a gradiensvektor tartóegyenese mentén lefele kell ereszkednünk. Ezt az ereszkedést addig folytatjuk, míg az egyenes zérótól különböző szöget zár be a szintgörbékkel: amikor ez a szög éppen zéró, akkor az egyenes az illető görbét az $\{x_i\}$ koordinátákkal rendelkező pontban érinti és onnan kezdve a mélyebben fekvő rész fele mutató irány az eddigre éppen az előbbire merőleges lesz (az abban a pontban megrajzolt gradiens iránya). Ha a tartóegyenese mentén tovább haladnánk, akkor e ponttól kezdve a felület szemben fekvő lejtőjén kapaszkodnánk felfele. Az érintő koordinátáit az

$$\{x_1\} = \{x_0\} + \alpha_0 \cdot \{r_0\} \quad (6.79)$$

összefüggéssel adhatjuk meg, mivel az az $\{x_0\}$ ponton átmenő, az $\{r_0\}$ vektor iránytényezőivel megadott egyenesen van. A két pont távolságát eldöntő α_0 tényező nagysága bizonyíthatóan

$$\alpha_0 = \frac{\{r_0\}^T \cdot \{b\}}{\{r_0\}^T \cdot [A] \cdot \{r_0\}}, \quad (6.80)$$

azaz a gradiensnek egymás konjugáltjai az $[A]$ -ra nézve.



6.10. ábra. A konjugált gradiens módszere két dimenzióban

Innen a folyamatot tovább folytatjuk az új gradiens meghatározásával és a lépéseket addig ismételjük, míg eléggé közel nem kerülünk a keresett minimumhoz, vagyis az egyenletrendszer megoldásához.

Az elvégzendő műveletek számát csökkenthetjük, ha a 6.79. relációt balról beszorozzuk $-[A]$ -val és ha mindkét oldalon kivonjuk $\{b\}$ -t. Ekkor

$$\{r_{i+1}\} = \{r_i\} - \alpha_i \cdot [A] \cdot \{r_i\}, \quad (6.81)$$

tehát a 6.78. reláció mátrix-vektor szorzatát nem kell külön kiszámítanunk (a 6.80. kifejezés nevezőjében és a 6.81. egyenlőség jobb oldalán ugyanaz a szorzat szerepel).

A meghatározott $\{r_i\}$ vektorok nem alkotják feltétlenül az említett bázist, azonban az

$$\{x_{i+1}\} = \{x_i\} + \alpha_i \cdot \{r_i\} \quad (6.82)$$

rekurzív képlettel megadott mennyiség konvergál a keresett megoldás fele.

6.3.3. A nagyméretű egyenletrendszerek megoldása

Az egyenletrendszer megoldása – bármelyik eljárást is választjuk – sokkal gyorsabban megy végbe amikor az operandusokat a számítógép központi (vagy operatív) memóriájában tároljuk és a műveleteket is ott végezzük el. A szerkezet merevségi mátrixának méretei azonban meghaladhatják az operatív tárét és ilyenkor a háttérmemória is felhasználásra kerül. A háttérmemória (ami manapság leginkább a merevlemez jelent) hozzáférési ideje sokkal hosszabb, mint az operatív memóriáé, éppen ezért a feladat megoldásához szükséges idő jelentősen megnövekedik. Ezen a helyzeten a szerkezet, illetve az annak egyensúlyát leíró egyenletrendszer részekre való bontásával lehet segíteni.

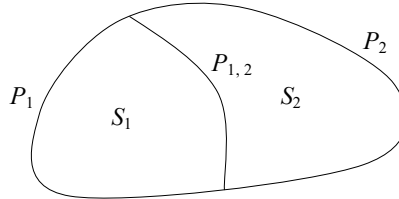
Ha a szerkezet feldarabolása mellett döntünk, akkor a részeket – szubstruktúrákat – úgy kell megválasztani, hogy azok lehetőleg a legkevésbé függjenek egymástól, a rájuk vonatkozó számításokat külön-külön végezzük el. A részek közötti kapcsolatot a közös csatlakozási pontokban átadott erő és azok elmozdulása jelenti, éppen ezért a megoldandó egyenletrendszernek egymástól független darabjaira való bontása általában nem lehetséges.

A részekre való bontás előnyeit abban az esetben is érvényesíthetjük, ha több processzoros számítógépet vagy párhuzamosan kötött számítógépeket használunk a feladat megoldásakor. Ebben az esetben a részekre vonatkozó számítások nem egymást követően, szekvenciálisan zajlanak le, hanem egyidejűleg, párhuzamosan futnak a processzorokon vagy a számítógépeken.

A szubstruktúrák módszerének többféle formája is van, tekintsünk az alábbiakban egy-egy általános verziót.

6.3.3.1. A parallel számítások elvégzésére alkalmas változat

Legyen tehát a 6.11. ábrán látható végelemekre osztott „szerkezet”, amelyet két részre vágunk (a szerkezetet akár több részre is vághatjuk, a bemutatásra kerülő eljárást általánosítani is lehet). Legyen e két szubstruktúra S_1 és S_2 , amelyek a közös $P_{1,2}$ perem, elválasztó felület mentén érintkeznek egymással. Ez a felület nemcsak a szerkezetet osztja két darabra, hanem annak peremét is; legyenek a megfelelő peremrészek P_1 és P_2 .



6.11. ábra. Szubstruktúrákra bontás

A két részre külön-külön felírt egyensúlyi egyenletrendszer a következőképpen osztható fel:

$$\begin{bmatrix} [K_{s,s}^i] & [K_{s,p}^i] \\ [K_{p,s}^i] & [K_{p,p}^i] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{D_s^i\} \\ \{D_p^i\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_s^i\} \\ \{F_p^i\} \end{Bmatrix}, \quad (6.83)$$

ahol i a szubstruktúrát azonosítja (tehát az „1” vagy „2”), a p indexek a közös elválasztó felületen levő csomópontokra, az s indexek pedig az egyéb, nem közös csomópontokra vonatkoznak. Az egyenletrendszer szimmetriája miatt $[K_{s,p}^i]$ és $[K_{p,s}^i]$ egymás transzponáltjai.

Elképzelhető, hogy a közös elválasztó felületen külső erők is hatnak. Ekkor ezen erők vektorát a következő összeggént írhatjuk fel:

$$\{F_p^i\} = \{F_{p,b}^i\} + \{F_{p,k}^i\}, \quad (6.84)$$

ahol a b index a részek által egymásra kifejtett csomóponti belső erők vektorát, a k index pedig a külső erők vektorát jelenti; mindkettő az i részre hat. Ezzel a felbontással a 6.83. egyenletrendszer továbbalakítható:

$$\begin{cases} \{F_s^i\} = [K_{s,s}^i] \cdot \{D_s^i\} + [K_{s,p}^i] \cdot \{D_p^i\}, \\ \{F_{p,b}^i\} + \{F_{p,k}^i\} = [K_{p,s}^i] \cdot \{D_s^i\} + [K_{p,p}^i] \cdot \{D_p^i\}. \end{cases} \quad (6.85)$$

A közös felületen levő csomópontok elmozdulása a két szomszédos részre nézve ugyanaz, tehát $\{D_p^1\} = \{D_p^2\} = \{D_p\}$, a hatás-ellenhatás törvényének értelmében pedig a belső erők csak előjelben különböznek egymástól, tehát $\{F_{p,b}^1\} = -\{F_{p,b}^2\}$. Az előbbi egyenletrendszer második sorát a két részre összegezvén

$$\begin{aligned} & \{F_{p,b}^1\} + \{F_{p,k}^1\} + \{F_{p,b}^2\} + \{F_{p,k}^2\} = \\ & = [K_{p,s}^1] \cdot \{D_s^1\} + [K_{p,p}^1] \cdot \{D_p^1\} + [K_{p,s}^2] \cdot \{D_s^2\} + [K_{p,p}^2] \cdot \{D_p^2\}, \end{aligned} \quad (6.86)$$

mely összeg az előbbi két észrevétellel a következőképpen alakítható tovább:

$$\{F_{p,k}^1\} + \{F_{p,k}^2\} = [K_{p,s}^1] \cdot \{D_s^1\} + [K_{p,s}^2] \cdot \{D_s^2\} + ([K_{p,p}^1] + [K_{p,p}^2]) \cdot \{D_p^2\}. \quad (6.87)$$

A 6.85. egyenletrendszer első sorából

$$\{D_s^i\} = [K_{s,s}^i]^{-1} \cdot (\{F_s^i\} - [K_{s,p}^i] \cdot \{D_p^i\}), \quad (6.88)$$

s ezeket az elmozdulásokat a 6.87. relációba behelyettesítvén egy

$$\{\bar{F}_p^i\} = [K_{p,s}^i] \cdot \{D_s^i\} + [\bar{K}_{p,p}^i] \cdot \{D_p^i\} \quad (6.89)$$

egyenletrendszerhez jutunk, ahol a felülvonással megjelölt tagok a következők:

$$\begin{aligned} \{\bar{F}_p^1\} &= \{F_{p,k}^1\} + \{\bar{F}_{p,b}^2\} \quad \text{és} \quad \{\bar{F}_p^2\} = \{F_{p,k}^2\} + \{\bar{F}_{p,b}^1\}, \\ [\bar{K}_{p,p}^1] &= [K_{p,p}^1] + [\bar{K}_{p,p}^2] \quad \text{és} \quad [\bar{K}_{p,p}^2] = [K_{p,p}^2] + [\bar{K}_{p,p}^1], \\ \{\bar{F}_{p,b}^i\} &= \{F_{p,k}^i\} - [K_{p,s}^i] \cdot [K_{s,s}^i]^{-1} \cdot \{F_s^i\}, \quad [\bar{K}_{p,p}^i] = [K_{p,p}^i] - [K_{p,s}^i] \cdot [K_{s,s}^i]^{-1} \cdot [K_{s,p}^i]. \end{aligned} \quad (6.90)$$

A 6.89. relációval és a 6.85. egyenletrendszer első sorával egy új egyenletrendszert alkothatunk:

$$\begin{bmatrix} [K_{s,s}^i] & [K_{s,p}^i] \\ [K_{p,s}^i] & [\bar{K}_{p,p}^i] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{D_s^i\} \\ \{D_p^i\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_s^i\} \\ \{\bar{F}_p^i\} \end{Bmatrix}, \quad (6.91)$$

amelyet az eredeti 6.83. egyenletrendszerrel egybevetve megállapíthatjuk, hogy a szomszédos szubstruktúrák kölcsönhatását a 6.90. egyenletek két felülvonással jelölt tagjai vezetik be.

A módszer alkalmazása során a valamely rész egyensúlyát kifejező 6.91. egyenletrendszer felírásához először is meg kell határoznunk a szomszédos rész a $[\bar{K}_{p,p}^i]$ mátrixát és $\{\bar{F}_{p,b}^i\}$ vektorát. Ezek kiszámításához a $[K_{s,s}^i]$ mátrixok inverzét is ki kell számítani. E mátrixok azonban a 6.91. egyenletrendszerek mátrixainak partíciói s ez utóbbiak inverzét szintén ki kell majd számítani. E műveletek időigényesek, két szubstruktúra esetén négy mátrix inverzét kell megkapjuk. A számítások elvégzéséhez szükséges időt a $[K_{s,s}^i]$ mátrixok elemein végzett műveletek egyszeri elvégzésével lehet csökkenteni. A Gauss-eljárás alkalmazása ilyenkor a következő lépésekből áll:

– megalkotjuk a részek egyensúlyát leíró egyenletrendszerek kiterjesztett mátrixait, azok:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{s,s}^1] & [\mathbf{K}_{s,p}^1] & \{\mathbf{F}_s^1\} \\ [\mathbf{K}_{p,s}^1] & [\mathbf{K}_{p,p}^1] & \{\mathbf{F}_{p,k}^1\} \end{bmatrix} \text{ és } \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{s,s}^2] & [\mathbf{K}_{s,p}^2] & \{\mathbf{F}_s^2\} \\ [\mathbf{K}_{p,s}^2] & [\mathbf{K}_{p,p}^2] & \{\mathbf{F}_{p,k}^2\} \end{bmatrix};$$

– a felső partíció sorain elvégezzük a normalizálás és a redukálás lépéseit, minek következtében a kiterjesztett mátrixok a következőképpen fognak kinézni:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{U}_{s,s}^1] & [\mathbf{K}_{s,p}^1 *] & \{\mathbf{F}_s^{1*}\} \\ [\mathbf{K}_{p,s}^1] & [\mathbf{K}_{p,p}^1] & \{\mathbf{F}_{p,k}^1\} \end{bmatrix} \text{ és } \begin{bmatrix} [\mathbf{U}_{s,s}^2] & [\mathbf{K}_{s,p}^2 *] & \{\mathbf{F}_s^{2*}\} \\ [\mathbf{K}_{p,s}^2] & [\mathbf{K}_{p,p}^2] & \{\mathbf{F}_{p,k}^2\} \end{bmatrix},$$

ahol $[\mathbf{U}_{s,s}^i]$ felső háromszögmátrixokat jelent, a csillaggal jelölt tagok pedig az említett lépések alatt módosult tagokat jelölik;

– a felső partíció soraiban, a $[\mathbf{K}_{s,p}^i *]$ mátrix oszlopain és az $\{\mathbf{F}_s^{i*}\}$ vektoron elvégezzük a visszahelyettesítést. Ekkor e mátrixok és vektorok helyett az alábbi mennyiségek jelennek meg:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{U}_{s,s}^1] & [\mathbf{K}_{s,s}^1]^{-1} \cdot [\mathbf{K}_{s,p}^1] & [\mathbf{K}_{s,s}^1]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}_s^1\} \\ [\mathbf{K}_{p,s}^1] & [\mathbf{K}_{p,p}^1] & \{\mathbf{F}_{p,k}^1\} \end{bmatrix} \text{ és } \begin{bmatrix} [\mathbf{U}_{s,s}^2] & [\mathbf{K}_{s,s}^2]^{-1} \cdot [\mathbf{K}_{s,p}^2] & [\mathbf{K}_{s,s}^2]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}_s^2\} \\ [\mathbf{K}_{p,s}^2] & [\mathbf{K}_{p,p}^2] & \{\mathbf{F}_{p,k}^2\} \end{bmatrix};$$

– a $[\mathbf{K}_{s,s}^i]^{-1} \cdot [\mathbf{K}_{s,p}^i]$ és a $[\mathbf{K}_{s,s}^i]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}_s^i\}$ szorzatokat balról megszorozzuk a partíció bal alsó sarkában levő $[\mathbf{K}_{p,p}^i]$ mátrixszal, majd a $[\mathbf{K}_{p,p}^i]$ mátrixból, illetve az $\{\mathbf{F}_{p,k}^i\}$ vektorból e szorzatokat kivonva kapjuk a $[\bar{\mathbf{K}}_{p,p}^i]$, illetve a $\{\bar{\mathbf{F}}_{p,k}^i\}$ mennyiségeket (a 6.90. képletek utolsó sorában levő relációk). E mennyiségeket a két párhuzamos processzor vagy számítógép között átadjuk és összegezzük a megfelelő felülvonás nélküli tagokkal, így a $[\bar{\mathbf{K}}_{p,p}^i]$ mátrixokhoz és az $\{\bar{\mathbf{F}}_{p,k}^i\}$ vektorokhoz jutunk (a 6.90. képletek első két sora):

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{U}_{s,s}^1] & [\mathbf{K}_{s,s}^1]^{-1} \cdot [\mathbf{K}_{s,p}^1] & [\mathbf{K}_{s,s}^1]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}_s^1\} \\ [\mathbf{K}_{p,s}^1] & [\bar{\mathbf{K}}_{p,p}^1] & \{\bar{\mathbf{F}}_{p,k}^1\} \end{bmatrix} \text{ és } \begin{bmatrix} [\mathbf{U}_{s,s}^2] & [\mathbf{K}_{s,s}^2]^{-1} \cdot [\mathbf{K}_{s,p}^2] & [\mathbf{K}_{s,s}^2]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}_s^2\} \\ [\mathbf{K}_{p,s}^2] & [\bar{\mathbf{K}}_{p,p}^2] & \{\bar{\mathbf{F}}_{p,k}^2\} \end{bmatrix};$$

– a redukálást az $[\mathbf{U}_{s,s}^i]$ partíciók alatt folytatjuk, mígnem ott zérókat alakítunk ki, aztán a normalizálást és a redukálást az alsó sorokban is elvégezzük a szokásos módon:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{U}_{s,s}^1] & [\mathbf{K}_{s,s}^1]^{-1} \cdot [\mathbf{K}_{s,p}^1] & [\mathbf{K}_{s,s}^1]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}_s^1\} \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{U}_{p,p}^1] & \{\bar{\mathbf{F}}_{p,k}^1 * \} \end{bmatrix} \text{ és } \begin{bmatrix} [\mathbf{U}_{s,s}^2] & [\mathbf{K}_{s,s}^2]^{-1} \cdot [\mathbf{K}_{s,p}^2] & [\mathbf{K}_{s,s}^2]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}_s^2\} \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{U}_{p,p}^2] & \{\bar{\mathbf{F}}_{p,k}^2 * \} \end{bmatrix}.$$

Itt az $[\mathbf{U}_{p,p}^i]$ mennyiségek szintén felső háromszögmátrixok, a csillaggal jelölt vektorok pedig e lépések alatt módosult tagokat mutatják;

– az alsó sorokban elvégezzük a visszahelyettesítés lépéseit:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{U}_{s,s}^1] & [\mathbf{K}_{s,s}^1]^{-1} \cdot [\mathbf{K}_{s,p}^1] & [\mathbf{K}_{s,s}^1]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}_s^1\} \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{I}] & \{\mathbf{D}_p^1\} \end{bmatrix} \text{ és } \begin{bmatrix} [\mathbf{U}_{s,s}^2] & [\mathbf{K}_{s,s}^2]^{-1} \cdot [\mathbf{K}_{s,p}^2] & [\mathbf{K}_{s,s}^2]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}_s^2\} \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{I}] & \{\mathbf{D}_p^2\} \end{bmatrix}.$$

A gyakorlatban az $[\mathbf{U}_{p,p}^i]$ mátrixokon a visszahelyettesítés műveleteit fölösleges elvégezni, elegendő csak a $\{\bar{\mathbf{F}}_{p,k}^i * \}$ tagokra szorítkozni. Mivel a $\{\mathbf{D}_p^i\}$ vektorok a részek közös elválasztó felületén levő csomópontokra vonatkoznak, a két kapott vektor a számítási hibák hiányában egyenlő kellene legyen és így elegendő lenne az utóbbi két lépést csak az egyik szubstruktúrán elvégezni;

– a 6.83. egyenletrendszerből

$$\{\mathbf{D}_s^1\} = ([\mathbf{K}_{s,s}^1]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}_s^1\}) - ([\mathbf{K}_{s,s}^1]^{-1} \cdot [\mathbf{K}_{s,p}^1]) \cdot \{\mathbf{D}_p^1\}$$

és

$$\{\mathbf{D}_s^2\} = ([\mathbf{K}_{s,s}^2]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}_s^2\}) - ([\mathbf{K}_{s,s}^2]^{-1} \cdot [\mathbf{K}_{s,p}^2]) \cdot \{\mathbf{D}_p^2\},$$

a zárójelbe tett tényezők az előbbi lépések során már kiszámításra kerültek. Az elmozdulásokkal a szokásos eljárásokkal kiszámoljuk a másodrendű ismeretleneket.

6.3.3.2. A szekvenciális számítások elvégzésére alkalmas változat

Tekintsük még egyszer a 6.11. ábrán látható két részre osztott szerkezetet. A részek egyensúlyát most is a 6.83.-hoz hasonló egyenletrendszerekkel írjuk fel, de itt a p index az i rész peremének egészére vonatkozik (beleértve a közös elválasztó felületet is), míg az s index a rész belső csomópontjait azonosítja:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{s,s}^i] & [\mathbf{K}_{s,p}^i] \\ [\mathbf{K}_{p,s}^i] & [\mathbf{K}_{p,p}^i] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\mathbf{D}_s^i\} \\ \{\mathbf{D}_p^i\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}_s^i\} \\ \{\mathbf{F}_p^i\} \end{Bmatrix}. \quad (6.92)$$

Az $\{\mathbf{F}_p^i\}$ vektor most is az i részre ható külső és belső erők komponenseit tartalmazza, de látni fogjuk, hogy a belső erőkkel nem kell majd külön foglalkoznunk.

Ha a felső sorból kifejezzük a belső csomópontok elmozdulásának vektorát:

$$\{\mathbf{D}_s^i\} = [\mathbf{K}_{s,s}^i]^{-1} \cdot (\{\mathbf{F}_s^i\} - [\mathbf{K}_{s,p}^i] \cdot \{\mathbf{D}_p^i\}), \quad (6.93)$$

és azt behelyettesítjük az alsó sorral megadott egyenletrendszerbe, akkor a következő kifejezéshez jutunk:

$$([\mathbf{K}_{p,p}^i] - [\mathbf{K}_{p,s}^i] \cdot [\mathbf{K}_{s,s}^i]^{-1} \cdot [\mathbf{K}_{s,p}^i]) \cdot \{\mathbf{D}_p^i\} = \{\mathbf{F}_p^i\} - [\mathbf{K}_{p,s}^i] \cdot [\mathbf{K}_{s,s}^i]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}_s^i\}. \quad (6.94)$$

A

$$[\mathbf{K}_k^i] = [\mathbf{K}_{p,p}^i] - [\mathbf{K}_{p,s}^i] \cdot [\mathbf{K}_{s,s}^i]^{-1} \cdot [\mathbf{K}_{s,p}^i] \quad (6.95)$$

és az

$$\{\mathbf{F}_k^i\} = \{\mathbf{F}_p^i\} - [\mathbf{K}_{p,s}^i] \cdot [\mathbf{K}_{s,s}^i]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}_s^i\} \quad (6.96)$$

jelölések bevezetésével, ahol $[\mathbf{K}_k^i]$ az i szubstruktúra „kondenzált” merevségi mátrixa és $\{\mathbf{F}_k^i\}$ annak „kondenzált” terhelésvektora, ez a kifejezés tömören a

$$[\mathbf{K}_k^i] \cdot \{\mathbf{D}_p^i\} = \{\mathbf{F}_k^i\} \quad (6.97)$$

kondenzált formában írható fel.

Amennyiben minden terhelt vagy megtámasztott (más szavakkal: előírt peremfeltételekkel rendelkező) csomópontot a peremhez tartozónak tekintünk, akkor a kondenzált terhelésvektor azonos lesz a szubstruktúrára ható erők vektorával. Tehát ekkor $\{\mathbf{F}_k^i\} = \{\mathbf{F}_p^i\}$, mivel $\{\mathbf{F}_s^i\}$ összes eleme nulla és így a 6.96. egyenletben a kivonandónak szintén nullát kapunk. Ekkor a fenti egyenletrendszer úgy értelmezhető mint a szubstruktúra belső csomópontjainak eliminálásával kapott „makroelem” egyensúlyát leíró egyenlet, ahol a kondenzált merevségi mátrix a makroelem merevségi mátrixa, a peremen levő csomópontok elmozdulásának és terhelésének vektorai pedig a makroelem megfelelő elemi vektorait képezik.

A részekre megállapított kondenzált mátrixokkal és vektorokkal, vagyis a szubstruktúrákat modellező makroelemekkel a szokványos végelemeknél használt eljárásokkal felépíthetünk egy

$$[\mathbf{K}_k] \cdot \{\mathbf{D}_p\} = \{\mathbf{F}_p\} \quad (6.98)$$

lineáris egyenletrendszer. Itt felidézzük, hogy az $\{\mathbf{F}_p^i\}$ vektor az elválasztó-felületen ható belső erőket is tartalmazza. Az $\{\mathbf{F}_p\}$ vektor összeállításánál a közös szabadságfokokban az erőket összegezzük: a belső erőket kész szomszédos részre összegezvén zérust kapunk, s ezért nem kellett ezekkel külön foglalkoznunk az eddigiek során.

Ha a szerkezetnek összesen n_p peremen levő pontja van és csomópontonként n_{sz} szabadságfokról beszélünk, akkor a szerkezet $[\mathbf{K}_k]$ kondenzált merevségi mátrixát $(n_p \cdot n_{sz}) \times (n_p \cdot n_{sz})$ nagyságúnak kapjuk, a terhelésvektornak és az elmozdulás-vektornak pedig egyaránt $n_p \cdot n_{sz}$ eleme lesz. Mivel általában a belső csomópontok száma jóval nagyobb a peremen levőknél, a most megoldandó egyenletrendszer jóval kisebb lesz annál, mint amit a szerkezet egészére írhatunk fel.

A 6.98. egyenletrendszer megoldása a peremen (beleértve a szubstruktúrákat elválasztó felületeket) levő csomópontok elmozdulásaihoz vezet. A $\{\mathbf{D}_p\}$ vektorból a részek $\{\mathbf{D}_p^i\}$ vektorait kiemelhetjük, majd azokat a 6.93. egyenletbe behelyettesítve megkapjuk a belső csomópontok elmozdulásait is.

A módszer alkalmazása során, ha a Gauss-eliminációt követjük, a következő lépéseket kell végrehajtanunk:

– megalkotjuk az i rész egyensúlyát leíró egyenletrendszer mátrixát és elvégezzük a 6.92. formájú particionálást:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{s,s}^i] & [\mathbf{K}_{s,p}^i] \\ [\mathbf{K}_{p,s}^i] & [\mathbf{K}_{p,p}^i] \end{bmatrix};$$

– a felső partíció sorain elvégezzük a normalizálás és a redukálás lépéseit, minek következtében a kiterjesztett mátrix a következőképpen fog kinézni (az előbbi fejezetben használt jelölésekkel):

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{U}_{s,s}^i] & [\mathbf{K}_{s,p}^i *] \\ [\mathbf{K}_{p,s}^i] & [\mathbf{K}_{p,p}^i] \end{bmatrix};$$

– a felső partíció soraiban, a $[\mathbf{K}_{s,p}^i *]$ mátrix oszlopain elvégezzük a visszahelyettesítést:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{U}_{s,s}^i] & [\mathbf{K}_{s,s}^i]^{-1} \cdot [\mathbf{K}_{s,p}^i] \\ [\mathbf{K}_{p,s}^i] & [\mathbf{K}_{p,p}^i] \end{bmatrix};$$

– a 6.95. összefüggéssel kiszámoljuk a szubstruktúra $[\mathbf{K}_k^i]$ kondenzált merevségi mátrixát, majd a háttérmemóriában tároljuk a továbbiakban szükséges $[\mathbf{K}_{s,s}^i]^{-1} \cdot [\mathbf{K}_{s,p}^i]$ mátrixszal és $\{\mathbf{F}_p^i\}$ vektorral együtt;

– a fenti műveleteket minden szubstruktúrára elvégezzük;

– miután minden $[\mathbf{K}_k^i]$ mátrixot és $\{\mathbf{F}_p^i\}$ vektort kiszámoltunk összeállítjuk a szerkezet kondenzált merevségi mátrixát és terhelésvektorát. Időmegtakarítást jelenthet, ha van elegendő memóriakapacitás a $[\mathbf{K}_k]$ mátrix és a $\{\mathbf{F}_p\}$ vektor tárolására, ugyanis ilyenkor a $[\mathbf{K}_k^i]$ mátrix és az $\{\mathbf{F}_p^i\}$ vektor kiszámítását követően azokat rögtön beépíthetjük és így megtakaríthatjuk a beírás és a kiolvasás műveleteit;

- megoldjuk a 6.98. egyenletet;
- minden i szubstruktúrára a $\{\mathbf{D}_p\}$ vektor megfelelő tagjaival meghatározzuk az $\{\mathbf{D}_p^i\}$ elmozdulás-vektor elemeit majd a 6.93. egyenlettel, a tárolt $[\mathbf{K}_{s,s}^i]^{-1} \cdot [\mathbf{K}_{s,p}^i]$ szorzat beolvasása után kiszámoljuk a $\{\mathbf{D}_s^i\}$ vektor elemeit is. Az elmozdulásokkal kiszámoljuk a másodrendű ismeretleneket.

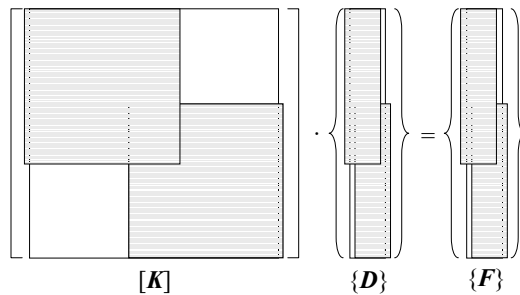
Ez az eljárás szintén kiterjeszhető a több részre bontott szerkezetek számítására is. A bemutatott algoritmus kismértékű módosításával a műveletek párhuzamos elvégzésére alkalmas változathoz juthatunk.

6.3.3.3. Az egyenletrendszer feldarabolásának lehetőségei

A tényleges szerkezet tényleges feldarabolásával tulajdonképpen az invertálandó merevségi mátrix méreteinek csökkentését követtük. Ennek célja az volt, hogy a szükséges műveleteket a számítógép központi memóriájában végezhessük el. Ezt a célt azonban nemcsak a szerkezet fizikai feldarabolásával érhetjük el.

A 6.11. ábrán látható szerkezet darabjait 6.83. formájú egyenletek írják le. Ha a két szubstruktúrára felírt egyenlettel a teljes szerkezetre vonatkozó egyenletrendszert felépítenénk, akkor az a következőképpen nézne ki:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{s,s}^1] & [\mathbf{K}_{s,p}^1] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{K}_{p,s}^1] & [\mathbf{K}_{p,p}^1] + [\mathbf{K}_{p,p}^2] & [\mathbf{K}_{p,s}^2] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}_{s,p}^2] & [\mathbf{K}_{s,s}^2] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\mathbf{D}_s^1\} \\ \{\mathbf{D}_p\} \\ \{\mathbf{D}_s^2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}_s^1\} \\ \{\mathbf{F}_p^1\} + \{\mathbf{F}_p^2\} \\ \{\mathbf{F}_s^2\} \end{Bmatrix}. \quad (6.99)$$



6.12. ábra. Az egyenletrendszer tömbökre bontása

Ennek alapján elképzelhető egy olyan algoritmus, amely a 6.12. ábra szerint a merevségi mátrixot könnyebben kezelhető tömbökre darabolja fel és az így létrehozott tömbökön az előbbieken ismertetett módszerek alkalmazását a tényleges szubstruktúrák elkülönítése nélkül alkalmazná. A tömbök átfedésében levő tagokat meg kell osztani az illető tömbök között, ezt például az érintett tagok megfelelésével érhetjük el. Ugyanígy a terhelésvektor érintett tagjait is meg kell osztani a tömbök között (de az elmozdulások azonossága miatt az elmozdulás-vektor tagjait nem kell megosztani).

Alkothatunk azonban egyéb, hatékonyabb algoritmusokat is. Tekintsük példának a következőt, amelyet a klasszikus Gauss-eliminációval és az LU vagy LLT dekompozícióval egyaránt megvalósíthatunk. Legyen tehát a $[\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{F}\}$ lineáris egyenletrendszer, amelyet tömbökre bontunk:

$$\left[\begin{array}{c|c} [\mathbf{K}_{A,A}] & [\mathbf{K}_{A,B}] \\ \hline [\mathbf{K}_{B,A}] & [\mathbf{K}_{B,B}] \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} \{\mathbf{D}_A\} \\ \{\mathbf{D}_B\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \{\mathbf{F}_A\} \\ \{\mathbf{F}_B\} \end{array} \right\}. \quad (6.100)$$

Itt $[\mathbf{K}_{A,A}]$ és $[\mathbf{K}_{B,B}]$ négyzetes szimmetrikus mátrixok és $[\mathbf{K}_{A,B}]^T = [\mathbf{K}_{B,A}]$. Az eredeti egyenletrendszer tehát tulajdonképpen két kisebbre lett bontva, azok:

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{A,A}] \cdot \{\mathbf{D}_A\} + [\mathbf{K}_{A,B}] \cdot \{\mathbf{D}_B\} &= \{\mathbf{F}_A\}, \\ [\mathbf{K}_{B,A}] \cdot \{\mathbf{D}_A\} + [\mathbf{K}_{B,B}] \cdot \{\mathbf{D}_B\} &= \{\mathbf{F}_B\}. \end{aligned} \quad (6.101)$$

Az elsőből az ismeretlen

$$\{\mathbf{D}_A\} = [\mathbf{K}_{A,A}]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}_A\} - [\mathbf{K}_{A,A}]^{-1} \cdot [\mathbf{K}_{A,B}] \cdot \{\mathbf{D}_B\} \quad (6.102)$$

elmozdulásokat kifejezve és azokat a másodikba behelyettesítve a

$$([\mathbf{K}_{B,B}] - [\mathbf{K}_{A,A}]^{-1} \cdot [\mathbf{K}_{A,B}]) \cdot \{\mathbf{D}_B\} = \{\mathbf{F}_B\} - [\mathbf{K}_{B,A}] \cdot [\mathbf{K}_{A,A}]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}_A\} \quad (6.103)$$

egyenletrendszerhez jutunk, amelyet

$$[\mathbf{K}^*] \cdot \{\mathbf{D}^*\} = \{\mathbf{F}^*\} \quad (6.104)$$

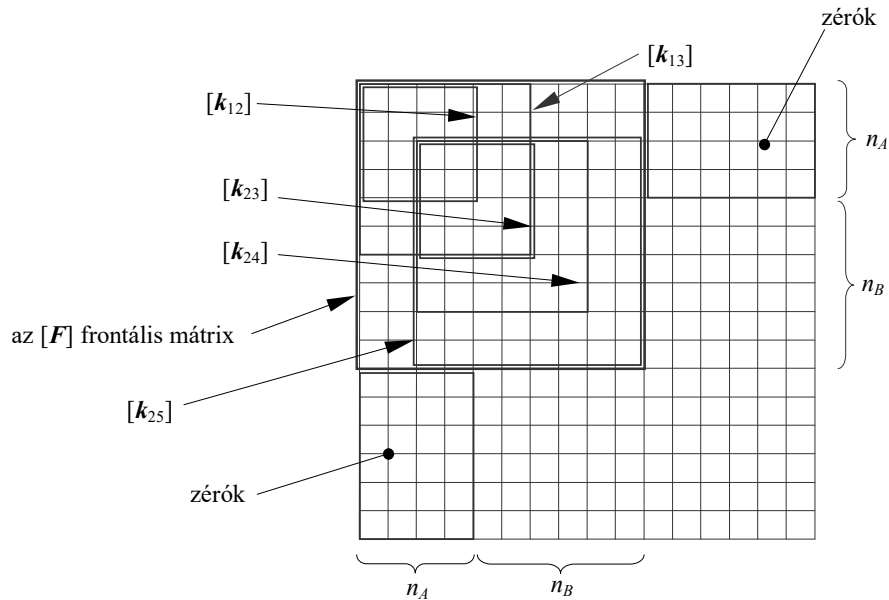
tömör alakban is felírhatunk. Észrevehetjük, hogy ez utóbbi kevesebb egyenletből áll és kevesebb ismeretlent tartalmaz, mint az eredeti egyenletrendszerünk. Azt is észrevehetjük, hogy a $[\mathbf{K}^*]$ mátrix ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkezik, mint az eredeti egyenletrendszer $[\mathbf{K}]$ mátrixa. A feladat megoldása tehát az ismeretlenek egy részének eliminálásával kapott egyenletrendszer megoldására (elméletileg a $[\mathbf{K}^*]$ mátrix inverzének) redukálódik, az eliminált ismeretleneket pedig a 6.102. képletbe való visszahelyettesítéssel kapjuk. Ezen számítások elvégzéséhez azonban szükségünk van a $[\mathbf{K}_{A,A}]$ partíció inverzének kiszámolására is. E partíció méreteit úgy kell megválasztani, hogy a 6.104. egyenletrendszer együtthatóinak mátrixát és a szabad tagok vektorát az operatív memóriában ki lehessen számítani. Amennyiben a kapott 6.103. egyenletrendszer megoldásához szükséges memóriaigény meghaladná a rendelkezésre álló kapacitást, úgy a tömbökre való bontást tovább folytatjuk a bemutatott módon.

6.3.3.4. Frontális megoldási módszerek

Az eddig ismertett módszerekben az egyenletrendszer megoldására a strukturális merevségi mátrix összeállítását követően került sor. 1970-ben B. M. Irons egy új, általa *frontálisnak* nevezett eljárást javasolt, ahol a Gauss-elimináció az elemi merevségi mátrixok és terhelésvektorok kiszámításával párhuzamosan történik.

E számításokat valamely – például az első – végeselemhez (annak csomóponti szabadságfokaihoz) tartozó merevségek és terhelések kiszámításával kezdjük, azaz kiszámítjuk a strukturális merevségi mátrix megfelelő sorait és a terhelésvektor megfelelő elemeit. Amennyiben e kiragadott végeselem valamely csomópontja a diszkretizált szerkezet egy sarokpontja, akkor a merevségi mátrix keresett elemeit csak az illető végeselem elemi merevségi mátrixa tartalmazza és a terhelésvektor keresett elemeit is csak annak elemi terhelésvektorában találjuk meg. Ellenben, ha a csomópont két vagy több végeselem közös csomópontja, akkor a merevségi mátrix tagjait és a terheléseket a megfelelő elemi mennyiségek összegzésével kapjuk meg, ehhez pedig ki kell számítanunk a szomszédos végeselemek merevségi mátrixait és terhelésvektorait is. E kiszámított sorok tulajdonképpen a strukturális egyenletrendszer egy partícióját jelentik (a 6.99. egyenletnek megfelelően), a szerkezet merevségi mátrixának e partícióját pedig *frontális* mátrixnak nevezzük. A

6.13. ábra azt a frontális mátrixot mutatja be szimbolikusan, amelyet az 1.7. ábrán látható szerkezet első két csomópontja közötti végelemére írhatunk fel.



6.13. ábra. A frontális mátrix az első lépésben

Könnyen beláthatjuk, hogy a frontális mátrix a kiragadott végelem szabadságfokaira vonatkozó tagokat (példánkban az első és a második csomópont két-két szabadságfokáról van szó) mind tartalmazza, azaz a megfelelő sorokban és oszlopokban a frontális mátrix körvonalán kívül eső tagok mind zérók. A frontális mátrixot e szabadságfokok szerint partícionáljuk:

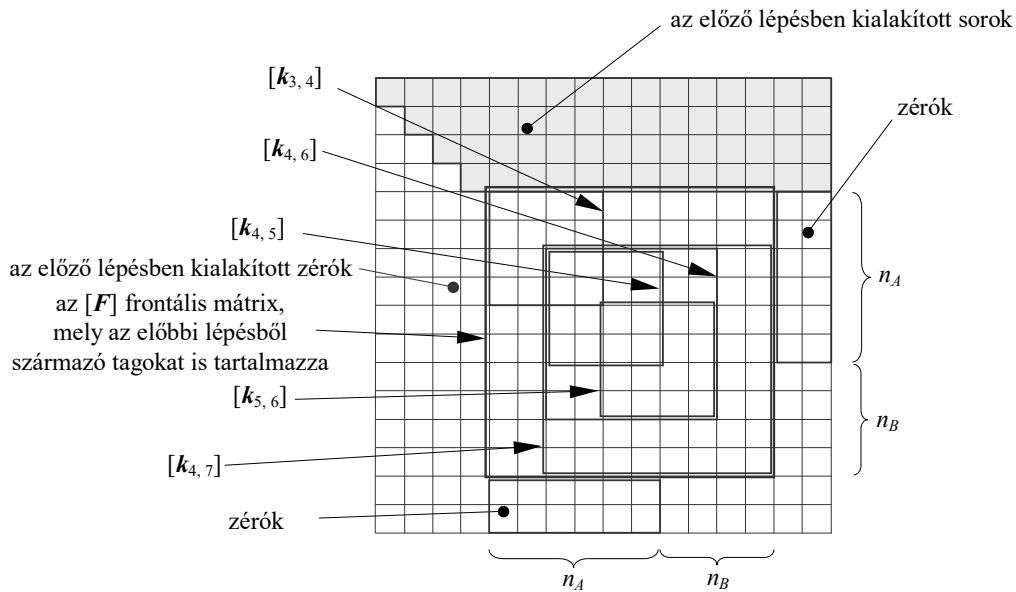
$$\begin{bmatrix} [\mathbf{F}_{A,A}] & [\mathbf{F}_{A,B}] \\ [\mathbf{F}_{B,A}] & [\mathbf{F}_{B,B}] \end{bmatrix}, \quad (6.105)$$

ahol tehát az $[\mathbf{F}_{A,A}]$ partíció azon sorok és oszlopok metszete, amelyekben a frontális mátrixon kívül csak zérók vannak. Ezt a partíciót egyébként „teljesen összegzett”-nek nevezi a szakirodalom, mivel tagjaihoz a strukturális merevségi mátrix összeállításának folyamán a továbbiakban már nem kell további elemi merevségeket hozzáadni. Tegyük fel, hogy a vonal fölötti rész n_A sort tartalmaz, alatta pedig további n_B sor található.

Mivel a szerkezet merevségi mátrixban, a frontális mátrixon kívül az $[\mathbf{F}_{A,A}]$ partíciótól jobbra és az alatt csak zérók vannak, a Gauss-elimináció normalizálás-redukálás lépéseit elegendő lesz a frontális mátrix soraira elvégezni: a 6.105. mátrix vonal feletti partíciójában egy sort normalizálunk, majd azzal az alatta levő sorokat (az alsó partíciót is beleértve) redukáljuk. E lépések elvégzése után az $[\mathbf{F}_{A,A}]$ helyett egy felső háromszögmátrixot kapunk, $[\mathbf{F}_{B,A}]$ egy nullmátrix lesz, $[\mathbf{F}_{A,B}]$ és $[\mathbf{F}_{B,B}]$ pedig megfelelően módosulnak. A normalizálás és redukálás műveleteit a szabad tagok vektorának érintett tagjain is elvégezzük. Az $[\mathbf{F}_{A,A}]$ helyében megjelenő háromszögmátrixot és a sorainak magasságában levő szabadtagokat – tulajdonképpen a tanulmányozott szerkezet egyensúlyát leíró egyenletrendszer első n_A egyenletét – mentjük, például a merevlemezen tároljuk, a fennmaradó n_B egyenletet pedig a következő lépés frontális mátrixának felépítésében használjuk fel.

A következő lépésben azokat a végelemeket vesszük, amelyek az előbbinek a szomszédjai. Kétféleképpen járhatunk el: az illető elemeket vagy egyenként tárgyaljuk, vagy pedig azokat egyszerre illesztjük be a frontális mátrixba. A gyakorlati megvalósításnál az utóbbi eljárást részesítik előnyben, mivel az illető elemek merevségi mátrixai már az előző lépésben bekerültek a frontális mátrixba, így bizonyos műveleteket takaríthatunk meg és a számítások elvégzéséhez szükséges idő kevesebb lesz.

Az 1.7. ábrán látható szerkezet példáját követvén, az első lépés végén a frontális mátrix az 1–2 végelem és az azzal szomszédos 1–3, 2–3, 2–4 és 2–5 elemek merevségi mátrixait foglalja magába és e mátrixból az 1 és a 2 csomópontoknak megfelelő sorokat és oszlopokat törölhettük. A második lépésben az előbb felsorolt elemekkel szomszédos 3–4, 4–5, 4–6, 4–7 és 5–6 rúdelemek merevségi mátrixait kell beillesztenünk. A frontális mátrix új formáját a 6.14. ábra mutatja be.



6.14. ábra. A frontális mátrix a második lépésben

Észrevehetjük, hogy most a 3, 4 és 5 csomópontok szabadságfokainak megfelelő tagok a teljesen összegzettek, tehát a megfelelő sorokban és oszlopokban a frontális mátrixon kívül csak zérók vannak. E lépésben is elvégezzük a normalizálás és redukálás lépéseit (az alsó n_B sorban most is csak redukálunk), s ilyen módon a bal felső $n_A \times n_A$ részen most is egy háromszögmátrixot alakítunk ki. Az egyenletrendszer felső n_A sorát mentjük, majd az algoritmust a következő lépéssel folytatjuk. E lépések ismétélése mindaddig tart, amíg a merevségi mátrixot teljes egészében felső háromszögmátrixszá alakítjuk át.

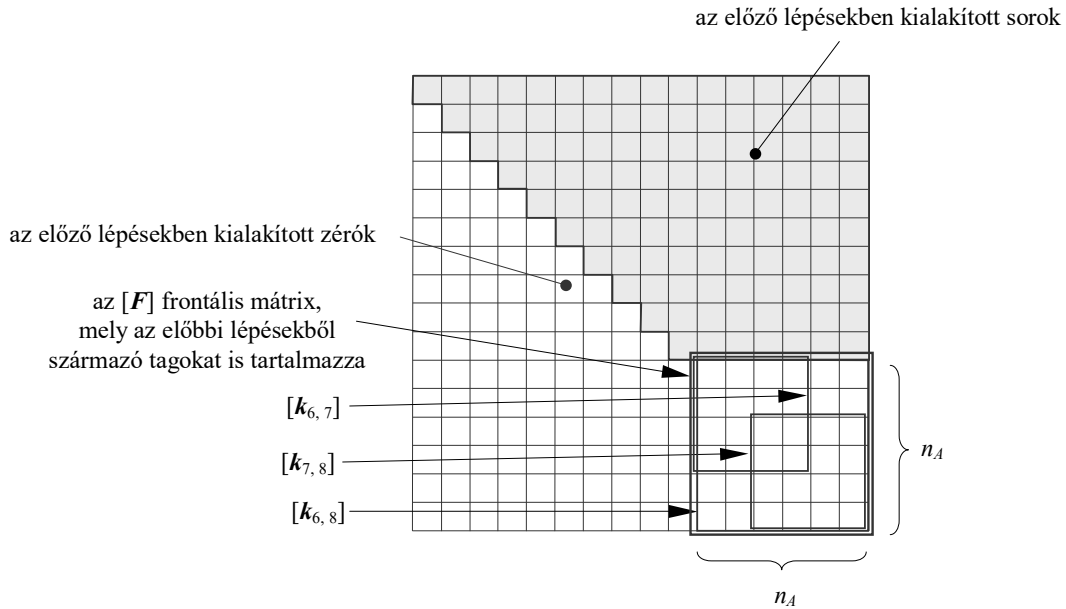
Az utolsó lépésben a frontális mátrix minden tagja teljesen összegzett, ekkor $n_B = 0$ és e mátrix a lépés végén egy felső háromszögmátrixszá alakul át.

Példánkban a következő lépés egyúttal az utolsó is, a frontális mátrixba az előbbi lépésben tárgyalt elemek szomszédjai, a 6–7, 6–8 és 7–8 végelemek kerülnek be (6.15. ábra).

Miután a háromszögmátrixot kialakítottuk, a kimentett egyenleteket sorra beolvassván, alulról felfele a visszahelyettesítéseket elvégezvén megkapjuk a keresett elmozdulásokat.

Mint láthatjuk, a frontális mátrix a diszkretizált szerkezet valamely végelemétől indul el és az algoritmus során egy táguló-szűkülő hullámfrontként – innen származik az elnevezése is –

végigseprí a teljes végeselemes hálót. Ezalatt mérete folyton változik; legnagyobb méretét a front szélességének nevezik. A frontszélesség nagyobb szerkezeteknél mindig jóval kisebb a strukturális merevségi mátrix méreténél, éppen ezért a Gauss-elimináció lépéseinek elvégzéséhez szükséges központi memória mérete is megfelelően csökken az algoritmus alkalmazása során.



6.15. ábra. A frontális mátrix a harmadik lépésben

A gyakorlatba ültetésnél meg kell oldani az adott végeselemmel szomszédos elemek megkeresését. Bizonyos programokban e keresgélés helyett a végeselemeket megszámozásuk sorrendjében veszik mindaddig, míg teljesen összegzett elemekhez jutnak, s ekkor végzik el a normalizálás és redukálás műveleteit a megfelelő sorokkal. Az ilyen programokban az $[F_{A,A}]$ partíció kialakításához rendszerint a sorokat és az oszlopokat is permutálni kell, mivel a teljesen összegzett tagok szórtan jelenhetnek meg. E programok hatékonyságának növelésének szempontjából, a 4.7.3. fejezetben leírtakkal ellentétben a végeselemek számozása nem tetszőleges, hanem az a csomópontok számozási módszerét követően a legrövidebb mérettel párhuzamos irányban történik.

7. NEMLINEÁRIS SZERKEZETEK

7.1. Az anyagi nemlinearitás

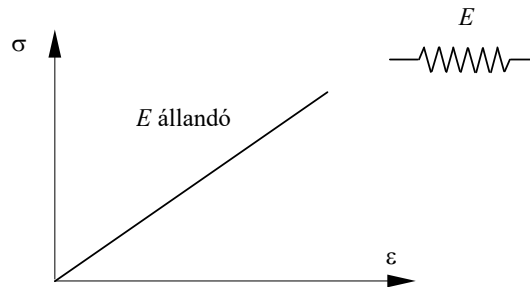
7.1.1. A rugalmas test

Az eddigiekben feltételeztük, hogy a feszültség és az alakváltozás között egyenes arányosság, egy lineáris összefüggés, *anyagegyenlet* létezik, amelyet Hooke törvényeként ismerünk. Egy dimenzióra felírva e törvény:

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \cdot \sigma \quad \text{vagy} \quad \sigma = \varepsilon \cdot E. \quad (7.1)$$

Az ilyen viselkedést mutató testet tökéletesen és lineárisan rugalmasnak nevezzük. A valódi testek viselkedése többé-kevésbé eltér ettől az ideális viselkedéstől, azonban a gyakorlati szempontból ez az anyagmodell bizonyos határok között kellő pontossággal tükrözi a valóságot.

A deformálható test legegyszerűbb modellje tehát a tökéletesen és lineárisan rugalmas test, amelyet Hooke-modellnek (testnek) is neveznek. A tökéletesen és lineárisan rugalmas modell reverzibilis folyamatokat feltételez, maradandó alakváltozás és belső súrlódás okozta energiaveszteségek nélkül, ahol az erő és az általa okozott elmozdulás közötti egyenes arányosság bármikor fennáll. Ezt az arányosságot az egy dimenziós Hooke-modell szimbólumával együtt a 7.1. ábrán láthatjuk. Ezen egy dimenziós modell egyetlen paramétere az E Young-modulusz.



7.1. ábra. A Hooke-modell és jelleggörbéje

Megállapítást nyert, hogy nem minden tökéletesen rugalmas test esetében áll fenn a fajlagos alakváltozások és a feszültségek közötti lineáris arányosság vagy pedig ez az arányosság csak bizonyos határértékek között érvényes. Ilyenkor az alakváltozások továbbra is reverzibilisek, nincs maradandó alakváltozás és energiaveszteség sem, de a Hooke törvényében szereplő paraméterek nem állandóak. Az egy dimenziós modell Young-modulusza a fajlagos alakváltozás függvénye:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E(\varepsilon), \quad (7.2)$$

a $\sigma - \varepsilon$ kapcsolatot pedig valamilyen görbe írja le (7.2. ábra).

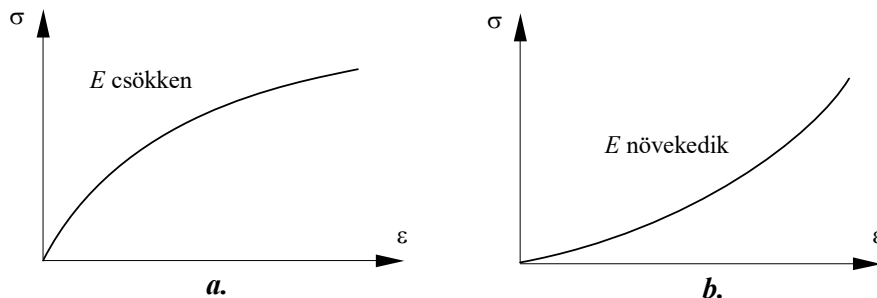
A görbe görbülete bármilyen lehet. Negatív görbület esetén az anyag merevségét jellemző Young-modulusz mértéke csökken (ugyanakkora alakváltozás-növekedésnek egyre kisebb feszültség-növekedés felel meg), az ilyen anyagot lágyulónak nevezik – ilyen például a legtöbb fém.

A pozitív görbület az egyre merevebbé váló anyagot jellemzi, az ilyent keményedőnek nevezik – ilyen anyag például a gumi.

A feszültség és a fajlagos alakváltozás kapcsolatát adó görbe egy adott pontjához húzott érintő

$$E_t(\varepsilon) = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (7.3)$$

meredeksége (7.3. ábra) a *tangenciális* (érintő) rugalmassági moduluszt adja, amely tehát az ε fajlagos alakváltozás függvénye.

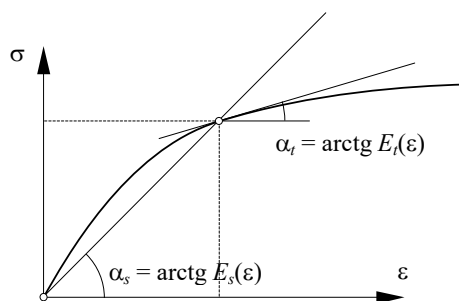


7.2. ábra. Nemlineárisan rugalmas test jelleggörbéje
(a. - lágyuló, b. - keményedő anyag)

E modulusz ismeretében az adott ε fajlagos alakváltozásnak megfelelő feszültséget a

$$\sigma(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} E_t(\varepsilon) d\varepsilon \quad (7.4)$$

integrállal számíthatjuk ki. Ezzel szemben a 7.2. kifejezés a két mennyiség közötti kapcsolatot közvetlenül, egy $E_s(\varepsilon)$ *szekáns* (metsző) rugalmassági modulusz segítségével, a lineáris eset 7.1. törvényével analóg módon fejezi ki. A szekáns modulusz meghatározza az aktuális alakváltozásnak megfelelő feszültséget, de nem nyújt közvetlen információt az $\varepsilon - \sigma$ kapcsolat alakulásáról.

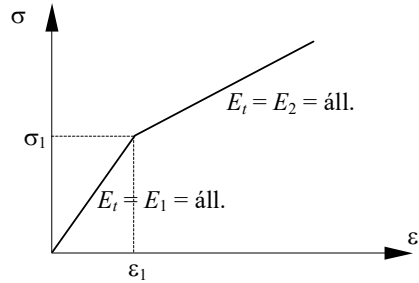


7.3. ábra. A tangenciális és a szekáns rugalmassági modulusz

A két egyenletet (7.2. és 7.4.) egybevetve megállapíthatjuk a szekáns Young-modulusz értékét:

$$E_s(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \int_0^{\varepsilon} E_t(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (7.5)$$

Egyszerűsítésként a $\sigma(\varepsilon)$ görbét gyakran közelítik egyenes szakaszokkal, ekkor a modellt *linearizálnak* mondják. Példaként a 7.4. ábra a bilineáris modellt mutatja be.



7.4. ábra. A bilineáris anyagmodell

A szerkezetet felépítő elemek anyagának nemlinearitása miatt a merevségi mátrix tagjai nem lesznek állandók, vagyis az egyensúlyt kifejező $[K] \cdot \{D\} = \{F\}$ egyenletrendszer sem lesz lineáris. Az egyenletrendszer megoldását ilyenkor iteratív eljárásokkal végzik el.

Alapjában véve a kidolgozott iteratív eljárásokat két kategóriába sorolhatjuk attól függően, hogy a merevségi mátrix tagjait milyen módon fejezzük ki: vannak olyan numerikus módszerek, amelyek a szekáns anyagjellemzők ismeretére alapoznak (ilyen a továbbiakban bemutatott „közvetlen” eljárás), és vannak olyan módszerek (Euler, Newton-Raphson), amelyek a tangenciális anyagjellemzőket igénylik. Az alkalmazott módszer kiválasztásánál tehát döntő szerepe van annak, hogy az anyagegyenletet milyen módon fejezzük ki. Amennyiben a $\sigma - \varepsilon$ görbét pontonként, vagyis (ε, σ) értékpárokkal adjuk meg, úgy a szekáns Young-modulusz kiszámítása válik lehetségessé (az origóra vonatkoztatva $E_s(\varepsilon) = \sigma / \varepsilon$), míg ha azt egy deriválható $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ függvénnyel írjuk le, akkor a tangenciális Young-moduluszt is kifejezhetjük (az ugyanis e függvény deriváltja: $E_t(\varepsilon) = d\sigma(\varepsilon)/d\varepsilon$).

7.1.1.1. A közvetlen eljárás

A nemlineáris szekáns anyagparaméterek (E, ν) ismeretében a szekáns merevségi mátrix kiszámítása nem ütközik nehézségekbe:

$$[k_s]_e = \int_{V_e} [B]_e^T \cdot [E_s]_e \cdot [B]_e dV. \quad (7.6)$$

Mivel a 7.6. egyenletben a fajlagos alakváltozás értékét nem ismerjük előre, a számítások kezdetén az $[E_s]_e$ szekáns rugalmassági mátrixot egy tetszőleges $\{\varepsilon_0\}_e$ kezdeti alakváltozási állapotra határozzuk meg (megtörténhet azonban az is, hogy az anyagparamétereket a feszültség függvényében adják meg, ekkor a kiindulási állapotot $\{\sigma_0\}_e$ jelenti). E kiindulási állapot lehet például a zérus fajlagos alakváltozásokat jelentő feszültségmentes állapot, ez esetben a szekáns együtthatók az origóban felvett tangenciális együtthatók lesznek. Végelemenként, a választott kiindulási állapotnak megfelelő rugalmassági mátrixszal meghatározzuk az elemi szekáns merevségi mátrixot és összeállítjuk a szerkezet $[K_s]$ szekáns merevségi mátrixát, majd a

$$[K_s] \cdot \{D_1\} = \{F\} \quad (7.7)$$

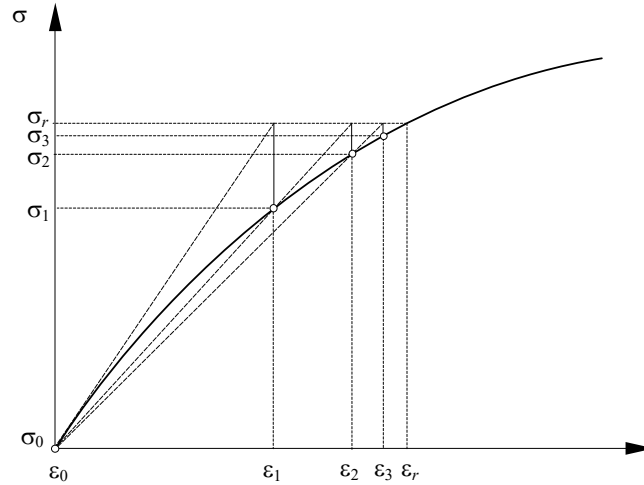
egyenletrendszert megoldva kiszámítjuk a $\{D_1\}$ elmozdulásokat. Ezekkel az elmozdulásokkal meghatározzuk az új alakváltozási állapotot, végelemenként:

$$\{\varepsilon_1\}_e = [B]_e \cdot \{d_1\}_e, \quad (7.8)$$

illetve az új feszültségi állapotot:

$$\{\sigma_1\}_e = [E_s]_e \cdot [B]_e \cdot \{d_1\}_e, \quad (7.9)$$

melyek legfennebb véletlenül egyeznek az előre feltételezett $\{\epsilon_0\}_e$ -val, illetve $\{\sigma_0\}_e$ -val. Ezzel az új $\{\epsilon_1\}_e$ alakváltozási vagy $\{\sigma_1\}_e$ feszültségi állapottal a számításokat a rugalmassági mátrix kiszámításával kezdődően megismételjük.



7.5. ábra. Iterációk a szekáns rugalmassági együtthatók használatával

Az eljárást iteratív, lépéseit tehát például az

$$\{\epsilon_i\}_e = [B]_e \cdot \{d_i\}_e, \quad (7.10)$$

$$[K(\epsilon_i)] \cdot \{D_{i+1}\} = \{F\} \quad (7.11)$$

egyenletek adják. Konvergenciáját az elmozdulásoknak az adott lépésben történő

$$\{e\} = \{D_{i+1}\} - \{D_i\} \quad (7.12)$$

változása, pontosabban e mennyiség

$$|e| = \sqrt{\{e\}^T \cdot \{e\}} \quad (7.13)$$

vagy

$$|e| = \max(e_i) \quad (7.14)$$

normájának vizsgálata adja: ha ez egy elfogadhatónak tekintett e_0 értéknél kisebbé válik, akkor a számításokat befejezettek tekinthetjük. A számítások menetét a 7.5. ábra mutatja be.

7.1.1.2. Az Euler-módszer

Észrevehetjük, hogy míg a lineárisan rugalmas szerkezetek esetében az egyenletrendszert csak egyszer kellett megoldani, a nemlineáris esetben e műveletre többször is sor kerül. Éppen ezért a nemlineáris szerkezetek analízise sokkal időigényesebb mint a lineárisoké, s ennek következményeként felvetődik tehát a konvergencia felgyorsításának igénye.

Az előbb ismertetett „direkt” módszer konvergenciájának gyorsasága a szerkezet fokozatos, lépcsőzetes terhelésével növelhető. Ekkor az $\{F\}$ terhelésvektort néhány, rendszerint egyenlő nagyságú $\{\Delta F_i\}$ komponensre, terhelésfokozatra bontjuk fel:

$$\{\mathbf{F}\} = \sum_{i=1}^n \{\Delta\mathbf{F}_i\}. \quad (7.15)$$

Valamely $\{\Delta\mathbf{F}_i\}$ terhelésfokozat (növekmény) esetén az előző $(i-1)$ lépésben kiszámolt alakváltozási és feszültségállapottal meghatározzuk a tangenciális anyagjellemzőket, azokkal az elemi merevségi mátrixokat és összeállítjuk a globális merevségi mátrixot. A

$$[\mathbf{K}_i] \cdot \{\Delta\mathbf{D}_i\} = \{\Delta\mathbf{F}_i\} \quad (7.16)$$

egyenletrendszer megoldásával kiszámítjuk az adott terhelés-növekmények által okozott $\{\Delta\mathbf{D}_i\}$ elmozdulás-növekményeket, amelyekkel az elmozdulásokat az

$$\{\mathbf{D}_i\} = \{\mathbf{D}_{i-1}\} + \{\Delta\mathbf{D}_i\} \quad (7.17)$$

összegként számítjuk ki. Az elmozdulás-növekményekkel a fajlagos alakváltozás, illetve a feszültség-növekményei

$$\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_i\}_e = [\mathbf{B}]_e \cdot \{\Delta\mathbf{d}_i\}_e, \quad (7.18)$$

és

$$\{\Delta\boldsymbol{\sigma}_i\}_e = [\mathbf{E}_{i-1}]_e \cdot [\mathbf{B}]_e \cdot \{\Delta\mathbf{d}_i\}_e, \quad (7.19)$$

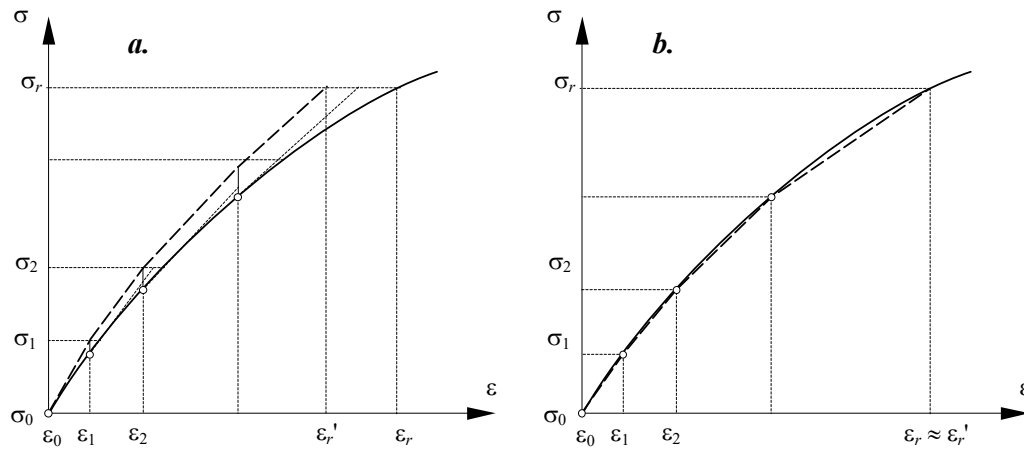
a fajlagos alakváltozások és a feszültségek aktuális értéke pedig

$$\{\boldsymbol{\sigma}_i\}_e = \{\boldsymbol{\sigma}_{i-1}\}_e + \{\Delta\boldsymbol{\sigma}_i\}_e, \quad (7.20)$$

illetve

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}_e = \{\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1}\}_e + \{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_i\}_e. \quad (7.21)$$

Ez a megoldási módszer tulajdonképpen az elsőfokú differenciálegyenletek megoldásának legegyszerűbb eljárásával, az Euler-módszerrel azonos. Menetét a 7.6.a. ábra mutatja be.



7.6. ábra. Az Euler-módszer (a.) és a módosított Euler-módszer (b.) iterációi

Amint az ábra szemrevételezésével is kiderül, az eljárással megállapított pontok az iterációk számának növekedésével egyre távolabb kerülhetnek a tényleges viselkedést leíró görbétől. Az

ábrán ezt az eltérést a görbe felett elhelyezkedő tört vonal távolsága mutatja. A tangenciális merevség használata miatt, a tört vonalat alkotó egyenes szakaszok a görbéhez húzott, szaggatott vonallal ábrázolt érintőkkel párhuzamosak. E hiba kiküszöbölésére vagy csökkentésére az Euler-módszernél pontosabb eljárásokat kellene alkalmaznunk, mint amilyen például a Runge-Kutta eljárás lenne. A pontosabb eljárások azonban a műveletek számának növekedéséhez vezetnek s éppen ezért a végeelem-módszerben nem igazán népszerűek. Gyakorlati szempontból kielégítő pontosságú és gyorsaságú a módosított Euler-módszer, amelynek során az inkrementumok kiszámítását az adott terhelés-fokozathoz tartozó számítás-sorozaton belül a merevségi mátrix egyszeri újraszámolása követi. Minden iterációt tehát egy

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\} = (1-\theta) \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1}\} + \theta \cdot \{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_i\}, \quad \theta \in (0,1) \quad (7.22)$$

alakváltozási vagy

$$\{\boldsymbol{\sigma}_i\} = (1-\theta) \cdot \{\boldsymbol{\sigma}_{i-1}\} + \theta \cdot \{\Delta\boldsymbol{\sigma}_i\}, \quad \theta \in (0,1) \quad (7.23)$$

feszültségállapotnak megfelelő $[\mathbf{K}_i]$ merevségi mátrixszal megismételünk:

$$[\mathbf{K}_i] \cdot \{\Delta\mathbf{D}_i\} = \{\Delta\mathbf{F}_i\}, \quad (7.24)$$

az új $\{\Delta\mathbf{D}_i\}$ elmozdulás-inkrementummal az iteráció végén a 7.17.-7.21. relációkkal meghatározzuk a keresett mennyiségek új értékeit. A θ együttható értéke általában 0.5.

A módosított Euler-módszerben a görbét közelítő tört vonalat alkotó szakaszok már nem lesznek párhuzamosak a kezdőpontban megrajzolt érintőkkel, hiszen a merevségek valamilyen köztes állapotnak felelnek meg. A 7.22. (vagy a 7.23.) súlyozott átlagnak megfelelő tangenciális merevség – az ábrán: Young-modulusz – ideális esetben éppen az $i-1$ és az i pontokon keresztül húzott szekáns merevséggel azonos (a gyakorlatban remélhetőleg annak eléggé pontos közelítését adja), ekkor a tört vonal húrokkal közelítené a görbe íveit. A szekáns merevség ilyen közelítése akkor kielégítő, amikor a nemlineáris $\sigma-\varepsilon$ kapcsolatot leíró görbe görbülete nem változik számottevően az említett két pont között.

7.1.1.3. A módosított Newton-Raphson eljárás

A nemlineáris feladatok megoldásában egy másik gyakran alkalmazott módszer a transzcendens egyenletek numerikus megoldásának Newton-Raphson eljárása. Ebben az esetben is a merevségi mátrixot a kezdetben egy tetszőleges – leggyakrabban a feszültségmentes – állapotra határozzuk meg, majd a

$$[\mathbf{K}_1] \cdot \{\mathbf{D}_1\} = \{\mathbf{F}\} \quad (7.25)$$

egyenletrendszer megoldásával kiszámítjuk az elmozdulások első, $\{\mathbf{D}_1\}$ közelítését. Ezen elmozdulásokkal a szokásos módon meghatározzuk az alakváltozási és a feszültségállapot első közelítését is, végeelemenként:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_1\}_e = [\mathbf{B}]_e \cdot \{\mathbf{d}_1\}_e, \quad (7.26)$$

illetve

$$\{\boldsymbol{\sigma}_1\}_e = [\mathbf{E}]_e \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}_1\}_e. \quad (7.27)$$

Az így meghatározott feszültségi és alakváltozási állapotok a rugalmassági paraméterek tetszőleges megválasztása miatt nem elégítik ki az analitikus formában ismert vagy (σ, ε) értékpárokkal megadott

$$\{\boldsymbol{\sigma}_1\}_e = f(\{\boldsymbol{\varepsilon}_1\}_e) \quad (7.28)$$

összefüggést. A jelentkező

$$\{\Delta\boldsymbol{\sigma}_1\}_e = f(\{\boldsymbol{\varepsilon}_1\}_e) - [\mathbf{E}_1]_e \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}_1\}_e \quad (7.29)$$

különbséget mint kezdeti feszültségállapotot tekinthetjük, amelynek elemenként egy-egy

$$\{\Delta\mathbf{f}_1\}_e = - \int_{V_e} [\mathbf{B}]_e^T \cdot \{\Delta\boldsymbol{\sigma}_1\}_e dV \quad (7.30)$$

terhelésvektort feleltethetünk meg. Az elemi $\{\Delta\mathbf{f}_1\}_e$ vektorokból a reziduális erők strukturális

$$\{\Delta\mathbf{F}_1\} = \sum \{\Delta\mathbf{f}_1\} \quad (7.31)$$

vektorát összeállítva, az mint kiegyensúlyozatlan terhelés jelentkezik. Az egyensúly helyreállításához a

$$[\mathbf{K}_2] \cdot \{\Delta\mathbf{D}_1\} = \{\Delta\mathbf{F}_1\} \quad (7.32)$$

egyenletrendszer megoldásával kiszámítjuk az elmozdulások $\{\Delta\mathbf{D}_1\}$ korrekcióját. A $[\mathbf{K}_2]$ mátrix az eredeti Newton-Raphson eljárásban az előző iteráció végén kapott alakváltozási vagy feszültségi állapotnak megfelelő mátrix lenne. E módszerben tehát a szerkezet merevségi mátrixát minden iterációban újra ki kellene számítani és annak az inverzét is meg kellene állapítani, ez pedig egy túlságosan időigényes feladat. E hátrányok következményeként a Newton-Raphson eljárást olyanképpen módosították, hogy megtartották a kezdeti merevségi mátrixot (tehát ekkor $[\mathbf{K}_2] = [\mathbf{K}_1]$), s így annak összeállítását és inverzének kiszámítását csak egyszer kell elvégezni. Ezzel az egyszerűsítéssel a konvergencia lelassul, tehát ugyanolyan pontosságú eredmények eléréséhez több iteráció szükséges, azonban az időigényes műveletek egyszeri elvégzése miatt a számítási idő jelentősen csökken.

Az elmozdulások korrekciójával kiszámítjuk a fajlagos alakváltozások

$$\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_1\}_e = [\mathbf{B}]_e \cdot \{\Delta\mathbf{d}_1\}_e \quad (7.33)$$

és a feszültségek

$$\{\Delta\boldsymbol{\sigma}_1\}_e = [\mathbf{E}_2]_e \cdot \{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_1\}_e \quad (7.34)$$

korrekcióját is. A korrigált értékek tehát

$$\begin{aligned} \{\mathbf{D}_2\}_e &= \{\mathbf{D}_1\}_e + \{\Delta\mathbf{D}_1\}_e, \\ \{\boldsymbol{\varepsilon}_2\}_e &= \{\boldsymbol{\varepsilon}_1\}_e + \{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_1\}_e, \\ \{\boldsymbol{\sigma}_2\}_e &= \{\boldsymbol{\sigma}_1\}_e + \{\Delta\boldsymbol{\sigma}_1\}_e. \end{aligned} \quad (7.35)$$

A fajlagos alakváltozások korrigált értékével a számításokat a 7.29. egyenlettől megismételve tehát egy iteratív eljáráshoz jutunk. A konvergencia mértéke ez esetben a $\{\Delta\mathbf{F}\}$ reziduális erő valamely normája.

Amennyiben a 7.28. összefüggésnek az

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = f(\{\boldsymbol{\sigma}\}) \quad (7.36)$$

fordítottja ismert, akkor a 7.29. feszültségi állapot helyett egy

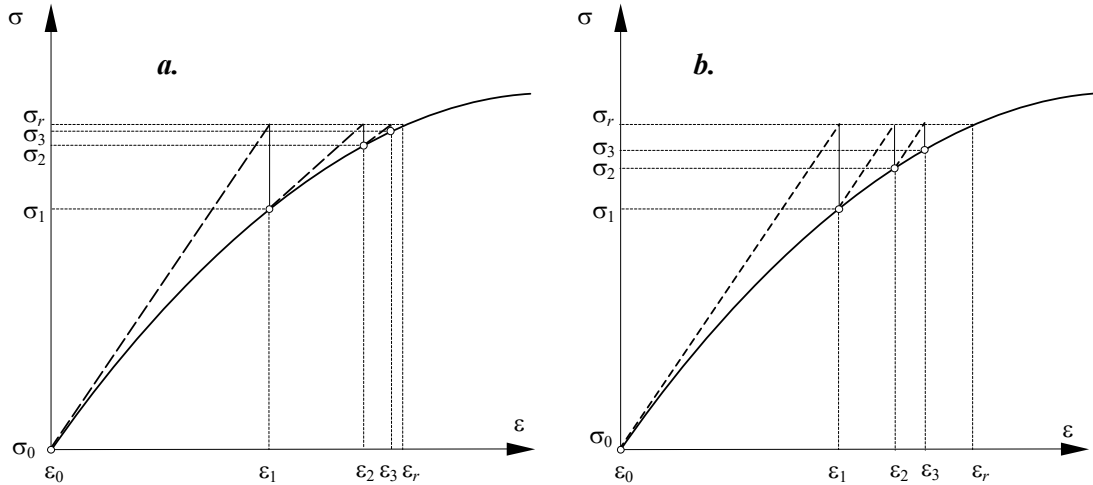
$$\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_1\}_e = f(\{\boldsymbol{\sigma}_1\}_e) - \{\boldsymbol{\varepsilon}_1\}_e \quad (7.37)$$

kezdeti alakváltozási állapottal dolgozunk, az elemi reziduális erőket pedig ekkor a

$$\{\Delta f_1\} = - \int_{V_e} [B]_e^T \cdot [E_1]_e \cdot \{\Delta \epsilon_1\} dV \quad (7.38)$$

összefüggés adja.

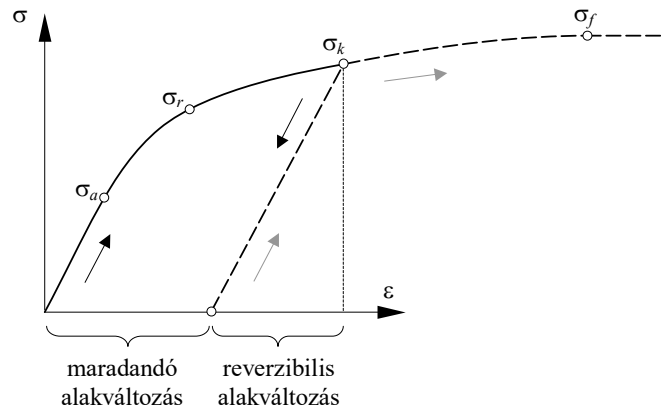
Az iterációk menetét – mindkét esetben – a 7.7. ábra szemlélteti. A konvergencián a lépcsőzetes terhelés alkalmazása is javíthat.



7.7. ábra. A Newton-Raphson módszer (a.) és a módosított Newton-Raphson módszer (b.)

7.1.2. Az elasztoplasztikus test

A rugalmas test alakváltozása reverzibilis: a külső hatás megszűnése után az újra felveszi eredeti alakját. A valódi testek alakváltozása gyakran megközelítőleg sem reverzibilis, a külső hatás megszűnése után kisebb-nagyobb maradandó, remanens alakváltozás észlelhető (7.8. ábra).

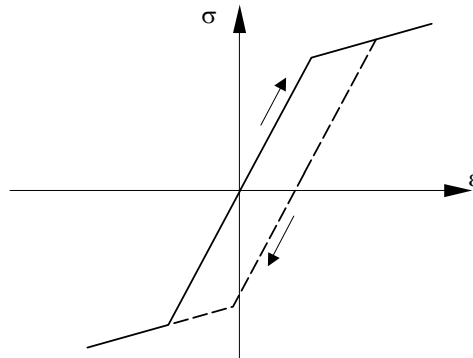


7.8. ábra. Rugalmatlan alakváltozás

Az ábrázolt esetben a testet (például egy acélból készült rudat) az anyag σ_r rugalmassági határát meghaladó mértékben terheljük; e folyamat alatt a feszültség változását folytonos vonallal rajzoltuk meg. Ez a vonal egy darabig egyenes – ezen a szakaszon a próbatestünk lineárisan

rugalmas –, a lineáris viselkedés tartományát felülről lehatároló σ_a arányossági határ elérése után pedig az meggörbül. Ha a terhelést tovább folytatnánk, akkor a σ_f folyáshatár elérése után a görbe vízszintessé válna: ekkor a rúd alakváltozása állandó terhelés alatt növekedne.

A rugalmassági határ átlépése után (de még a folyáshatár elérése előtt, a σ_k pontban) a terhelést megszüntettük: az igénybevétel csökkenésével a test alakváltozása is csökkent ugyan, de a terheletlen test nem nyerte vissza eredeti méreteit. A tehermentesítés folyamatát szaggatott vonal jelzi, amely párhuzamos a rugalmas alakváltozást jelentő szakasszal. Megjegyzendő, hogy ez a párhuzamosság nem minden anyag esetében érvényes.



7.9. ábra. A Bauschinger-hatás

Ha most a próbatestet újra megterheljük, akkor e folyamat a σ – ε grafikonon a tehermentesítés előzőleg megrajzolt görbéjét fogja követni (megközelítőleg, legalábbis).

A képlékeny (plasztikus) alakváltozást szenvedett anyag újratehereléskor tehát már nem az eredeti $\sigma(\varepsilon)$ görbét fogja követni, a feszültség addig elért maximumáig rugalmas viselkedést mutathat (ez a keményedés jelensége). Ehhez rendszerint az ellenkező előjelű terhelés folyáshatárának megfelelő csökkenése társul (Bauschinger-hatás), amint az a 7.9. ábrán igen leegyszerűsített formában látható. Ezen okok miatt az anyag viselkedésére pusztán a pillanatnyi alakváltozási és feszültségállapota alapján már nem következtethetünk, a terhelés további változása által előidézett alakváltozás kiszámításához ismernünk kell azt is, hogy az előzőleg milyen folyamatokon ment keresztül.

Az ilyen viselkedést mutató anyagot – amelyben tehát a rugalmas mellett maradandó és állandó terhelés mellett időben nem változó alakváltozás is megjelenik – elasztoplasztikusnak nevezik.

7.1.2.1. A Ramberg-Osgood modell

A Ramberg-Osgood modell egy gyakran használt elasztoplasztikus anyagtörvény, amely az előbbi példánktól eltérően feltételezi hogy a rugalmatlan alakváltozás már a kezdetektől fogva megjelenik. E modell a fajlagos alakváltozást két összetevő összegeként írja le:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \frac{\sigma}{E} + k \cdot \left(\frac{\sigma}{E} \right)^n, \quad (7.39)$$

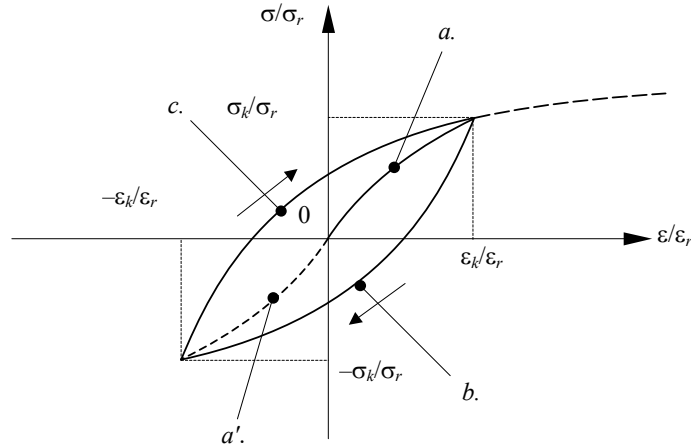
ahol az E , k és n anyagállandókat a kísérletileg meghatározott σ – ε görbe alapján állapítjuk meg. Az összeg két tagja a rugalmas (elasztikus), illetve a képlékeny (plasztikus) alakváltozásnak felelnek meg, az utóbbit pedig a Ramberg-Osgood modell az előbbi függvényeként adja meg. A

rugalmas összetevőt a 7.8. ábra szaggatott tehermentesítési görbéjének megfelelő alakváltozással helyettesíti, az E paraméter e vonal dőlésének felel meg. A k és az n állandókat úgy állapítják meg, hogy az előbbi képlettel megrajzolt görbe minél közelebb álljon a kísérletileg meghatározottal. A képlékeny alakváltozás a $\sigma - \varepsilon$ görbe mentén végig követi a rugalmas alakváltozást, tehát ez a törvény a megadott formájában csak olyan anyagok esetében használható, amelyeknél a legkisebb igénybevétel is maradandó alakváltozáshoz vezet.

E modell gyakorlatban meghonosodott formája a fenti összeg második tagját a rugalmassági határ σ_r értékével fejezi ki, az $\alpha = k \cdot (\sigma_r / E)^{n-1}$ jelölés (újabb anyagi állandó) bevezetésével:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \cdot \frac{\sigma_r}{E} \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_r} \right)^n. \quad (7.40)$$

Ez az összefüggés csak az első terhelés görbéjét adja meg, a „szűzgörbét”. Ha a feszültség σ_k értékénél megállunk és az elasztikus próbatestünket tehermentesítjük, akkor meg kell adnunk a tehermentesítés $\sigma - \varepsilon$ görbéjét is. Ezt a görbét Masing szabálya szerint alkották meg. E szabály szerint, feltételezvé, hogy az anyag húzásra és összenyomásra szimmetrikusan viselkedik, megrajzolhatjuk az origóra nézve szimmetrikusan elhelyezkedő, a $\sigma_k' = -\sigma_k$ feszültségnek megfelelő pontot. Ekkor a $-\sigma_k$ és a σ_k feszültségnek megfelelő pontok között a terhelésgörbét a szűzgörbe skálázásával kapjuk meg (azt kétszeresére kell felnagyítani).



7.10. ábra. A Ramberg-Osgood modell

Ahhoz, hogy e görbék egyenletét egyszerű képletekkel megadhassuk, a 7.40. anyagtvényt végigosztjuk a rugalmassági határnak megfelelő $\varepsilon_r = \sigma_r / E$ fajlagos alakváltozással, így dimenzió nélküli mennyiségekhez jutunk. Így a szűzgörbe (a 7.10. ábrán húzásra a.-val jelölve, az a'. görbe az összenyomás szűzgörbéje):

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\sigma_r} + \alpha \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_r} \right)^n, \quad (7.41)$$

a tehermentesítés és a fordított irányú terhelés görbéje (az ábrán b.):

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon_k}{2 \cdot \varepsilon_r} = \frac{\sigma - \sigma_k}{2 \cdot \sigma_r} + \alpha \cdot \left(\frac{\sigma - \sigma_k}{2 \cdot \sigma_r} \right)^n, \quad (7.42)$$

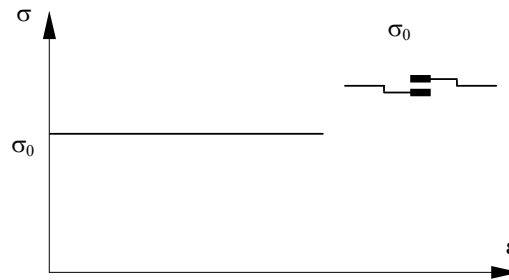
az újratehelés görbéje pedig (c.):

$$\frac{\varepsilon + \varepsilon_k}{2 \cdot \varepsilon_r} = \frac{\sigma + \sigma_k}{2 \cdot \sigma_r} + \alpha \cdot \left(\frac{\sigma + \sigma_k}{2 \cdot \sigma_r} \right)^n. \quad (7.43)$$

Észrevehetjük, hogy a ciklikus terhelés hiszteretikus, a zárt görbe által lehatárolt terület az egységnyi térfogatban hővé alakuló mechanikai energiával arányos (ε és σ koordinátákkal ábrázolván azzal egyenlő).

7.1.2.2. Linearizált modellek

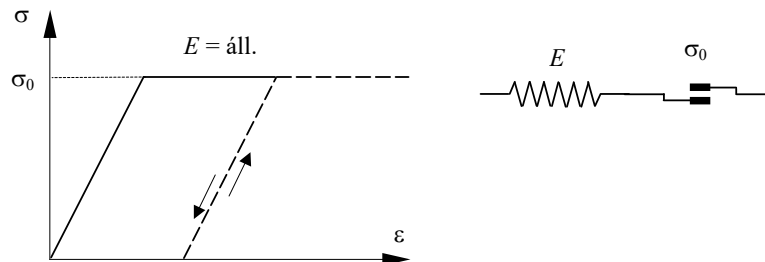
A Ramberg-Osgood modellnél jóval egyszerűbbeket is felépíthetünk az idealizált tökéletesen merev - tökéletesen képlékeny de Saint-Venant test segítségével (7.11. ábra).



7.11. ábra. A de Saint-Venant-test

A de Saint-Venant test egyetlen paramétere a σ_0 határérték, amely alatt az tökéletesen merev, felette pedig tökéletesen rugalmatlan (képlékeny). A deformálódó test által kifejtett ellenálló erő (az ábrán: feszültség) nagysága a σ_0 határérték.

A de Saint-Venant testet általában nem önmagában, hanem más testekkel összekapcsolva használják. Vannak olyan anyagok, amelyeknél a rugalmatlan alakváltozások csak a feszültség bizonyos határértéke, a rugalmassági határ felett jelentkeznek. Viselkedésük egyszerű reológiai modelljét a de Saint-Venant és a Hooke testek kombinációjaként kapjuk, ez pedig a Prandtl-modell, amelyet a 7.12. ábrán láthatunk.



7.12. ábra. A Prandtl-test

Ez a modell a σ_0 határértéktől rugalmas alakváltozást mutat, amely a Hooke-test alakváltozásából fakad. E határérték felett a Prandtl-test σ_0 ellenállás mellett deformálódik, ekkor a Hooke-test rugalmas alakváltozásához a de Saint-Venant test képlékeny alakváltozása is

hozzáadódik. Tehermentesítéskor a modell alakváltozása elasztikus (ez a Hooke-test alakváltozása), a de Saint-Venant test képlékeny alakváltozása megmarad. Míg az egydimenziós elemekből álló szerkezetek esetében a rugalmatlanság (képlékenység) állapotának elérését a σ_e rugalmassági határ, a képlékenység állapotának elérését pedig a σ_f folyáshatár egyértelműen meghatározza, a sík- vagy a térbeli feszültségállapot esetén nem ennyire egyszerű a helyzet. Ekkor az adott feszültségállapothoz rendelt egyenértékű egytengelyű (redukált) feszültségállapot vizsgálatára szorítkozunk.

7.1.2.3. Redukált feszültségek, tönkremeneteli kritériumok

Sík- vagy a térbeli feszültségállapot esetén az adott többdimenziós feszültségállapothoz egy vele egyenértékű egytengelyű (redukált) feszültségállapotot rendelnek, a maradandó alakváltozást vagy törést okozó állapot elérését pedig a σ_{red} redukált feszültségnek az adott feszültséghatárokat meghaladó értéke jelzi (például $\sigma_{red} > \sigma_r$). A terhelés növekedésekor az adott határértéknél nagyobb redukált feszültség először általában csak egy bizonyos helyen keletkezik, ott például az anyag plasztikussá válhat.

A redukált feszültség meghatározását tekintve több elmélet is létezik, ezek közül a gyakorlat szempontjából a következők bírnak kiemelt jelentőséggel.

a). A legnagyobb nyírófeszültség Tresca-féle feltétele a nyírófeszültség legnagyobb értéke és a redukált feszültségnek megfelelő legnagyobb nyírófeszültség közé tesz egyenlőséget (a redukált állapotban a másik két főfeszültség nulla):

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{red}}{2}, \quad (7.44)$$

ahonnan az egyenértékű normál feszültség

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (7.45)$$

b). A torzítási energiasűrűség feltétele (von Mises) a redukált feszültséget az u_t torzítási energiasűrűségek (a fajlagos u_d alakváltozási energia és a fajlagos u_v térfogatváltozási energia különbsége, $u_t = u_d - u_v$) egyenlőségéből állapítja meg:

$$u_t = \frac{1+\nu}{6 \cdot E} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] = \frac{1+\nu}{6 \cdot E} \cdot 2 \cdot \sigma_{red}^2, \quad (7.46)$$

ahonnan

$$\sigma_{red} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]}. \quad (7.47)$$

Az alakváltozási energia általános képlete:

$$U_d = \frac{1}{2} \cdot \int_V (\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \sigma_z \cdot \varepsilon_z + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz}) dV. \quad (7.48)$$

A főfeszültségekkel ennek sűrűségét (térfogatra fajlagosított mennyiségét)

$$u_d = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_1 \cdot \sigma_3) \quad (7.49)$$

formában kapjuk. A térfogatváltozási energiasűrűséget ugyanezzel a kifejezéssel számíthatjuk, amikor mindhárom irányban a térfogatváltozásért felelős oktaéderes nyújtófeszültség (a három főfeszültség átlaga, $\sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$) hat:

$$u_v = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot (3 \cdot \sigma_0^2) - \frac{\nu}{E} \cdot (3 \cdot \sigma_0^2) = \frac{3 \cdot \sigma_0^2}{2 \cdot E} \cdot (1 - 2 \cdot \nu). \quad (7.50)$$

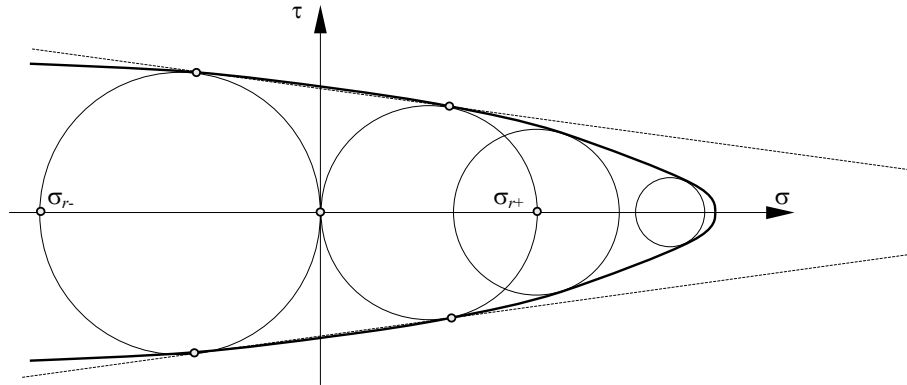
Az u_i mennyiség tehát e két utóbbi különbségeként számítható ki.

c). Mohr feltétele gyakorlati megfigyelésekre alapoz. Mohr a redukált feszültség meghatározását kísérleti úton végezte el, azonos minőségű próbatestek különböző feszültségállapotú, maradandó alakváltozáshoz vezető terhelésével. A tönkremenetelhez vezető feszültségállapotok Mohr-köreinek burkológörbéje a tönkremeneteli (intrinszek, folyási) határgörbét adja (7.13. ábra).

A kapott görbét két egymást metsző egyenessel lehet megközelíteni. Ha ez a két egyenes a tiszta nyújtás (σ_{r+}) és a tiszta nyomás (σ_{r-}) határköréhez érintőlegesen, akkor a redukált feszültség értéke

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{r+}}{\sigma_{r-}} \cdot \sigma_3 \quad (7.51)$$

lesz. A σ_r rugalmassági határok helyett más értékeket (például a folyáshatárokat) is használhatunk. Ha $\sigma_{r+} = \sigma_{r-}$ (az anyag húzás és nyomás esetén egyformán viselkedik), akkor a Tresca-féle legnagyobb nyírófeszültség elméletével meghatározott redukált feszültséghez jutunk; ekkor a burkológörbét közelítő egyenesek egymással párhuzamosak lesznek.



7.13. ábra. A Mohr-féle tönkremeneteli határgörbe

A rugalmatlanság, a törés, illetve bármilyen fontosnak tartott jelenség bekövetkeztét tehát a

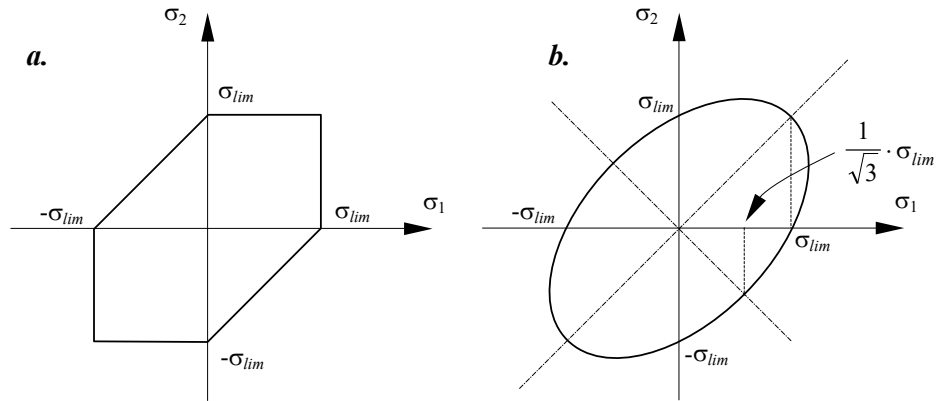
$$\sigma_{red} = \sigma_{lim} \quad (7.52)$$

egyenlőség jelzi, ahol σ_{lim} az adott állapot egytengelyű terhelés alatti bekövetkeztének határértéke. Ezt az egyenlőséget

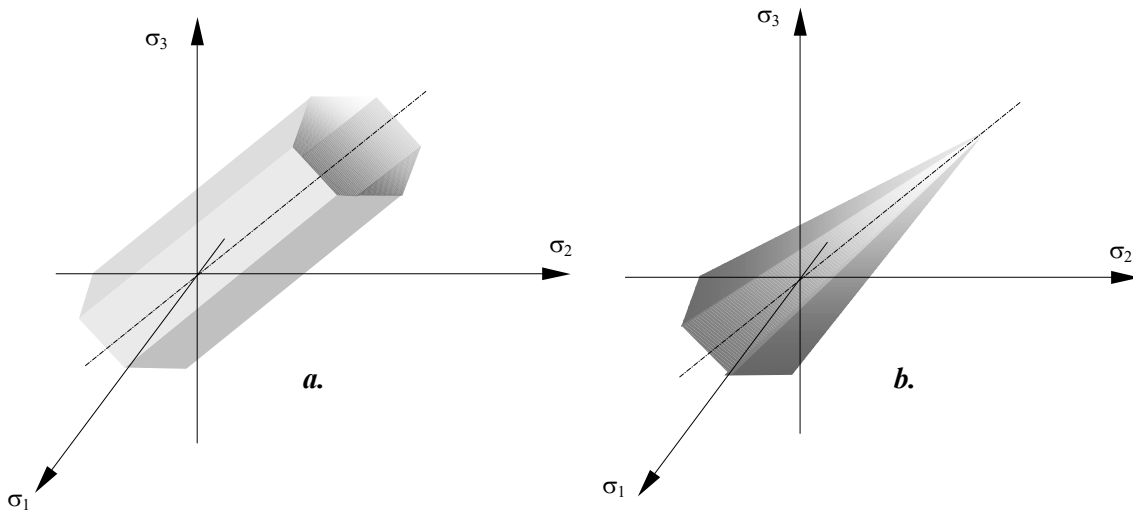
$$F(\{\sigma\}) = 0 \quad (7.53)$$

formában is felírhatjuk. A fenti két összefüggés az adott állapot elérésének feltétele vagy kritériuma.

Az F kritérium analitikus kifejezése a redukált feszültség megállapítására használt feltételek alapján írható fel. Az F kritérium a $\sigma_1\sigma_2$ koordináta-rendszerben egy határvonalat, a $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ koordináta-rendszerben pedig egy határfelületet ír le, ez a *szilárdsági felület*. Amennyiben egy adott terhelés által előidézett feszültségi állapotnak megfelelő pont a határfelület által lehatárolt térrész belsejében van, akkor az illető feltétel által leírt állapot – például a maradandó alakváltozások megjelenése – még nem következhet be. Ha azonban e pont az adott felületen vagy azon kívül van, akkor az F kritériummal leírt esemény megtörténésével kell számolnunk (megjegyzendő, hogy a ténylegesen lehetséges feszültségállapotnak megfelelő pont elméletileg nem lehet a szilárdsági felületen kívül).



7.14. ábra. Tresca és Mohr (a.), valamint von Mises (b.) feltételének ábrázolása



7.15. ábra. A Tresca- (a.) és Mohr-feltétel (b.) szerinti tönkremeneteli kritériumok által leírt felületek

Tresca és Mohr feltételei sík feszültségi állapotban a 7.14. ábrán látható szabálytalan hatszöget adják míg a von Mises-feltétel egy ellipszishez vezet. Amennyiben σ_{lim} modulusza húzásra és összenyomásra nem ugyanaz, akkor a felrajzolt idomok ezen értékeknek megfelelően torzulnak.

Térbeli esetben a $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ egyenlettel megadott tengelyű idomokat kapunk: amennyiben az anyag húzásra és összenyomásra ugyanúgy viselkedik és izotróp, Tresca kritériuma egy

szabályoz hatszög alapú hasáb, Mohr kritériuma egy szabályos hatszög alapú gúla, von Mises-feltétele pedig szabályos körhenger felületét adja. A síkbeli esetről megállapított idomok e felületek $\sigma_1\sigma_2$ síkkal alkotott metszetei.

7.1.2.4. A képlékenység elméletének alapjai

A képlékenység elméletében az F mennyiséget folyási függvénynek nevezik, az a képlékenység állapotának bekövetkezését jelzi. E függvény (feltétel, kritérium) mellett a jelenségek leírásához még két dologra van szükségünk, a képlékeny alakváltozást leíró folyási törvényre és a keményedést leíró törvényre.

A képlékeny alakváltozást egy folyadék potenciális áramlásához hasonlították s így hozzárendeltek egy bármely pontban deriválható $Q(\{\sigma\})$ skaláris potenciálfüggvényt, amelyet az $F(\{\sigma\})$ folyási függvényhez hasonlóan a főfeszültségekkel, mint koordinátákkal írtak le. Ennek ismeretében a képlékeny alakváltozás növekménye

$$\{d\epsilon_p\} = d\lambda \cdot \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma_i} \right\} \quad (7.54)$$

formában adható meg. Ezen eredmények a fenti analógiából származnak, ugyanis az áramlásban a potenciálfüggvény koordináták szerinti deriváltjai a lokális áramlási sebességeket adják, azok pedig a folyadék alakváltozási sebességével hozhatók összefüggésbe. A fenti képletben $d\lambda$ egy arányossági tényező, a képlékenységi tényező. Ez nem anyagi állandó, nagysága a pontonként különbözhet és a terhelési folyamat alatt folyamatosan változhat.

A fenti összefüggést a normalitás elvének is nevezik, mivel szerinte a képlékeny alakváltozás iránya a Q függvény által leírt felületre merőleges lesz.

A folyási törvény adott megfogalmazásban a $\{d\epsilon_p\}$ vektor az alakváltozási állapot főértékeit tartalmazza, de mindkét függvényt (F -et és Q -t) kifejezhetjük valamely tetszőlegesen megválasztott koordinátarendszer tengelyeinek irányában megadott feszültségekkel és fajlagos alakváltozásokkal is; ekkor $d\epsilon_x^p = d\lambda \cdot \partial Q / \partial \sigma_x$ és így tovább.

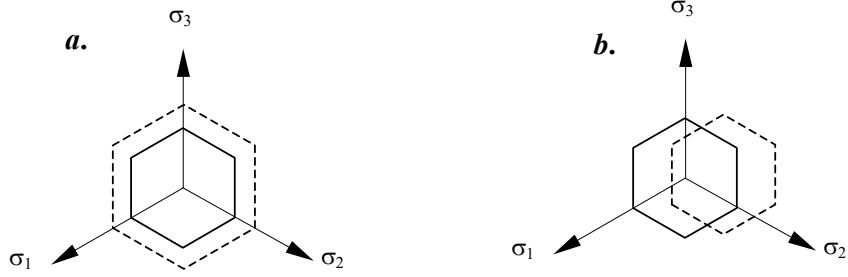
Ahhoz, hogy e törvényt használni is tudjuk, szükségünk van a Q potenciálra és a $d\lambda$ képlékenységi tényezőre.

Bizonyos megfontolások alapján von Mises és Drucker megfogalmazták azt a posztulátumot, mely szerint a Q potenciálfüggvény az F folyási függvénnyel azonos, a képlékeny alakváltozás törvényét pedig *asszociáltak* nevezték (ellenben, ha ezt a posztulátumot elvetjük, akkor a képlékeny alakváltozás törvénye nem asszociált). A tapasztalat szerint a $Q \equiv F$ azonosság sok esetben helytálló, azonban vannak olyan (általában szemcsés szerkezetű) anyagok is amelyeknél egy nem asszociált törvény a valóság jobb közelítését adja.

Az anyagok többségénél az $F = 0$ folyási felület nemcsak a pillanatnyi feszültségállapottól függ (mint ahogyan azt eddig felírtuk), hanem a korábbiaktól is. Szükségessé vált tehát az anyag korábbi állapotát is figyelembe vevő keményedési törvények megalkotásának.

A Prandtl által megfogalmazott *izotróp* keményedés elve eltekint a Bauschinger hatástól; szerinte a módosuló folyási függvény által leírt $F = 0$ felületek alakjukat megtartják és koncentrikusak lesznek. Például ha az F kritériumot a Mohr-elmélet alapján állapítottuk meg, akkor a keményedés során mind nagyobb nyílású gúlákat kapunk. A 7.16.a. ábra ennek a felületnek a gúla magasságára merőleges metszetét mutatja be.

Az *anizotróp* (vagy *kinematikai*) keményedés elve a Bauschinger hatást is figyelembe veszi, ekkor a folyási függvény által leírt $F = 0$ felületek egy merevtest-elmozdulást szenvednek. A Mohr-elmélet alapján felállított kritérium esetében a gúla tengelye önmagával párhuzamosan mozdul el, amint az a 7.16.b. ábrán látható.



7.16. ábra. Izotróp (a.) és anizotróp (b.) keményedés

A képlékenységi állapotának elérését ekkor az előbbi két hipotézis kombinációjával felírható

$$F(\{\boldsymbol{\sigma}\}, \{\boldsymbol{\alpha}\}, p) = 0 \quad (7.55)$$

kritérium jelzi, ahol $\{\boldsymbol{\alpha}\}$ és p a keményedést figyelembe vevő paraméterek, melyek közül $\{\boldsymbol{\alpha}\}$ az F felület tengelyének elmozdulását, p pedig a felület tágulását írja le. Az előbbit definíciója szerint az

$$\{\boldsymbol{\alpha}\} = \int k \cdot \{d\boldsymbol{\epsilon}_p\} \quad (7.56)$$

összefüggéssel számítják ki (ahol k egy anyagi állandó), az utóbbit pedig rendszerint a plasztikus alakváltozás munkájának tekintik:

$$p = \int \{\boldsymbol{\sigma}\}^T \cdot \{d\boldsymbol{\epsilon}_p\}. \quad (7.57)$$

A rugalmatlan állapot elérése után a feszültségállapot az F kritérium által megadott felületen marad, mely feltételt az

$$F(\{\boldsymbol{\sigma}\} + \{d\boldsymbol{\sigma}\}, \{\boldsymbol{\alpha}\} + \{d\boldsymbol{\alpha}\}, p + dp) = 0 \quad (7.58)$$

egyenlet ír le. A 7.55. és a 7.58. összefüggésekből következik, hogy a rugalmatlan állapot elérése után

$$dF = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_i} \right\}^T \cdot \{d\boldsymbol{\sigma}\} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \right\}^T \cdot \{d\boldsymbol{\alpha}\} + \frac{\partial F}{\partial p} \cdot dp = 0. \quad (7.59)$$

A feszültségi és az alakváltozási állapot $\{\boldsymbol{\epsilon}_e\}$ rugalmas összetevője közötti összefüggés inkrementális formáját Hooke általánosított törvénye adja:

$$\{d\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{E}] \cdot \{d\boldsymbol{\epsilon}_e\} \quad (7.60)$$

ahol a rugalmas összetevő a teljes és a képlékeny alakváltozás különbsége:

$$\{d\boldsymbol{\epsilon}_e\} = \{d\boldsymbol{\epsilon}\} - \{d\boldsymbol{\epsilon}_p\}. \quad (7.61)$$

Hooke általánosított törvénye tehát

$$\{d\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{E}] \cdot (\{d\boldsymbol{\epsilon}\} - \{d\boldsymbol{\epsilon}_p\}), \quad (7.62)$$

amellyel, a 7.54. összefüggés felhasználásával, valamint $\{\boldsymbol{\alpha}\}$ és p definíciójával a 7.59. feltételből a $d\lambda$ paraméter

$$d\lambda = \{\mathbf{C}\}^T \cdot \{d\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (7.63)$$

formában határozható meg, ahol

$$\{\mathbf{C}\}^T = \left[\{\mathbf{b}\}^T \cdot [\mathbf{E}] \cdot \{\mathbf{a}\} - c \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\}^T \cdot \{\mathbf{a}\} - k \cdot \{\mathbf{a}\}^T \cdot \{\mathbf{b}\} \right]^{-1} \cdot \{\mathbf{b}\}^T \cdot [\mathbf{E}], \quad (7.64)$$

az $\{\mathbf{a}\}$ vektor Q , a $\{\mathbf{b}\}$ pedig az F függvény feszültségek szerinti parciális deriváltjait tartalmazza, a c mennyiség pedig a $\partial F / \partial p$ parciális deriváltat jelenti.

Hooke 7.62. általánosított törvénye a plasztikus alakváltozás 7.54. inkrementumával

$$\{d\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{E}] \cdot (\{d\boldsymbol{\varepsilon}\} - d\lambda \cdot \{\mathbf{a}\}) \quad (7.65)$$

lesz, amely $d\lambda$ behelyettesítésével

$$\{d\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{E}_{ep}] \cdot \{d\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (7.66)$$

alakra hozható, ahol

$$[\mathbf{E}_{ep}] = [\mathbf{E}] \cdot (1 - \{\mathbf{a}\}^T \cdot \{\mathbf{C}\}) \quad (7.67)$$

az elasztoplasztikus mátrix. Amennyiben a von Mises-Drucker posztulátumot elfogadjuk ($Q \equiv F$), akkor az $[\mathbf{E}_{ep}]$ mátrix szimmetrikus lesz, vagyis a végelem-módszer szokványos eljárásaiban minden további különleges lépés bevezetése nélkül alkalmazható.

7.1.2.5. A képlékenység-elmélet végeselemes alkalmazása

Az előbbi $[\mathbf{E}_{ep}]$ mátrix egy tangens rugalmassági mátrixként fogható fel, amelyet egy adott feszültségi és alakváltozási állapotra határozunk meg és amely egy tangens merevségi mátrix meghatározását teszi lehetővé.

Ekkor az inkrementális számítások menete a deformációktól mentes szerkezetből indul ki, feltételezvé, hogy kezdetben az $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$, $\{\boldsymbol{\alpha}\}$ és p mennyiségek zérók. Az első elasztoplasztikus mátrix tehát a kezdeti rugalmas állapotnak megfelelő $[\mathbf{E}]$ rugalmassági mátrix lesz.

A szerkezet merevségi mátrixának összeállítása után meghatározzuk a $\{\Delta F\}_i$ terhelés-inkrementum által előidézett $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_i$ alakváltozási és $\{\boldsymbol{\sigma}\}_i$ feszültségi állapotokat. Ehhez minden egyes végelem felett megvizsgáljuk a használt F kritérium értékét. Amennyiben a képlékenység állapotát még nem értük el ($F < 0$) vagy pedig a feszültségek abszolút értéke csökken (tehermentesítés), akkor az adott elemre a rugalmassági mátrix továbbra is a feszültségi állapotnak megfelelő $[\mathbf{E}]$ mátrix lesz és a feszültségek inkrementuma egyszerűen

$$\{\Delta \boldsymbol{\sigma}\}_i = [\mathbf{E}]_{i-1} \cdot \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}\}_i \quad (7.68)$$

lesz. Ellenben a következő mennyiségeket számítjuk ki:

- a 7.63.-7.64. összefüggésekből, F és Q parciális deriváltjainak ismeretében, ahol a merevségi mátrix szimmetriájának érdekében rendszerint $Q = F$:

$$\Delta \lambda_i = \{\mathbf{C}\}_{i-1}^T \cdot \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}\}_i; \quad (7.69)$$

- a 7.54. összefüggéssel

$$\{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p\}_i = \Delta \lambda_i \cdot \{\boldsymbol{a}\}_{i-1}; \quad (7.70)$$

- a 7.62. kifejezésből

$$\{\Delta \boldsymbol{\sigma}\}_i = [\boldsymbol{E}]_{i-1} \cdot (\{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}\}_i - \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p\}_i); \quad (7.71)$$

- a 7.56. definíció felhasználásával

$$\{\Delta \boldsymbol{\alpha}\}_i = k \cdot \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p\}_i \quad (7.72)$$

(k ismert anyagi állandó);

- a 7.57. kifejezéssel pedig

$$\Delta p_i = \{\boldsymbol{\sigma}\}_i^T \cdot \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p\}_i. \quad (7.73)$$

Gyakorlatilag csak az utóbbi két paraméter egyikét szokták használni, a keményedést tehát tisztán izotrópnak vagy tisztán kinematikainak tekintik, ezzel az azelőtti mennyiségek kiszámítása is leegyszerűsödik.

- helyreállítjuk az

$$F(\{\boldsymbol{\sigma}_{i-1}\}) + \theta \cdot \{\Delta \boldsymbol{\sigma}_i\} = 0 \quad (7.74)$$

feltételt (a feszültségállapotnak megfelelő pont az F kritérium által leírt felületen kell legyen), a fenti egyenlet megoldásával meghatározzuk θ értékét;

- a kiegyensúlyozatlan $(1 - \theta) \cdot \{\Delta \boldsymbol{\sigma}_i\}$ feszültséggel kiszámítjuk a megfelelő

$$\{\boldsymbol{f}_p\}_e = - \int_{V_e} [\boldsymbol{B}]_e^T \cdot (1 - \theta) \cdot \{\Delta \boldsymbol{\sigma}_i\}_e \, dV \quad (7.75)$$

elemi terhelésvektort. Az adott terhelés-inkrementum alatt az eredményt további belső iterációk elvégzésével lehet finomítani, ekkor e kiegyensúlyozatlan terhelésvektorokat hozzáadjuk a lépés elején megállapított szerkezeti terhelésvektorhoz és a számításokat megismételjük. Ekkor a rugalmassági mátrixot, – és azon elemek esetében, amelyek éppen az adott terhelés-inkrementum alatt érték el a képlékeny állapotot az elasztoplasztikus mátrixot, – a kiszámított feszültségállapotnak megfelelően módosítjuk. Egyszerűsítésként, a számítási idő csökkentésének érdekében azonban a felsorolt műveleteket csak egyszer végezzük el, a kiegyensúlyozatlan erők vektorát a következő lépés terhelésvektorához adjuk hozzá. Ez a módszer azonban kevésbé pontos eredményekhez vezet.

7.1.3. Időben lejátszódó alakváltozás

Az anyagok lassú folyása (kúszás, hideg folyás) az alakváltozás időbeni folyamatos növekedését jelenti, mialatt a terhelés értéke nem változik. A tisztán (tökéletesen) viszkózus eset egy Newton-testnek felel meg.

Jelen tanulmányaink során ugyan nem térünk ki a folyadékok és gázok végeselemes modellezésére, mégis fontos megemlítenünk a viszkózus folyadék reológiai modelljét. Az áramló folyadékokban egymáson elcsúszó rétegeket különböztethetünk meg, amelyek valódi folyadékok esetében súrlódással mozdulnak el egymáson. E súrlódás az áramló folyadék belsejében egy csúsztatófeszültséget idéz elő, Newton empirikus törvénye szerint annak nagysága az áramlási sebesség gradiensevel, vagyis az alakváltozás sebességével arányos, egy dimenzióra felírva:

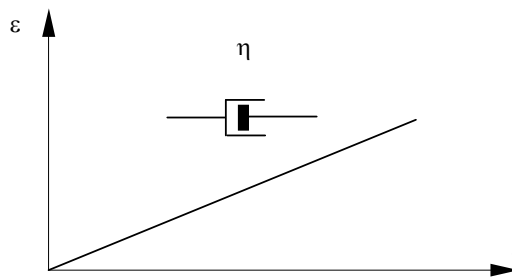
$$\tau = \eta \cdot \frac{dv}{dn} = \eta \cdot \dot{\gamma} \quad (7.76)$$

(amennyiben ezt a formulát vektoriálisan írjuk fel, akkor a képletbe egy „-” előjel is bejön, mert a gradiensvektor a feszültséggel ellentétes irányú). Az arányossági tényezőt, az η mennyiséget a folyadék dinamikai viszkozitásának nevezzük és az igen sok folyadék és gáz esetében, túlzott mértékben nem változó körülmények között, állandónak tekinthető. Az állandó viszkozitású fluidumokat *newtoninak* nevezzük.

Az összenyomhatatlan viszkózus newtoni folyadékok egyszerű reológiai modellje a Newton-test (7.17. ábra), amelynek alakváltozása állandó terhelés alatt az idő lineáris függvénye:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{\eta} \cdot t \quad (7.77)$$

(ez az összefüggés az előbbi integrálásából származtatható). Az anyagegyenletben tehát ezúttal megjelenik az idő is.



7.17. ábra. A Newton-test

Az alakváltozás időbeni lefolyását a deformációsebesség jellemzi:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{1}{\eta} \cdot \sigma(t), \quad (7.78)$$

a Newton-test fajlagos alakváltozása egy adott t pillanatban pedig ennek az összefüggésnek az integrálásával:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\eta} \cdot \int_0^t \sigma(\theta) d\theta. \quad (7.79)$$

A tisztán viszkózus test a szerkezetek számításánál eléggé ritkán fordul elő. Annál gyakoribbak az olyan esetek, amelyeknél az anyag nemcsak lassú folyásból eredő alakváltozást mutat, hanem elasztikus, esetleg plasztikus alakváltozást is.

Egy egyszerű viszkoelasztikus modellt mutat be a 7.18. ábra. Az ott látható Maxwell-test egy Hooke-testből és egy vele sorba kapcsolt Newton-testből áll. Terheléskor a modell a Hooke-test elasztikus

$$\varepsilon_e(t) = \frac{\sigma(t)}{E} \quad (7.80)$$

alakváltozásának következtében egy azonnali alakváltozást mutat, amelyet a Newton-test folyamatos,

$$\dot{\varepsilon}_v(t) = \frac{1}{\eta} \cdot \sigma(t) \quad (7.81)$$

sebességű viszkózus alakváltozásának következtében egy időben folyamatosan növekvő alakváltozás követ. A terhelés alatti folyamatos alakváltozás miatt a σ – ε kapcsolatot leíró anyagegyenlet ez esetben az idő függvénye lesz.

Mivel a két elemi test soros kapcsolású, bármelyik pillanatban mindkettőre azonos terhelés hat, az alakváltozás pedig a két elemi test alakváltozásának összege lesz:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_v(t). \quad (7.82)$$

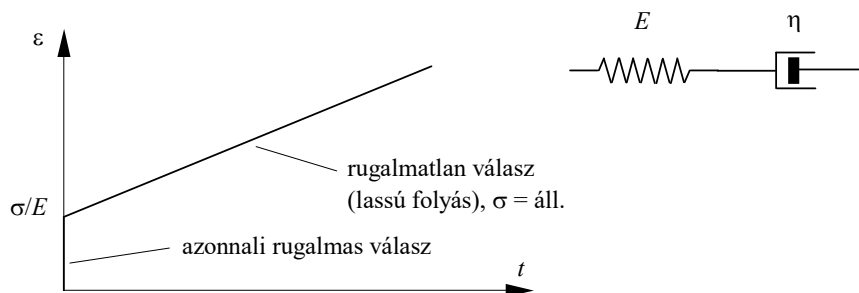
Behelyettesítvén a Hooke-test és a Newton-test alakváltozását egy adott t pillanatban a Maxwell-test deformációja:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{\eta} \cdot \int_0^t \sigma(\theta) d\theta, \quad (7.83)$$

az alakváltozás sebessége pedig

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}_e(t) + \dot{\varepsilon}_v(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{1}{\eta} \cdot \sigma(t). \quad (7.84)$$

Az alakváltozás tehát terhelés alatt folyamatosan növekszik. A 7.18. ábrán látható grafikon egy állandó σ terhelésű Maxwell-test alakváltozását mutatja. A grafikon a Hooke-test azonnali σ/E alakváltozásával indul és folyamatosan, lineárisan emelkedik. Az emelkedés mértéke a Newton-test η viszkozitásával fordítottan arányos. Amennyiben egy adott pillanatban a deformált Maxwell-testet tehermentesítjük, akkor a Hooke-test eredeti méretére ugrik össze, de a Newton-test alakváltozása megmarad.



7.18. ábra. A Maxwell-test

Az anyagok relaxációja (elernyedése) szintén időben lejátszódó folyamat, de ekkor a alakváltozás egy határérték fele tart, mialatt a deformációsebesség folyamatosan (többnyire exponenciálisan) csökken. A relaxáció a terhelés és a tehermentesítés során is fellép. Egy relaxációt mutató viszkoelasztikus modellt (ez a Kelvin-Voigt-test) a 7.19. ábrán láthatunk.

A Kelvin-Voigt test egy Newton-testből és egy vele párhuzamosan kapcsolt Hooke-testből áll. Az elemek párhuzamos kapcsolása miatt e két test alakváltozása bármely pillanatban azonos:

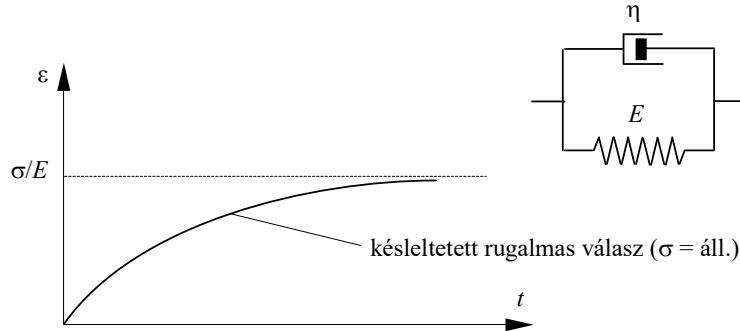
$$\varepsilon_e = \varepsilon_v = \varepsilon, \quad (7.85)$$

mialatt mindkettő a teljes terhelésnek egy adott részét veszi át:

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_v. \quad (7.86)$$

A Hooke-test és a Newton-test alakváltozásának ismeretében a fajlagos alakváltozások egyenlőségéből:

$$\frac{\sigma_e}{E} = \frac{1}{\eta} \cdot \int_0^t \sigma_v(\theta) d\theta. \quad (7.87)$$



7.19. ábra. A Kelvin-Voigt-test

A hirtelen ható terhelés ez esetben nem hoz létre azonnali alakváltozást a Newton-test jelenléte miatt. A kezdetben a terhelést a Newton-test veszi át, majd a viszkózus alakváltozások növekedésével az fokozatosan a Hooke-testre tevődik át.

Ha a terhelés időben változik, akkor a 7.86. reláció értelmében a modell anyagegyenlete

$$\sigma(t) = \sigma_e(t) + \sigma_v(t) = E \cdot \varepsilon(t) + \eta \cdot \dot{\varepsilon}(t). \quad (7.88)$$

Egy adott t pillanatban a fajlagos alakváltozás az előbbi differenciálegyenlet megoldása:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\eta} \cdot \int_0^t \sigma(\theta) \cdot e^{-E(t-\theta)/\eta} d\theta. \quad (7.89)$$

Amennyiben a terhelés állandó, úgy a fajlagos alakváltozás az előbbi integrálból

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} \cdot (1 - e^{-E \cdot t/\eta}) = \varepsilon_0 \cdot (1 - e^{-E \cdot t/\eta}), \quad (7.90)$$

amely időben aszimptotikusan tart az $\varepsilon_0 = \sigma / E$ határérték fele.

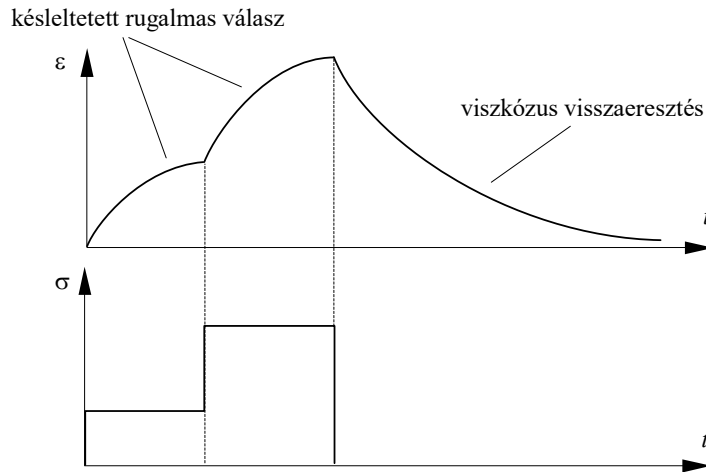
A terhelés megszűntetésekor a Hooke-test igyekszik eredeti hosszát felvenni, mely igyekezetnek a vele párhuzamos Newton-test áll ellen. Ekkor a két testben ugyanakkora, de ellentétes irányú erő lép fel: $\sigma_e(t) = -\sigma_v(t)$, de „kifele” a 7.88. feszültség minden pillanatban zéró:

$$E \cdot \varepsilon(t) + \eta \cdot \dot{\varepsilon}(t) = 0. \quad (7.91)$$

Ennek a differenciálegyenletnek a megoldása a $t = 0 \rightarrow \varepsilon(0) = \varepsilon_0$ kezdeti feltétel mellett

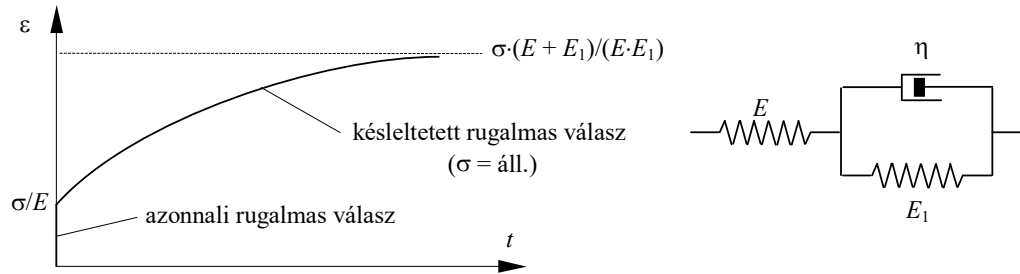
$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot e^{-E \cdot t/\eta}, \quad (7.92)$$

mely szerint az alakváltozás aszimptotikusan csökken a zérus fele. A Kelvin-Voigt test alakváltozása tehát nem maradandó (7.20. ábra).



7.20. ábra. A Kelvin-Voigt-test késleltetett válasza

Egy Hooke- és egy Kelvin-Voigt-test soros kapcsolásából származó modell a „standard lineáris szilárd test”, amely az előbbihez viszonyítva hirtelen terhelésre azonnali rugalmas deformációt is mutat (7.21. ábra).



7.21. ábra. A standard lineáris szilárd test

Az azonnali alakváltozást az E rugalmassági modulusszal rendelkező Hooke-test okozza, míg a Kelvin-Voigt-test időben lezajló folyamatot idéz elő. E két sorba kapcsolt testre ható terhelés bármely pillanatban azonos:

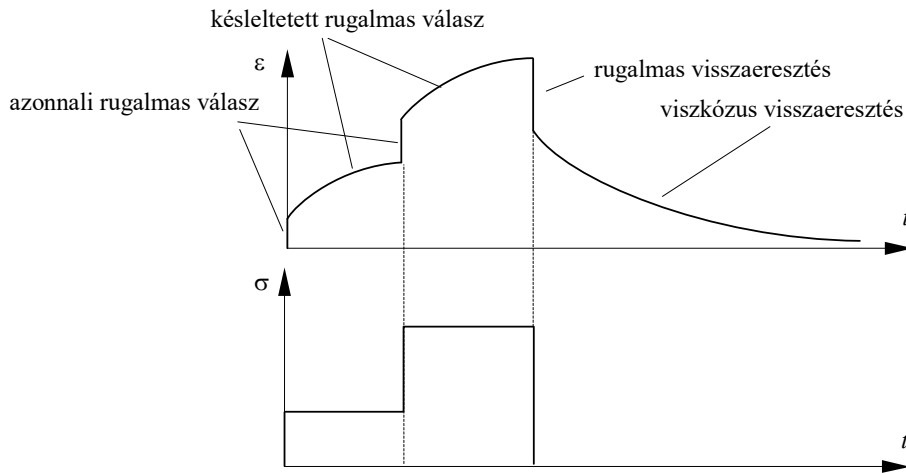
$$\sigma = E \cdot \varepsilon_e = E_1 \cdot \varepsilon_{ve} + \eta \cdot \dot{\varepsilon}_{ve}. \quad (7.93)$$

A Hooke-test fajlagos alakváltozását a 7.1., a Kelvin-Voigt-testét pedig a 7.89. anyagegyenlet adja, a standard lineáris modell alakváltozása pedig e két mennyiség összege:

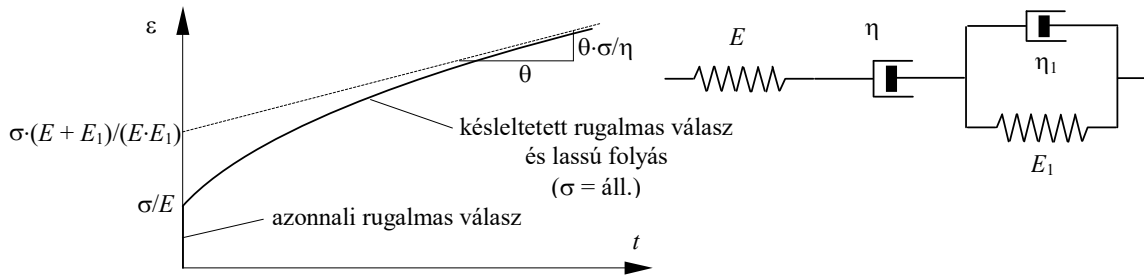
$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_{ve}(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{\eta} \cdot \int_0^t \sigma(\theta) \cdot e^{-E_1 \cdot (t-\theta)/\eta} d\theta. \quad (7.94)$$

A Bürger-test viselkedése a standard lineáris szilárd testétől a remanens alakváltozások megjelenésében különbözik (7.23. ábra), amelyet egy soros Newton-test idéz elő. Állandó terheléskor a Bürger-test $\varepsilon(t)$ görbéje a soros Newton-test σ/η dőlésű egyeneséhez,

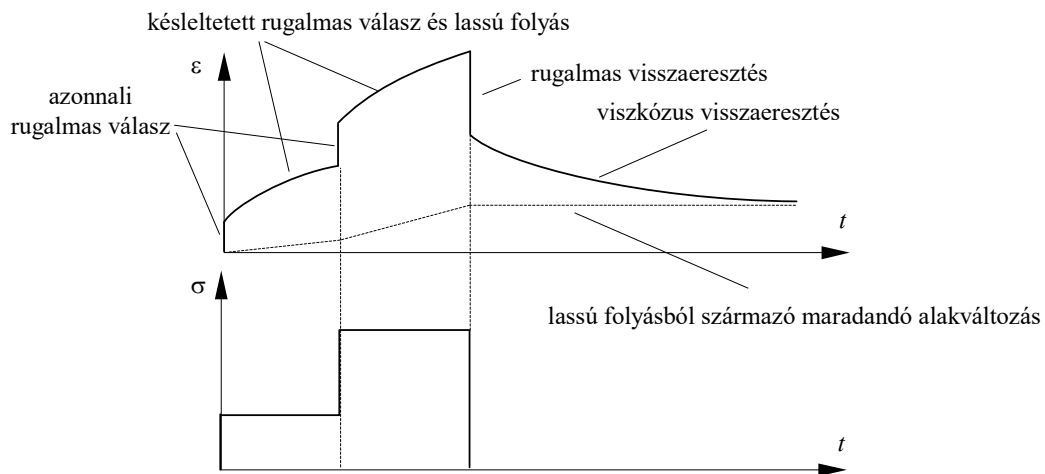
tehermentesítéskor pedig a soros Newton-test alakváltozásával megrajzolt vízszintes egyeneshez (7.24. ábra) tart aszimptotikusan.



7.22. ábra. A standard lineáris szilárd test készletetett válasza



7.23. ábra. A Bürger-test



7.24. ábra. A Bürger-test készletetett válasza

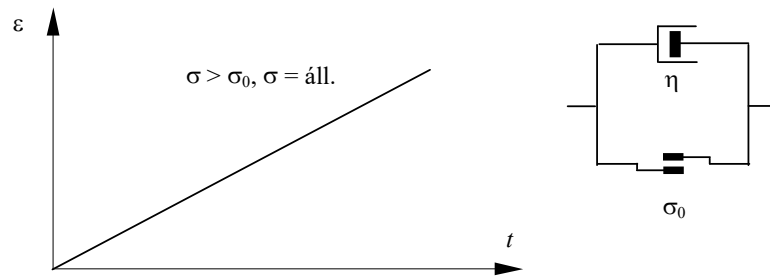
A plasztikus állapotban fellépő lassú folyás modellezésének eszköze a párhuzamosan kötött de Saint-Venant- és Newton-testekből álló viszkoplasztikus Bingham-test (7.25. ábra).

Terheléskor, a σ_0 határérték alatt a de Saint-Venant-test megakadályozza a Bingham-test deformálódását. Az adott határérték felett a Newton-test a de Saint-Venant-test által át nem vett $\sigma - \sigma_0$ terhelés hatására viszkózus alakváltozást mutat. A Bingham-test alakváltozása tehát folyamatosan növekszik, az a terhelés állandó értékére:

$$\varepsilon = \frac{1}{\eta} \cdot (\sigma - \sigma_0) \cdot t, \quad (7.95)$$

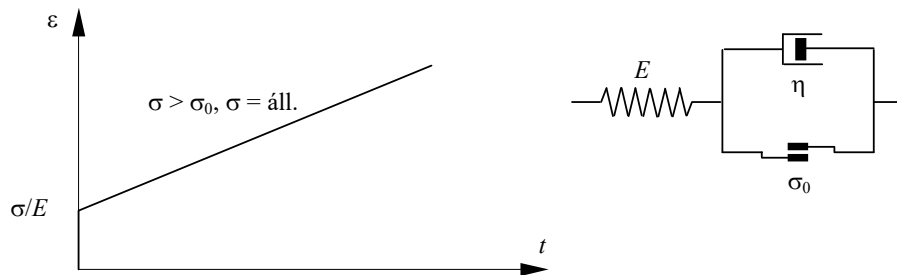
időben változó terhelésre pedig anyagegyenlete

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\eta} \cdot \int_0^t (\sigma(\theta) - \sigma_0) d\theta, \quad |\sigma(\theta)| > \sigma_0. \quad (7.96)$$



7.25. ábra. A Bingham-test

A Bingham-test csak a σ_0 határérték meghaladása után deformálódik, egyébként az teljesen merev. Egy Hooke-test sorbakapcsolásával (7.26. ábra) felépíthető egy elasztoviszkoplasztikus modell, amely alacsony intenzitású igénybevétel esetén rugalmas alakváltozást szenved és amely a de Saint-Venant-test paramétere által definiált határérték felett lassú folyást is mutat. Ezt a modellt néha szintén Bingham-testnek nevezik.

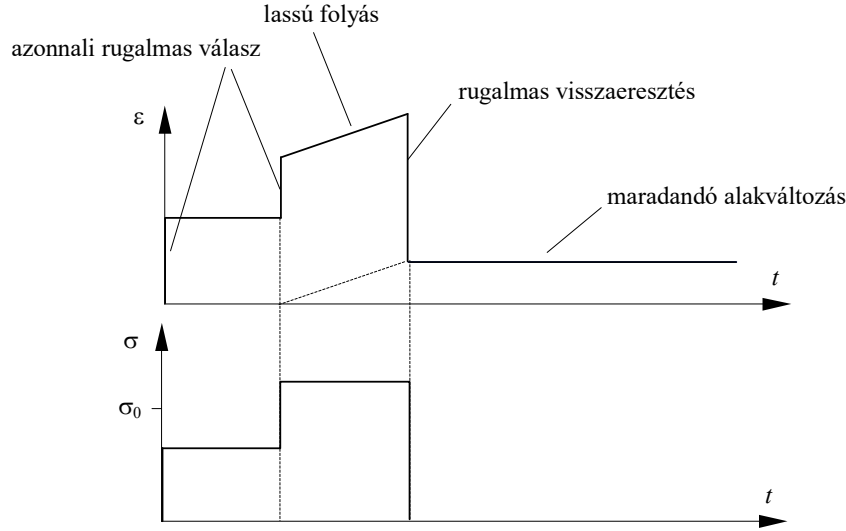


7.26. ábra. Az elasztoviszkoplasztikus test

A modell alakváltozása egy azonnali ε_e rugalmas és egy időben változó ε_v viszkózus komponens összege

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v, \quad (7.97)$$

ahol a Hooke-test rugalmas alakváltozását és a Bingham-test viszkózus alakváltozását az ismert összefüggésekkel számíthatjuk.



7.27. ábra. Az elasztoviskoplasztikus test alakváltozása

Az anyagmodellek fenti felsorolása nem meríti ki a lehetőségek teljességét, az egyszerű reológiai modellek (a Hooke-, a Newton- és a de Saint-Venant-testek) kombinációjával bármilyen bonyolult reológiai modellt fel lehet építeni. A nemlineáris viselkedés modellezésében az E , η és σ_0 paraméterek bizonyos változók függvényei lehetnek.

7.1.3.1. A lassú folyás végeselemes modellezése

A két- és háromdimenziós feladatok esetében a lassú folyás alatt fellépő feszültségek és deformációk kiszámításakor a viszkózus folyadékokra megállapított

$$\begin{aligned} \sigma_x &= k \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) - \frac{2}{3} \cdot \eta \cdot (\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z) + 2 \cdot \eta \cdot \dot{\varepsilon}_x, \\ \sigma_y &= k \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) - \frac{2}{3} \cdot \eta \cdot (\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z) + 2 \cdot \eta \cdot \dot{\varepsilon}_y, \\ \sigma_z &= k \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) - \frac{2}{3} \cdot \eta \cdot (\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z) + 2 \cdot \eta \cdot \dot{\varepsilon}_z, \end{aligned} \quad (7.98)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \eta \cdot \dot{\gamma}_{xy}, \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \eta \cdot \dot{\gamma}_{yz}, \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \eta \cdot \dot{\gamma}_{xz}, \end{aligned}$$

Hooke törvényével analóg fizikai egyenletekből indulunk ki, ahol k a folyadék térfogati rugalmassági modulusza. Ezeket az egyenleteket tömören

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}_v = [\mathbf{C}] \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_v + [\mathbf{D}] \cdot \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\}_v \quad (7.99)$$

formában is felírhatjuk. A fenti összeg első tagja a térfogat megváltozásának hatását foglalja magába, amelyet általában elhanyagolnak a folyadékok csekély mértékű összenyomhatósága miatt. A második tag egy anyagparaméterekből, legtöbbször konstansokból álló mátrix és az alakváltozási sebesség vektorának szorzata. A térfogatváltozás elhanyagolásával a lassú folyás során fellépő alakváltozási sebesség tehát

$$\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\}_v = [\mathbf{D}]^{-1} \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\}_v, \quad (7.100)$$

ahol $\{\boldsymbol{\sigma}\}_v$ az alkalmazott reológiai modell alapján határozható meg (például a Maxwell-testre az egyenlő lesz a teljes $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ feszültséggel). A fenti egyenlet általánosítása egy

$$\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\}_v = \{\boldsymbol{\beta}(\{\boldsymbol{\sigma}\}, \{\boldsymbol{\varepsilon}\})\} \quad (7.101)$$

alakú kifejezéshez vezet.

A végeselemes analízis konkrét lépései a választott reológiai modellhez igazodnak. A Maxwell-test példájánál maradv a teljes alakváltozás a rugalmas és a viszkózus összetevők eredője lesz:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_e + \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_v, \quad (7.102)$$

ahol a rugalmas összetevő

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_e = [\mathbf{E}]^{-1} \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\}, \quad (7.103)$$

a lassú folyásból adódó komponens pedig a 7.101. összefüggés integrálásával számítható. Az integrálást numerikusan, általában állandó Δt lépéssel lehet elvégezni. A viszkózus alakváltozások növekményét egy időlépés alatt a

$$\{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}\}_v = \{\boldsymbol{\varepsilon}(t + \Delta t)\}_v - \{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\}_v = \Delta t \cdot \{\boldsymbol{\beta}(t + \theta \cdot \Delta t)\} \quad (7.104)$$

egyszerűsített formában is felírhatjuk, ahol θ egy 0 és 1 közötti szám. Az alakváltozás sebességét egy átlagos értékkel adjuk meg, általában:

$$\{\boldsymbol{\beta}(t + \theta \cdot \Delta t)\} = \{\boldsymbol{\beta}(\{\boldsymbol{\sigma}(t + \theta \cdot \Delta t)\}, \{\boldsymbol{\varepsilon}(t + \theta \cdot \Delta t)\})\}; \quad (7.105)$$

a példaként tekintett lineáris Maxwell-modell alkalmazásánál $\boldsymbol{\beta}$ kifejezésében a fajlagos alakváltozások nem szerepelnek.

Mivel a feszültségek és a fajlagos alakváltozások $t + \theta \cdot \Delta t$ értékét előre nem ismerjük, e számítás nyilván csak iteratív lehet. Gyakran elfogadják azonban azt a hipotézist, mi szerint az alakváltozási sebesség nem változik lényegesen a kellőképpen kicsinek megválasztott Δt időlépés alatt, s ekkor a $\theta = 0$ paraméternek megfelelő, a lépés kezdetén érvényes feszültségekkel és fajlagos alakváltozásokkal számítunk (így elmarad az iteratív számítás).

A 7.102. egyenlet differenciálásával, a fenti összefüggések felhasználásával egy

$$d\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \left[[\mathbf{E}]^{-1} + \theta \cdot \Delta t \cdot [\mathbf{S}(t + \theta \cdot \Delta t)] \right] \cdot d\{\boldsymbol{\sigma}\} \quad (7.106)$$

relációhoz jutunk, ahonnan meghatározható egyfajta tangens rugalmassági mátrix:

$$[\mathbf{E}(t + \theta \cdot \Delta t)]_v = \left[[\mathbf{E}]^{-1} + \theta \cdot \Delta t \cdot [\mathbf{S}(t + \theta \cdot \Delta t)] \right]^{-1}. \quad (7.107)$$

Ezekben a képletekben az $[\mathbf{S}]$ mátrix a lassú folyás $\{\boldsymbol{\beta}\}$ függvényének $\partial \boldsymbol{\beta} / \partial \boldsymbol{\sigma}$ parciális deriváltjait tartalmazza. Új mátrixunkkal a lassú folyás anyagtvényét az egyszerű

$$d\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{E}(t)]_v \cdot d\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (7.108)$$

alakban írhatjuk fel.

A végeelemes számítások elvégzése során a terhelést lépcsős függvénnyel modellezzük. A rugalmas alakváltozások kiszámítását elkülönítjük a Δt idő alatt lezajló viszkózus alakváltozások tanulmányozásától olyan módon, hogy az adott lépésben először meghatározzuk a szerkezet azonnali rugalmas választát. Ezt a rugalmas választ a terhelés Δt idő alatti $\{\Delta \mathbf{F}(t + \Delta t)\}$ növekményére számoljuk ki, a kapott $\{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}(t + \Delta t)\}_e$ növekményt hozzáadjuk az addig kiszámított $\{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\}_e$ rugalmas fajlagos alakváltozásokhoz. E számításokban a $[\mathbf{K}]$ merevségi mátrix a lépés elején érvényes állapotnak felel meg, az elvégzett műveletek pedig a lineárisan rugalmas szerkezetek számításánál elvégzettekkel azonosak.

Ezután a Δt periódus alatt a terhelést állandónak tekintvén meghatározzuk a feszültségi és az alakváltozási állapotban a lassú folyás miatt fellépő változásokat. A lassú folyás hatásának számításához az időlépés kezdetén fennálló $\{\boldsymbol{\sigma}(t)\}$ feszültségállapotnak és ha az szükséges, az előbbieken kiszámított rugalmas növekményt is magába foglaló $\{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\}$ alakváltozási állapotnak megfelelően kiszámítjuk az elemi $\{\boldsymbol{\beta}\}$ vektorokat ($\theta = 0$), ez utóbbiakkal pedig meghatározzuk a lassú folyás által okozott fajlagos alakváltozás inkrementumának első közelítését:

$$\{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}(t + \Delta t)\}_v' = \Delta t \cdot \{\boldsymbol{\beta}(t)\}. \quad (7.109)$$

A szabad alakváltozást, az egydimenziós Maxwell-testtel ellentétben, a szomszédos, egymással összekapcsolt végeelemek gátolják. Értékükkel meghatározzuk a lassú folyásból származó fajlagos alakváltozás-növekménynek megfelelő csomóponti erőket. Az első lépésben mivel $\theta = 0$, a 7.108. anyagtörvény rugalmassági mátrixa az $[\mathbf{E}]$ mátrixszal azonos:

$$\{\Delta \mathbf{r}(t + \Delta t)\}' = \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T \cdot [\mathbf{E}] \cdot \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}(t + \Delta t)\}_v' dV, \quad (7.110)$$

majd ezen elemi csomóponti erőkkel felépítjük a szerkezeti $\{\Delta \mathbf{R}(t + \Delta t)\}'$ vektort és a

$$[\mathbf{K}] \cdot \{\Delta \mathbf{D}(t + \Delta t)\}' = \{\Delta \mathbf{R}(t + \Delta t)\}' \quad (7.111)$$

egyenletrendszer megoldásával kiszámítjuk az elmozdulások inkrementumának első közelítését. Ezzel a feszültségek inkrementuma:

$$\{\Delta \boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t)\}' = [\mathbf{E}] \cdot ([\mathbf{B}] \cdot \{\Delta \mathbf{D}(t + \Delta t)\}' - \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}(t + \Delta t)\}_v'), \quad (7.112)$$

ahol a $[\mathbf{B}] \cdot \{\Delta \mathbf{D}(t + \Delta t)\}'$ szorzat a fajlagos alakváltozások $\{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}(t + \Delta t)\}'$ inkrementumának első közelítését jelenti.

Az első lépésben meghatározott mennyiségek csak közelítő mennyiségek, amelyeket további iterációkkal finomíthatunk. A feszültségek és az alakváltozások új (jelzett, „'”) értékeivel és egy megfelelően megválasztott θ paraméterrel, lineáris interpolációval meghatározzuk az aktuális Δt időlépés alatti átlagokat:

$$\{\boldsymbol{\sigma}(t + \theta \cdot \Delta t)\}' = (1 - \theta) \cdot \{\boldsymbol{\sigma}(\Delta t)\}' + \theta \cdot \{\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t)\}', \quad (7.113)$$

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}(t + \theta \cdot \Delta t)\}' = (1 - \theta) \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)\}' + \theta \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}(t + \Delta t)\}'. \quad (7.114)$$

Ezen értékeknek megfelelően akár a $[\mathbf{K}]$ merevségi mátrixot is újra kiszámolhatjuk, mindenesetre meghatározzuk a $\{\boldsymbol{\beta}\}$ vektorok korrigált értékeit és a 7.106. relációval kezdve a számításokat megismételjük. Ekkor a képletekben szereplő $[\mathbf{E}]$ rugalmassági mátrixot a pontosság növelésének érdekében a 7.107. $[\mathbf{E}(t + \theta \cdot \Delta t)]_v$ mátrixszal helyettesíthetnénk. A merevségi mátrixot

és a rugalmassági mátrixot a gyakorlatban az iterációk alatt nem szokás újraszámítani, mivel az jelentősen meghosszabbítaná a számítások elvégzésére fordított időt. Az $[E]$, mátrix használata különösen megnehezítené a számítások elvégzését, mivel az nem szimmetrikus a főátlóra nézve. Következésképpen a gyakorlatban a rugalmassági és merevségi mátrix a lépés elején érvényes formájában szerepel, sőt, gyakran az említett iterációk is elmaradnak (a számításokat csak egyszer végezzük el a $\theta=0$ értéknek megfelelően), a pontosságon pedig a Δt lépés csökkentésével javítanak. Gyakorlati megfigyeléseken alapul az a szabály, mi szerint ha a Δt lépés alatt a lassú folyásból származó fajlagos alakváltozás nem haladja meg a rugalmas alakváltozás felét, akkor a számítás eredménye elfogadhatóan pontos lesz. Az időlépés megválasztásának avagy a számítások pontosságának feltétele tehát:

$$\Delta t \cdot \{\boldsymbol{\beta}\} \leq c \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_e, \quad (7.115)$$

ahol c nem lehet több 0.5-nél. Δt akár lépéenként is változhat.

7.1.3.2. A viszkoelasztikus test végeeselemes modellezése

Tegyük fel, hogy az elemzett test anyagegyenlete a 7.21. ábrán látható standard lineáris szilárd testé vagy legalábbis azzal formailag azonos (ha annak paraméterei nem állandók, akkor egy nemlineáris modellel van dolgunk). A Hooke testre felírható:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [E] \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_e, \quad (7.116)$$

az azzal soros Kelvin-Voigt testre pedig, a lassú folyás modellezésénél a viszkózus alakváltozásokra tett észrevétellel

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [E_1] \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_{ve} + [D] \cdot \frac{d}{dt} \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_{ve} = \left[[E_1] + [D] \cdot \frac{d}{dt} \right] \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_{ve}, \quad (7.117)$$

ahonnan

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_{ve} = \left[[E_1] + [D] \cdot \frac{d}{dt} \right]^{-1} \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\}. \quad (7.118)$$

Mivel

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_e = \{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_{ve}, \quad (7.119)$$

a viszkoelasztikus alakváltozások vektorával a 7.116. képlet tovább alakítható:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [E] \cdot \left\{ \{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \left[[E_1] + [D] \cdot \frac{d}{dt} \right]^{-1} \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} \right\}. \quad (7.120)$$

Ez utóbbi átrendezésével a tanulmányozott modell viszkoelasztikus anyagtörvényéhez jutunk:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \left[[I] + [E] \cdot \left[[E_1] + [D] \cdot \frac{d}{dt} \right]^{-1} \right]^{-1} \cdot [E] \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [E]_{ve} \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\}, \quad (7.121)$$

ahol $[I]$ az egységmátrix. Észrevehetjük, hogy ebben az anyagtörvényben a feszültségek és a fajlagos alakváltozások arányosságát kifejező mátrix tulajdonképpen egy operátor-mátrix. Ez az egyenletrendszer nem lineáris, hanem egy differenciálegyenletrendszer. Integrálását időbeni diszkretizálással, iteratív eljárással lehet elvégezni. A gyakorlatban, akárcsak a lassú folyás esetében, lépcsőzetes terheléssel dolgozunk, ahol valamely Δt hosszúságú lépés alatt a terhelést

állandónak tekintjük. Ekkor a feszültségek is a lépés alatt állandóak maradnak. A lépés elején a rugalmas szerkezetekre megállapított módszerekkel kiszámoljuk fajlagos alakváltozások rugalmas összetevőjét és a feszültségeket; közöttük a következő összefüggés áll fenn:

$$\{\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t)\} = [\mathbf{E}] \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}(t + \Delta t)\}_e. \quad (7.122)$$

A feszültségek és a viszkoelasztikus alakváltozás közötti összefüggés egy inhomogén lineáris differenciálegyenletrendszer:

$$\{\boldsymbol{\sigma}(t)\} = [\mathbf{E}_1] \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\}_{ve} + [\mathbf{D}] \cdot \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)\}_{ve}, \quad (7.123)$$

amelynek analitikus megoldása a későbbiekben tárgyalt sajátérték-feladat megoldásával lehetséges. Ez azonban igen időigényes eljárás, s éppen ezért bizonyos egyszerűsítésekhez kell fordulnunk, például elfogadjuk azt a feltételezést, mi szerint elegendően kicsi Δt esetén a viszkoelasztikus alakváltozás sebessége lineárisan változik, másképpen: $\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\}_{ve}$ állandó. Jelöljük a t pillanatnak megfelelő mennyiségeket i -vel, a $t + \Delta t$ -nek megfelelőket pedig $i + 1$ -gyel. Ekkor:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}\}_{ve} = \{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}_{ve} + \Delta t \cdot \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i\}_{ve} + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \{\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i+1}\}_{ve} \quad (7.124)$$

és

$$\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i+1}\}_{ve} = \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i\}_{ve} + \Delta t \cdot \{\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i+1}\}_{ve}. \quad (7.125)$$

E mennyiségeket behelyettesítvén a 7.123. egyenletrendszerbe, annak átrendezése után a

$$\{\boldsymbol{\sigma}_{i+1}\} = [\mathbf{E}] \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}_{ve} + (\Delta t \cdot [\mathbf{E}] + [\mathbf{D}]) \cdot \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i\}_{ve} + \left(\frac{\Delta t^2}{2} \cdot [\mathbf{E}] + \Delta t \cdot [\mathbf{D}] \right) \cdot \{\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i+1}\}_{ve} \quad (7.126)$$

relációhoz jutunk, ahol az egyedüli ismeretlent a $\{\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i+1}\}_{ve}$ mennyiség jelenti. A differenciálegyenletek helyett tehát egy közönséges lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk, majd a kiszámított gyorsulásokat a 7.124.-7.125. egyenletekbe visszahelyettesítve megkapjuk a minket érdeklő mennyiségeket. A feladat megoldását tehát e rekurzív képletek adják, ahol az azelőtti lépésben kiszámított mennyiségekre van szükség. Az első lépésben a viszkózus alakváltozást és annak sebességét tekintve kezdeti feltételeket kell megadjunk (mivel ekkor nincs azelőtti lépés): azokat rendszerint zérusnak tekintjük.

7.1.3.3. A viszkoplasztikus eset

Tökéletesen rugalmas anyag nincs, a rugalmatlan alakváltozás már a legkisebb igénybevételnél jelentkezik, azonban az sokszor észrevehetetlenül csekély. Vannak olyan testek, amelyek viszkózus alakváltozása csak egy bizonyos határt meghaladó igénybevételnél lesz számottevő; az ilyen testet (elaszto-) viszkoplasztikusnak tekintjük. A tisztán viszkoplasztikus esetben a lassú folyás megjelenése előtt a test abszolút merev lenne.

Tegyük fel, hogy egy ilyen anyag viselkedését a 7.26. ábrán látható modellel írjuk le. Ez az eset a 7.1.3.1. alpontban tárgyalt lassú folyáshoz hasonlít. A kettő közötti különbség a Newton-test helyén megjelenő Bingham-testben áll: míg a Newton-test a legkisebb feszültség hatására deformálódik, a Bingham-test a σ_0 határérték alatt teljesen merev. A viszkoplasztikus test végeselemes modellezésben tehát a lassú folyásnál leírt algoritmust alkalmazhatjuk, figyelembe véve a Bingham-test jelenlétéből fakadó különbséget: minden Δt lépés elején meg kell vizsgálnunk az egy dimenzióban az egyszerű $\sigma > \sigma_0$ egyenlőtlenséggel leírt kritériumot. Ez a végeselemes analízisben a plasztikus alakváltozásnál tárgyalt F kritérium vizsgálatát jelenti. Amennyiben $F < 0$, akkor az anyag csak rugalmas alakváltozást szenved. Ha azonban $F = 0$ (vagy a számítások

eredményeképpen egy $F > 0$ mennyiséghez jutunk), akkor az anyag viszkoplasztikus alakváltozást is szenved. Képlettekkel, az alakváltozás sebességének felhasználásával felírva:

$$\{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\}_{vp} = \begin{cases} \{\mathbf{0}\} & \text{ha } F < 0 \\ \{\boldsymbol{\beta}\} & \text{ha } F = 0 \end{cases} \quad (7.127)$$

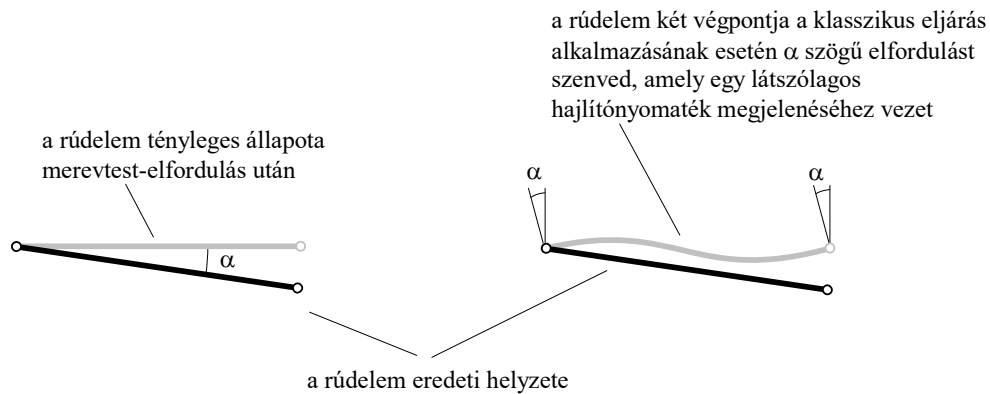
Az algoritmus tehát a lassú folyásnál leírttal azonos, ahol $\{\boldsymbol{\epsilon}\}_v$ helyett most $\{\boldsymbol{\epsilon}\}_{vp}$ -t kell írunk és az alakváltozás sebességének egyszerű 7.101. kifejezése helyett az előbbi, 7.127. definíciót kell használnunk.

7.2. A geometriai nemlinearitás

Az eddigiekben feltételeztük, hogy a szerkezet elmozdulása és alakváltozása minden esetben kicsi. Ha az elmozdulásokra és az alakváltozásokra vonatkozó a feltételek nem teljesülnek, akkor a nemlinearitások egy újabb kategóriájával, a geometriai nemlinearitással találjuk szemben magunkat.

7.2.1. Nagy elmozdulások

Egyes végelem-típusok (hajlításnak kitett végelemek) esetében az általánosított koordináták között nemcsak a csomópontok elmozdulása, hanem azok elfordulása is szerepel. Esetükben a végelem alakváltozás nélküli (más szóval: *merevtest*) elfordulása a valóságnak ellentmondó hajlítónyomatékok megjelenéséhez vezet, úgy, ahogyan az a 7.28. ábrán látható. E nyomatékok a számítások során a végelem két végpontjának abszolút elfordulása miatt jelennek meg. Ugyanilyen számítási hibákkal találkozhatunk a poláris vagy cilindrikus koordinátarendszerekben történő merevtest-elmozdulás esetében még akkor is, ha „közönséges”, rotációs szabadságfokokkal nem rendelkező végelemekkel dolgozunk.

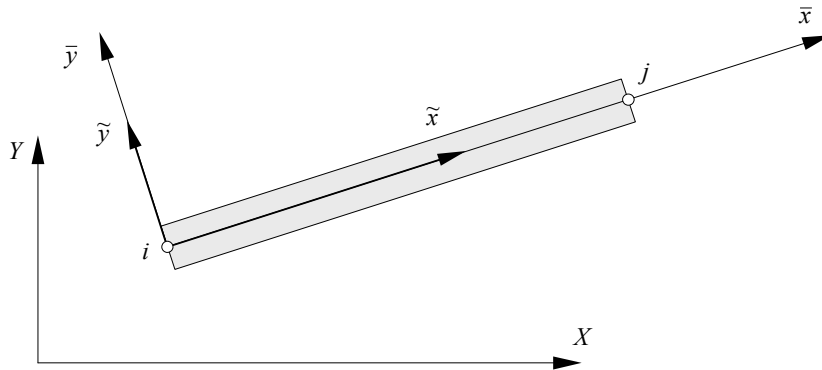


7.28. ábra. Nagyszögű merevtest-elfordulás miatt létrejövő látszólagos hajlítói igénybevétel

A helyzet orvoslása az alakváltozást nem okozó merevtest-elmozdulás és az alakváltozásból fakadó elmozdulások különválasztásával lehetséges: a feszültségek kiszámításában csak az utóbbi komponenst kell figyelembe venni. A későbbiekben ismertetett dinamikus esetben természetesen a merevtest-elmozdulás alatt fellépő tehetetlenségi erőket is számításba kell venni, amelyeket a szerkezet terhelésvektorához kell hozzáadni.

A merevtest-elmozdulás és az alakváltozás szétválasztása rendszerint egy inkrementális számítási eljárással történik. Az $\{F\}$ terhelésvektort olyan $\{\Delta F\}$ inkrementumokra osztjuk fel,

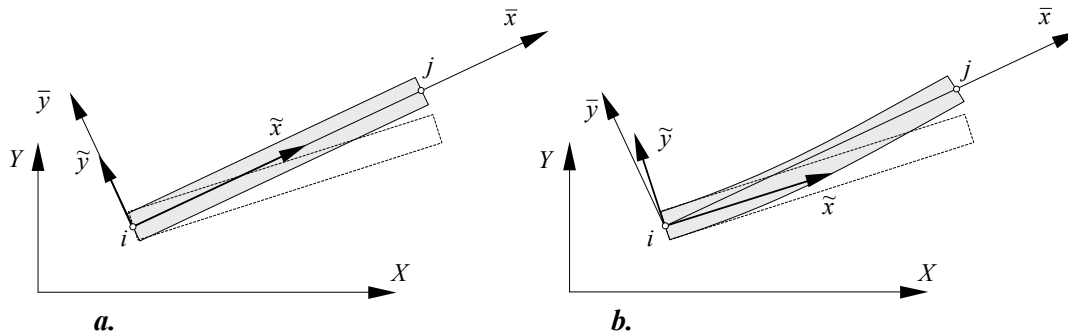
amelyek által előidézett $\{\Delta \mathbf{D}\}$ elmozdulás-inkrementumok a kis alakváltozás hipotéziseit kielégítik. A merevttest-elmozdulást okozó komponenst becsléssel lehet megállapítani, ennek leggyakrabban alkalmazott eljárása a korotációs (együttforgó) módszer. E módszer az elmozdulásokat a végelemhez rendelt lokális vonatkoztatási rendszerben számítja ki, így azok csak az elem alakváltozását fogják tükrözni. A 7.29. ábra mindezt egy kétdimenziós hajlított rúdelemmel példázza.



7.29. ábra. A korotációs eljárás koordinátarendszerei

A végelemhez rendelt $\bar{x}\bar{y}$ lokális koordinátarendszert a végelem csomópontjai (i és j) rögzítik. E szokványos lokális rendszer mellett a végelemhez egy másik, $\tilde{x}\tilde{y}$ koordinátarendszert is hozzárendelünk, de azt csak az egyik csomóponthoz kötjük. E második rendszer a kezdetben az elsővel egybeesik. Mindkét lokális rendszer az elmozduló végelemmel együtt mozog a rögzítettnek tekintett globális XY vonatkoztatási-rendszerben, azonban míg a szokványos $\bar{x}\bar{y}$ lokális rendszer helyzetét az alakváltozások miatt elmozduló i és j pontok együttesen határozzák meg, addig a második, $\tilde{x}\tilde{y}$ rendszer helyzete csak a kiválasztott i csomópont elmozdulásától és elfordulásától függ.

A merevttest-elmozdulást az $\bar{x}\bar{y}$ és az $\tilde{x}\tilde{y}$ koordinátarendszerek egymáshoz viszonyított helyzetének vizsgálata alapján becsülhetjük meg: egy merevttest-elmozdulás esetén a két vonatkoztatási rendszer relatív helyzete nem változik meg (7.30.a. ábra), viszont ha közben a rúdelem elhajolt, akkor a két koordinátarendszer egymáshoz képest elfordul. Az alakváltozás a relatív elfordulásból következik (7.30.b. ábra).



7.30. ábra. Merevttest-elmozdulás (a.) és alakváltozás (b.) a korotációs eljárásban

7.2.2. Nagy deformációk

A fajlagos alakváltozások eddig használt 2.1. egyenleteit a rugalmasságmélet a kis deformációk hipotézise alapján állította fel. Ennek következtében azok használata a nagy alakváltozások fellépésének esetében hibás eredményekhez vezet.

A fajlagos alakváltozások pontosabb meghatározása során a következő egyenletekhez jutunk:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right], \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right], \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right], \\
 \gamma_{xy} = \gamma_{yx} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial y}, \\
 \gamma_{yz} = \gamma_{zy} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\
 \gamma_{zx} = \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \cdot \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x}.
 \end{aligned} \tag{7.128}$$

Amennyiben a fenti összefüggéseket a kis deformációk hipotézisében felírt 2.1. egyenletekkel hasonlítjuk össze, akkor észrevehetjük, hogy ez utóbbiak az előbbieket sajátságos, egyszerűsített esetének felelnek meg, amikor a magasabb rendű tagokat a 7.128. egyenletekből elhanyagoljuk. Nagy deformációk esetén a geometriai aspektust leíró összefüggést ki kell egészítenünk a 7.128. egyenletekkel megadott formára és ennek alapján az összes belőle származtatott formulát módosítanunk kell.

Mindemellett megjegyzendő, hogy a fajlagos alakváltozásnak (és a feszültségnek is) léteznek az eddig használttól eltérő definíciói is, ezeket a 7.1. táblázat foglalja össze.

E táblázatban a „valódi” fajlagos alakváltozás annyiban különbözik az eddig használt „mérnöki”-től, hogy a méret megváltozását nem az eredeti, hanem a deformált mérethez viszonyítjuk. Ugyanígy a „valódi” Cauchy-feszültség is abban különbözik a „mérnöki”-től, hogy a terhelést a tényleges, deformált keresztmetszethez viszonyítjuk és nem annak kezdeti nagyságához. E „valódi” és „mérnöki” mennyiségek között számításba jövő különbség csak a nagy alakváltozások esetében van. Ugyanez a táblázat a 7.128. képleteknek megfelelő Green-Lagrange fajlagos alakváltozásokat is tartalmazza.

A táblázatban

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{7.129}$$

az elmozdulás Jacobi-mátrixa, $[J]$ pedig az azzal azonos méretű egységmátrix.

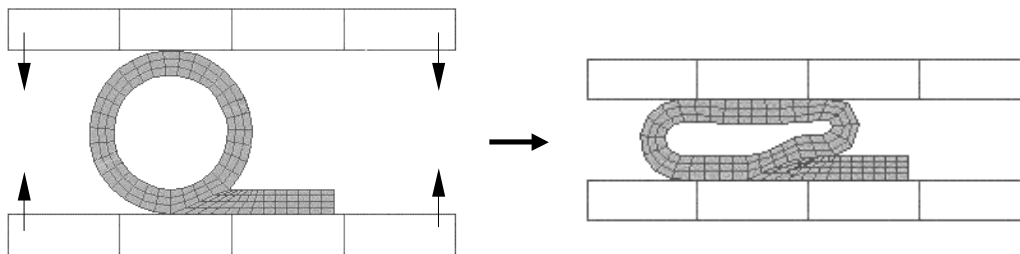
Nagy elmozdulások és alakváltozások, várható geometriai nemlinearitások esetén a végelemek számításokat inkrementálisan, lépcsőzetes terheléssel végzik. Gyakori megoldás a deformált szerkezet újrakálózása: ha a fajlagos alakváltozás (a végelemek torzulása) egy bizonyos, megengedhetőnek tekintett mértéket meghalad, akkor a deformált szerkezetet újrakálózzák, az addig elért feszültségállapot pedig a számítások folytatásában kezdeti feszültségállapotból származó terhelésként jelentkezik.

<i>Fajlagos alakváltozás</i>	<i>Lineáris</i>	<i>Térbeli</i>		
„Valódi” (True)	$\varepsilon = 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{l - l_0}{l}$	$\lambda = \frac{l}{l_0}$	$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \frac{1}{\kappa} \cdot ([\boldsymbol{U}]^\kappa - [\boldsymbol{I}])$ $[\boldsymbol{U}] = \sqrt{[\boldsymbol{J}]^T \cdot [\boldsymbol{J}] + [\boldsymbol{J}]^T + [\boldsymbol{J}]}$	$\kappa = -1$
„Mérnöki” (Engineering)	$\varepsilon = \lambda - 1 = \frac{l - l_0}{l_0}$			$\kappa = 1$
(Green-) Lagrange	$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot (\lambda^2 - 1)$			$\kappa = 2$
<i>Feszültség</i>	<i>Definíció</i>			
„Mérnöki” (Engineering)	erő/nemdeformált felület			
„Valódi” (Cauchy)	erő/deformált felület			

7.1. táblázat. A gyakrabban használt fajlagos alakváltozások és feszültségek definíciója

7.3. A terhelés nemlinearitása

A rugalmasságtani feladatok peremfeltételei a csomópontok elmozdulásaira, illetve a csomópontokban ható erőkre vonatkoznak. E mennyiségeknek a szerkezet alakváltozásától való függése a nemlinearitás egy újabb forrása lehet. Erre példa a 7.31. ábrán látható tömítőszalag (kéder) esete: az egymáshoz közeledő sík felületek közé szoruló gumialkatrészt (aminek egy keresztmetszetét látjuk) egyre inkább kilapul, a geometria jelentős megváltozása mellett a sík felületek által a rá ható terhelés is úgy intenzitását, mint eloszlását tekintve folyamatosan változik. Az ilyen jellegű feladatokat általában *kontakt-feladatok*nak nevezik. Az eddigiekhez viszonyítva egy újabb probléma megoldása vetődik fel: a deformálódó kontaktfelület meghatározása és az ott fellépő reakcióerők kiszámítása.



7.31. ábra. Érintkező felületek

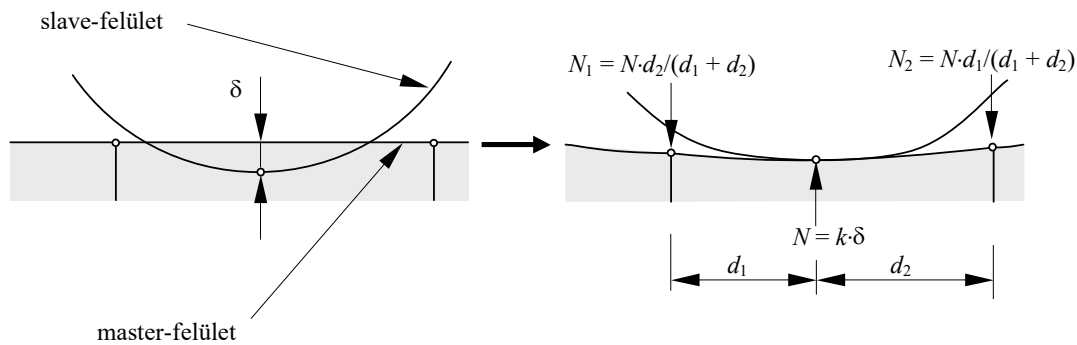
A kontakt-feladat megoldása leggyakrabban a *master-slave*, másképpen *penalty*- („büntető”) módszerrel, inkrementális számítással történik. Ekkor az előírt elmozdulást (például az előbbi

feladatban a két felület közeledését) több, megfelelően kicsiny lépcsőre osztjuk fel. Minden egyes elmozdulás-inkrementumra megvizsgáljuk az elemzett szerkezet felületén levő csomópontok relatív helyzetét. Az érintkező felületek közül az egyiket (például a merevebbet) *master* („mester”) felületnek, a másikat *slave* („szolga”) felületnek nevezik.

Az algoritmus a két felületen levő csomópontok relatív helyzetének vizsgálatából áll. Végeselemes eljárásban a slave-felületen levő csomópontok helyzetét egyenként a master-felületen levő legközelebbi három csomópont által meghatározott síkhoz viszonyíthatjuk. Amennyiben úgy találjuk, hogy a slave-felület valamely csomópontja a master-felület mögé került, akkor ez azt jelenti, hogy ott a két felületnek egymással érintkezniük kellene (7.32. ábra). Az érintkezés akkor történne meg, ha a slave-felület csomópontja éppen a master-felületen lenne. Az áthatolás δ mértékével és egy megfelelően megválasztott k merevségi együtthatóval meghatározható az

$$N = k \cdot \delta \quad (7.130)$$

penalty-erő, amellyel a felületre merőleges irányban a slave-felület áthatoló csomópontját terheljük. N -et a master-felület által kifejtett reakcióerőként értelmezhetjük. Ha a master-felület is deformálható, mint a 7.32. ábrán, akkor a *penalty-erő*, mint a slave-felület által gyakorolt terhelés, a master-felület érintett végeselemének felületi csomópontjai között oszlik el.



7.32. ábra. A *penalty*-módszer két dimenziós szemléltetése

A számítás legtöbbször iteratív, ugyanis egyrészt a k együttható megfelelő értékét nehéz eltalálni, másrészt a feladat nemlineáris a geometria és a terhelés változása miatt. A hiba mértéke a δ penetráció nagysága.

A két felület között ható merőleges reakcióerőket a csomópontokban számított *penalty-erők* jelentik. Bizonyos esetekben az érintkezési felület síkjában fellépő súrlódási erőket is számításba kell venni, e csomóponti erőket Coulomb törvénye szerint, a

$$T = \mu \cdot N \quad (7.131)$$

formulával számítjuk, ahol μ az érintkező felületekre meghatározott súrlódási tényező.

8. LENGÉSTANI SZÁMÍTÁSOK

8.1. Kényszerrezgések

Egy szerkezet *kényszerrezgést* végez ha valamilyen külső hatás miatt mozgásba jön. E külső energiaátadó hatás gyakorlati szempontból fontosabb megnyilvánulásai a rendszerre ható külső erő és az alátámasztási felület elmozdulása.

A gerjesztés lehet periodikus (ismétlődő) vagy aperiodikus, harmonikus (szinusz- vagy koszinusz-függvénnyel leírható) vagy nemharmonikus, determinisztikus (jól meghatározott) vagy sztochasztikus (véletlenszerűen változó).

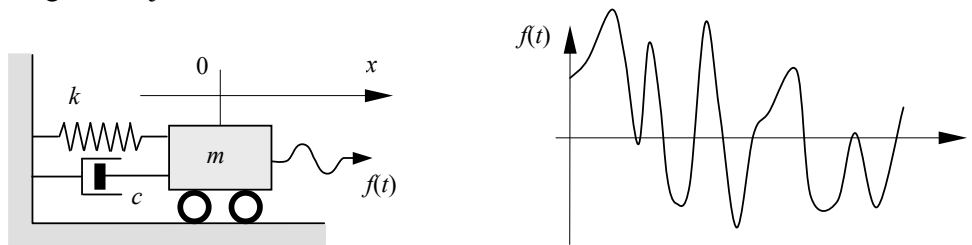
Az egy dinamikai szabadságfokkal rendelkező rendszer (amely a külső hatás folytán csak egy irányban mozdulhat el) kényszerrezgésének mozgásegyenletét, d'Alambert elve alapján, a rendszerre ható erők egyensúlya adja (8.1. ábra):

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = f(t), \quad (8.1)$$

ahol a bal oldalon az első tag az m tömegű rendszer tehetetlenségi ereje, második a súrlódási erők miatt fellépő, viszkózusnak tekintett csillapítás, a harmadik tag pedig a rugalmas alakváltozás miatt megjelenő erő. A jobb oldalon a gerjesztő hatást jelentő, időben változó $f(t)$ erő áll. Ez az erő lehet egy változó intenzitású külső erő de az származhat a rendszer alapjának elmozdulásából is: ha az alap egy bizonyos $a_g(t)$ gyorsulással mozog, akkor a gerjesztést az

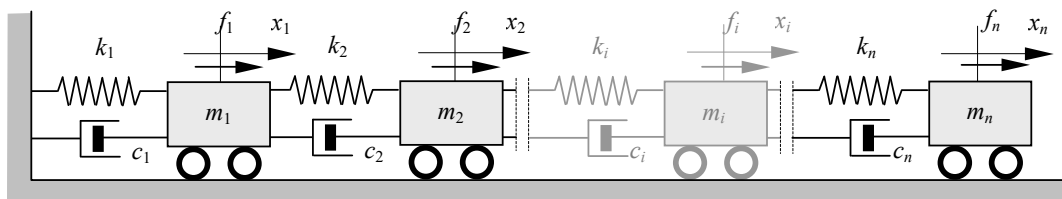
$$f(t) = -a_g(t) \cdot m \quad (8.2)$$

tehetetlenségi erő adja.



8.1. ábra. Külső erő által gerjesztett egy dinamikai szabadságfokú rendszer

A valódi szerkezetek végtelen sok dinamikai szabadságfokkal rendelkeznek, mivel végtelen sok anyagi részecskéből állanak. Túlnyomó részüknek viselkedése azonban egy véges számú dinamikai szabadságfokkal rendelkező rendszer segítségével modellezhető, mint amilyen például a 8.2. ábrán látható.



8.2. ábra. Több dinamikai szabadságfokkal rendelkező rendszer

8.1.1. Végeselemes modellezés

A szerkezetek végeselemes modellezése során vizsgálódásaikat a pontok végtelenje helyett néhány csomópontra korlátoztuk. Mint látni fogjuk, ez az észrevétel a végeselemekkel történő lengéstani modellezésnél is igaz. Így kijelenthetjük, hogy a végeselemekre felosztott szerkezetek lengéstani vizsgálata egy több, de véges számú dinamikai szabadságfokkal rendelkező modell tanulmányozását jelenti.

A végeselem anyagi pontok sokaságaként fogható fel. Minden anyagi ponthoz hat szabadságfokot rendelhetünk, három eltolódást és három elfordulást. Mivel az anyagi pont kiterjedés nélküli objektum, következik, hogy a végeselemet alkotó anyagi pontok száma végtelenül nagy, tehát a végeselem – akár csak bármely valódi szerkezet – tulajdonképpen végtelen sok dinamikai szabadságfokkal rendelkezik.

A végeselem az időben változó gerjesztés hatására mozgásba jön, mialatt dinamikai egyensúlyban van. Az egy szabadságfokú rendszer esetén az egyensúly egyenletét d'Alambert elve alapján írtuk fel, azonban a végtelen sok szabadságfokkal rendelkező végeselem esetében a dinamikai egyensúlyt célszerűbb Hamilton elve alapján felírni:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(E_k - E_p) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta(L_k + L_d) dt = 0, \quad (8.3)$$

ahol az integrálok alatt a következőkben felsorolt mennyiségek variációja szerepel: E_k a rendszer (esetünkben a végeselem) mozgási, E_p pedig annak potenciális energiája, L_k a rendszerre ható gerjesztő erők, L_d pedig a disszipatív erők mechanikai munkája. E mennyiségeket egy infinitezimális virtuális elmozdulásra számítjuk és azokat egy végeselemre felírva, a 2. fejezetben használt jelölésekkel egy

$$\begin{aligned} & \int_{V_e} \{\delta \mathbf{d}\}_e^T \cdot \{\mathbf{f}\}_e dV + \int_{S_e} \{\delta \mathbf{d}\}_e^T \cdot \{\mathbf{p}\}_e dS = \\ & = \int_{V_e} \{\delta \boldsymbol{\varepsilon}\}_e^T \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\}_e dV + \int_{V_e} \{\delta \mathbf{d}\}_e^T \cdot \rho \cdot \{\ddot{\mathbf{d}}\}_e dV + \int_{V_e} \{\delta \mathbf{d}\}_e^T \cdot c \cdot \{\dot{\mathbf{d}}\}_e dV \end{aligned} \quad (8.4)$$

egyenlethez jutunk, ahol a bal oldalon a térfogati és a felületi erők, a jobb oldalon pedig a végeselem anyagában fellépő feszültség, a gyorsulással arányos tehetetlenségi és a sebességgel arányos disszipatív erők szerepelnek. Megjegyzendő, hogy a disszipatív erőket itt a sebességgel arányos viszkózus erőknek tekintettük ugyan (ez a leggyakrabban használt modell), azonban azok lehetnek más természetűek is. Általában a végeselem anyagát homogénnek vesszük, ekkor az egyenletben szereplő ρ és c mennyiségek állandók.

A végeselemet alkotó anyagi pontok elmozdulása, sebessége és gyorsulása a csomópontok elmozdulásának, sebességének, illetve gyorsulásának segítségével a szokásos módon fejezhető ki:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{d}\}_e &= [\mathbf{N}]_e \cdot \{\boldsymbol{\delta}\}_e, \\ \{\dot{\mathbf{d}}\}_e &= [\mathbf{N}]_e \cdot \{\dot{\boldsymbol{\delta}}\}_e, \\ \{\ddot{\mathbf{d}}\}_e &= [\mathbf{N}]_e \cdot \{\ddot{\boldsymbol{\delta}}\}_e, \end{aligned} \quad (8.5)$$

amelyekkel az egyensúly 8.4. egyenlete a tagok átrendezése után a következő alakra hozható:

$$\begin{aligned} \{\delta\delta\}_e^T \cdot \left(\int_{V_e} \rho \cdot [N]_e^T \cdot [N]_e dV \cdot \{\ddot{\delta}\}_e + \int_{V_e} c \cdot [N]_e^T \cdot [N]_e dV \cdot \{\dot{\delta}\}_e + \int_{V_e} [B]_e^T \cdot \{\sigma\}_e dV \right) = \\ = \{\delta\delta\}_e^T \cdot \left(\int_{V_e} [N]_e^T \cdot \{f\}_e dV + \int_{S_e} [N]_e^T \cdot \{p\}_e dS \right). \end{aligned} \quad (8.6)$$

Itt az $\{\epsilon\}_e$ fajlagos alakváltozásokat a csomóponti elmozdulásokkal fejeztük ki (2.53. képlet). A $\{\sigma\}_e$ feszültségek a 2.57. kifejezés alapján szintén felírhatók a csomóponti elmozdulások segítségével, minek következtében a bal oldalon a harmadik integrál az elemi $[k]_e$ merevségi mátrix és a $\{\delta\}_e$ elmozdulásvektor szorzata lesz. Továbbá az első integrál a végelem *tömegmátrixának* (vagy általánosabban és helyesebben: tehetetlenségi mátrixának) nevezhető:

$$[m]_e = \int_{V_e} \rho \cdot [N]_e^T \cdot [N]_e dV, \quad (8.7)$$

a második a *csillapítás* elemi mátrixa:

$$[c]_e = \int_{V_e} c \cdot [N]_e^T \cdot [N]_e dV, \quad (8.8)$$

a jobboldali zárójel pedig a terhelés elemi vektora:

$$\{r\}_e = \int_{V_e} [N]_e^T \cdot \{f\}_e dV + \int_{S_e} [N]_e^T \cdot \{p\}_e dS. \quad (8.9)$$

E jelölésekkel a végelem dinamikai egyensúlyának egyenletét, $\{\delta\delta\}_e^T$ -vel való egyszerűsítés után

$$[m]_e \cdot \{\ddot{\delta}\}_e + [c]_e \cdot \{\dot{\delta}\}_e + [k]_e \cdot \{\delta\}_e = \{r\}_e \quad (8.10)$$

formában kapjuk. A végtelen sok dinamikai szabadságfokkal rendelkező végelem egyensúlyát a csomópontokhoz rendelt szabadságfokok irányában számított értékek függvényében kapjuk, tehát a végelelemes modellezés során a dinamikai szabadságfokok száma is véges lesz.

A szerkezet mozgásegyenletéhez a 8.10. elemi egyenletek felhasználásával jutunk:

$$[M] \cdot \{\ddot{\delta}\} + [C] \cdot \{\dot{\delta}\} + [K] \cdot \{\delta\} = \{R\} \quad (8.11)$$

ahol a szerkezeti vektorok és mátrixok összeállítása a sztatikus esetről bemutatott eljárással történik. Ez az egyenlet a több szabadságfokkal rendelkező rendszerek szokványos mozgásegyenletével azonos.

8.1.3. Egyszerűsítő feltételezések

A 8.11. egyenletrendszer $[M]$ tömegmátrixának és $[C]$ csillapítási mátrixának felépítése a $[K]$ merevségi mátrixával azonos, melyet *konzisztensnek* vagy *kompatibilisnek* neveznek.

A konzisztens mátrixok használatával a dinamikai feladat megoldására alkalmas program memóriaigénye a sztatikai feladaténak mintegy háromszorosa lesz. Bizonyos egyszerűsítő hipotézisek bevezetésével azonban a memóriai igény lényegesen csökkenthető.

A tömegmátrix egyszerűsített változata a nemdiagonális tagoktól eltekint, az így keletkező diagonális (vagy *koncentrált*) tömegmátrix pedig vektoriális formában tárolható. A diagonális tömegmátrix felépítésekor a végelem tömegét a csomópontokba koncentráljuk, az össztömeg

megőrzésével. Pontosabban: bármely szabadságfok irányában a megfelelő tagok összege a végeelem tömegét adja.

A tömeg csomópontok közötti elosztásában többféle módszer is elterjedt. A legegyszerűbb eljárás során a végeelem tömegét a csomópontok között egyenletesen osztják el, az elem alakjától és a csomópont helyzetétől függetlenül.

Egy, a konzisztens tömegeloszlást jobban közelítő eljárás a konzisztens tömegmátrix diagonális tagjait skálázza be olyan módon, hogy a szabadságfokok irányában összegezve a végeelem tömegét kapjuk.

A rendszer csillapításának fizikai mibenléte az alakváltozás és az elmozdulás irreverzibilitásában rejlik, amidőn a külső erők munkájának egy része hővé alakul át. E csillapítás egy komplex folyamat, amelyet bonyolultsága miatt általában egy ekvivalens viszkózus *disszipatív* erővel modellezünk. Ez a viszkózus ellenállás a szerkezetek dinamikai válaszában számításában a valósághoz közel álló eredményekhez vezet. A szerkezetet felépítő anyagok általában nem kerülnek a plasztikus folyás állapotába, tehát a viszkózus csillapítás nem annyira a szerkezetet felépítő elemek anyagához, mint magához a szerkezethez köthető. Éppen ezért az elemi csillapítási mátrix 8.8. kifejezésében szereplő c együttható meghatározása nem egyszerű feladat. A kutatások szerint a strukturális csillapítás részben a szerkezet tömegével, részben pedig a merevségével arányos (az „proporcionális”), tehát

$$[C] = a_0 \cdot [M] + a_1 \cdot [K]. \quad (8.12)$$

A fenti képlet a strukturális csillapítás Rayleigh-féle modellje, ahol a_0 és a_1 a szerkezetet jellemző skaláris paraméterek. E paraméterek megállapítása kísérletileg történik, tehát a tervezés folyamán szigorúan véve ismeretlenek. Megválasztásuk rendszerint a tervezetthez hasonló szerkezeteken mért mennyiségek elfogadásából áll, de létezik egy elméletileg megalapozott eljárás is: a Rayleigh-modell azokat a

$$\begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1} & \omega_1 \\ \frac{1}{\omega_2} & \omega_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} \quad (8.13)$$

egyenletrendszer megoldásaként adja meg. Ebben a kifejezésben ω_1 és ω_2 a szerkezet két első saját körfrekvenciája (a két legalacsonyabb rezonáns körfrekvenciája), ζ_1 és ζ_2 a két első sajátmódus csillapítási foka. A sajátértékekről és a sajátmódusokról bővebben a következő fejezetben lesz szó, a csillapítási fokokat pedig mérésekkel lehet megállapítani.

Az egyenletrendszer megoldásával tehát

$$a_0 = \frac{2 \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot (\zeta_1 \cdot \omega_2 - \zeta_2 \cdot \omega_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2}, \quad (8.14)$$

$$a_1 = \frac{2 \cdot (\zeta_2 \cdot \omega_2 - \zeta_1 \cdot \omega_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2}. \quad (8.15)$$

A csillapítás mátrixának Rayleigh-féle kifejezése nagy megtakarítást jelent, ugyanis a tömegmátrix és a merevségi mátrix segítségével tagjai bármikor előállíthatók, így tárolása fölöslegessé válik. Mivel a csillapítás mátrixa a tömegmátrix és a merevségi mátrix lineáris kombinációja, az emezek tulajdonságával rendelkezik: a főátlóra nézve szimmetrikus és pozitív definit (e tulajdonságok egyébként a 8.7.-8.8. meghatározásokból is erednek).

A Rayleigh-modellnek egyébként létezik egy, a gyakorlatban ritkábban használt általánosítása is, amely az első n sajátmódot használja fel:

$$[C] = [M] \cdot \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot ([M]^{-1} \cdot [K])^i, \quad (8.16)$$

$$\{\zeta\} = \frac{1}{2} \cdot [Q] \cdot \{a\}, \quad (8.17)$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} \omega_1^{-1} & \omega_1 & \dots & \omega_1^{2-n-3} \\ \omega_2^{-1} & \omega_2 & \dots & \omega_2^{2-n-3} \\ \dots & & & \\ \omega_n^{-1} & \omega_n & \dots & \omega_n^{2-n-3} \end{bmatrix}. \quad (8.18)$$

Ha $n > 2$, akkor nyilván e modell a gyakorlat szempontjából túlságosan bonyolult lesz, viszont ha $n = 1$, akkor egy egyszerű, tömeggel arányos csillapításhoz jutunk.

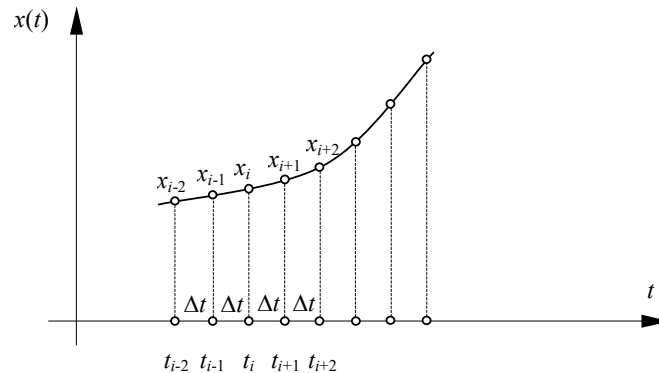
8.1.4. A mozgásegyenlet megoldása

A szerkezet mozgásegyenletét tulajdonképpen a 8.11. differenciálegyenlet-rendszer jelenti. Analitikus megoldására nem vállalkozhatunk, éppen ezért numerikus eljárásokhoz kell folyamodjunk. E módszerek az elmozdulásnak és deriváltjainak (a sebességnek és a gyorsulásnak) közelítését célozzák. Mindezeket először bemutatjuk az egy szabadságfokú rendszer 8.1. mozgásegyenletének megoldására, majd a kapott relációkat kiterjesztjük a több szabadságfokkal rendelkező rendszerekre is.

8.1.4.1. A véges differenciák módszere (közvetlen explicit integrálás)

Az egyik általános eljárás a *véges differenciák módszere*, amely a tanulmányozott függvényt néhány konkrét értékével közelíti a tanulmányozott tartomány felett. Ezeket a függvényértékeket általában egy irányonként állandó lépésű „háló” vagy „rács” csomópontjaiban veszik fel. E hálót egy annyi dimenzióval rendelkező térben kell elképzelnünk, ahány változója van a tanulmányozott függvénynek. A háló kiterjedése a függvény értelmezési tartományát fedi.

Esetünkben a tanulmányozott függvény az $x(t)$ elmozdulás. Egyetlen változója a t idő, így a háló egy dimenziós lesz: azt az időtartamot, amelyen a rendszer dinamikus válaszát akarjuk kiszámítani, n darab Δt hosszúságú intervallumra osztjuk fel, a választ pedig az intervallumokat egymástól elhatároló pontokban számítjuk ki (8.3. ábra).



8.3. ábra. A tanulmányozott függvény diszkrétizálása a véges differenciák módszerében

Az i csomópont szomszédságában számított elmozdulásokat Taylor-sorba fejtéssel kapjuk:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \cdot \dot{x}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \ddot{x}_i + \frac{\Delta t^3}{6} \cdot \ddot{\ddot{x}}_i + \dots, \quad (8.19)$$

$$x_{i-1} = x_i - \Delta t \cdot \dot{x}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \ddot{x}_i - \frac{\Delta t^3}{6} \cdot \ddot{\ddot{x}}_i + \dots, \quad (8.20)$$

ahol $x_j = x(t = t_j)$. Ha csak az első két-két tagot tartjuk meg, akkor az előbbi két kifejezés különbségével a sebesség i csomópontban approximált értékét kapjuk:

$$\dot{x}_i = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_i} \approx \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot (x_{i+1} - x_{i-1}). \quad (8.21)$$

(ezt a közelítést a pontok elhelyezkedése miatt *centrális* differenciának mondják).

A harmadik tagot is számításba véve a 8.19. és a 8.20. kifejezések összegzésével a gyorsulás közelítése

$$\ddot{x}_i = \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t_i} \approx \frac{1}{\Delta t^2} \cdot (x_{i+1} - 2 \cdot x_i + x_{i-1}) \quad (8.22)$$

lesz.

Az elmozdulás deriváltjaira emígy kapott megközelítésekkel a 8.1. mozgásegyenlet

$$m \cdot \left[\frac{x_{i+1} - 2 \cdot x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2} \right] + c \cdot \left[\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2 \cdot \Delta t} \right] + k \cdot x_i = f_i \quad (8.23)$$

alakra hozható, ahol $f_i = f(t = t_i)$ és amely kifejezés már nem differenciálegyenlet. Innen az x_{i+1} elmozdulás kifejezhető:

$$x_{i+1} = \frac{1}{\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2 \cdot \Delta t}} \cdot \left\{ \left[\frac{2 \cdot m}{\Delta t^2} - k \right] \cdot x_i + \left[\frac{c}{2 \cdot \Delta t} - \frac{m}{\Delta t^2} \right] \cdot x_{i-1} + f_i \right\}. \quad (8.24)$$

A kapott összefüggés egy rekurzív képlet, amely x_{i+1} értékét az azelőtti lépésekben kiszámolt x_i és x_{i-1} elmozdulásokkal adja meg. Az első lépésben x_0 kezdeti feltételként adott. Az x_{-1} elmozdulás kiszámításához a gyorsulás \ddot{x}_0 kezdeti értékére is szükségünk van, amelyet az eddigiekben használt kezdeti feltételekkel a mozgásegyenletből határozhatunk meg:

$$\ddot{x}_0 = \frac{1}{m} \cdot (f_0 - c \cdot \dot{x}_0 - k \cdot x_0). \quad (8.25)$$

A kezdeti értékekre felírt

$$\dot{x}_0 = \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot (x_1 - x_{-1}), \quad \text{illetve} \quad \ddot{x}_0 = \frac{1}{\Delta t^2} \cdot (x_1 - 2 \cdot x_0 + x_{-1}) \quad (8.26)$$

képletekből

$$x_{-1} = x_0 - h \cdot \dot{x}_0 + \frac{h^2}{2} \cdot \ddot{x}_0. \quad (8.27)$$

Megemlíthető, hogy a véges differenciák módszerének (8.21. képlet) *jobboldali*:

$$\dot{x}_i = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_i} = \frac{1}{\Delta t} \cdot (x_{i+1} - x_i), \quad (8.28)$$

és baloldali:

$$\dot{x}_i = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_i} = \frac{1}{\Delta t} \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad (8.29)$$

változata is van, de általában a központi megfogalmazást kedvelik nagyobb pontossága miatt.

A módszer megnevezésében az „explicit” jelző azt jelenti, hogy a számításokban az előző lépésekben kiszámított adatokra támaszkodunk és azok közvetlenül, explicit módon határozzák meg az aktuális értékeket. Általánosságként elmondható, hogy az explicit integrálás csak a megfelelően kicsinek vett Δt lépés esetén stabil és pontos. Az instabilitás azt jelenti, hogy a kiszámított mennyiségek nagy, esetleg növekvő amplitúdóval ingadoznak a tényleges görbék mentén.

8.1.4.2. A Runge-Kutta módszer

A Runge-Kutta módszer az elsőrendű differenciálegyenletek megoldásának közelítő módszere, amelyben a függvény értékeit

$$f_{i+1} = f_i + \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot k_j \quad (8.30)$$

formában keressük. Az α_j tagok konstans szorzók. A k_j tagok meghatározása az f függvény Taylor-sorba fejtésével történik, ahol a fenti kifejezés jobb oldala meg kell egyezzen a kapott Taylor-sor első n tagjával. Így n konkrét értékétől függően a módszer különböző rendű változataihoz jutunk.

A rezgő dinamikai rendszer mozgásegyenlete egy másodrendű differenciálegyenlet, amelynek elsőrendűvé alakításához azt

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} \cdot [f(t) - c \cdot \dot{x} - k \cdot x] = f(x, \dot{x}, t) \quad (8.31)$$

formában írjuk át. Az $y = \dot{x}$ változó bevezetésével ez a következő lineáris egyenletrendszerre alakítható át:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x, y, t) \end{cases} \quad (8.32)$$

Az

$$\{\mathbf{x}(t)\} = \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} \quad \text{és} \quad \{\mathbf{F}(\{\mathbf{x}(t)\}, t)\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{Bmatrix} \quad (8.33)$$

jelölések bevezetésével, a szerkezetek dinamikájában gyakrabban használt negyedrendű Runge-Kutta módszerben ($n = 4$), egy adott $i + 1$ pontban $\{\mathbf{x}(t)\}$ értékét az

$$\{\mathbf{x}_{i+1}\} = \{\mathbf{x}_i\} + \frac{1}{6} \cdot (\{\mathbf{k}_1\} + 2 \cdot \{\mathbf{k}_2\} + 2 \cdot \{\mathbf{k}_3\} + \{\mathbf{k}_4\}) \quad (8.34)$$

rekurzió adja, ahol

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{k}_1\} &= \Delta t \cdot \{\mathbf{F}(\{\mathbf{x}_i\}, t_i)\}, \\
\{\mathbf{k}_2\} &= \Delta t \cdot \{\mathbf{F}(\{\mathbf{x}_i\} + 0.5 \cdot \{\mathbf{k}_1\}, t_i + 0.5 \cdot \Delta t)\}, \\
\{\mathbf{k}_3\} &= \Delta t \cdot \{\mathbf{F}(\{\mathbf{x}_i\} + 0.5 \cdot \{\mathbf{k}_2\}, t_i + 0.5 \cdot \Delta t)\}, \\
\{\mathbf{k}_4\} &= \Delta t \cdot \{\mathbf{F}(\{\mathbf{x}_i\} + \{\mathbf{k}_3\}, t_{i+1})\}.
\end{aligned}
\tag{8.35}$$

Az $\{\mathbf{F}\}$ -ben szereplő másodrendű derivált (az $\dot{y}(t)$ gyorsulás) kiszámítása a 8.31. képlettel történik, az ugyanott szereplő elsőrendű derivált (az $\dot{x}(t)$ sebesség) pedig a megfelelő $\{\mathbf{x}\}$ tag második eleme.

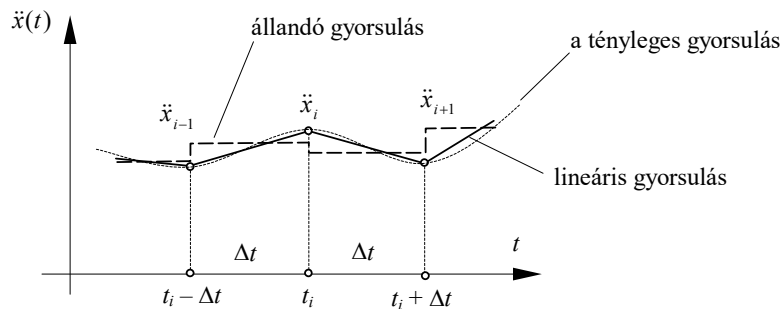
Ez a módszer az előbbihez hasonlóan a mozgásegyenlet „explicit” integrálása, de azzal ellentétben nem igényli az első lépés külön kiszámítását.

8.1.4.3. Közvetlen implicit integrálás

A numerikus módszerek másik osztályát a mozgásegyenletek közvetlen „implicit” integrálása alkotja. Az implicit módszerekben ugyancsak az előző lépésben kiszámított mennyiségekre fogunk támaszkodni, de azok nem írják elő mereven, explicit módon az aktuális értékeket. Azokat egy iteratív eljárással határozzuk meg.

A számítási eljárás ez esetben is Δt lépésenként állapítja meg a rendszer választ, algoritmusának felállításához viszont egy hipotézis elfogadására van szükség a gyorsulás változási sebességét tekintve (az \ddot{x} deriváltat az angol nyelvű irodalomban „jerk” névvel illetik – amit *lökésnek* fordíthatunk le – és j -vel jelölik). A gyakorlatban a gyorsulást általában állandónak ($\ddot{x} = 0$) vagy lineárisan változónak tekintik (ekkor $\ddot{x} = \text{áll.}$, $\ddot{\ddot{x}} = 0$). Mindkét eset a valóság bizonyos fokú közelítését adja, amelynek pontosságában a Δt lépés hossza fontos szerepet játszik.

Az állandó és a lineárisan változó gyorsulások esetét a 8.4. ábra mutatja be.



8.4. ábra. A gyorsulás közelítése a közvetlen integrálás módszerében

Ha a gyorsulás állandó, akkor a kinematikából ismert összefüggések alapján a Δt lépés végén a sebesség

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \Delta t \cdot \ddot{x}_i \tag{8.36}$$

(ez az egyenes vonalú egyenletes mozgás sebességtörvénye), az elmozdulás pedig

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \cdot \dot{x}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \ddot{x}_i \tag{8.37}$$

(ez pedig az úttörvény).

Ha a gyorsulás lineárisan változik, akkor a keresett egyenleteket az $\ddot{x} = \text{áll.}$ egyenlet integrálásával kapjuk (a gyorsulás értékeit előírván), ekkor a sebesség

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \frac{\Delta t}{2} \cdot (\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}), \quad (8.38)$$

az elmozdulás pedig

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \cdot \dot{x}_i + \frac{\Delta t^2}{3} \cdot \ddot{x}_i + \frac{\Delta t^2}{6} \cdot \ddot{x}_{i+1}. \quad (8.39)$$

Ha a fenti összefüggéseket behelyettesítjük a 8.1. mozgásegyenletbe, akkor egy olyan algebrai egyenlethez jutunk, ahol az ismeretlen az \ddot{x}_{i+1} gyorsulás lesz. Ez az egyenlet az állandó gyorsulások hipotézisében

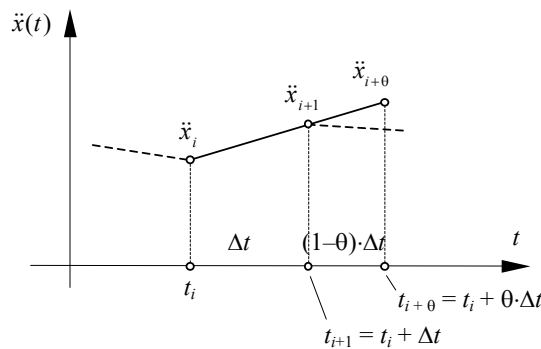
$$m \cdot \ddot{x}_{i+1} = f_{i+1} - c \cdot (\dot{x}_i + \Delta t \cdot \ddot{x}_i) - k \cdot \left(x_i + \Delta t \cdot \dot{x}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \ddot{x}_i \right), \quad (8.40)$$

a lineáris gyorsulások esetében pedig

$$\left(m + \frac{\Delta t}{2} \cdot c + \frac{\Delta t^2}{6} \cdot k \right) \cdot \ddot{x}_{i+1} = f_{i+1} - c \cdot \left(\dot{x}_i + \frac{\Delta t}{2} \cdot \ddot{x}_i \right) - k \cdot \left(x_i + \Delta t \cdot \dot{x}_i + \frac{\Delta t^2}{3} \cdot \ddot{x}_i \right). \quad (8.41)$$

Mindkét egyenlet egy-egy rekurzív képlet, azok a Δt lépés elején ismert értékek és a gerjesztés aktuális nagyságának felhasználásával a gyorsulás következő értékét adják (az állandó gyorsulások esetében ez a következő lépés gyorsulása lesz, tehát a 8.4. ábrán látható lépcsőzetes vonal jobb oldali értéke). Az elmozdulás és a sebesség értékét a 8.36. - 8.39. képletekkel számítjuk ki. Az első lépésben a kezdeti értékeket a véges differenciák módszerében ismertetett eljárással kapjuk.

A közvetlen integrálás fenti módszerének pontosságát a Δt lépés megválasztása nagy mértékben befolyásolja. Egy túl hosszú lépés a valóságtól nagymértékben eltérő válaszhoz vagy instabilitásokhoz vezet, egy indokolatlanul rövid lépéssel pedig a műveletek száma szaporodik és a számítási idő növekedik meg. Egyértelmű előírás a lépés hosszának megválasztásában nem létezik, de általában Δt felső határértéke a sajátregzés periódusának tizede (vagy, ha a gerjesztés frekvenciája a sajátfrekvenciánál nagyobb, akkor a gerjesztés periódusának tizede). A pontosság és a konvergencia ellenőrzése a számítások megismétlésével lehetséges, ahol a Δt lépés hosszát a felére csökkentjük.



8.5. ábra. A kiterjesztett lépés

Az említett instabilitás elkerülése végett több, a fent ismertetett lineáris gyorsulások módszeréből származtatott eljárást is kifejlesztettek. Ezeknek a módszereknek egy része a lineáris gyorsulás hipotézisét egy *kiterjesztett* időlépésre írja elő, amint az a 8.5. ábrán látható.

Az integrálás lépésének hossza tehát ekkor $\theta \cdot \Delta t$, ahol $\theta \geq 1$ (általában nagysága 1.37 és 2.00 között van). A kiterjesztett lépés végén számított értékeket a továbbiakban felülvonással jelöljük. Ezt a módszert kifejlesztőjéről Wilson-módszerek nevezik.

Egy másik eljárásban, a Newmark-módszerben az elmozdulás és a sebesség kiszámítására felírt kinematikai képleteket két (γ és β), egység alatti együtthatóval korrigálják, mely korrekciót a gyorsulás nemlineáris változása indokol.

E kétfajta eljárást kombinálva a következő általánosított képleteket írhatjuk fel:

$$\bar{x}_{i+1} = x_i + \theta \cdot \Delta t \cdot \dot{x}_i + (1/2 - \beta) \cdot \theta^2 \cdot \Delta t^2 \cdot \ddot{x}_i + \beta \cdot \theta^2 \cdot \Delta t^2 \cdot \bar{\ddot{x}}_{i+1}, \quad (8.42)$$

$$\bar{\dot{x}}_{i+1} = \dot{x}_i + (1 - \gamma) \cdot \theta \cdot \Delta t \cdot \ddot{x}_i + \gamma \cdot \theta \cdot \Delta t \cdot \bar{\ddot{x}}_{i+1}. \quad (8.43)$$

E két összefüggésből az $\bar{\ddot{x}}_{i+1}$ gyorsulás és a $\bar{\dot{x}}_{i+1}$ sebesség kifejezhetők, mint:

$$\bar{\ddot{x}}_{i+1} = \frac{1}{\beta \cdot \theta^2 \cdot \Delta t^2} \cdot (\bar{x}_{i+1} - x_i) - \frac{1}{\beta \cdot \theta \cdot \Delta t} \cdot \dot{x}_i + \left(1 - \frac{1}{2 \cdot \beta}\right) \cdot \ddot{x}_i, \quad (8.44)$$

illetve

$$\bar{\dot{x}}_{i+1} = \frac{\gamma}{\beta \cdot \theta \cdot \Delta t} \cdot (\bar{x}_{i+1} - x_i) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \cdot \dot{x}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2 \cdot \beta}\right) \cdot \theta \cdot \Delta t \cdot \ddot{x}_i. \quad (8.45)$$

Ha a 8.1. mozgásegyenletet a tömeggel beosztva azt

$$\ddot{x} + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_0 \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = -a(t) \quad (8.46)$$

formában írjuk újra, ahol

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta = \frac{c}{2 \cdot \omega_0 \cdot m}, \quad a(t) = -\frac{f(t)}{m}, \quad (8.47)$$

akkor a sebesség 8.45. és a gyorsulás 8.44. kifejezéseivel ez a

$$\hat{k} \cdot \bar{x}_{i+1} = \hat{f}_{i+1} \quad (8.48)$$

formára hozható, amely a sztatikus terhelés és az által okozott alakváltozás közötti összefüggéssel analóg. A fenti képletben szereplő tagok a

$$\hat{k} = \omega_0^2 + \frac{1}{\beta \cdot \theta^2 \cdot \Delta t^2} + \frac{2 \cdot \zeta \cdot \omega_0 \cdot \gamma}{\beta \cdot \theta \cdot \Delta t} \quad (8.49)$$

„effektív merevség” és a

$$\begin{aligned} \hat{f}_{i+1} = & \bar{f}_{i+1} + \frac{1}{\beta \cdot \theta^2 \cdot \Delta t^2} \cdot \left[x_i + \theta \cdot \Delta t \cdot \dot{x}_i + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \cdot \theta^2 \cdot \Delta t^2 \cdot \ddot{x}_i \right] + \\ & + \frac{2 \cdot \zeta \cdot \omega_0 \cdot \gamma}{\beta \cdot \theta \cdot \Delta t} \cdot \left[x_i + \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) \cdot \theta \cdot \Delta t \cdot \dot{x}_i + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{\gamma}\right) \cdot \theta^2 \cdot \Delta t^2 \cdot \ddot{x}_i \right] \end{aligned} \quad (8.50)$$

„effektív terhelés”. A 8.48. egyenlet megoldásával a kiterjesztett lépés végén az elmozdulás

$$\bar{x}_{i+1} = \frac{\hat{f}_{i+1}}{\hat{k}}, \quad (8.51)$$

amit a 8.44. egyenletbe behelyettesítve \bar{x}_{i+1} a lépés elején érvényes adatokkal kiszámítható (a gerjesztés \bar{f}_{i+1} értéke ismert). A kapott \bar{x}_{i+1} felhasználásával a Δt intervallum végén az \ddot{x}_{i+1} gyorsulás lineáris interpolációval

$$\ddot{x}_{i+1} = \ddot{x}_i + \frac{1}{\theta} \cdot (\bar{\ddot{x}}_{i+1} - \ddot{x}_i) = \frac{1}{\beta \cdot \theta^3 \cdot \Delta t^2} \cdot (\bar{x}_{i+1} - x_i) - \frac{1}{\beta \cdot \theta^2 \cdot \Delta t} \cdot \dot{x}_i + \left(1 - \frac{1}{2 \cdot \theta \cdot \beta}\right) \cdot \ddot{x}_i. \quad (8.52)$$

Az x_{i+1} elmozdulás és az \dot{x}_{i+1} sebesség a 8.42, illetve a 8.43. képletekből következik, ahol ezúttal $\theta = 1$:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \cdot \dot{x}_i + (1/2 - \beta) \cdot \Delta t^2 \cdot \ddot{x}_i + \beta \cdot \Delta t^2 \cdot \bar{\ddot{x}}_{i+1}, \quad (8.53)$$

illetve

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + (1 - \gamma) \cdot \Delta t \cdot \ddot{x}_i + \gamma \cdot \Delta t \cdot \bar{\ddot{x}}_{i+1}. \quad (8.54)$$

A fenti két képletben szereplő $\bar{\ddot{x}}_{i+1}$ gyorsulás kifejezhető, mint

$$\bar{\ddot{x}}_{i+1} = \theta \cdot \ddot{x}_{i+1} - (\theta - 1) \cdot \ddot{x}_i, \quad (8.55)$$

ezzel pedig azok olyan formára hozhatók, ahol minden tag ismert:

$$x_{i+1} = \left(1 - \frac{1}{\theta^3}\right) \cdot x_i + \left(1 - \frac{1}{\theta^2}\right) \cdot \Delta t \cdot \dot{x}_i + \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) \cdot \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \ddot{x}_i + \frac{1}{\theta^3} \cdot \bar{x}_{i+1}, \quad (8.56)$$

$$\dot{x}_{i+1} = -\frac{\gamma}{\beta \cdot \theta^3 \cdot \Delta t} \cdot x_i + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta \cdot \theta^2}\right) \cdot \dot{x}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2 \cdot \beta \cdot \theta}\right) \cdot \Delta t \cdot \ddot{x}_i + \frac{\gamma}{\beta \cdot \theta^3 \cdot \Delta t} \cdot \bar{x}_{i+1}, \quad (8.57)$$

és amelyek a 8.52,

$$\ddot{x}_{i+1} = \frac{1}{\beta \cdot \theta^3 \cdot \Delta t^2} \cdot (\bar{x}_{i+1} - x_i) - \frac{1}{\beta \cdot \theta^2 \cdot \Delta t} \cdot \dot{x}_i + \left(1 - \frac{1}{2 \cdot \theta \cdot \beta}\right) \cdot \ddot{x}_i \quad (8.58)$$

formulával együtt egy rekurzív algoritmust alkotnak.

A módszer a következő lépésekkel írható le:

a). az

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 \end{cases} \quad (8.59)$$

kezdeti feltételekből kiszámítjuk \ddot{x}_0 értékét:

$$\ddot{x}_0 = -[a(t=0) + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_0 \cdot \dot{x}_0 + \omega_0^2 \cdot x_0] \quad (8.60)$$

és az effektív merevséget (\hat{k} , 8.49. képlet);

b). kiszámítjuk az effektív \hat{f}_{i+1} terhelést (8.50. képlet);

c). meghatározzuk az \bar{x}_{i+1} elmozdulást (8.51. képlet);

d). kiszámítjuk az aktuális lépés végén érvényes elmozdulást (8.56), sebességet (8.57) és gyorsulást (8.58);

e). a második ponttól kezdődően a számításokat megismételjük a következő lépésre.

Az eljárás a megfelelően megválasztott θ , illetve γ és β használatakor általában stabil, viszont a pontosságot Δt hossza ebben az esetben is közvetlenül befolyásolja. A használt együtthatók optimális értékét empirikus úton állapították meg, a gyakorlatban a következő kombinációk terjedtek el a leginkább:

$$\gamma = 1/2, \quad \beta = 1/4, \quad \theta = 1 \quad (\text{Newmark-módszer});$$

$$\gamma = 1/2, \quad \beta = 1/12, \quad \theta = 1.4 \dots 2 \quad (\text{Wilson-módszer}).$$

Megemlítendő, hogy a szakkönyvek többségében a fenti két módszert külön tárgyalják.

8.1.4.4. A közvetlen explicit integrálás több szabadságfok esetén

Az egy szabadságfokú rendszer esetében az elmozdulásokat egy csomópont környezetében Taylor-sorba fejtettük, ahol a csomópont az időtengely egy kijelölt pontja. Több szabadságfokkal rendelkező rendszerek esetében a Taylor-sorba fejtést minden szabadságfok irányában el kell végeznünk, a 8.19. és a 8.20. kifejezéseket tömören

$$\{\delta_{i+1}\} = \{\delta_i\} + \Delta t \cdot \{\dot{\delta}_i\} + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \{\ddot{\delta}_i\} + \frac{\Delta t^3}{6} \cdot \{\ddot{\delta}_i\} + \dots, \quad (8.61)$$

illetve

$$\{\delta_{i-1}\} = \{\delta_i\} - \Delta t \cdot \{\dot{\delta}_i\} + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \{\ddot{\delta}_i\} - \frac{\Delta t^3}{6} \cdot \{\ddot{\delta}_i\} + \dots \quad (8.62)$$

formában lehet felírni.

Az egy szabadságfokú rendszer esetével azonos módon a sebességek közelítését

$$\{\dot{\delta}_i\} = \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot (\{\delta_{i+1}\} - \{\delta_{i-1}\}), \quad (8.63)$$

a gyorsulások közelítését pedig

$$\{\ddot{\delta}_i\} = \frac{1}{\Delta t^2} \cdot (\{\delta_{i+1}\} - 2 \cdot \{\delta_i\} + \{\delta_{i-1}\}) \quad (8.64)$$

alakban kapjuk.

E közelítésekkel a mozgásegyenletet egy

$$[M] \cdot \left[\frac{\{\delta_{i+1}\} - 2 \cdot \{\delta_i\} + \{\delta_{i-1}\}}{\Delta t^2} \right] + [C] \cdot \left[\frac{\{\delta_{i+1}\} - \{\delta_{i-1}\}}{2 \cdot \Delta t} \right] + [K] \cdot \{\delta_i\} = \{R_i\} \quad (8.65)$$

egyenletrendszerrel helyettesíthetjük, ahonnan a t_{i+1} pillanatban fellépő elmozdulás

$$\left[\frac{1}{\Delta t^2} \cdot [M] + \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot [C] \right] \cdot \{\delta_{i+1}\} = \{R_i\} + \left[\frac{2}{\Delta t^2} \cdot [M] - [K] \right] \cdot \{\delta_i\} + \left[\frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot [C] - \frac{1}{\Delta t^2} \cdot [M] \right] \cdot \{\delta_{i-1}\} \quad (8.66)$$

lesz. Az első lépésben a rekurzióhoz szükséges elmozdulást most is a kezdeti feltételekből határozzuk meg:

$$\{\delta_{-1}\} = \{\delta_0\} - \Delta t \cdot \{\dot{\delta}_0\} + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \{\ddot{\delta}_0\}. \quad (8.67)$$

Ha a tömegmátrix és a csillapítás mátrixa egyaránt koncentrált (csak diagonális tagjaik vannak), akkor a 8.66. egyenletrendszer a dinamikai szabadságfokok számával egyenlő számú egymástól független egyenletből áll. A nemdiagonális tagok elhagyásával a pontosság kisebb lesz ugyan, viszont a számítási idő jelentősen csökken, ugyanis nem kell minden lépésben a baloldalon található mátrixot triangularizálni. Emiatt a koncentrált tömeg- és csillapítás-mátrix használatával megoldott explicit integrálás gyakran alkalmazott eljárás.

8.1.4.5. A közvetlen implicit integrálás több szabadságfok esetén

A több szabadságfokú rendszerek mozgásegyenletének közvetlen implicit integrálása több, a gyakorlatban bevált módszer szerint hajtható végre, amelyeket az egy szabadságfokkal rendelkező rendszernél bemutatottak alapján általánosíthatunk. A rekurzív algoritmus alapját a

$$\{\delta_{i+1}\} = \left(1 - \frac{1}{\theta^3}\right) \cdot \{\delta_i\} + \left(1 - \frac{1}{\theta^2}\right) \cdot \Delta t \cdot \{\dot{\delta}_i\} + \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) \cdot \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \{\ddot{\delta}_i\} + \frac{1}{\theta^3} \cdot \{\bar{\delta}_{i+1}\} \quad (8.68)$$

elmozdulás, a

$$\{\dot{\delta}_{i+1}\} = -\frac{\gamma}{\beta \cdot \theta^3 \cdot \Delta t} \cdot \{\delta_i\} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta \cdot \theta^2}\right) \cdot \{\dot{\delta}_i\} + \left(1 - \frac{\gamma}{2 \cdot \beta \cdot \theta}\right) \cdot \Delta t \cdot \{\ddot{\delta}_i\} + \frac{\gamma}{\beta \cdot \theta^3 \cdot \Delta t} \cdot \{\bar{\delta}_{i+1}\} \quad (8.69)$$

sebesség és a

$$\{\ddot{\delta}_{i+1}\} = \frac{1}{\beta \cdot \theta^3 \cdot \Delta t^2} \cdot (\{\bar{\delta}_{i+1}\} - \{\delta_i\}) - \frac{1}{\beta \cdot \theta^2 \cdot \Delta t} \cdot \{\dot{\delta}_i\} + \left(1 - \frac{1}{2 \cdot \theta \cdot \beta}\right) \cdot \{\ddot{\delta}_i\} \quad (8.70)$$

gyorsulás alkotják, a már ismert jelölések használatával. A $\{\bar{\delta}_{i+1}\}$ elmozdulásvektort most a

$$[\hat{\mathbf{K}}] \cdot \{\bar{\delta}_{i+1}\} = \{\hat{\mathbf{R}}_{i+1}\} \quad (8.71)$$

lineáris egyenletrendszer megoldásával kapjuk, ahol az effektív merevségi mátrix

$$[\hat{\mathbf{K}}] = [\mathbf{K}] + \frac{1}{\beta \cdot \theta^2 \cdot \Delta t^2} \cdot [\mathbf{M}] + \frac{2 \cdot \gamma}{\beta \cdot \theta \cdot \Delta t} \cdot [\mathbf{C}], \quad (8.72)$$

az effektív terhelésvektor pedig

$$\{\hat{\mathbf{R}}_{i+1}\} = \{\bar{\mathbf{R}}_{i+1}\} + \frac{1}{\beta \cdot \theta^2 \cdot \Delta t^2} \cdot [\mathbf{M}] \cdot \{\mathbf{U}_i\} + \frac{\gamma}{\beta \cdot \theta \cdot \Delta t} \cdot [\mathbf{C}] \cdot \{\mathbf{V}_i\}, \quad (8.73)$$

mely utóbbi kifejezésében

$$\{\mathbf{U}_i\} = \{\delta_i\} + \theta \cdot \Delta t \cdot \{\dot{\delta}_i\} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \cdot \theta^2 \cdot \Delta t^2 \cdot \{\ddot{\delta}_i\}, \quad (8.74)$$

$$\{\mathbf{V}_i\} = \{\delta_i\} + \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) \cdot \theta \cdot \Delta t \cdot \{\dot{\delta}_i\} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{\gamma}\right) \cdot \theta^2 \cdot \Delta t^2 \cdot \{\ddot{\delta}_i\}. \quad (8.75)$$

Az effektív merevségi mátrix a tömeg- és a csillapítási mátrix koncentrált formáinak használata mellett is tele mátrix lesz. Ennek következtében az implicit integrálás esetében minden egyes lépés alatt meg kell oldani a csatolt egyenletekből álló 8.71. egyenletrendszert, s ez a tény az explicit integráláshoz viszonyítva sokkal időigényesebb algoritmusokhoz vezet (a pontossága viszont várhatóan nagyobb annál).

8.1.5. Nemlineáris rendszerek dinamikája

A nemlineáris viselkedés okai, mint láthattuk, lehetnek anyagiak és geometriaiak. Néha beszélnek a terhelés nemlinearitásáról is, azonban ezt a kategóriát gyakran a geometriai nemlinearitáshoz sorolják.

A nemlineáris dinamikai feladatoknál a $[K]$, $[C]$ és ritkábban az $[M]$ mátrix a tagjai nem állandóak, hanem valamilyen törvény szerint változnak. E változás oka lehet anyagi, például a merevség a nemlineáris $\sigma - \varepsilon$ kapcsolat miatt folyamatosan változhat a tanulmányozott jelenség alatt. Anyagi oka lehet a csillapítás nemlineáris jellegének is, a Rayleigh-modell használatakor például a merevség nemlinearitása automatikusan a csillapítás nemlineáris jellegéhez vezet. A merevség és a csillapítás nemlineáris jellege lehet geometriai eredetű is. A tömeg (vagy a tehetetlenségi) mátrix tagjai is megváltozhatnak a mozgás folyamán: e változás oka lehet például a tömeg tényleges megváltozása vagy pedig a tanulmányozott szerkezet részeinek nagy elfordulása.

A nemlineáris feladatoknál tehát általában a mozgásegyenletek együtthatóit jelentő mátrixok nem állandóak, de ugyanide sorolhatók az előbbi fejezetben ismertett kontakt-feladatok is.

A mozgásegyenletek megoldását célzó számítások ez esetben inkrementálisak. A feladat megoldásának legegyszerűbb módszere egy megfelelően kicsi Δt lépés megválasztása, amely alatt a nemlineáris viselkedés hatása elhanyagolható. Minden lépés elején az érintett nemlineáris mátrixokat az azelőtti lépés végén kapott adatokkal újra kiszámítjuk.

A pontosabb eljárások egy „belső” iterációt alkalmaznak az eredmény finomításához. Az implicit integrálás esetében a következő algoritmus kínálkozik:

a). a nemlinearitás természetétől függően minden lépés elején kiszámítjuk az $[M]$, $[C]$ és $[K]$ mátrixokat;

b). kiszámítjuk és triangularizáljuk az effektív merevségi mátrixot (8.72. képlet);

c). kiszámítjuk az effektív terhelésvektor inkrementumát a 8.73.-8.75. képletekkel. A 8.73. kifejezésből ez esetben kivonjuk az aktuális feszültségi állapotnak megfelelő $[K] \cdot \{\delta_i\}$ tagot, hogy a terhelés inkrementumához jussunk;

d). megoldjuk a 8.71. egyenletrendszer, amely az elmozdulás inkrementumának első $\{\Delta\delta^1\}$ megközelítéséhez vezet;

e). az elmozdulás inkrementumát az elmozdulás addigi értékével összegezve kiszámítjuk a $\{\bar{\delta}_{i+1}^1\}$ elmozdulás értékének első megközelítését a kiterjesztett intervallum végén:

$$\{\bar{\delta}_{i+1}^1\} = \{\delta_i\} + \{\Delta\delta^1\}; \quad (8.76)$$

f). meghatározzuk a sebesség $\{\bar{\delta}_{i+1}^1\}$ és a gyorsulás $\{\bar{\ddot{\delta}}_{i+1}^1\}$ első közelítését (kifejezésük a 8.45, illetve a 8.44. képletből származtatható):

$$\{\bar{\delta}_{i+1}^1\} = \frac{\gamma}{\beta \cdot \theta \cdot \Delta t} \cdot (\{\bar{\delta}_{i+1}^1\} - \{\delta_i\}) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \cdot \{\dot{\delta}_i\} + \left(1 - \frac{\gamma}{2 \cdot \beta}\right) \cdot \theta \cdot \Delta t \cdot \{\ddot{\delta}_i\}, \quad (8.77)$$

$$\{\bar{\ddot{\delta}}_{i+1}^1\} = \frac{1}{\beta \cdot \theta^2 \cdot \Delta t^2} \cdot (\{\bar{\delta}_{i+1}^1\} - \{\delta_i\}) - \frac{1}{\beta \cdot \theta \cdot \Delta t} \cdot \{\dot{\delta}_i\} + \left(1 - \frac{1}{2 \cdot \beta}\right) \cdot \{\ddot{\delta}_i\}; \quad (8.78)$$

g). kiszámítjuk a kiegyensúlyozatlan erők vektorát (az eddig kiszámított elmozdulásokat, sebességeket és gyorsulásokat behelyettesítve a 8.11. mozgásegyenlet bal oldalába a jobb oldalon a megfelelő terhelést kellene visszakapjunk, e két mennyiség különbségét kiegyensúlyozatlan terhelésnek tekintjük):

$$\{\Delta\hat{R}^1\} = \{\bar{R}_{i+1}\} - [M] \cdot \{\bar{\delta}_{i+1}^1\} - [C] \cdot \{\bar{\dot{\delta}}_{i+1}^1\} - [K] \cdot \{\bar{\delta}_{i+1}^1\}; \quad (8.79)$$

h). a

$$[\hat{K}] \cdot \{\Delta \bar{\delta}^1\} = \{\Delta \hat{R}^1\} \quad (8.80)$$

egyenletrendszer megoldásával kiszámítjuk az elmozdulások első $\{\Delta \bar{\delta}^1\}$ korrekcióját, amellyel azok újabb, javított értéke

$$\{\bar{\delta}_{i+1}^2\} = \{\bar{\delta}_{i+1}^1\} + \{\Delta \bar{\delta}^1\} \quad (8.81)$$

lesz;

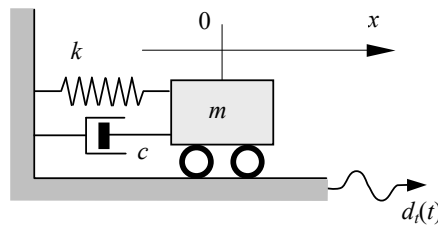
i). amennyiben az utoljára kiszámított korrekció normája egy adott tolerancia felett van és az iteráció konvergens, akkor a számításokat az *f).* ponttól kezdődően megismételjük. A konvergenciát a belső iterációk n_{max} maximális számának előírásával ellenőrizhetjük: ha a korrekció normája (a tagok átlaga vagy legnagyobb abszolút értéke) az n_{max} -edik belső iteráció elvégzése után is az előírt, megengedhetőnek tekintett határérték felett van, akkor az eljárást divergensnek tekintjük. Ez utóbbi esetben a számítások menete megszakad. Ha a korrekció normája az előírt tolerancia alá csökken, akkor a 8.68.-8.70. képletekkel kiszámítjuk az elmozdulás, a sebesség és a gyorsulás értékeit. A számítások menete a következő lépéssel, az *a* ponttal kezdődően folytatódik.

8.1.6. A dinamikai rendszer merevtest-elmozdulása

A 7.2.1. fejezetben tárgyalt korotációs eljárás a merevtest-elmozdulást az alakváltozástól egy együttmozgó koordináta-rendszer segítségével különítette el. A dinamikai rendszerek esetén az alakváltozásból származó feszültségek kiszámítására ezt az elvet megtarthatjuk, de ugyanakkor a merevtest-elmozdulásból származó tehetetlenségi erőket is ki kell számítanunk.

Az ilyen típusú feladatnak klasszikus példáját azok a szerkezetek alkotják, amelyek gerjesztését az alátámasztási felület elmozdulása (pontosabban: gyorsulása) jelenti, mint amilyenek például a mozgó alvázra szerelt emelőszerkezetek vagy a földrengés által mozgásba hozott építmények.

A 8.6. ábrán egy ilyen, egyetlen dinamikai szabadságfokkal rendelkező rendszer látható. Az ábrán $d_i(t)$ az alap (talaj) elmozdulását jelenti egy rögzített, nyugvónak tekintett koordinátarendszerben, $x(t)$ pedig az m tömeg elmozdulása ugyanabban a nyugvó vonatkoztatási rendszerben.



8.6. ábra. Az alátámasztás elmozdulása által gerjesztett egy szabadságfokú rendszer

Az alap elmozdulását jelentő gerjesztésnek a szerkezet saját tehetetlensége miatt ellenszegül, ezt a tehetetlenségi erőt az $m \cdot \ddot{x}$ szorzat adja, ahol $\ddot{x}(t)$ az m tömegű test abszolút gyorsulása. A rugó megnyúlását az $x(t) - d_i(t)$ relatív elmozdulás adja, a lengéscsillapító két végpontja közötti távolság pedig $\dot{x}(t) - \dot{d}_i(t)$ relatív sebességgel változik. E mennyiségekkel a rendszer egyensúlyát az

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot (\dot{x} - \dot{d}_t) + k \cdot (x - d_t) = 0 \quad (8.82)$$

egyenlet adja, amelyet

$$m \cdot (\ddot{x} - \ddot{d}_t) + c \cdot (\dot{x} - \dot{d}_t) + k \cdot (x - d_t) = -m \cdot \ddot{d}_t \quad (8.83)$$

formában is felírhatunk. Ezt a formát 8.1. egyenlettel összehasonlítva a következő különbségeket találjuk:

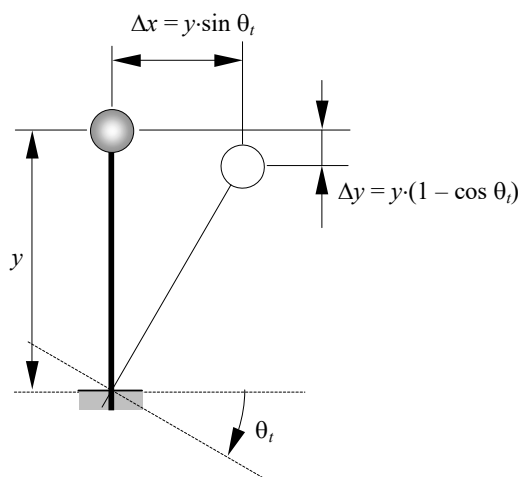
- a mozgásegyenlet a relatív elmozdulás, a relatív sebesség és a relatív gyorsulás közötti összefüggést adja;
- a gerjesztést az alap gyorsulásának és a rendszer tömegének szorzata jelenti.

E két megjegyzés alapján a több szabadságfokkal rendelkező, csak transzlációs merevttest-elmozdulást végző rendszert az eddig ismertetett módszerekkel tanulmányozhatjuk, amelynek során az

$$[M] \cdot \{\ddot{\delta}\} + [C] \cdot \{\dot{\delta}\} + [K] \cdot \{\delta\} = -[M] \cdot \{r\} \cdot a_t \quad (8.84)$$

mozgásegyenlet megoldását keressük. A 8.11. egyenletrendszerrel ellentétben itt a baloldali vektorok relatív mennyiségeket jelentenek, míg a jobb oldalon a talaj a_t gyorsulását a szabadságfokok irányába vetítő $\{r\}$ vektort találjuk. E vektor valamely r_i tagja az egységnyi $a_t / |a_t|$ vektor i szabadságfok irányába eső vetülete, mely „részesedési tényező” nevet viseli. A képletben szereplő a_t mennyiség a talaj gyorsulásának pillanatnyi előjeles nagyságát adja.

Ha a merevttest-elmozdulás egy bizonyos szögű elfordulás, akkor az előbbinél bonyolultabb helyzettel állunk szemben, ugyanis az elfordulás következtében a csomópontok nemcsak elfordulnak, hanem – ha csak nem fekszenek éppen az elfordulás tengelyén – helyzetüket is megváltoztatják (8.7. ábra). Ha az elfordulás szöge nem túl nagy és az radiánban van kifejezve, akkor elfogadhatjuk a $\Delta x \approx y \cdot \sin \theta \approx \theta$ és a $\Delta y \approx 0$ megközelítéseket, az elfordulásból származó tehetetlenségi nyomatékokat pedig elhanyagoljuk.



8.7. ábra. Az elfordulás által okozott elmozdulás

Az általános háromdimenziós esetben a részesedési tényezőket a következő mátrixban foglalhatjuk össze, mely a transzlációs és a rotációs tagokat egyaránt tartalmazza:

$$[\mathbf{r}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & y & -x & 0 \end{bmatrix}, \quad (8.85)$$

amellyel a mozgásegyenlet a következő módon írható fel:

$$[\mathbf{M}] \cdot \{\ddot{\delta}\} + [\mathbf{C}] \cdot \{\dot{\delta}\} + [\mathbf{K}] \cdot \{\delta\} = -[\mathbf{M}] \cdot [\mathbf{r}] \cdot \{\mathbf{a}_t\}, \quad (8.86)$$

ahol

$$\{\mathbf{a}_t\} = [a_{xt} \quad a_{yt} \quad a_{zt} \quad \theta_{xt} \quad \theta_{yt} \quad \theta_{zt}]^T \quad (8.87)$$

(a gyorsulás vetületei mellett az elfordulás radiánban megadott szögének komponensei szerepelnek). E képletek csak a translációs szabadságfokokra vonatkoznak. Amennyiben az elfordulás, mint csomóponti szabadságfok megjelenik, akkor a részesedési tényezők mátrixát is ki kell bővítenünk:

$$[\mathbf{r}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y & -x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8.88)$$

a gerjesztés vektora pedig ekkor

$$\{\mathbf{a}_t\} = [a_{xt} \quad a_{yt} \quad a_{zt} \quad \theta_{xt} \quad \theta_{yt} \quad \theta_{zt} \quad \varepsilon_{xt} \quad \varepsilon_{yt} \quad \varepsilon_{zt}]^T, \quad (8.89)$$

ahol az ε_i mennyiségek az alap szöggyorsulásának vetületei.

8.2. Sajátlengések

8.2.1. A sajátérték-feladat

A több szabadságfokú rendszer csillapítatlan szabadlengésének mozgásegyenletét az

$$[\mathbf{M}] \cdot \{\ddot{\delta}\} + [\mathbf{K}] \cdot \{\delta\} = \{\mathbf{0}\} \quad (8.90)$$

differenciálegyenletrendszer fejezi ki. Feltételezvé, hogy ennek megoldását a

$$\{\delta_i(t)\} = \{A_i \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)\} \quad (8.91)$$

harmonikus függvények adják, a mozgásegyenletet

$$(-\omega^2 \cdot [\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]) \cdot \{\mathbf{A}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (8.92)$$

alakra hozhatjuk, amelyet a

$$\lambda = \omega^2 \quad (8.93)$$

jelölés bevezetésével

$$([\mathbf{K}] - \lambda \cdot [\mathbf{M}]) \cdot \{\mathbf{A}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (8.94)$$

formában is felírhatunk. A mozgásegyenlet e formájában, amely ezúttal egy közönséges homogén lineáris egyenletrendszer, az ismeretlenek az ω körfrekvencia négyzete (λ) és a szabadságfokok irányában mért amplitúdók $\{A\}$ vektora. Ez az egyenletrendszer a klasszikus *sajátérték-feladat*, ahol λ és $\{A\}$ az egyenletrendszert szimultán kielégítő *sajátérték*, illetve *sajátvektor*. A $(\lambda, \{A\})$ párt *sajátmódus*nak nevezik. A sajátérték-feladat megoldása tehát az $[M]$ tömegmátrixszal és a $[K]$ merevségi mátrixszal rendelkező csillapítatlan szerkezet rezonáns (*természetes*) körfrekvenciáit és az adott frekvencián rezgő szerkezet deformált alakját fogja adni.

A homogén egyenletrendszer nemtriviális (nemzéró) megoldásának létfeltétele az egyenlet determinánsának zéró értéke:

$$|[K] - \lambda \cdot [M]| = 0, \quad (8.95)$$

amely egy λ -ban n -ed fokú *karakterisztikus egyenlethez* vezet, ahol n a determináns mérete (tehát a merevségi mátrix mérete, $n \times n$). Bebizonyítható, hogy mivel $[K]$ és $[M]$ pozitív definit mátrixok, a karakterisztikus egyenletnek n valós pozitív gyöke van (lehetnek ismétlődő gyökei is). A sajátmódusokat a körfrekvenciák növekvő értéke szerint állítjuk sorba:

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n, \quad (8.96)$$

ahol a legalacsonyabb körfrekvencia az *alaplómódus* körfrekvenciája. Amennyiben a rad/s-ban mért ω körfrekvenciákról Hz-ben megadott f frekvenciákra akarunk áttérni, úgy az előbbi értékeket $2 \cdot \pi$ -vel kell elosztanunk (ugyanis $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$).

A 8.94. mozgásegyenlet a

$$(\lambda \cdot [K] - [M]) \cdot \{A\} = \{0\} \quad (8.97)$$

alakban is felírhatjuk, ez esetben a sajátértékek a saját körfrekvencia négyzetének reciprokai lesznek:

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}. \quad (8.98)$$

Ehhez a formához viszont hozzá kell fűznünk azt a megjegyzést, hogy ha a rendszer merevtest-elmozdulással is rendelkezik, akkor a merevtest elmozdulásnak megfelelő sajátfrekvenciák (és a megfelelő körfrekvenciák) értéke zéró, így a karakterisztikus egyenlet gyökei között végtelen nagy értékek is fel fognak bukkanni. Ez a forma gyakorlati szempontból fontos, ugyanis a szerkezetek elemzésekor nem szükséges az összes sajátmódust meghatározni, elégséges az első néhány alacsonyabb frekvenciájú módus kiszámítása. A gyakorlatban alkalmazott algoritmusok a legnagyobb sajátértékeket meghatározására alkalmasak, ezért ebből az egyenletrendszerből kell kiindulni. Ezt balról a merevségi mátrix inverzével beszorozva egy egyszerűbb

$$(\lambda \cdot [I] - [D]) \cdot \{A\} = \{0\} \quad (8.99)$$

formához jutunk, mely a sajátérték-feladat *standard* formája. Ez utóbbi képletben $[I]$ az n -edrendű egységmátrix, $[D]$ pedig az úgynevezett *dinamikai* mátrix:

$$[D] = [K]^{-1} \cdot [M]. \quad (8.100)$$

A standard forma esetében a nemtriviális megoldás létezésének feltétele

$$|\lambda \cdot [I] - [D]| = 0, \quad (8.101)$$

amely, az elmondottak alapján, $\lambda = 1/\omega^2$ -ben n -edfokú karakterisztikus egyenlet.

Mivel a karakterisztikus egyenletnek n gyöke van, az n szabadságfokú szerkezetnek n sajátmódusa van. Egy sajátérték és a hozzá tartozó sajátvektor ki kell elégítse a sajátérték-feladat egyenletrendszerét, tehát

$$(\omega_j^2 \cdot [\mathbf{M}] - [\mathbf{K}]) \cdot \{\mathbf{A}\}_j = \{\mathbf{0}\}, \quad (8.102)$$

bármely $j=1, n$ sajátmódus esetén. Ezek az összefüggések homogén és lineáris egyenletrendszerek, ahol az ismeretlenek az $A_{i,j}$ amplitúdók. Mivel a triviálisan kívül végtelen sok megoldásuk van, az amplitúdók abszolút értékét meghatározni nem lehet, csak egymáshoz viszonyított értékükről kapunk információt. A viszonyítás alapja bármilyen zérótól különböző érték lehet, például a sajátvektor legnagyobb abszolút értékű tagja:

$$\Phi_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{A_{k,j}}. \quad (8.103)$$

Ez utóbbi esetben az amplitúdók arányaiból felépített

$$\{\Phi\}_j = \begin{Bmatrix} \Phi_{1,j} \\ \Phi_{2,j} \\ \dots \\ \Phi_{n,j} \end{Bmatrix} \quad (8.104)$$

sajátvektor elemei a $[-1, +1]$ intervallumon vesznek fel értékeket és a j módusban rezgő szerkezet deformált alakját adják.

A természetes körfrekvenciákból felépített *spektrális* mátrix a diagonális

$$[\mathbf{\Omega}] = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n \end{bmatrix} \quad (8.105)$$

mátrix (hasonlóképpen építhető fel a sajátértékek diagonális $[\mathbf{\Lambda}]$ mátrixa is), a *modális* mátrix pedig a sajátvektorokból állítható össze:

$$[\mathbf{\Phi}] = [\{\Phi\}_1 \quad \{\Phi\}_2 \quad \dots \quad \{\Phi\}_n] = \begin{bmatrix} \Phi_{1,1} & \Phi_{1,2} & \dots & \Phi_{1,n} \\ \Phi_{2,1} & \Phi_{2,2} & \dots & \Phi_{2,n} \\ \dots & & & \\ \Phi_{n,1} & \Phi_{n,2} & \dots & \Phi_{n,n} \end{bmatrix}. \quad (8.106)$$

Legyen $\omega_i \neq \omega_j$ két különböző saját körfrekvencia, valamint $\{\Phi\}_i$ és $\{\Phi\}_j$ a megfelelő sajátvektorok. Mivel a két sajátmódus a sajátérték-feladat megoldásai:

$$\begin{cases} \omega_i^2 \cdot [\mathbf{M}] \cdot \{\Phi\}_i = [\mathbf{K}] \cdot \{\Phi\}_i, \\ \omega_j^2 \cdot [\mathbf{M}] \cdot \{\Phi\}_j = [\mathbf{K}] \cdot \{\Phi\}_j. \end{cases} \quad (8.107)$$

E két egyenletet $\{\Phi\}_j^T$ -vel, illetve $\{\Phi\}_i^T$ -vel balról beszorozva,

$$\begin{cases} \omega_i^2 \cdot \{\Phi\}_j^T \cdot [M] \cdot \{\Phi\}_i = \{\Phi\}_j^T \cdot [K] \cdot \{\Phi\}_i = \{\Phi\}_i^T \cdot [K] \cdot \{\Phi\}_j, \\ \omega_j^2 \cdot \{\Phi\}_i^T \cdot [M] \cdot \{\Phi\}_j = \omega_j^2 \cdot \{\Phi\}_j^T \cdot [M] \cdot \{\Phi\}_i = \{\Phi\}_i^T \cdot [K] \cdot \{\Phi\}_j, \end{cases} \quad (8.108)$$

ahol a mátrixok szimmetriáját is felhasználtuk. A két egyenlet különbsége az

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \cdot \{\Phi\}_j^T \cdot [M] \cdot \{\Phi\}_i = 0 \quad (8.109)$$

összefüggéshez vezet, ahonnan, mivel $\omega_i \neq \omega_j$

$$\{\Phi\}_j^T \cdot [M] \cdot \{\Phi\}_i = 0. \quad (8.110)$$

Ezzel, a 8.108. egyenletek bármelyikéből

$$\{\Phi\}_j^T \cdot [K] \cdot \{\Phi\}_i = 0. \quad (8.111)$$

Ez utóbbiak szerint a sajátvektorok ortogonálisak a szimmetrikus tömegmátrixra, illetve a merevségi mátrixra nézve – a sajátvektorok fontos, a továbbiakban felhasznált tulajdonsága. Továbbá bebizonyítható (a Rayleigh-modell alkalmazásával azonnal következik), hogy a sajátvektorok a szimmetrikus csillapítási mátrixokra nézve is ortogonálisak.

8.2.2. A sajátérték-feladat megoldása

8.2.2.1. A Sturm-szekvencia alkalmazása

A sajátérték-feladat megoldására az előbbi fejezet alapján egy két lépésre osztható eljárás kínálkozik:

- 1). a sajátértékek (a karakterisztikus egyenlet gyökeinek) kiszámítása;
- 2). a sajátvektorok meghatározása.

A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet, tehát egy n -ed fokú $p(\lambda)$ polinom gyökei. Megállapítható, hogy a sok szabadságfokkal rendelkező rendszerek esetében e karakterisztikus egyenlet analitikus megoldása nem jöhet szóba, tehát a $p(\lambda)$ polinom gyökeit valamilyen közelítő numerikus eljárással kell meghatározni.

A végeelem-módszer 8.94. alakú sajátérték-feladatainak megoldásában kiemelkedő szerephez jut a Sturm-szekvencia alkalmazása. Ez az eljárás azon a tulajdonságon alapszik, mely szerint a μ -nél kisebb sajátértékeinek száma egyenlő a 8.94. egyenlet bal oldalán szereplő mátrix

$$[K] - \mu \cdot [M] = [L] \cdot [D] \cdot [L]^T \quad (8.112)$$

dekompozíciójából származó $[D]$ diagonális mátrix (ez nem azonos a dinamikai mátrixszal) negatív elemeinek számával. E dekompozícióban $[L]$ egy olyan alsó háromszögmátrix, amelynek az átlóján levő elemek egységnyiek, a $[D]$ diagonális mátrixnak pedig csak az átlóján vannak zérótól különböző elemei. Ez az „LDLT” dekompozíciót a már ismer LU dekompozícióhoz hasonlóan lehet megvalósítani, az

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_{2,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ L_{n,1} & L_{n,2} & L_{n,3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & D_3 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L_{2,1} & L_{3,1} & \dots & L_{n,1} \\ 0 & 1 & L_{3,2} & \dots & L_{n,2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & L_{n,3} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \quad (8.113)$$

$$= \begin{bmatrix} D_1 & D_1 \cdot L_{2,1} & D_1 \cdot L_{3,1} & \dots \\ D_1 \cdot L_{2,1} & D_1 \cdot L_{2,1}^2 + D_2 & D_1 \cdot L_{2,1} \cdot L_{3,1} + D_2 \cdot L_{3,2} & \dots \\ D_1 \cdot L_{3,1} & D_1 \cdot L_{2,1} \cdot L_{3,1} + D_2 \cdot L_{3,2} & D_1 \cdot L_{3,1}^2 + D_2 \cdot L_{3,2}^2 + D_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_1 \cdot L_{n,1} & D_1 \cdot L_{2,1} \cdot L_{n,1} + D_2 \cdot L_{n,2} & D_1 \cdot L_{3,1} \cdot L_{n,1} + D_2 \cdot L_{3,2} \cdot L_{n,2} + D_3 \cdot L_{n,3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & D_1 \cdot L_{n,1} & \dots & \dots \\ \dots & D_1 \cdot L_{2,1} \cdot L_{n,1} + D_2 \cdot L_{n,2} & \dots & \dots \\ \dots & D_1 \cdot L_{3,1} \cdot L_{n,1} + D_2 \cdot L_{3,2} \cdot L_{n,2} + D_3 \cdot L_{n,3} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & D_1 \cdot L_{n,1}^2 + D_2 \cdot L_{n,2}^2 + D_3 \cdot L_{n,3}^2 + \dots + D_{n-1} \cdot L_{n,n-1}^2 + D_n & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

azonosság kifejtésével. A rekurzív képleteket az $[L] \cdot [D] \cdot [L]^T$ szorzat elemeinek a $[K] - \mu \cdot [M]$ szimmetrikus mátrix elemeivel való azonosításával kapjuk. Ha ez utóbbi mátrixot röviden $[S]$ -sel jelöljük, akkor a következő relációkat írhatjuk fel:

- $j = 1$ -re, bármely $i = 2, 3, \dots, n$ esetén:

$$D_j = S_{j,j}, \quad (8.114)$$

$$L_{i,j} = \frac{S_{i,j}}{D_j}; \quad (8.115)$$

- $j = 2, 3, \dots, n$ -re, rendre, bármely $i = j+1, j+2, \dots, n$ esetén:

$$D_j = S_{j,j} - \sum_{k=1}^j D_k \cdot L_{k,k-1}^2, \quad (8.116)$$

$$L_{i,j} = \frac{S_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} D_k \cdot L_{i,k}}{D_j}. \quad (8.117)$$

A Sturm-szekvencia alkalmazása a következő lépésekből áll:

a). a keresett sajátértékek μ_2 maximumára és μ_1 minimumára elvégezzük a 8.112. dekompozíciót és meghatározzuk a $[0, \mu_2)$, illetve $[0, \mu_1)$ intervallumba eső sajátértékek n_2 , illetve n_1 számát (megszámoljuk a diagonális mátrix negatív elemeinek számát). Az adott határértékek által lehatárolt $[\mu_1, \mu_2)$ intervallumon levő sajátértékek számát az

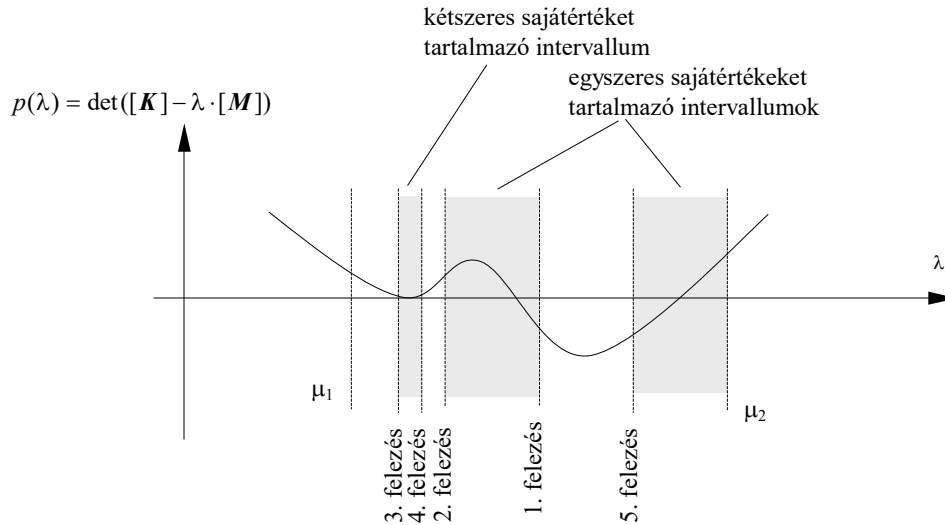
$$n_i = n_2 - n_1 \quad (8.118)$$

különbség jelenti;

b). ha a $[\mu_1, \mu_2)$ intervallumon több sajátérték is van, akkor azt megfelelően meghatározzuk a $[\mu_1, \mu_m)$ és a $[\mu_m, \mu_2)$ intervallumokra eső sajátértékek számát, ahol

$$\mu_m = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}; \quad (8.119)$$

c). ha valamely fél-intervallumon több sajátérték van, akkor annak felezését tovább folytatjuk. Ha egy megfelelően szűk intervallumon belül két vagy több sajátértéket találunk, akkor a számítás pontosságán belül azokat kétszeres, illetve többszörös sajátértékeknek tekintjük (8.8. ábra);



8.8. ábra. A sajátértékek izolálása

d). a sajátértékek izolálása után a sajátértékeket valamilyen, az intervallumok felezésénél gyorsabban konvergáló numerikus módszerrel határozzuk meg. E feladatra alkalmas módszer a Newton-módszer, amely a $[\mu_i, \mu_{i+1})$ intervallumon levő λ_i gyök meghatározására az iteratív

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k - \frac{p(\lambda_i^k)}{p'(\lambda_i^k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8.120)$$

formulát használja, ahol $\lambda_0 = \mu_i$. A számítás végét a

$$|\lambda_i^{k+1} - \lambda_i^k| \leq \varepsilon \quad (8.121)$$

feltétel teljesülése adja, ahol ε egy, a kívánt pontosságnak megfelelően megválasztott tolerancia. A 8.120. kifejezés nevezőjében szereplő derivált kiszámítása – polinomról lévén szó – nem jelent nehézséget. A számítás menetét a 8.9. ábra illusztrálja.

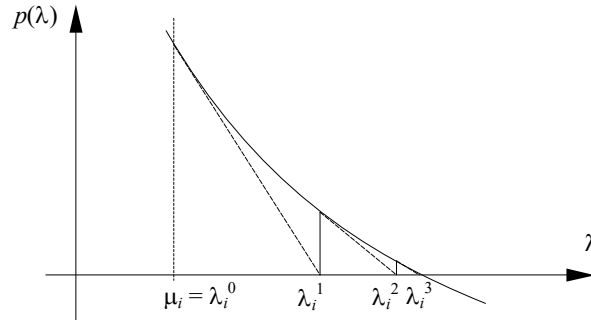
A saját körfrekvenciák kiszámítását követően az iteratív eljárás második lépését a megfelelő sajátértékek kiszámítása alkotja. A megoldandó feladatot a 8.102. lineáris homogén egyenletrendszer jelenti, ahol az ismeretlen az $\{\mathbf{A}\}_i$ sajátvektor. Ezt a relációt átrendezhetjük:

$$([\mathbf{K}] - \omega_j^2 \cdot [\mathbf{M}]) \cdot \{\mathbf{A}\}_j = \{\mathbf{0}\}. \quad (8.122)$$

Az így nyert

$$\begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & \dots & S_{1,n} \\ S_{2,1} & S_{2,2} & \dots & S_{2,n} \\ \dots & & & \\ S_{n,1} & S_{n,2} & \dots & S_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8.123)$$

formájú egyenletrendszerrel megállapítottuk, hogy gyökeinek csak relatív értéke számítható ki.



8.9. ábra. Az egyenletek iteratív megoldásának Newton-féle módszere

Ha például a sajátvektor első A_1 elemét egységnyinek vesszük, akkor az előbbi homogén egyenletrendszert egy nemhomogén

$$\begin{bmatrix} S_{2,2} & S_{2,3} & \dots & S_{2,n} \\ S_{3,2} & S_{3,3} & \dots & S_{3,n} \\ \dots & & & \\ S_{n,2} & S_{n,3} & \dots & S_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} A_2 \\ A_3 \\ \dots \\ A_n \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} S_{2,1} \\ S_{3,1} \\ \dots \\ S_{n,1} \end{Bmatrix} \quad (8.124)$$

egyenletrendszerre alakíthatjuk át, amelynek megoldásával az $\{A\}_i$ sajátvektor felépíthető. Ez az eljárás ebben a formában csak akkor alkalmazható, ha $A_1 \neq 0$.

Ennél az eljárásnál sokkal gyorsabb eredményhez vezet az úgynevezett *inverz iteráció*, amely azon a tulajdonságon alapul, miszerint ha λ_i a $[D]$ dinamikai mátrix valamely sajátértéke (vagy annak közelítő értéke), akkor az iteratív

$$([D] - \lambda_i \cdot [I]) \cdot \{x\}_k = \{x\}_{k+1} \quad (8.125)$$

eljárás során az $\{x\}$ vektor a megfelelő $\{A\}_i$ sajátvektor egyre jobb megközelítését adja. Az eljárás tehát a sajátértékek kiszámítását követően a következőket kell magába foglalja:

- a). A $[D]$ dinamikai mátrix kiszámítása (8.100. képlet);
- b). A 8.125. összefüggésben szereplő szorzat kiszámítása. Az első lépésben rendszerint

$$\{x\}_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad (8.126)$$

- c). Ha $\{x\}_{k+1}$ és $\{x\}_k$ közötti eltérés elfogadható (egy adott ε határérték alatt van), akkor az utoljára kiszámított $\{x\}_{k+1}$ vektor a λ_i sajátértéknek megfelelő $\{A\}_i$ sajátvektor jó közelítése, ellenben a 8.125. képlettel kiszámítjuk a sajátvektor következő közelítését.

A sajátmódusokat a fentiek alapján tehát közelítőleg, iteratív eljárások alapján határoztuk meg. A fenti eljárás alkalmazásánál gondot jelenthet az egybeeső sajátértékeknek megfelelő

sajátvektorok elkülönítése (ugyanis a sajátértékek egyenlősége esetén a megfelelő sajátvektorok nem azonosak).

8.2.2.2. A Householder-módszer

A Householder-módszer a sajátérték-feladat standard megfogalmazásából indul ki és azon a tételen alapul, mely szerint a dinamikai mátrix

$$[D] \rightarrow [D]' = [Z]^{-1} \cdot [D] \cdot [Z] \quad (8.127)$$

transzformációja annak sajátértékeit nem változtatja meg. Ha a $[Z]$ mátrix ortogonális, akkor inverze annak $[Z]^T$ transzformáltja lesz, tehát ez a művelet igen leegyszerűsödik. Amennyiben a transzformáció eredményeként kapott $[D]'$ mátrix diagonális lesz, akkor annak főátlóján a sajátértékek jelennek meg (tehát az egyszerű műveletekkel a spektrális mátrixszá alakítható át). Ezt a transzformációt a $[D]$ mátrix *diagonalizálásának* is nevezik.

A szimmetrikus mátrixok diagonalizálásának első gyakorlatban bevált módszere a Jacobi-transzformáció volt, ahol a

$$[Z]_{pq} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & & \dots & & & & \dots & & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c & 0 & \dots & 0 & s & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & & \dots & & & & \dots & & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -s & 0 & \dots & 0 & c & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ & & \dots & & & & \dots & & & & \dots \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} p. \text{ sor} \\ \\ \\ q. \text{ sor} \end{array} \quad (8.128)$$

$p.$ oszlop $q.$ oszlop

ortogonális transzformációs mátrix a $[D]$ mátrix $p.$ és $q.$ oszlopát (transzponáltja pedig $p.$ és $q.$ sorát) változtatja meg. s és c egy φ elfordulás (szög) szinusza, illetve koszinusza. A φ szög megválasztásában a cél a $D_{p,q}$ és a $D_{q,p}$ elemek nullázása; e feltételekből:

$$s = \sin \varphi = \frac{D_{q,p}}{\sqrt{D_{p,p}^2 + D_{q,p}^2}}, \quad c = \cos \varphi = \frac{D_{p,p}}{\sqrt{D_{p,p}^2 + D_{q,p}^2}}, \quad s^2 + c^2 = 1. \quad (8.129)$$

A Jacobi-transzformáción alapuló algoritmusok meglehetősen hosszadalmasak, ugyanis a transzformáció nemcsak a $D_{p,q}$ és a $D_{q,p}$ elemeket érinti, hanem az illető oszlopok és sorok összes elemét. Az eredeti Jacobi-eljárás a legnagyobb nemdiagonális tag keresésével indult, azon és a vele szimmetrikusan elhelyezkedő elemeken végezték el. A legnagyobb tag keresése azonban csak a műveletek számát szaporította, így az eljárást módosították: a nemdiagonális elemeket sorra véve megvizsgálták azok abszolút nagyságát, s ha az nagyobb volt egy meghatározott mértéknél, csak akkor végezték el a transzformációt. A hibahatár például az átló alatti tagok modulusának $S = \sum_{i < j} |D_{i,j}|$ összegével: $\varepsilon = S / (5 \cdot n^2)$. Az egymást követő lépésekben a már lenullázott elemek

helyén újból zérótól különböző tagok jelenhetnek meg, így a számításokat többször is meg kell ismételni, az algoritmus a tapasztalat szerint $3 \cdot n^2$ és $5 \cdot n^2$ közötti számú transzformációt igényel a keresett diagonális forma tűrhető pontosságú megközelítéséhez. Bebizonyítható, hogy az egymást követő transzformációk mátrixainak $[\mathbf{Z}]_1 \cdot [\mathbf{Z}]_2 \cdot [\mathbf{Z}]_3 \cdot \dots$ szorzata a sajátvektorokat tároló modális mátrix fele közelít.

A Householder-módszer a Jacobi-transzformációk műveletigényének hátrányát egy más fajta transzformációval küszöböli ki, amelynek során a dinamikai mátrixot első lépésben a következő *tridiagonális* formára hozza:

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & \beta_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & \alpha_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-2} & \beta_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{n-2} & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}. \quad (8.130)$$

A tridiagonális forma előállítására egy ortogonális $[\mathbf{P}]$ transzformációs-mátrix alkalmazásán alapszik. Ezt a transzformációs mátrixot a

$$[\mathbf{P}] = [\mathbf{I}] - 2 \cdot \{\mathbf{w}\} \cdot \{\mathbf{w}\}^T \quad (8.131)$$

összefüggés definiálja, ahol $\{\mathbf{w}\}$ egy olyan valós vektor, amelyre

$$|\{\mathbf{w}\}|^2 = \{\mathbf{w}\}^T \cdot \{\mathbf{w}\} = 1. \quad (8.132)$$

Mivel

$$\{\mathbf{w}\} \cdot \{\mathbf{w}\}^T = \begin{bmatrix} w_1^2 & w_1 \cdot w_2 & \dots & w_1 \cdot w_n \\ w_1 \cdot w_2 & w_2^2 & \dots & w_2 \cdot w_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1 \cdot w_n & w_2 \cdot w_n & \dots & w_n^2 \end{bmatrix}, \quad (8.133)$$

a $[\mathbf{P}]$ mátrix definíciójából következik, hogy az szimmetrikus lesz. Ha e mátrixot önmagával megszorozzuk akkor az egységmátrixot kapjuk vissza:

$$\begin{aligned} [\mathbf{P}]^2 &= ([\mathbf{I}] - 2 \cdot \{\mathbf{w}\} \cdot \{\mathbf{w}\}^T) \cdot ([\mathbf{I}] - 2 \cdot \{\mathbf{w}\} \cdot \{\mathbf{w}\}^T) = \\ &= [\mathbf{I}] - 4 \cdot \{\mathbf{w}\} \cdot \{\mathbf{w}\}^T + 4 \cdot \{\mathbf{w}\} \cdot (\{\mathbf{w}\}^T \cdot \{\mathbf{w}\}) \cdot \{\mathbf{w}\}^T = [\mathbf{I}], \end{aligned} \quad (8.134)$$

minek alapján levonható az a következtetés, hogy $[\mathbf{P}]$ a saját inverzével azonos. Tehát:

$$[\mathbf{P}] = [\mathbf{P}]^{-1} = [\mathbf{P}]^T, \quad (8.135)$$

vagyis $[\mathbf{P}]$ ortogonális.

A Householder-mátrixot felépítő $\{\mathbf{w}\}$ vektor a 8.132. előírásnak eleget kell tgyen. Ezért ha egy tetszőleges $\{\mathbf{v}\}$ vektorból indulunk ki, akkor annak definícióját a következőképpen kell módosítanunk:

$$[\mathbf{P}] = [\mathbf{I}] - \frac{2 \cdot \{\mathbf{v}\} \cdot \{\mathbf{v}\}^T}{|\{\mathbf{v}\}|^2}. \quad (8.136)$$

Legyen $\{\mathbf{v}\}$ egy $\{\mathbf{e}\}$ egységvektor és a $[\mathbf{D}]$ mátrix megfelelő oszlopából alkotott vektor, például:

$$\{\mathbf{v}\} = \{\mathbf{D}\}_1 - |\{\mathbf{D}\}_1| \cdot \{\mathbf{e}\}_1 = \begin{Bmatrix} D_{1,1} \\ D_{2,1} \\ \dots \\ D_{n,1} \end{Bmatrix} - \sqrt{\sum_{i=1}^n D_{i,1}^2} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (8.137)$$

Ekkor

$$\begin{aligned} [\mathbf{P}] \cdot \{\mathbf{D}\}_1 &= \{\mathbf{D}\}_1 - \frac{2}{|\{\mathbf{v}\}|^2} \cdot (\{\mathbf{D}\}_1 - |\{\mathbf{D}\}_1| \cdot \{\mathbf{e}\}_1) \cdot (\{\mathbf{D}\}_1 - |\{\mathbf{D}\}_1| \cdot \{\mathbf{e}\}_1)^T \cdot \{\mathbf{D}\}_1 = \\ &= \{\mathbf{D}\}_1 - \frac{2 \cdot (\{\mathbf{D}\}_1 - |\{\mathbf{D}\}_1| \cdot \{\mathbf{e}\}_1) \cdot (\{\mathbf{D}\}_1 - |\{\mathbf{D}\}_1| \cdot \{\mathbf{e}\}_1)^T \cdot \{\mathbf{D}\}_1}{(\{\mathbf{D}\}_1 - |\{\mathbf{D}\}_1| \cdot \{\mathbf{e}\}_1)^T \cdot (\{\mathbf{D}\}_1 - |\{\mathbf{D}\}_1| \cdot \{\mathbf{e}\}_1)} = \\ &= \{\mathbf{D}\}_1 - \frac{2 \cdot (\{\mathbf{D}\}_1 - |\{\mathbf{D}\}_1| \cdot \{\mathbf{e}\}_1) \cdot (|\{\mathbf{D}\}_1|^2 - |\{\mathbf{D}\}_1| \cdot \mathbf{D}_{11})}{2 \cdot |\{\mathbf{D}\}_1|^2 - 2 \cdot |\{\mathbf{D}\}_1| \cdot \mathbf{D}_{11}} = |\{\mathbf{D}\}_1| \cdot \{\mathbf{e}\}_1, \end{aligned} \quad (8.138)$$

tehát a szorzás eredményeként kapott vektornak csak egyetlen eleme (esetünkben az első) lesz zérótól különböző.

A mátrix tridiagonális alakjának első sorában, illetve oszlopában nem csak az első, hanem a második elem is zérótól különböző kell legyen, ezért első lépésben a transzformációban szereplő mennyiségeket

$$[\mathbf{P}]_1 = \begin{bmatrix} 1 & \{\mathbf{0}\}^T \\ \{\mathbf{0}\} & [\bar{\mathbf{P}}]_1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{D}]_1 = \begin{bmatrix} D_{1,1} & \{\mathbf{d}\}_1^T \\ \{\mathbf{d}\}_1 & [\bar{\mathbf{D}}]_1 \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{v}\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \{\bar{\mathbf{v}}\}_1 \end{Bmatrix} \quad (8.139)$$

formában partícionáljuk. A transzformáció ekkor a mátrix $D_{1,1}$ elemét érintetlenül hagyja, a $D_{1,2} = D_{2,1}$ elemeit egy zérótól különböző értékre állítja be, míg az első sor és az első oszlop összes többi eleme ($D_{1,i}$, $D_{i,1}$, ahol $i = 2, 3, \dots, n$) zéró lesz:

$$[\mathbf{D}]_2 = [\mathbf{P}]_1^T \cdot [\mathbf{D}]_1 \cdot [\mathbf{P}]_1 = \begin{bmatrix} D_{1,1} & \{\mathbf{d}\}_1^T \cdot [\bar{\mathbf{P}}]_1 \\ [\bar{\mathbf{P}}]_1^T \cdot \{\mathbf{d}\}_1 & [\bar{\mathbf{P}}]_1^T \cdot [\bar{\mathbf{D}}]_1 \cdot [\bar{\mathbf{P}}]_1 \end{bmatrix} \quad (8.140)$$

(itt a transzponálás a transzformációs mátrix ortogonalitása miatt csupán szimbolikus, $D_{1,1}^1$ pedig az eredeti dinamikai mátrix $D_{1,1}$ elemével azonos). A $[\bar{\mathbf{P}}]_1$ Householder-mátrixot adó $\{\bar{\mathbf{v}}\}_1$ vektort a 8.137. megállapítás alapján fejezzük ki, ahonnan

$$\{\bar{\mathbf{v}}\}_1 = \{\mathbf{d}\}_1 + \text{sgn}(D_{2,1}^1) \cdot |\{\mathbf{d}\}_1| \cdot \{\mathbf{e}\}_1 \quad (8.141)$$

(itt $\{\mathbf{e}\}_1$ az $n-1$ -ed rendű egységvektor).

A tridiagonizálás második lépése $[\mathbf{D}]$ első sorát és oszlopát, valamint a főátlón levő második elemet kell változatlanul hagyja, mivel ezek a 8.130. formának már eleget tesznek. A 8.139. partícionálás tehát most a következőképpen kell kinézzen:

$$[\mathbf{P}]_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \{\mathbf{0}\}^T \\ 0 & 1 & \{\mathbf{0}\}^T \\ \{\mathbf{0}\} & \{\mathbf{0}\} & [\bar{\mathbf{P}}]_2 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{D}]_2 = \begin{bmatrix} D_{1,1}^2 & D_{1,2}^2 & \{\mathbf{0}\}^T \\ D_{2,1}^2 & D_{2,2}^2 & \{\mathbf{d}\}_2^T \\ \{\mathbf{0}\} & \{\mathbf{d}\}_2 & [\bar{\mathbf{D}}]_2 \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{v}\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \{\bar{\mathbf{v}}\}_2 \end{Bmatrix}. \quad (8.142)$$

Az eljárás így folytatható tovább, a következő algoritmus szerint:

a). az i -edik lépésben, amikor az i -edik sorral és oszloppal dolgozunk, a $\{\mathbf{d}\}_i$ vektort a $[\mathbf{D}]_{i-1}$ mátrix i -edik oszlopának főátló alatti elemeiből építjük fel;

b). a $\{\mathbf{d}\}_i$ vektorral a $\{\bar{\mathbf{v}}\}_i$ vektort 8.141. formulával határozzuk meg, ahol $\{\mathbf{e}\}_i$ az $n-i$ -ed rendű egységvektor, az előjelfüggvény argumentuma pedig az előző lépésben kiszámított $[\mathbf{D}]_{i-1}$ mátrix $D_{i+1,i}^i$ eleme;

c). a $[\bar{\mathbf{P}}]_i$ mátrixot a $\{\bar{\mathbf{v}}\}_i$ vektor felhasználásával a 8.136. képlettel számítjuk ki;

d). felépítjük a teljes $[\mathbf{P}]_i$ Householder-mátrixot és elvégezzük a 8.140. formájú transzformációt. Minden $i < n-1$ -re a fenti lépéseket megismételjük (az utolsó két sorral és oszloppal nem kell foglalkoznunk, azok már tridiagonálisak lesznek).

A tridiagonális forma ilyen módon történő létrehozása sokkal kevesebb művelet elvégzését igényli, mintha azt Jacobi-transzformációkkal valósítanánk meg ($n-2$ transzformációt kell elvégezni). Miután megkaptuk e tridiagonális formát, a Householder-módszerben a sajátértékeket (a diagonális formakialakítását) a „QR” dekompozícióval határozzuk meg. Ez a dekompozíció azon a tulajdonságon alapul, miszerint bármely valós mátrix – tehát a tridiagonális $[\mathbf{D}]$ mátrix is – felbontható egy $[\mathbf{Q}]$ ortogonális és egy $[\mathbf{R}]$ felső háromszögmátrix szorzatára:

$$[\mathbf{D}] = [\mathbf{Q}] \cdot [\mathbf{R}] \quad (8.143)$$

Megjegyzendő, hogy létezik egy analóg „QL” dekompozíció is, ahol $[\mathbf{L}]$ egy alsó háromszögmátrix. Az LU dekompozíciótól eltérően az itt hagyományossá vált jelölések az angol *right* (jobboldali) és *left* (baloldali) szavakból erednek.

A 8.143. kifejezést jobbról az ortogonális mátrixszal, balról pedig annak transzponáltjával (inverzével) beszorozva kapjuk:

$$[\mathbf{Q}]^T \cdot [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{Q}] = [\mathbf{R}] \cdot [\mathbf{Q}], \quad (8.144)$$

tehát a

$$[\mathbf{D}]' = [\mathbf{R}] \cdot [\mathbf{Q}] \quad (8.145)$$

szorzat a dinamikai mátrix 8.127. formájú transzformációját adja.

A QR algoritmus a fenti lépések, ortogonális transzformációk ismételtetéséből áll:

$$a). \quad [\mathbf{D}]_i = [\mathbf{Q}]_i \cdot [\mathbf{R}]_i; \quad (8.146)$$

$$b). \quad [\mathbf{D}]_{i+1} = [\mathbf{R}]_i \cdot [\mathbf{Q}]_i = [\mathbf{Q}]_i^T \cdot [\mathbf{D}]_i \cdot [\mathbf{Q}]_i. \quad (8.147)$$

Alapján egy nem magától értetődő tétel áll, mely szerint ha a $[\mathbf{D}]$ mátrixnak n különálló sajátértéke van és ha $i \rightarrow \infty$, akkor a mátrix transzformáltja egy felső háromszögmátrix fele közelít melynek főátlóján a sajátértékek jelennek meg, növekvő sorrendben. A $[\mathbf{Q}]_1 \cdot [\mathbf{Q}]_2 \cdot \dots$ szorzat a modális mátrix egyre jobb közelítését adja. Ha egybeeső sajátértékek is vannak, akkor a háromszögmátrix alatt a megfelelő sorok és oszlopok kereszteződésében zérótól különböző elemek maradnak.

A QR algoritmus megvalósításának egyik egyszerű lehetősége a Jacobi-mátrixokkal elvégzett

$$[\mathbf{Z}]_{n,n-1}^T \cdot [\mathbf{Z}]_{n-1,n-2}^T \cdots [\mathbf{Z}]_{2,1}^T \cdot [\mathbf{D}] = [\mathbf{R}] \quad (8.148)$$

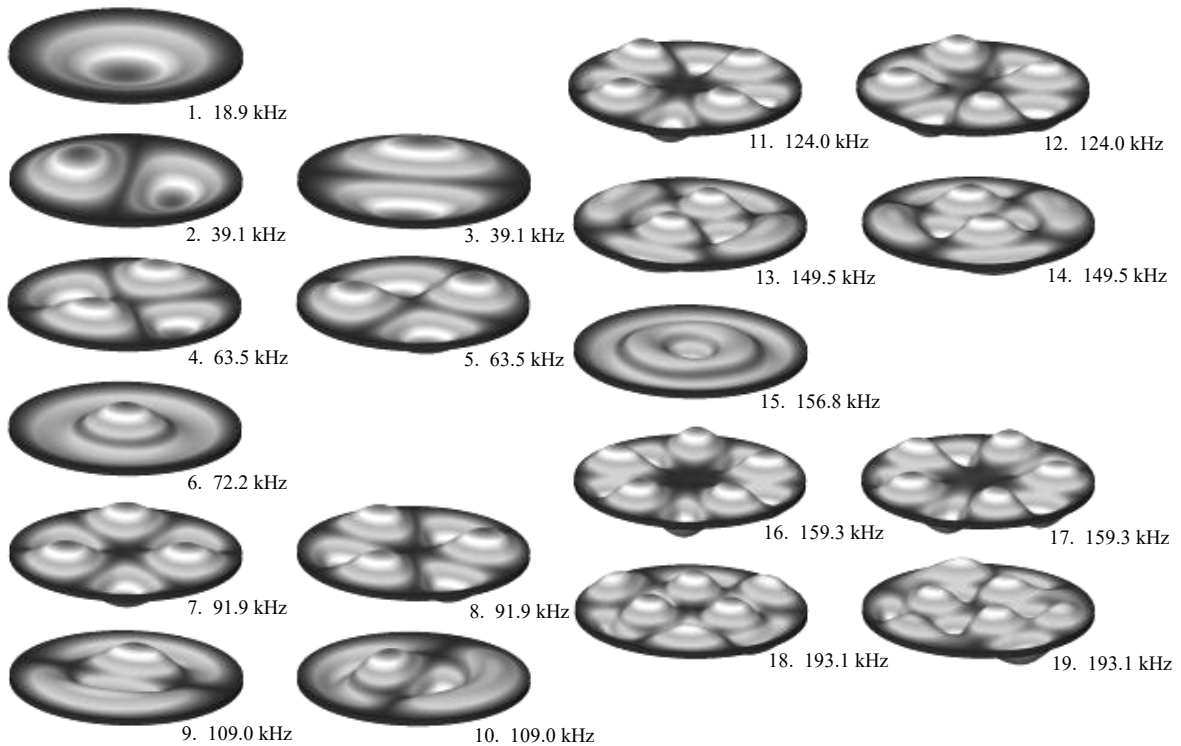
sorozatos transzformáció, amely csak az átló alatti elemeket nullázza le. $[\mathbf{D}]$ bal oldalán ortogonális mátrixok szorzata áll, tehát

$$[\mathbf{Z}]_{n,n-1}^T \cdot [\mathbf{Z}]_{n-1,n-2}^T \cdots [\mathbf{Z}]_{2,1}^T = [\mathbf{Q}]^T \quad (8.149)$$

ahonnan a QR dekompozíció ortogonális mátrixa

$$[\mathbf{Q}] = [\mathbf{Z}]_{2,1} \cdot [\mathbf{Z}]_{3,2} \cdots [\mathbf{Z}]_{n,n-1} \cdot \quad (8.150)$$

A QR dekompozíció megvalósítása után a dinamikai mátrix transzformáltja már közelebb fog állni a diagonális formához mint az eredeti $[\mathbf{D}]$ mátrix. A 8.146.-8.147. lépéseket ismételve a sajátértékek és a sajátvektorok egyre pontosabb megközelítéséhez jutunk. A gyakorlatban a sajátvektorokat általában nem a $[\mathbf{Q}]$ mátrixok szorzataként, hanem a módszer utolsó lépését jelentő, már ismertett inverz iterációval határozzák meg.



8.10. ábra. Egy korong néhány első sajátmódusa

Az inverz iterációval az ismétlődő vagy az egymáshoz nagyon közeli sajátértékeknek megfelelő sajátvektorok közül csak egyet lehet meghatározni. A sajátvektorok meghatározásának egyszerű módszere a már kiszámított vektor két különböző tagjának (például a legnagyobb és a legkisebbnek) a felcserélése és az inverz iterációk újbóli elvégzése. Ha a sajátérték háromszoros vagy még ennél is többször fordul elő, akkor meg kell jegyeznünk a már elvégzett cseréket, hogy ne ugyanazokat a sajátvektorokat számítsuk ki. Ezt a cserét jól tudjuk értelmezni ha megtekintjük a 8.10. ábrát. Ezen az ábrán egy 15 mm átmérőjű, 0.4 mm vastag lemezből kivágott, peremén

rögzített acélkorong első néhány alpmódusát láthatjuk. Észrevehetjük, hogy e korong sok kettős sajátfrekvenciával rendelkezik, ezek közül a második módus csomópontjai az előző módus orsópontjainak megfelelő helyen jelennek meg, és fordítva, ez előző orsópontjai a második csomópontjainak helyén vannak.

8.2.2.3. A sajátértékek eltolása

A sajátérték-feladatok megoldására kidolgozott algoritmusok egy része a feladat standard megfogalmazásából indul ki, mely esetben a kiszámított sajátértékek a saját körfrekvenciák négyzeteseinek inverzei. A merevtest-elmozduláshoz tartozó sajátmódusok frekvenciája zéró, tehát a megfelelő sajátértékek végtelen nagyok lesznek és numerikus módszerekkel nem számíthatók ki.

E probléma feloldására azt a tulajdonságot használjuk fel, mely szerint ha a 8.95. egyenlet $[K]$ merevségi mátrixát a tömegmátrixszal és egy pozitív valós ρ együtthatóval felépített

$$[\bar{K}] = [K] - \rho \cdot [M] \quad (8.151)$$

mátrixszal helyettesítjük, akkor a

$$([\bar{K}] - \mu \cdot [M]) \cdot \{\bar{A}\} = \{0\} \quad (8.152)$$

sajátérték-feladat megoldását jelentő sajátvektorok az eredeti 8.95. feladat sajátvektorai lesznek:

$$\{\bar{A}\} = \{A\}; \quad (8.153)$$

sajátértékei pedig a 8.95. feladat sajátértékeinél a ρ mennyiséggel lesznek nagyobbak

$$\mu = \lambda + \rho. \quad (8.154)$$

A sajátértékek eme eltolásával elérhető, hogy minden sajátérték pozitív legyen, viszont a számítások elvégzése után a számított értékekből le kell vonnunk a ρ mennyiséget, hogy megkapjuk a tényleges értékeket.

Megjegyzendő, hogy a sajátértékek eltolását egyes algoritmusok konvergenciájának felgyorsítására is fel lehet használni.

8.2.3. A sajátmódusok felhasználása

A sajátmódusok meghatározásának egyik, azonnal értetődő célja a rezonáns frekvenciák kiszámítása lehet. A sajátmódusok azonban a lineáris dinamikai feladatok megoldásában is segítséget nyújtanak: a lépésenkénti integrálás helyett új alternatívát nyújtanak. Ezen sajátérték-analízisre támaszkodó módszerek előnye az elvégzendő műveletek mennyiségének csökkenésében áll. Hátrányaik viszont jelentősek lehetnek: csak lineáris feladatok megoldására használhatók, és mivel rendszerint csak az első pár alacsonyabb frekvenciájú sajátmódust veszik számításba, az elkövetett hibák jelentősek lehetnek.

8.2.3.1. Modál-analízis

A sajátvektorok ortogonalitásuk miatt egymástól lineárisan függetlenek, azaz egy sajátvektor nem írható fel a többi sajátvektor lineáris kombinációjaként. A sajátvektorok tehát egy n -dimenziós vektortér bázisát alkotják, vagyis ebben bármely tetszőleges vektor (esetünkben a lengő szerkezet $\{\delta(t)\}$ elmozdulásvektora) az n lineárisan független $\{\Phi\}_i$ sajátvektor segítségével kifejezhető, mint

$$\{\delta(t)\} = \sum_{i=1}^n y_i(t) \cdot \{\Phi\}_i. \quad (8.155)$$

Itt az y_i szorzókat (általánosított vagy generalizált koordinátákat) *modális részesezési tényező*nek (participációs faktornak) nevezik. Ezt az egyenletet balról a $\{\Phi\}_i^T \cdot [M]$ vektorral beszorozva egy olyan egyenlethez jutunk, amelyből az általánosított koordináták meghatározhatók:

$$y_i(t) = \frac{\{\Phi\}_i^T \cdot [M] \cdot \{\delta(t)\}}{\{\Phi\}_i^T \cdot [M] \cdot \{\Phi\}_i} = \frac{\{\Phi\}_i^T \cdot [M] \cdot \{\delta(t)\}}{m_i^*}, \quad (8.156)$$

ahol a nevező az m_i^* *általánosított tömeg* (az i -edik módusban). E képlet felírásánál felhasználtuk azt a tényt, hogy a sajátvektorok ortogonálisak a tömegmátrixra nézve, azaz $\{\Phi\}_i^T \cdot [M] \cdot \{\Phi\}_j = 0$ ha $i \neq j$. Ha a sajátvektorok normalizálását úgy végezzük el, hogy

$$[\Phi]^T \cdot [M] \cdot [\Phi] = [I] \quad (8.157)$$

legyen, akkor az általánosított tömeg bármely módusban egységnyi lesz, továbbá

$$[\Phi]^T \cdot [K] \cdot [\Phi] = [\Lambda]. \quad (8.158)$$

A 8.157. egyenletnek eleget tevő normalizálással kapott sajátvektorokat *ortonormálisnak* nevezzük a tömegmátrixra nézve, használatuk jelentős megtakarításokhoz és a számítások pontosságának növeléséhez vezethet.

Ha a modális részvételi tényezőket minden módusban kiszámítjuk és azokat egy $\{y\}$ vektorban tároljuk, akkor az elmozdulásvektort tömören a

$$\{\delta\} = [\Phi] \cdot \{y\} \quad (8.159)$$

egyenlettel adhatjuk meg. Általában a kívánt pontosságon belül a $\{\delta\}$ elmozdulás már az első néhány k módus segítségével kifejezhető, ekkor a sajátvektorok mátrixának csak a baloldali $n \times k$ partícióját (az első k oszlopát) vesszük, az $\{y\}$ vektornak pedig csak k eleme van.

Az elmozdulás sajátvektorokkal és részvételi tényezőkkel való kifejezését a gerjesztett több szabadságfokú rendszer mozgásegyenletébe behelyettesítve egy

$$[M] \cdot [\Phi] \cdot \{\ddot{y}\} + [C] \cdot [\Phi] \cdot \{\dot{y}\} + [K] \cdot [\Phi] \cdot \{y\} = \{R\} \quad (8.160)$$

egyenletrendszerhez jutunk, amelyet ha balról $\{\Phi\}_i^T$ -vel beszorozunk, a sajátvektorok ortogonalitásából következő

$$\begin{aligned} \{\Phi\}_i^T \cdot [M] \cdot \{\Phi\}_j &= 0, \\ \{\Phi\}_i^T \cdot [C] \cdot \{\Phi\}_j &= 0, \\ \{\Phi\}_i^T \cdot [K] \cdot \{\Phi\}_j &= 0, \quad \text{ha } i \neq j \end{aligned} \quad (8.161)$$

összefüggések figyelembe vételével n darab egymástól független (nem csatolt) másodrendű differenciálegyenlethez jutunk:

$$m_i^* \cdot \ddot{y}_i + c_i^* \cdot \dot{y}_i + k_i^* \cdot y_i = r_i^*, \quad i = 1, n. \quad (8.162)$$

A használt jelölések a következők:

$$- m_i^* = \{\Phi\}_i^T \cdot [M] \cdot \{\Phi\}_i \text{ – az általánosított tömeg;} \quad (8.163)$$

$$- c_i^* = \{\Phi\}_i^T \cdot [C] \cdot \{\Phi\}_i \text{ – az általánosított csillapítás;} \quad (8.164)$$

$$- k_i^* = \{\Phi\}_i^T \cdot [K] \cdot \{\Phi\}_i \text{ – az általánosított merevség;} \quad (8.165)$$

$$- r_i^* = \{\Phi\}_i^T \cdot \{R\} \text{ – az általánosított erő;} \quad (8.166)$$

(mindegyik az i -edik módusban), ahol, ha a sajátvektorokat a tömegmátrixra ortonormalizáltuk

$$m_i^* = 1 \quad \text{és} \quad k_i^* = \lambda_i, \quad (8.167)$$

és ha a csillapítás mátrixát a Rayleigh-modell alapján írjuk fel, akkor

$$c_i^* = \alpha_i + \beta_i \cdot \lambda_i, \quad (8.168)$$

ahol α_i és β_i az ω_i saját körfrekvenciának megfelelő Rayleigh-együtthatók.

A 8.162. egyenletek formailag az egy szabadságfokú rendszer gerjesztett rezgésének egyenletével azonosak, amelyet

$$\ddot{y}_i + 2 \cdot \zeta_i \cdot \omega_i \cdot \dot{y}_i + \omega_i^2 \cdot y_i = a_i^* \quad (8.169)$$

formában is felírhatunk, ahol

$$c_i^* = 2 \cdot \zeta_i \cdot \omega_i \cdot m_i^*, \quad (8.170)$$

$$k_i^* = \omega_i^2 \cdot m_i^*, \quad (8.171)$$

$$a_i^* = \frac{r_i^*}{m_i^*}, \quad (8.172)$$

ζ_i pedig az i -edik módus csillapítási hányadosa.

A 8.162. és a 8.169. differenciálegyenletek megoldása az általánosított koordináták keresett függvénye. Például ha az utóbbi formából indulunk ki, akkor a megoldást a következő Duhamel-integrál (konvolúciós integrál) adja:

$$y_i(t) = \frac{1}{m_i^* \cdot \omega_{i,d}} \cdot \int_0^t r_i^*(\tau) \cdot \exp[-\zeta_i \cdot \omega_i \cdot (t-\tau)] \cdot \sin[\omega_{i,d} \cdot (t-\tau)] d\tau, \quad (8.173)$$

ahol

$$\omega_{i,d} = \omega_i \cdot \sqrt{1-\zeta_i^2} \quad (8.174)$$

a csillapított rendszer saját körfrekvenciája. Innen $y_i(t)$ -t Δt lépésenkénti numerikus integrálással határozzuk meg, a rendszer válasza pedig a módusok hatásának szuperponálásával (egymásra tevésével)

$$\begin{aligned} \{\delta(t)\} &= \sum_{i=1}^n y_i(t) \cdot \{\Phi\}_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\{\Phi\}_i}{m_i^* \cdot \omega_{i,d}} \cdot \int_0^t r_i^*(\tau) \cdot \exp[-\zeta_i \cdot \omega_i \cdot (t-\tau)] \cdot \sin[\omega_{i,d} \cdot (t-\tau)] d\tau \end{aligned} \quad (8.175)$$

lesz (8.11. ábra).

Hasonló módon járunk el akkor is, amikor a gerjesztés az alátámasztási felület elmozdulásából áll. A Duhamel-integrál ekkor az

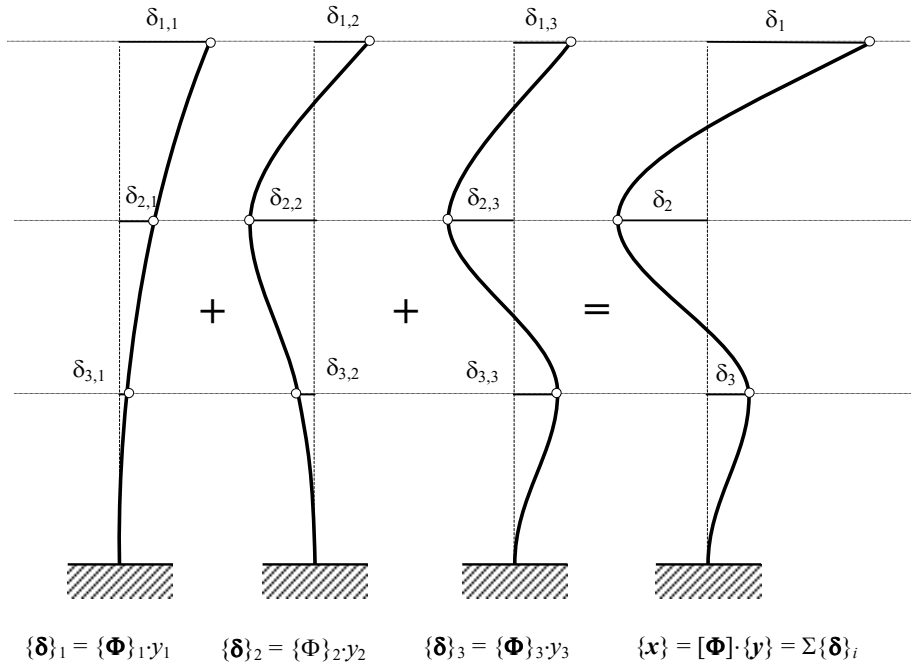
$$y_i(t) = \frac{p_i^*}{m_i^* \cdot \omega_{i,d}} \cdot \int_0^t a_i(t) \cdot \exp[-\zeta_i \cdot \omega_i \cdot (t-\tau)] \cdot \sin[\omega_{i,d} \cdot (t-\tau)] d\tau \quad (8.176)$$

alakot ölti, ahol a_t a talaj gyorsulása,

$$p_i^* = \{\Phi\}_i^T \cdot [M] \cdot \{r\}, \quad (8.177)$$

az alaki tényező, ahol $\{r\}$ a részesedési tényezők vektora. A rendszer válasza ez esetben a következő lineáris kombináció lesz:

$$\{\delta(t)\} = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^*}{m_i^* \cdot \omega_{id}} \cdot \{\Phi\}_i \cdot \int_0^t a_t(\tau) \cdot \exp[-\zeta_i \cdot \omega_i \cdot (t-\tau)] \cdot \sin[\omega_{id} \cdot (t-\tau)] d\tau. \quad (8.178)$$



8.11. ábra. A modál-analízis elvének szemléltetése

A rendszer dinamikai válaszát sebességekben vagy gyorsulásokban kifejezve is megadhatjuk. Ehhez az előbbi konvolúciós integrálok idő szerinti első, illetve második deriváltját kell meghatározni. Ekkor:

$$\dot{y}_i(t) = \frac{1}{m_i^*} \cdot \int_0^t r_i^*(\tau) \cdot \exp[-\zeta_i \cdot \omega_i \cdot (t-\tau)] \cdot \{-\cos[\omega_{id} \cdot (t-\tau)] + \zeta_{id} \cdot \sin[\omega_{id} \cdot (t-\tau)]\} d\tau, \quad (8.179)$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{\omega_{id}}{m_i^*} \cdot \int_0^t r_i^*(\tau) \cdot \exp[-\zeta_i \cdot \omega_i \cdot (t-\tau)] \cdot \{(1-\zeta_{id}^2) \cdot \sin[\omega_{id} \cdot (t-\tau)] + 2 \cdot \zeta_{id}^2 \cdot \cos[\omega_{id} \cdot (t-\tau)]\} d\tau, \quad (8.180)$$

ahol

$$\zeta_{id} = \zeta_i \cdot \sqrt{1-\zeta_i^2}, \quad (8.181)$$

s e képletekkel a sebesség és a gyorsulás:

$$\{\dot{\delta}(t)\} = \sum_{i=1}^n \dot{y}_i(t) \cdot \{\Phi\}_i, \quad (8.182)$$

illetve

$$\{\ddot{\delta}(t)\} = \sum_{i=1}^n \ddot{y}_i(t) \cdot \{\Phi\}_i. \quad (8.183)$$

A mozgásegyenletek lépésenkénti integrálásával szemben a modál-analízisnek vitathatatlan előnye abban áll, hogy míg az előbbi minden egyes lépés esetén egy $n \times n$ egyenletrendszer megoldását igényli, addig az utóbbi n darab egymástól független egyenlet integrálásából áll. A modál-analízis esetében viszont a sajátérték-feladatot is meg kell oldani.

8.2.3.2. Spektrál-analízis

A dinamikai feladatok eddig tárgyalt megoldási módszerei (a mozgásegyenletek integrálása és a modál-analízis) a rendszer időben változó dinamikai válaszát adták, például a szabadságfokok elmozdulásának időbeni lefolyását. A gyakorlatban azonban leggyakrabban nem a mennyiségek időbeni változása, hanem azok maximuma érdekel, hiszen e maximumok adják a szerkezetet leginkább igénybe vevő terhelést. Ez a megállapítás különösen kihangsúlyozódik akkor, amikor a szerkezetet a tervezési fázisban előre nem ismert, csak statisztikus módon leírható sztochasztikus gerjesztésre méretezzük.

Lineáris szerkezetek esetében a sajátmódusok tulajdonságainak alkalmazása ekkor egy újabb eljáráshoz vezet: ez a spektrál-analízis módszere.

A spektrál-analízisben bizonyos válasz-spektrumokat (az elmozdulás, a sebesség és a gyorsulás spektrumait) használunk. E spektrumok egy adott gerjesztésnek kitett, egyetlen dinamikai szabadságfokkal rendelkező rendszer $y(t)$ általánosított koordinátájának és e koordináta $\dot{y}(t)$ és $\ddot{y}(t)$ deriváltjainak maximumát adják meg. E gerjesztést jelentheti valamilyen mért mennyiség vagy valamilyen szintetikusan előállított függvény. A spektrumok felépítésekor a Duhamel-integrált egységnyi modális tömegre ($m^* = 1$) számítják ki, a saját-körfrekvencia (ω_n) és a csillapítási hányados (ζ) különböző értékeire; az r^* mennyiség gerjesztést leíró függvényt jelenti. Az így kiszámított $y(t)$ függvény az ω_n saját-körfrekvenciájú és ζ csillapítású egy szabadságfokú rendszer elmozdulása lesz. E függvénynek most csak az $y_{max}(\omega_n, \zeta)$ maximuma érdekel, az elmozdulás-spektrum a különböző állandó ζ értékekkel megrajzolt $y_{max}(\omega_n, \zeta = \text{áll.})$ görbékéből áll.

Bebizonyítható, hogy ha a gerjesztés egy tetszőleges erő, akkor az elmozdulás, a sebesség és a gyorsulás maximuma között összefüggés áll fenn:

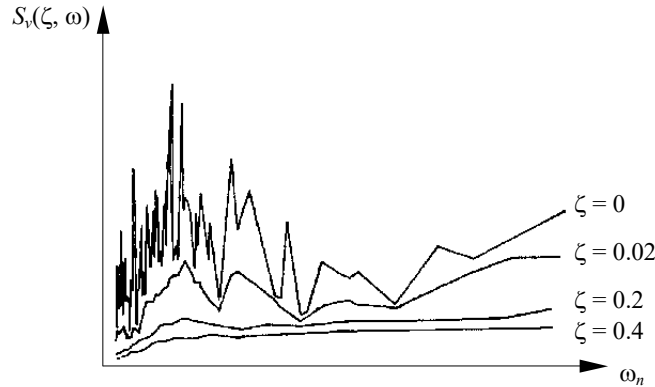
$$y_{max} = \frac{1}{\omega_n} \cdot \dot{y}_{max} = \frac{1}{\omega_n^2} \cdot \ddot{y}_{max}. \quad (8.184)$$

Ez a megállapítás a 8.179. és a 8.180. integrálok kiszámítását fölöslegessé teszi. Ha az elmozdulásokra megállapított spektrumot S_d -vel jelöljük, akkor a maximumok közötti összefüggés értelmében az S_v sebesség- és az S_a gyorsulásspektrum is azonnal következik, azokat skálázással is megállapíthatjuk:

$$S_d = \frac{1}{\omega_n} \cdot S_v = \frac{1}{\omega_n^2} \cdot S_a. \quad (8.185)$$

Amennyiben a gerjesztés az alátámasztási felület elmozdulása, a fenti reláció a relatív elmozdulás, a relatív sebesség és az abszolút gyorsulás maximumaira, illetve spektrumára lesz érvényes.

Megjegyzendő, hogy léteznek különböző egyezményesen megrajzolt (tehát nem kiszámított) válasz-spektrumok is, amelyeket bizonyos gyakorlati szempontoknak megfelelően állítottak össze.



8.12. ábra. Tipikus válasz-spektrum

(az 1940. V. 18.-i El-Centro-i földrengés \dot{E} - D irányú komponensének sebesség-spektruma)

Az előző fejezetben a rendszer válaszát a sajátmódusok lineáris kombinációjával állítottuk elő, ahol az általánosított koordinátákat a 8.173. vagy azzal analóg kifejezések adták. Az $y_i(t)$ általánosított koordináta az m_i^* tömegű, ω_i saját-körfrekvenciájú és ζ_i csillapítású egy szabadságfokú rendszer elmozdulását jelenti. Ezen általánosított koordináták felhasználásával az n szabadságfokú rendszer válaszában az i -edik módusú komponensei

$$\begin{aligned} \{\delta\}_i &= y_i \cdot \{\Phi\}_i, \\ \{\dot{\delta}\}_i &= \dot{y}_i \cdot \{\Phi\}_i, \\ \{\ddot{\delta}\}_i &= \ddot{y}_i \cdot \{\Phi\}_i. \end{aligned} \quad (8.186)$$

E kifejezések maximumát a fentiek alapján a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} \{\delta\}_{i,max} &= \frac{1}{m_i^*} \cdot \{\Phi\}_i \cdot S_{d,i} = \frac{1}{m_i^*} \cdot \frac{1}{\omega_i} \cdot \{\Phi\}_i \cdot S_{v,i} = \frac{1}{m_i^*} \cdot \frac{1}{\omega_i^2} \cdot \{\Phi\}_i \cdot S_{a,i}, \\ \{\dot{\delta}\}_{i,max} &= \frac{1}{m_i^*} \cdot \omega_i \cdot \{\Phi\}_i \cdot S_{d,i} = \frac{1}{m_i^*} \cdot \{\Phi\}_i \cdot S_{v,i} = \frac{1}{m_i^*} \cdot \frac{1}{\omega_i} \cdot \{\Phi\}_i \cdot S_{a,i}, \\ \{\ddot{\delta}\}_{i,max} &= \frac{1}{m_i^*} \cdot \omega_i^2 \cdot \{\Phi\}_i \cdot S_{d,i} = \frac{1}{m_i^*} \cdot \omega_i \cdot \{\Phi\}_i \cdot S_{v,i} = \frac{1}{m_i^*} \cdot \{\Phi\}_i \cdot S_{a,i}, \end{aligned} \quad (8.187)$$

ahol az S_i spektrális értékeket a gerjesztés megfelelő spektrumából olvassuk ki, a sajátmódus ω_i körfrekvenciájának és ζ_i csillapítási hányadosának megfelelően. Amennyiben a gerjesztés az alap elmozdulása, a fenti kifejezések spektrumait még a 8.177. p_i^* alakú tényezővel is be kell szoroznunk.

A modális maximumok egyszerű összegzése a keresett legnagyobb értékek kiszámítására nem használható biztonságosan, mivel a különböző módusok maximumai valószínűleg nem egyszerre lépnek fel, például

$$\{\delta\}_{max} \leq \sum \{\delta\}_{i,max} . \quad (8.188)$$

Emiatt a keresett maximum kiszámítására, amit *rekombinációnak* neveznek, különböző valószínűségi (probabilisztikus) képleteket állapítottak meg, ilyenek:

$$\{\mathbf{R}\} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \{\mathbf{R}^2\}_i} , \quad (\text{Rosenblueth}); \quad (8.189)$$

$$\{\mathbf{R}\} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \{\mathbf{R}\}_i + \sqrt{\sum_{i=1}^n \{\mathbf{R}^2\}_i} \right), \quad (\text{Jennings}); \quad (8.190)$$

$$\{\mathbf{R}\} = \frac{1}{2} \cdot \left(\{\mathbf{R}\}_1 + \sum_{i=1}^n \{\mathbf{R}\}_i \right). \quad (\text{Merchant}). \quad (8.191)$$

A Rosenblueth-formula a négyzetes átlag \sqrt{n} -szeresét, adja Jennings-képlet a maximumok egyszerű összegének és a Rosenblueth-formula által adott mennyiségnek átlagát jelenti, míg a Merchant-képlet pedig az alapvető módus meghatározó jellegét domborítja ki. E képletekben az $\{\mathbf{R}\}$ mennyiségek az elmozdulások, a sebességek vagy a gyorsulások maximumát jelentik.

8.2.4. Csillapított sajátértékek

Az egy szabadságfokú rendszer csillapított sajátkörfrekvenciája kisebb a csillapítatlannál. E mennyiségek között az 8.174. összefüggés létezik, mely szerint a kritikus csillapítású rendszer (amikor $\zeta = 1$) sajátkörfrekvenciája nullára esik vissza, a csillapítás e határértékétől kezdve a lengés aperiodikussá válik.

A szerkezetek nagy részénél a csillapítás mértéke általában távol áll a kritikustól, tehát a csillapított sajátlengések körfrekvenciája közel áll a csillapítatlan körfrekvenciákhoz. Éppen ezért rendszerint megelégszünk a csillapítatlan sajátértékek kiszámításával, hiszen azokat amúgy is csak bizonyos hibahatárokon belül tudjuk meghatározni.

Vannak azonban rendhagyó esetek is, amikor a rendszer csillapítása legalább néhány módusban jelentős lehet, ilyenkor a sajátkörfrekvenciákra vonatkozó fenti megközelítést már kockázatos lenne használni. Ilyenkor a szabadlengések mozgásegyenletében a csillapítást jelentő tagot nem lehet elhanyagolni, az tehát most az

$$[\mathbf{M}] \cdot \{\ddot{\delta}\} + [\mathbf{C}] \cdot \{\dot{\delta}\} + [\mathbf{K}] \cdot \{\delta\} = \{\mathbf{0}\} \quad (8.192)$$

homogén egyenletrendszer lesz.

A mozgásegyenletek megoldásának egyik lehetősége a Runge-Kutta módszernél alkalmazott változócsere, amellyel az általános 8.11. mozgásegyenletet a

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{C}] & [\mathbf{M}] \\ [\mathbf{M}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\dot{\delta}\} \\ \{\ddot{\delta}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{K}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & -[\mathbf{M}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\delta\} \\ \{\dot{\delta}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{R}\} \\ \{\mathbf{0}\} \end{Bmatrix} \quad (8.193)$$

formára lehet hozni. Ezt a formát tömören is felírhatjuk:

$$[\mathbf{A}] \cdot \{\dot{z}\} + [\mathbf{B}] \cdot \{z\} = \{\mathbf{F}\} \quad (8.194)$$

ahol a tagok jelentése az előbbi formával történő egybevetéssel azonnal következik. Észrevehetjük, hogy a mozgásegyenletek ekkor elsőfokúak lesznek, de a szabadságfokok száma megkétszereződik. Az együtthatók $[\mathbf{A}]$ és $[\mathbf{B}]$ mátrixai szimmetrikusak.

E változócserevel a csillapított szabadlengések egyenletét a terhelés nullázásával a következőképpen kapjuk:

$$[A] \cdot \{\dot{z}\} + [B] \cdot \{z\} = \{0\}. \quad (8.195)$$

Ha feltételezzük, hogy e homogén egyenletrendszer megoldásfüggvényei

$$z_i(t) = \Phi_i \cdot e^{\lambda \cdot t} \quad (8.196)$$

alakúak, akkor azt a

$$\lambda \cdot [A] \cdot \{\Phi\} + [B] \cdot \{\Phi\} \cdot e^{\lambda \cdot t} = \{0\} \quad (8.197)$$

formára hozhatjuk. Mivel az $e^{\lambda \cdot t}$ szorzó nem nulla, egyszerűsítés és átrendezés után a csillapított sajátértékekhez vezet

$$(\lambda \cdot [A] + [B]) \cdot \{\Phi\} = \{0\}, \quad (8.198)$$

a 8.97. egyenlettel analóg relációhoz jutunk. A sajátérték-feladat standard formájának felírásához ezt az egyenletet balról az $[A]$ inverzével kell beszoroznunk és ekkor a 8.99. formához jutunk, ahol

$$[D] = [A]^{-1} \cdot [B]. \quad (8.199)$$

Az $[A]$ mátrix inverzét az $[A] \cdot [A]^{-1} = [I]$ azonosság felírásával határozzuk meg:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\bar{A}]_{1,1} & [\bar{A}]_{1,2} \\ [\bar{A}]_{2,1} & [\bar{A}]_{2,2} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} [C] \cdot [\bar{A}]_{1,1} + [M] \cdot [\bar{A}]_{2,1} & [C] \cdot [\bar{A}]_{1,2} + [M] \cdot [\bar{A}]_{2,2} \\ [M] \cdot [\bar{A}]_{1,1} + [0] \cdot [\bar{A}]_{2,1} & [M] \cdot [\bar{A}]_{1,2} + [0] \cdot [\bar{A}]_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [I] \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (8.200)$$

ahonnan a tagok egyenlőségéből azonnal következik:

$$\begin{aligned} [M] \cdot [\bar{A}]_{1,1} + [0] \cdot [\bar{A}]_{2,1} &= [0] \Rightarrow [\bar{A}]_{1,1} = [0], \\ [M] \cdot [\bar{A}]_{1,2} + [0] \cdot [\bar{A}]_{2,1} &= [I] \Rightarrow [\bar{A}]_{1,2} = [M]^{-1}, \\ [C] \cdot [\bar{A}]_{1,1} + [M] \cdot [\bar{A}]_{2,1} &= [I] \Rightarrow [\bar{A}]_{2,1} = [M]^{-1}, \\ [C] \cdot [\bar{A}]_{1,2} + [M] \cdot [\bar{A}]_{2,2} &= [0] \Rightarrow [\bar{A}]_{2,2} = -[M]^{-1} \cdot [C] \cdot [M]^{-1}. \end{aligned} \quad (8.201)$$

A dinamikai mátrix tehát

$$[D] = \begin{bmatrix} [0] & [M]^{-1} \\ [M]^{-1} & -[M]^{-1} \cdot [C] \cdot [M]^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & -[I] \\ [M]^{-1} \cdot [K] & [M]^{-1} \cdot [C] \end{bmatrix}, \quad (8.202)$$

ami egy nem szimmetrikus mátrix. Ennek következtében a dinamikai mátrix szimmetriájára alapozó eljárások a csillapított sajátmódusok kiszámítására nem használhatók, ilyenkor általánosabb módszereket kell alkalmaznunk.

Egy ilyen, az általános mátrixok sajátmódusainak kiszámítását célzó módszer a már ismert QR algoritmuson alapszik, amelyet a dinamikai mátrix Hessenberg-alakra való hozása előz meg.

A Hessenberg-alakra hozott mátrix egy olyan felső háromszögmátrix, amelynek oszlopaiban közvetlenül a főátló alatt van még egy-egy zérótól különböző elem és az a következőképpen néz ki:

$$\begin{bmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & D_{1,3} & D_{1,4} & \dots & D_{1,n-2} & D_{1,n-1} & D_{1,n} \\ D_{2,1} & D_{2,2} & D_{2,3} & D_{2,4} & & D_{2,n-2} & D_{2,n-1} & D_{2,n} \\ 0 & D_{3,2} & D_{3,3} & D_{3,4} & & D_{3,n-2} & D_{3,n-1} & D_{3,n} \\ 0 & 0 & D_{4,3} & D_{4,4} & & D_{4,n-2} & D_{4,n-1} & D_{4,n} \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & D_{n-2,n-2} & D_{n-2,n-1} & D_{n-2,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & D_{n-1,n-1} & D_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & D_{n,n-1} & D_{n,n} \end{bmatrix}. \quad (8.203)$$

A Hessenberg-alakra hozás a Householder-transzformációval is megvalósítható, azonban annak vannak fejlettebb technikái is.

8.3. Különleges végelemek

A végeelemes számításokban a terhelést adó erőket gyakran már a modell megalkotásakor a csomópontokba koncentráljuk. Ha ezek az erők a szerkezet gyorsulásával arányos tehetetlenségi erők, akkor csak az arányossági tényezőt jelentő tömeget – ha a szabadságfokok között az elfordulás is megjelenik, akkor a tehetetlenségi nyomatékokat – kell megadnunk. Ezt egy különleges, egyetlen csomóponttal rendelkező végeelemmel oldhatjuk meg, amelynek csak egy diagonális tömegmátrixa (tehetetlenségi mátrixa) van:

$$[m]_e = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}, \quad (8.204)$$

merevségi mátrixa nem pedig létezik. Ez a fajta végelem a tökéletesen merev test modelljének felel meg (ez az Euklidesz-test), amelynek anyagtörvénye

$$\varepsilon = 0. \quad (8.205)$$

Mivel ez az elem más, merevségi mátrixszal rendelkező végelemek csomópontjához kapcsolódik, a szerkezet merevségi mátrixa nem lesz szinguláris.

A dinamikai számítások (és nemcsak azok) másik gyakrabban használt eleme a rugóelem, illetve annak különböző változatai. Egy rugóelem két csomóponttal rendelkezik. Az elemben fellépő erő a két pont relatív elmozdulásával arányos. Ez az arányosság lehet a Hooke-törvénynek megfelelő lineáris kapcsolat, de lehet valamilyen nemlineáris anyagtörvény is.

A rugóelem lehet egy dimenziós, amikor a benne fellépő erő a két végpont távolságának megváltozásával arányos. Lokális koordinátarendszerében meghatározott elemi merevségi mátrixa:

$$[k]_e = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}, \quad (8.206)$$

amelyet egyetlen együtthatóval megadhatunk.

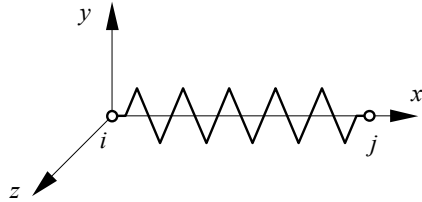
A rugóelem lehet három dimenziós, amikor a benne fellépő erők és nyomatékok a végpontok relatív elmozdulásával, illetve elfordulásával arányosak. Ez a meghatározás egy három dimenziós koordinátarendszer felvételét igényli, amelyet a rugóelem valamely csomópontjához kötünk. Ez a

koordinátarendszer az illető csomóponttal együtt mozdul és fordul el, benne az elem merevségi mátrixa:

$$[\mathbf{k}]_e = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{\theta_x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{\theta_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\theta_y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{\theta_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\theta_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{\theta_z} \\ -k_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{\theta_x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\theta_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{\theta_y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\theta_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{\theta_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\theta_z} \end{bmatrix}, \quad (8.207)$$

amelyet izotróp esetben két, anizotróp esetben hat együtthatóval definiálunk.

Mindkét típusú rugó végpontjai egymást fedő (de nem azonos) csomópontok is lehetnek. Ezeknek az elemeknek nincs tömegmátrixuk, azonban ezek sem okoznak szingularitásokat, mert tömeggel rendelkező végelemekhez kapcsolódnak.



8.13. ábra. Rugóelem

Léteznek az előbbi rugóelemekkel analóg csillapító elemek is. Merevségi mátrixuk és tömegmátrixuk nincsen, csillapítási mátrixuk viszont egy dimenziós esetben a 8.206, három dimenziós esetben a 8.207. merevségi mátrixszal azonos felépítésű. Ha ilyen diszkrét csillapító elemeket használunk, akkor a szerkezet csillapítását nem lehet a Rayleigh-moddal leírni, tehát az erre alapozó algoritmusokat sem használhatjuk a számítások elvégzésében.

A rugóelemekhez és a csillapító elemekhez hasonlóan, a nemlineáris szerkezetekkel foglalkozó fejezetben bemutatott anyagtörvények és testmodellek alapján, másfajta elemeket is elő lehet állítani.

9. EGYÉB ALKALMAZÁSOK

9.1. A hőtágulás végelelemes analízise

A szerkezetek analízisének szempontjából lényegesebb, a végelelem-módszerrel megoldható feladatok között kiemelt fontossággal bírnak a hőmérséklet megváltozásával kapcsolatos jelenségekhez fűződő problémák. Ezek az eddigiekben taglalt feszültségi és alakváltozási állapothoz közvetlenül köthetők, mert egyrészt az anyagparaméterek (például a Young-modulusz és az anyag szilárdsága) függhetnek a hőmérséklettől, másrészt a hőmérsékletváltozás alakváltozással jár.

Ha elfogadjuk a hőmérsékletváltozás és az alakváltozás közötti lineáris kapcsolat hipotézisét, akkor egy dimenzióra felírva a hőmérsékletváltozásból fakadó fajlagos lineáris alakváltozás

$$\varepsilon = \alpha \cdot \Delta T \quad (9.1)$$

lesz. Az α arányossági faktort lineáris hőtágulási tényezőnek nevezik, mértékegysége $1/K$ vagy $1/^\circ C$. E tényező az anyag egyik jellemzője, szűkebb-tágabb hőmérséklet határok között állandónak tekinthető. A legtöbb halmazállapot-változást, fázisátalakulást nem szenvedő, stabil szerkezetű és összetételű szilárd anyag esetében a hőtágulási tényező pozitív, ugyanis azok a hőmérséklet növekedésekor kiterjeszkednek.

A hőmérséklet megváltozásából származó alakváltozás a feszültségi állapothoz köthető alakváltozáshoz adódik hozzá, tehát egy dimenzióra felírva, Hooke-törvényének kiegészítésével

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \cdot \Delta T. \quad (9.2)$$

A minden irányban azonos mértékű hőtágulás nem vezet a forma megváltozásához, azaz γ értékére nincsen hatással. A hőtágulási tényező bizonyos esetekben irányfüggő lehet, ekkor az egyenlőtlen mértékű tágulás a forma torzulását okozhatja.

A mérnöki gyakorlatban α anizotrópiája például a szálerősítésű és a rétegelt anyagoknál fordul elő. Ortotrópia esetén, ha a fajlagos alakváltozás vektorának elemeit az ortotrópia irányában vesszük fel, γ -t a hőmérséklettől függetlennek találjuk. Ekkor a hőtágulás következtében megjelenő fajlagos alakváltozások vektora

$$\{\varepsilon_T\} = \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \Delta T = \{\alpha\} \cdot \Delta T \quad (9.3)$$

lesz, ahol a három zérótól különböző tag az ortotrópia irányában mérhető hőtágulási tényezők. Ezt a tagot hozzáadva az eddigi fejezetekben használt $\{\varepsilon\}$ vektorhoz a hőtágulás hatását minden különösebb erőfeszítés nélkül modellezni tudjuk. Amennyiben a végelelem tartományán a hőmérsékletet

$$T(x, y, z) = [N(x, y, z)]_e \cdot \{T\}_e \quad (9.4)$$

formában interpoláljuk, ahol $\{T\}_e$ a csomóponti hőmérsékleteket tartalmazza, a hőmérséklet megváltozása miatt létrejövő terhelés-összetevő

$$\{\mathbf{f}_T\}_e = \int_{V_e} [\mathbf{B}]_e^T \cdot [\mathbf{E}]_e \cdot \{\boldsymbol{\alpha}\}_e \cdot ([\mathbf{N}]_e \cdot \{\Delta \mathbf{T}\}_e) dV \quad (9.5)$$

lesz, ahol a kerek zárójelben levő tag a hőmérséklet csomóponti változását veszi figyelembe (a $\{\Delta \mathbf{T}\}_e$ vektor tagjai a csomóponti hőmérsékletek megváltozását jelentik).

A csak a hőmérséklet-változás miatt létrejövő $\{\boldsymbol{\delta}_T\}$ elmozdulásokat a

$$[\mathbf{K}] \cdot \{\boldsymbol{\delta}_T\} = \{\mathbf{F}_T\} \quad (9.6)$$

egyenletrendszer megoldásával kapjuk, ahol az $\{\mathbf{F}_T\}$ vektort az előbbi elemi $\{\mathbf{f}_T\}_e$ vektorokkal állítjuk össze. Ha ezeket az elmozdulásokat meggátoljuk, akkor a szerkezetben a hőmérséklet megváltozása a feszültségállapot megváltozásához vezet. Egyéb esetekben, amikor a szerkezetre egyéb terhelés is hat, az $\{\mathbf{F}_T\}$ vektort a szerkezeti terhelésvektorhoz kell hozzáadnunk és az elmozdulásokra vonatkozó feltételeket is be kell vezetnünk.

9.2. A hővezetés modellezése

A 9.4. relációval a skaláris hőmérsékleti mezőt közelítettük. Amennyiben a csomóponti hőmérsékletek nem előírt értékek, akkor azokat a megfelelő perem- és kezdeti feltételekkel meg kell határoznunk, vagyis meg kell oldanunk a hőterjedés feladatát.

A hőterjedést úgy idealizáljuk, mintha azt három különböző mechanizmus esetleg szimultán hatása idézné elő. Így beszélünk a molekulák termikus mozgásával magyarázott hővezetésről, a mozgó-áramló anyag konvekciós hőszállításáról és az anyagot alkotó elektromosan töltött részecskék rezgéséből származó elektromágneses hőszállításról. Szilárd anyagok belsejében a hőterjedés egyedüli módozatának a hővezetést tekintik, a konvekciós hőszállítás csak azok felületén léphet fel, a hőszállítás pedig csak az anyagon áthatolni képes frekvenciákon lenne lehetséges – ezt a komponenst azonban rendszerint elhanyagolják. A konvekciós hőátadás folyamán a hő tulajdonképpen nemcsak az anyag áramlásával, hanem vezetéssel és sugárással is terjed.

A hővezetést Fourier egyenlete írja le, mely szerint stacionárius körülmények között az egységnyi felületen időegység alatt átáramló hő mennyisége (fluxusa) a hőmérséklet gradiensevel arányos:

$$\boldsymbol{\varphi} = -\lambda \cdot \text{grad } T, \quad (9.7)$$

ahol a λ arányossági tényező a *hővezetési együttható*. λ értéke az anyagoként különbözik, de függ az adott anyag szerkezetétől és állapotától is (porozitás, nedvesség, hőmérséklet stb.). λ lehet irányfüggő is. Ortotropia esetén:

$$\begin{Bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \partial T / \partial x \\ \partial T / \partial y \\ \partial T / \partial z \end{Bmatrix}. \quad (9.8)$$

Amennyiben az anyag általános anizotrópiát mutat, akkor a fenti összefüggés szimmetrikus $[\boldsymbol{\lambda}]$ mátrixa hat, egymástól független tagot tartalmaz; ekkor például $\lambda_{xy} = \lambda_{yx}$.

Nemstacionárius körülmények között a felhalmozódó vagy fogyó hő mennyiségét is számításba kell venni. Az egységnyi tömegű anyag hőmérsékletének egységnyi emeléséhez szükséges hő mennyiségét fajhőnek nevezik és c -vel jelölik. E mennyiség bizonyos hőmérséklet-intervallumon belül állandónak tekinthető. Felhasználásával:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (9.9)$$

ahol a bal oldalon az egységnyi idő alatt felhalmozódó vagy felszabaduló hő térfogatra fajlagosított mennyisége, a jobb oldalon pedig az onnan elszállított hő mennyisége (a hőfluxus negatív előjellel vett divergenciája) áll. ρ az anyag sűrűsége.

Bizonyos esetekben a test belsejében hő keletkezik vagy nyelődik el. Így például a lengőmozgást végző szerkezetek belsejében a mechanikai energia egy része a disszipatív erők miatt hővé alakul, de ugyanígy hőt fejlesztenek az örvényáramok, a radioaktív bomlás és sok más egyéb folyamat. A fordított irányú folyamat ritkább, hő elnyelése például fázisátalakulások, endoterm reakciók és a termoelektromos Peltier-jelenségnél fordul elő. Ezt az időegység alatt felszabadított vagy elnyelt, térfogatra fajlagosított hőmennyiséget jelöljük q_v -vel; ezt az előbbi egyenlet bal oldalából kell kivonni (pozitív értéke a fejlődő hőt jelenti). Tehát a hővezetés teljesebb egyenlete:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} - q_v = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (9.10)$$

A test felületén történő konvekciós hőátadás egyenlete igen egyszerű formájú, az Newton lehülési egyenlete:

$$\varphi = \alpha \cdot (T_s - T_f), \quad (9.11)$$

ahol T_s a test, T_f pedig a hőt szállító közeg hőmérséklete. Az eredeti lehülési törvény egyébként a hőmérséklet $\partial T / \partial t$ változási sebességét tekintette lineárisan arányosnak a $T_s - T_f$ különbséggel, innen ered az elnevezése is. A hőmérséklet változása a fajhő és a sűrűség segítségével a hőmennyiséget, tehát a fluxust adja, innen ered az előbbi egyenlet.

A lehülési törvény a valóságot igen egyszerűsített módon modellezi, hiszen a hőátadás intenzitása sok-sok paramétertől függ, így például az áramló közeg anyagától, az áramlás sebességétől és irányától, a felület orientációjától, állapotától és alakjától. Mindezen körülmények hatását az α együttható foglalja magába, tehát tulajdonképpen az egy sokváltozós függvény értéke. Ezeket az értékeket bizonyos gyakorlati fontosságú esetekre szokták kísérletileg meghatározni és megadni.

A hőterjedés harmadik mechanizmusa a hősugárzás, amelyet a Stefan-Boltzmann törvény ír le:

$$\varphi = \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T_s - T_f)^4. \quad (9.12)$$

Ebben a képletben ε a test emissziós tényezője és σ a Stefan-Boltzmann állandó. A zárójel azt veszi figyelembe, hogy a hősugárzás kétirányú folyamat: a test nemcsak szétsugározza az energiát, hanem a környezetében levő testek sugárzását is felfogja. E képletben T_f a környezet hőmérséklete. A Stefan-Boltzmann törvényben szereplő hőmérsékletek K-ben (és nem °C-ban) kifejezett abszolút hőmérsékletek. Az ε tényező egységnyi értéke az abszolút fekete testre elméletileg megállapított törvényhez vezet. Ha ε -t egyetlen értékkel adjuk meg, akkor az illető testet „szürkének” tekintjük, „színes” testek esetében annak értéke az elektromágneses sugárzás frekvenciájának függvénye.

A feladathoz tartozó peremfeltételek a következők lehetnek:

- a perem bizonyos S_1 részén előírhatjuk a hőmérséklet T_s értékét (ez Dirichlet-féle lényeges feltétel);

- a perem S_2 részén előírjuk a hő merőleges irányú q_s fluxusát (ez Neumann-féle természetes peremfeltétel);

- a perem S_3 részén szintén a fluxusra vonatkozó feltételt írunk elő, megadván a konvekciós hőátadás α együtthatójának zérótól különböző értékét és az áramló fluidum T_f hőmérsékletét;

- a perem S_4 részén a fluxusra nézve egy harmadik fajta feltételt írunk elő, megadván a $(0, 1]$ intervallumba eső ε emisszivitási tényezőt és a környezet T_f hőmérsékletét;

- a perem azon részén, ahol az előbbi öt feltétel valamelyikét nem írtuk fel, zérus fluxussal számolunk (adiabatikusan szigeteltnek tekintjük).

Ahhoz, hogy a feladat megoldható legyen, legalább egy peremfeltételt meg kell adnunk az adiabatikus szigetelésen kívül.

A hővezetés végeselemes modellezésének variációs megfogalmazásában a feladathoz társított funkcionált a virtuális munkával analóg módon, a Q hő és a virtuális δT hőmérséklet szorzataként definiált „virtuális hő” adja:

$$E = \int_V \frac{1}{2} \cdot \left[\lambda_x \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \lambda_y \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \lambda_z \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] dV - \int_V q_V \cdot T dV + \int_V \rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot T dV - \int_{S_2} q_S \cdot T dS - \int_{S_3} \alpha \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot T - T_f \right) \cdot T dS - \int_{S_4} \kappa \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot T - T_f \right) \cdot T dS. \quad (9.13)$$

E kifejezés már magába foglalja a peremfeltételeket is, az előírt hőmérsékletek kivételével.

A hőszugárzás képletében a hőmérséklet negyedik hatványa szerepel. Ezen a problémán a következő megoldással tehetjük túl magunkat: a Stefan-Boltzmann-törvényt

$$\varphi = \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T_s^4 - T_f^4) = (T_s^2 + T_f^2) \cdot (T_s + T_f) \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T_s - T_f) = \kappa \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T_s - T_f) \quad (9.14)$$

formában „linearizáljuk”, ahol κ egy, a test hőmérsékletétől függő együttható lesz.

Ha e funkcionálból elhagyjuk az időben változó tagot, akkor a stacionárius hővezetés funkcionáljához jutunk (ez esetben a peremfeltételek és a q_V mennyiség időben állandóak kell legyenek).

9.2.1. A stacionárius eset

A variációs eljárásban a funkcionált végeselemenként írjuk fel, a teljes szerkezetre vonatkozó értékét algebrai összegzéssel kapjuk. Az integrálokban szereplő mennyiségeket egy végeselem felett a csomópontokban, a szabadságfokoknak megfelelően felvett értékeikkel interpoláljuk. A tanulmányozott mennyiség most a hőmérséklet, amely egy skaláris mennyiség és így a C_0 közelítésben csomópontként elegendő egy szabadságfokot felvennünk.

A 9.13. funkcionált a stacionárius esetre felírván a következő kifejezéshez jutunk:

$$E = \int_V \frac{1}{2} \cdot \{\text{grad } T\}^T \cdot [\boldsymbol{\lambda}] \cdot \{\text{grad } T\} dV - \int_V q_V \cdot T dV - \int_{S_2} q_S \cdot T dS - \int_{S_3} \alpha \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot T - T_f \right) \cdot T dS - \int_{S_4} \kappa \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot T - T_f \right) \cdot T dS. \quad (9.15)$$

A hőmérsékletet a csomóponti értékekkel interpoláljuk, a 9.4. összefüggés szerint. Ennek következtében a hőmérséklet gradiense a

$$\{\text{grad } T(x, y, z)\}_e = [\mathbf{B}(x, y, z)]_e \cdot \{T\}_e \quad (9.16)$$

kifejezés adja, ahol $[\mathbf{B}]_e$ az $[\mathbf{N}]_e$ interpolációs függvényeknek a gradiens-számításból eredő deriváltjait tartalmazza:

$$\left\{ \text{grad}([\mathbf{N}]_e \cdot \{\mathbf{T}\}_e) \right\}_e = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}([\mathbf{N}]_e \cdot \{\mathbf{T}\}_e) \\ \frac{\partial}{\partial y}([\mathbf{N}]_e \cdot \{\mathbf{T}\}_e) \\ \frac{\partial}{\partial z}([\mathbf{N}]_e \cdot \{\mathbf{T}\}_e) \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}[\mathbf{N}]_e \\ \frac{\partial}{\partial y}[\mathbf{N}]_e \\ \frac{\partial}{\partial z}[\mathbf{N}]_e \end{Bmatrix}_e \cdot \{\mathbf{T}\}_e = [\mathbf{B}]_e \cdot \{\mathbf{T}\}_e. \quad (9.17)$$

Ezek alapján az egy végelemre felírt funkcionál tehát a következő lesz:

$$\begin{aligned} E_e = & \frac{1}{2} \cdot \int_{V_e} \{\mathbf{T}\}_e^T \cdot [\mathbf{B}]_e^T \cdot [\boldsymbol{\lambda}]_e \cdot [\mathbf{B}]_e \cdot \{\mathbf{T}\}_e \, dV - \int_{V_e} q_V \cdot [\mathbf{N}]_e \cdot \{\mathbf{T}\}_e \, dV - \\ & - \int_{S_{e2}} q_S \cdot [\mathbf{N}]_e \cdot \{\mathbf{T}\}_e \, dS - \frac{1}{2} \cdot \int_{S_{e3}} \alpha \cdot ([\mathbf{N}]_e \cdot \{\mathbf{T}\}_e)^2 \, dS + \int_{S_{e3}} \alpha \cdot T_f \cdot [\mathbf{N}]_e \cdot \{\mathbf{T}\}_e \, dS - \\ & - \frac{1}{2} \cdot \int_{S_{e4}} \kappa \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot ([\mathbf{N}]_e \cdot \{\mathbf{T}\}_e)^2 \, dS + \int_{S_{e4}} \kappa \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot T_f \cdot [\mathbf{N}]_e \cdot \{\mathbf{T}\}_e \, dS, \end{aligned} \quad (9.18)$$

ahol felhasználtuk a $([\mathbf{B}]_e \cdot \{\mathbf{T}\}_e)^T = \{\mathbf{T}\}_e^T \cdot [\mathbf{B}]_e^T$ tulajdonságot.

Mivel $([\mathbf{N}]_e \cdot \{\mathbf{T}\}_e)^2 = ([\mathbf{N}]_e \cdot \{\mathbf{T}\}_e)^T \cdot ([\mathbf{N}]_e \cdot \{\mathbf{T}\}_e) = \{\mathbf{T}\}_e^T \cdot [\mathbf{N}]_e^T \cdot [\mathbf{N}]_e \cdot \{\mathbf{T}\}_e$, és mivel a csomóponti hőmérsékletek mint paraméterek szerepelnek, a funkcionált a következőképpen tudjuk átalakítani:

$$\begin{aligned} E_e = & \frac{1}{2} \cdot \{\mathbf{T}\}_e^T \cdot \left(\int_{V_e} [\mathbf{B}]_e^T \cdot [\boldsymbol{\lambda}]_e \cdot [\mathbf{B}]_e \, dV \right) \cdot \{\mathbf{T}\}_e - \{\mathbf{T}\}_e^T \cdot \int_{V_e} q_V \cdot [\mathbf{N}]_e \, dV - \{\mathbf{T}\}_e^T \cdot \int_{S_{e2}} q_S \cdot [\mathbf{N}]_e \, dS - \\ & - \frac{1}{2} \cdot \{\mathbf{T}\}_e^T \cdot \left(\int_{S_{e3}} \alpha \cdot [\mathbf{N}]_e^T \cdot [\mathbf{N}]_e \, dS \right) \cdot \{\mathbf{T}\}_e + \{\mathbf{T}\}_e^T \cdot \int_{S_{e3}} \alpha \cdot T_f \cdot [\mathbf{N}]_e \, dS - \\ & - \frac{1}{2} \cdot \{\mathbf{T}\}_e^T \cdot \left(\int_{S_{e4}} \kappa \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot [\mathbf{N}]_e^T \cdot [\mathbf{N}]_e \, dS \right) \cdot \{\mathbf{T}\}_e + \{\mathbf{T}\}_e^T \cdot \int_{S_{e4}} \kappa \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot T_f \cdot [\mathbf{N}]_e \, dS. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Ha a

$$[\mathbf{k}]_e = \int_{V_e} [\mathbf{B}]_e^T \cdot [\boldsymbol{\lambda}]_e \cdot [\mathbf{B}]_e \, dV - \int_{S_{e3}} \alpha \cdot [\mathbf{N}]_e^T \cdot [\mathbf{N}]_e \, dS - \int_{S_{e4}} \kappa \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot [\mathbf{N}]_e^T \cdot [\mathbf{N}]_e \, dS \quad (9.20)$$

mátrixot a végelem „merevségi mátrixának”, az

$$\{\mathbf{r}\}_e = \int_{V_e} q_V \cdot [\mathbf{N}]_e \, dV + \int_{S_{e2}} q_S \cdot [\mathbf{N}]_e \, dS - \int_{S_{e3}} \alpha \cdot T_f \cdot [\mathbf{N}]_e \, dS - \int_{S_{e4}} \kappa \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot T_f \cdot [\mathbf{N}]_e \, dS \quad (9.21)$$

vektort pedig a végelem „terhelésvektorának” tekintjük (a rugalmasságtani feladattal való analógia magától értetődő), akkor a funkcionált röviden az

$$E_e = \{\mathbf{T}\}_e^T \cdot ([\mathbf{k}]_e \cdot \{\mathbf{T}\}_e - \{\mathbf{r}\}_e) \quad (9.22)$$

formára hozhatjuk.

Az egyensúly állapotát az

$$E = \sum_e E_e \quad (9.23)$$

funkcionál minimuma adja, tehát a csomóponti hőmérsékletek szerinti deriváltját zéróval egyenlővé tévén egy lineáris

$$[K] \cdot \{T\} = \{R\} \quad (9.24)$$

egyenletrendszerhez jutunk. Innen a rugalmasságtani feladat megoldásának menetét követvén, az előírt csomóponti hőmérsékletekre vonatkozó peremfeltételek bevezetése után az egyenletrendszer megoldásával meghatározzuk az ismeretlen csomóponti hőmérsékleteket. A feladat rendszerint nem lineáris, mivel együtthatói (például a hővezető-képesség) a hőmérséklettől függenek.

9.2.2. A nemstacionárius eset

A nemstacionárius esetben az elemi funkcionál képletében a $\int_{V_e} \rho \cdot c \cdot (\partial T / \partial t) \cdot T \, dV$ tag is megjelenik, amelyben a hőmérséklet időbeni változása szerepel. A hőmérsékletet a csomóponti értékek segítségével interpoláljuk és annak változási sebességével, idő szerinti deriváltjával is hasonlóképpen járunk el:

$$\frac{\partial T(x, y, z)}{\partial t} = [N(x, y, z)]_e \cdot \frac{\partial}{\partial t} \{T\}_e. \quad (9.25)$$

E megközelítéssel a funkcionálban megjelenő új tag végelelemes kifejezése

$$\begin{aligned} \int_{V_e} \rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot T \, dV &= \int_V \{T\}_e^T \cdot [N]_e^T \cdot \rho \cdot c \cdot [N]_e \cdot \frac{\partial}{\partial t} \{T\}_e \, dV = \\ &= \{T\}_e^T \cdot \left(\int_V [N]_e^T \cdot \rho \cdot c \cdot [N]_e \, dV \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \{T\}_e = \{T\}_e^T \cdot [c]_e \cdot \frac{\partial}{\partial t} \{T\}_e \end{aligned} \quad (9.26)$$

lesz, ahol a $[c]_e$ mátrix a végelelem hőkapacitásának mátrixa.

A végelelem tartományára felírt funkcionált e taggal kiegészítve:

$$E_e = \{T\}_e^T \cdot \left([c]_e \cdot \dot{\{T\}}_e + [k]_e \cdot \{T\}_e - \{r\}_e \right). \quad (9.27)$$

Az $E = \sum_e E_e$ összeg hőmérséklet szerinti deriválásával a minimum feltétele egy differenciálegyenletrendszerhez vezet:

$$[C] \cdot \dot{\{T\}} + [K] \cdot \{T\} = \{R\}, \quad (9.28)$$

ahol

$$\dot{\{T\}} = \frac{\partial}{\partial t} \{T\}. \quad (9.29)$$

Ezt az egyenletrendszert időbeni diszkretizációval, lépésenkénti integrálással oldhatjuk meg.

A megoldandó feladat – mindamelllett, hogy differenciálegyenleteket kell megoldani – nem egyszerű, mert a bal oldal együtthatói a hőmérséklettől függhetnek. Mivel ezek az együtthatók

általában csak lassan változnak a hőmérséklettel, elfogadható az a hipotézis, mi szerint értékük az időlépés alatt állandó. Ezeket az értékeket az időlépés elején érvényes hőmérsékletekkel számítjuk.

Egy másik egyszerűsítő hipotézis a hőmérséklet időbeni változására vonatkozik: ezt a változást bázisfüggvények és csomóponti értékek felhasználásával is felírhatjuk, akárcsak az elmozdulást az egy dimenziós végelem tartományán:

$$\{\mathbf{T}(t')\} \approx N_1 \cdot \{\mathbf{T}\}_i + N_2 \cdot \{\mathbf{T}\}_{i+1}, \quad (9.30)$$

ahol t' az i és az $i+1$ pillanatok között az $[0, \Delta t]$ intervallumon vehet fel értékeket, $\{\mathbf{T}\}_i$ a Δt lépés kezdetén, $\{\mathbf{T}\}_{i+1}$ pedig a végén érvényes csomóponti hőmérsékletek vektora. Az N közelítő függvények nem a térbeli, hanem az időbeni diszkretizációra vonatkoznak (tehát nem a végelem tartományán, hanem a Δt hosszúságú idő-intervallumon definiáljuk azokat), lineáris interpoláció esetén azok:

$$N_1(t') = 1 - \frac{t'}{\Delta t}, \quad \frac{\partial N_1}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta t}, \quad (9.31)$$

és

$$N_2(t') = \frac{t'}{\Delta t}, \quad \frac{\partial N_2}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t}, \quad (9.32)$$

ahol

$$t = t_i + t'. \quad (9.33)$$

A hőmérséklet interpolálásával tehát az egyensúly 9.28. egyenlete a következőképpen írható újra:

$$[\mathbf{C}] \cdot \left(\frac{\partial N_1}{\partial t} \cdot \{\mathbf{T}\}_i + \frac{\partial N_2}{\partial t} \cdot \{\mathbf{T}\}_{i+1} \right) + [\mathbf{K}] \cdot (N_1 \cdot \{\mathbf{T}\}_i + N_2 \cdot \{\mathbf{T}\}_{i+1}) = \{\mathbf{R}\}, \quad (9.34)$$

amely a lineáris interpoláció (9.31.-9.32. képletek) esetében a

$$[\mathbf{C}] \cdot \frac{1}{\Delta t} (\{\mathbf{T}\}_{i+1} - \{\mathbf{T}\}_i) + [\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{T}\}_{i+1} = \{\mathbf{R}\}_{i+1}, \quad (9.35)$$

rekurzív képlethez vezetne, ahol a mátrixokat a lépés elején érvényes hőmérsékletekkel lehet megállapítani. A gyakorlatban azonban ennél pontosabb közelítést szoktak követni, a súlyozott reziduumok módszerének alkalmazásával az

$$\int_0^{\Delta t} \{\mathbf{w}\}^T \cdot \left\{ [\mathbf{C}] \cdot \left(\frac{\partial N_1}{\partial t} \cdot \{\mathbf{T}\}_i + \frac{\partial N_2}{\partial t} \cdot \{\mathbf{T}\}_{i+1} \right) + [\mathbf{K}] \cdot (N_1 \cdot \{\mathbf{T}\}_i + N_2 \cdot \{\mathbf{T}\}_{i+1}) - \{\mathbf{R}\} \right\} dt = 0 \quad (9.36)$$

egyenlőség előírásával, amely az eddig használt lineáris interpoláció esetében a

$$\left[\frac{1}{\Delta t} \cdot \int_0^{\Delta t} \{\mathbf{w}\}^T dt \cdot [\mathbf{C}] + \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_0^{\Delta t} \{\mathbf{w}\}^T \cdot t dt \cdot [\mathbf{K}] \right] \cdot \{\mathbf{T}\}_{i+1} - \left[\frac{1}{\Delta t} \cdot \int_0^{\Delta t} \{\mathbf{w}\}^T dt \cdot [\mathbf{C}] + \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_0^{\Delta t} \{\mathbf{w}\}^T \cdot t dt \cdot [\mathbf{K}] - \int_0^{\Delta t} \{\mathbf{w}\}^T dt \cdot [\mathbf{K}] \right] \cdot \{\mathbf{T}\}_i - \int_0^{\Delta t} \{\mathbf{w}\}^T dt \cdot \{\mathbf{R}\} = 0 \quad (9.37)$$

egyenlethez vezet. A Galerkin-módszerben a súlyfüggvény a közelítőfüggvény variációja:

$$\{\mathbf{w}\} = \delta(N_1 \cdot \{\mathbf{T}\}_i + N_2 \cdot \{\mathbf{T}\}_{i+1}) = [N_1 \quad N_2] \cdot [\{\delta\mathbf{T}\}_i \quad \{\delta\mathbf{T}\}_{i+1}]^T = [\mathbf{N}] \cdot [\delta\mathbf{T}], \quad (9.38)$$

s ezzel

$$\begin{aligned} & [\delta\mathbf{T}]^T \cdot \left[\frac{1}{\Delta t} \cdot \int_0^{\Delta t} [\mathbf{N}]^T dt \cdot [\mathbf{C}] + \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_0^{\Delta t} [\mathbf{N}]^T \cdot t dt \cdot [\mathbf{K}] \right] \cdot \{\mathbf{T}\}_{i+1} - \\ & - [\delta\mathbf{T}]^T \cdot \left[\frac{1}{\Delta t} \cdot \int_0^{\Delta t} [\mathbf{N}]^T dt \cdot [\mathbf{C}] + \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_0^{\Delta t} [\mathbf{N}]^T \cdot t dt \cdot [\mathbf{K}] - \int_0^{\Delta t} [\mathbf{N}]^T dt \cdot [\mathbf{K}] \right] \cdot \{\mathbf{T}\}_i - \\ & - [\delta\mathbf{T}]^T \cdot \int_0^{\Delta t} [\mathbf{N}]^T dt \cdot \{\mathbf{R}\} = 0. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Mivel a hőmérsékletek variációja nem lehet zéró, a $[\delta\mathbf{T}]^T$ mátrixszal végig lehet osztani, a fenti reláció pedig két egyenletre bomlik fel:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\Delta t} \cdot \int_0^{\Delta t} N_j dt \cdot [\mathbf{C}] + \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_0^{\Delta t} N_j \cdot t dt \cdot [\mathbf{K}] \right] \cdot \{\mathbf{T}\}_{i+1} - \\ & - \left[\frac{1}{\Delta t} \cdot \int_0^{\Delta t} N_j dt \cdot [\mathbf{C}] + \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_0^{\Delta t} N_j \cdot t dt \cdot [\mathbf{K}] - \int_0^{\Delta t} N_j dt \cdot [\mathbf{K}] \right] \cdot \{\mathbf{T}\}_i - \int_0^{\Delta t} N_j dt \cdot \{\mathbf{R}\} = 0, \end{aligned} \quad (9.40)$$

ahol $j \in \{1, 2\}$. A 9.31. és a 9.32. függvények behelyettesítésekor

$$\int_0^{\Delta t} N_1 dt = \int_0^{\Delta t} N_2 dt = \frac{\Delta t}{2}, \quad \int_0^{\Delta t} N_1 \cdot t dt = \frac{\Delta t^2}{6}, \quad \int_0^{\Delta t} N_2 \cdot t dt = \frac{\Delta t^2}{3}, \quad (9.41)$$

a két egyenlet pedig a következő lesz:

$$\left[\frac{1}{2} \cdot [\mathbf{C}] + \frac{\Delta t}{6} \cdot [\mathbf{K}] \right] \cdot \{\mathbf{T}\}_{i+1} - \left[\frac{1}{2} \cdot [\mathbf{C}] - \frac{\Delta t}{3} \cdot [\mathbf{K}] \right] \cdot \{\mathbf{T}\}_i - \frac{\Delta t}{2} \cdot \{\mathbf{R}\} = 0, \quad (9.42)$$

és

$$\left[\frac{1}{2} \cdot [\mathbf{C}] + \frac{\Delta t}{3} \cdot [\mathbf{K}] \right] \cdot \{\mathbf{T}\}_{i+1} - \left[\frac{1}{2} \cdot [\mathbf{C}] - \frac{\Delta t}{6} \cdot [\mathbf{K}] \right] \cdot \{\mathbf{T}\}_i - \frac{\Delta t}{2} \cdot \{\mathbf{R}\} = 0. \quad (9.43)$$

E két egyenlet közül bármelyiket használhatjuk a lépésenkénti integrálásnál, mindkettő rekurzív képlet.

9.3. A nedvesség hatása

A szerkezeteket felépítő anyagok egy része nedvszívó lehet, azaz tömegükben bizonyos mennyiségű vizet, nedvességet képesek tárolni. E nedvszívó-képesség több jelenség együttes hatásának tulajdonítható. Az anyagok egy része pórusos, tömegében kisebb-nagyobb üregek, kapilláris rostok lehetnek, amelyek felületén a víz megtapad (ezt adszorpciónak nevezik). A nedvesség megkötésében molekuláris jelenségek is részt vehetnek, beszélhetünk a polarizált molekulák közötti kölcsönös vonzás miatt előidézett fizikai abszorpcióról és a molekulák közötti kötések miatt létrejövő kémiai abszorpcióról. Az abszorpció az anyag tömegében, nemcsak a pórusok felületén játszódik le.

A nedvszívó anyagok nedvességtartalma egyensúlyban áll a környezetével. Mivel a természetes levegő is tartalmaz némi, ingadozó koncentrációjú nedvességet, a higroszkopikus

anyagokból álló szerkezeti elemek nedvességtartama még száraznak tűnő környezetben is folyamatosan változik.

Az anyag nedvességtartama nem lehet tetszőlegesen nagy, az telítődik és több vizet nem tud felvenni. A nedvességtartalom számszerű kifejezése a C koncentrációval történik, ami például a folyadék és a szilárd anyag tömegének hányadosa.

A nedvességtartalom kifejezésének egyszerűbb módozata a telítettségi állapot eléréséhez szükséges mennyiséghez viszonyított M relatív nedvesség használata. Az egy 0 és 1 közötti szám (vagy, ha százalékosan fejezzük ki, az 0...100 % között lehet), ahol a zérus érték a tökéletesen száraz anyag relatív nedvességét jelenti, az egységnyi érték pedig a telítési C_{max} koncentrációnak felel meg. A relatív nedvesség kevésbé pontos, mert a telítettségnek megfelelő koncentráció a hőmérséklet és a nyomás függvénye lehet. A koncentráció és a relatív nedvesség viszonyát az

$$M = \frac{C}{C_{max}} \quad (9.44)$$

hányadossal adhatjuk meg.

Az anyagok nedvességtartama befolyással van a szerkezeti elemek tulajdonságaira. Hogy csak a fontosabbakat említsük: a nedvesség növekedésével méreteinek változását észlelhetünk (duzzad), a szerkezeti elem tömege, látszólagos sűrűsége megnövekedik, Young-modulusa is megváltozhat.

A méretváltozást fajlagosítva, elfogadván a nedvességtartalom növekedése és a duzzadás mértéke közötti egyenes arányosság hipotézisét, a következő egyszerű relációt írhatjuk fel:

$$\varepsilon = \beta \cdot \Delta M, \quad (9.45)$$

ahol ΔM a kiindulási állapot M_0 relatív nedvességtartalmához viszonyított változást jelenti, β pedig a relatív nedvesség egységnyi változásának megfelelő fajlagos alakváltozást jelenti (mértékegysége 1/rel. %), az a duzzadási együttható. E képlet három dimenzióra is kiterjeszhető és anizotróp anyagra is felírható, a hőtágulásra vonatkozó képletekkel teljesen analóg módon.

A duzzadásból származó alakváltozás, illetve a meggátolt alakváltozásból származó feszültségek kiszámításához szükségünk van a skaláris hőmérséklet-mezőhöz hasonlóan definiált, a nedvesség térbeli eloszlását leíró függvényre. A végeelem-módszerben a relatív nedvességet is a csomóponti értékekkel definiáljuk, a 9.4. relációval analóg módon tehát

$$M(x, y, z) = [N(x, y, z)]_e \cdot \{M\}_e. \quad (9.46)$$

A relatív nedvesség a környezeti behatásokat követi. Térbeli változását stacionárius körülmények között a hő terjedésének leírására megállapított Fourier-törvénnyel analóg Fick-törvény adja:

$$\{\varphi\} = -[D] \cdot \{\text{grad } C\}, \quad (9.47)$$

ahol φ ezúttal a diffundáló anyag fluxusa, D pedig egy arányossági tényező, a diffúziós együttható (vagy diffuzivitás), amely az adott szilárd testre és az adott folyadéokra érvényes mennyiség, ami esetleg anizotróp is lehet. Ortotrópia esetén $[D]$ egy diagonális mátrix, három különböző taggal.

Amennyiben a körülmények nem stacionáriusak, a hővezetés 9.10. egyenletével analóg második Fick-törvényt kell felírnunk és alkalmaznunk, ortotróp anyagokra:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \cdot \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \cdot \frac{\partial C}{\partial z} \right); \quad (9.48)$$

általános anizotrópia esetén a jobb oldal $\text{div}([D] \cdot \text{grad } C)$.

E második törvény felírásakor feltételeztük, hogy az anyag belsejében nem keletkezik és nem fogy a terjedő anyag, vagyis hogy az kémiailag stabil (ellenkező esetben a bal oldalon meg kellene jelenni egy $-q_v$ tagnak is, amely a térfogategységben egy másodperc alatt keletkező vagy fogyó anyag mennyiségét venné figyelembe).

Fick törvényeiben a koncentráció szerepel. Ha a koncentrációról át akarunk térni a relatív nedvességre, akkor mindkét egyenletet végig kell osztani a telítési koncentrációval.

A feladat végeselemes megoldása Fick törvényeiből indul ki, peremfeltételei a koncentrációkra és a fluxusokra vonatkozhatnak. A megoldás menete követi a hővezetés esetében leírtakat.

Fick törvényei a diffúziós jelenségek matematikai leírását szolgálják. E jelenségekben egy anyag tömegében egy másik anyag részecskéi hatolnak keresztül. Ez a másik „anyag” lehet a hő is – innen ered az említett analógia.

9.4. A szivárgás végeselemes modellezése

Az előbbi fejezetben a nedvességtartamot jelentő víz diffúziója a koncentráció-különbségek miatt jött létre. Ha víz (és bármely más fluidum) a porózus közegen tömegében a nyomáskülönbség hatására áramlik, akkor szivárgásról és nem diffúzióról beszélünk.

A mérnöki gyakorlatban ilyen jelenség például a porózus anyagból készült szűrőbetétekben fordul elő, de az építőmérnökök a talajvíz mozgását is a szivárgás modellezésével tanulmányozzák.

A szivárgást leíró empirikus törvényszerűséget Darcyról nevezték el, az a szivárgási sebesség és a nyomás gradiense között feltételez lineáris függőséget. Egy dimenzióban

$$v = k \cdot \frac{\Delta p}{l}, \quad (9.49)$$

ahol l a szivárgási vonal hossza, Δp pedig annak kezdeti és végpontja közötti nyomáskülönbség. A k arányossági tényezőt permeabilitási vagy szivárgási tényezőnek nevezik és az adott porózus közegre és folyadékra jellemző.

A szivárgási sebesség nem azonos a fluidum áramlási sebességével, az az áramlási irányára merőleges egységnyi keresztmetszeten időegység alatt áthaladó fluidum q fajlagos térfogathozamával azonos. Mivel az illető keresztmetszetet a közeget alkotó szilárd anyag részben kitölti és a pórusok falán is egy vékony folyadékréteg megtapad, az áramlás annak csak bizonyos hányadán keresztül lehetséges és így a tényleges áramlási sebesség jóval nagyobb a szivárgásinál. Ha az áramló közeg által átjárható pórusok relatív térfogatát, az effektív porozitást n_e -vel jelöljük (amely tehát egy egység alatti szám), akkor az áramlási sebességet

$$w = \frac{v}{n_e} \quad (9.50)$$

gyanánt számíthatjuk.

Az áramlástanból, pontosabban a hidraulikából ismert az a tény, hogy az áramlási sebesség és nyomásvesztés közötti lineáris összefüggés csak lamináris a áramlások esetében igaz, amikor a Reynolds-szám nem haladja meg a 2320-as értéket. Darcy törvénye is tehát csak akkor igaz a fenti formájában, míg a pórusokon keresztül történő áramlást jellemző Reynolds-féle szám az említett határértéket nem haladja meg. A gyakorlatban a szivárgás igen kis sebességgel, tehát kis Reynolds-számmal történik, így az említett lineárisnak feltételezett összefüggés rendszerint kielégítő pontosságú eredményekhez vezet.

Megjegyzendő, hogy mivel a mérnöki gyakorlatban a szivárgást szabad felszínű áramlásnak tekintik, Darcy törvényét a p nyomás helyett gyakran az ekvivalens $H = z + p/\gamma$ szinttel

(hidraulikus terheléssel) írják fel. Ebben az átszámítási képletben z egy tetszőlegesen megválasztott viszonyítási szinttől mért magasság, γ pedig a folyadék fajsúlya.

Három dimenzióban Darcy törvényét Fourier-törvényének 9.8. vagy Fick 9.47. formájában írhatjuk fel:

$$\{\mathbf{q}\} = -[\mathbf{k}] \cdot \{\text{grad } p\}. \quad (9.51)$$

Végeselemes megoldásához a nyomásokra és a fajlagos térfogathozamokra (a szivárgási sebesség fluxusára) vonatkozó feltételeket kell felírunk. A keresett megoldás a skaláris hidrosztatikai nyomást adó $p(x, y, z)$ mező. Ez a nyomás a porózus anyag belsejében lép fel, tehát a szilárd szemcsék felületén hat és így azok feszültségi állapotát befolyásolja (a normálfeszültségek értékéhez adódik hozzá).

Nemstacionárius körülmények között szintén az eddigi esetekben felírt egyenletekkel teljesen analóg, például ortotrópia esetén az

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (9.52)$$

differenciálegyenletet kell megoldanunk, ahol V a közeg pórusaiban tárolt folyadék térfogata.

10. A HÁLÓZÁSRÓL

10.1. Strukturált és nem strukturált hálók

A vonalszerű elemekből álló szerkezet végelemekre bontása nem nehéz: az alkotó elemeket a középvonalukkal ábrázoljuk, a valódi szerkezeti elemeket pedig – még ha azok folytonosak is – a csatlakozási pontok végelemekre osztják fel.

A két vagy három dimenziós tartományok diszkretizálása azonban már nem ilyen egyszerű feladat. A 4. fejezetben a végelemeket geometriájukat tekintve szimplexekre és hiperkubusokra osztottuk fel. A szimplexekre való felbontás egyszerűbb, de a hiperkubusokkal pontosabb eredményeket lehet elérni. A hiperkubusokra osztás kevesebb elemet eredményez a szimplexek használatánál.

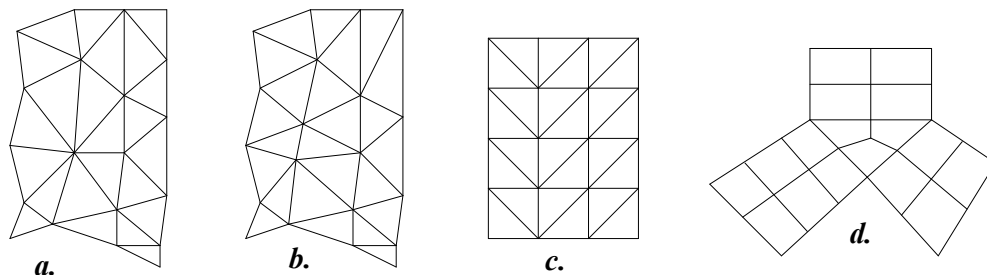
Az elemek konnektivitása, vagyis a végeleemes háló topológiája szerint megkülönböztethetünk strukturált és nem strukturált hálókat.

A strukturált háló valamely csomópontjának szomszédait egyszerű összefüggésekkel adhatjuk meg, a csomópontok sorszámja között irányonként állandó különbség van. A strukturáltság nem azonos a tökéletességgel vagy geometriai szabályossággal, első ránézésre egy ilyen háló teljesen szabálytalannak tűnhet. A szabályosság a csomópontok egymáshoz való viszonyában, tehát az elemek konnektivitásában lehet fel. A végelemek számozása követi a csomópontok számozásának irányát, így a valamely végelemhez tartozó csomópontok azonosítása is nagyon egyszerű. Ezen egyszerűség az algoritmusok programozásánál jelent lényeges segítséget. A nem strukturált hálót viszont nem lehet ilyen módon leírni, az csak a végelemekhez tartozó csomópontok felsorolásával oldható meg.

Ezek szerint a strukturált hálók alkalmazása nagymértékben egyszerűsíti a háló leírását, így például a parallel számításoknál szükséges szubstrukturákra bontásánál néhány művelettel azonosítani lehet az elválasztó felületen levő csomópontokat.

Ésszerűnek tünne tehát a strukturált hálók használata, viszont ennek vannak hátrányai is: a szabálytalan körvonalú tartományok hálózásakor a strukturált háló nagyon sűrű lehet (megnövekedik a memóriaigény és a számítási idő) és elemei igen torzak lehetnek (tehát a kiszámított eredmény pontatlan lehet). Gyakorlatilag a hálót csak ott kellene sűrűttenünk, ahol a tanulmányozott függvény erőteljesebb változást mutat, ezt a célt viszont a strukturált hálókkal nem könnyű megvalósítani.

A strukturált hálók használatának másik nagy akadálya előállításuk nehézségében rejlik. Ezen okok miatt a strukturált hálók használata a háttérbe szorult, a végelem-analízisben inkább a strukturálatlan hálókat használjuk.



10.1. ábra. Két dimenziós hálók

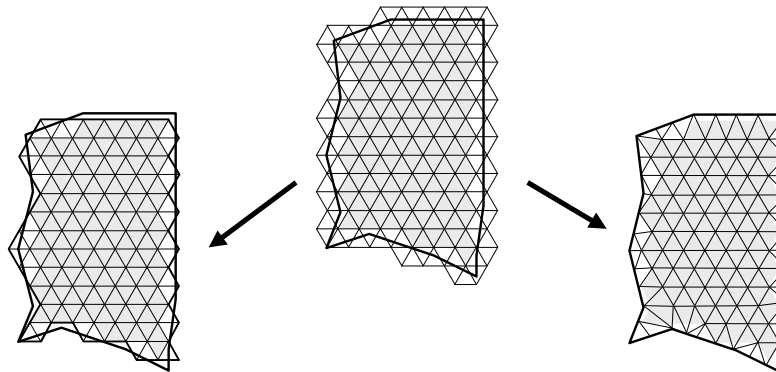
Léteznek olyan hálózási eljárások, amelyek során a diszkretizálandó tartományt egyszerű geometriájú részekre osztjuk (ha az lehetséges) és az egész tartomány hálózását a részek

hálózásával oldjuk meg, az ilyenfajta megoldással keletkező hálót nevezik néha a strukturáltság szempontjából „vegyes” vagy „hibrid” típusúnak nevezni. Ekkor a strukturáltság az egyszerű geometriájú részekre vonatkozik. Az ilyen fajta hálózás első lépése a részekre bontás: vannak olyan hálózók, amelyek ezt a felhasználóra bízják (ezek asszisztált, félautomata hálózók), a továbbfejlesztett szoftverek a felhasználó szerepét valamilyen mesterséges intelligenciára alapozó alakfelismerő algoritmussal helyettesítik.

A 10.1. ábra a felsorolt hálótípusokat példázza. Az a. és a b. ábrán ugyanannak az idomnak a felbontásából származó nem strukturált, illetve strukturált hálót láthatjuk. A strukturált háló bármely belső csomópontjának hat szomszédja van; a nem strukturált háló esetében ilyen szabályszerűséget nem találunk. A c. ábrán látható szabályos háló topológiailag teljesen azonos a b. ábra strukturált hálójával. A d. ábrán egy összetett idom hálózását láthatjuk, ahol a részek (a négyszögek, de ide vehetjük a háromszöget is) strukturáltak, de a háló egésze nem az.

10.2. Nem strukturált egyenletes háromszöghálók előállítása

A háromszögháló előállításának legegyszerűbb módszere egy szabályos hálónak a diszkretizálható tartományhoz való igazítása lenne. Mivel e tartomány pereme csak ritka kivételes esetben esik egybe a háromszögháló vonalaival, ott valamit tennünk kell: vagy a hálót igazítjuk a peremhez, vagy a peremet a háléhoz. A következő ábrán a 10.1. ábra bal oldalán látható idom ilyen módon elvégzett hálózása látható.



10.2. ábra. Háromszöghálók

Mindkét említett esetben bizonyos hátrányokkal kell számolnunk, így a háló egyenletes lesz, lokális sűrítést csak egy további fázisban lehet megoldani.

Ha a tartomány peremét igazítjuk a háléhoz, akkor az csupa tökéletes geometriájú végelemből fog állni, de az eredeti perem helyett egy fűrészfogas-lépcsős tört vonalhoz jutunk. Azt, hogy az eredeti körvonal által metszett háromszög a háléhoz tartozik-e vagy sem, a lemetszett terület relatív nagyságával állapíthatjuk meg: ha a háromszögnek az eredeti körvonalon kívüli része kisebb, mint a háromszög területének a fele, akkor az a végelemből fog tartozni. Ez a hálózási módszer tehát a lehető legegyszerűbb, azonban a perem elfogadhatóan pontos megközelítése csak nagyon finom hálóval lehetséges. E módszer hasonlít a véges differenciák módszerénél használt diszkretizálásra (ott egyforma téglalapokból vagy négyzetekből álló rácsot kell megrajzolni).

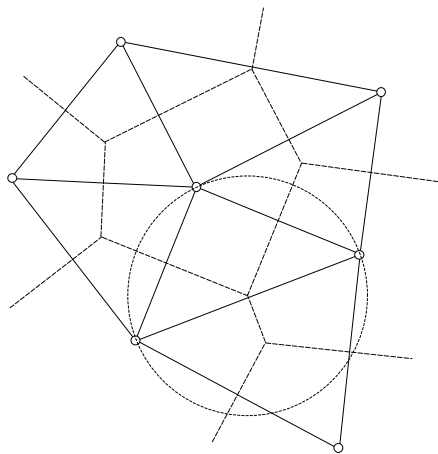
A másik lehetőség a hálónak a peremhez való igazítása. Az első lépésben a perem által metszett háromszögek csomópontjait kell úgy mozgatni, hogy azok a peremhez simuljanak. A túl kis háromszögeket töröljük. A tartomány belsejében most is tökéletes geometriájú végelemből állunk, de a peremhez közeli réteg torz elemeket tartalmazhat. Ez a számítások pontosságának

szempontjából kerülendő, hiszen a tanulmányozott függvény legerősebb változása pontosan itt várható (mert itt írjuk elő a peremfeltételeket) és nem a tartomány belsejében. A háló minőségének javításával a második lépésben a csomópontok mozgatásával (beleértve a belső csomópontokat is) lehet próbálkozni.

A hatékonyabb hálózási eljárások a Delaunay-háromszögelésen alapulnak. E háromszögelés egy ponthalmazból (vertexek halmazából) indul ki, amelyet a diszkretizálandó tartomány peremének sarokpontjai (a görbe peremrészeket tört vonalakkal közelítjük) és egyéb kiemelt pontjai alkotnak (például ahol valamilyen peremfeltételt írunk elő). Minden ilyen pont, vertex köré szerkeszthető egy olyan sokszög, amelynek minden belső pontja közelebb van a tekintett vertexhez mint a többihez. Az ilyen tulajdonsággal rendelkező sokszögek konvexek és folytonosan töltik ki a síkot, nemcsak a tekintett tartományt. A széleken levő sokszögek a végtelenbe nyúlnak, tehát azok nyitott tört vonalak lesznek. A meghatározásból következik, hogy egy ilyen sokszög oldalai merőlegese a belsejében levő vertexet a szomszédos vertexekkel összekötő egyenesekre és felezik azokat. Egy vertex minden más vertexszel összeköthető és minden összekötő vonalra egy azt megfelelő merőlegest emelhetünk. E merőlegesek egy része kívül esik a tekintett konvex sokszögen, mutatván hogy az azoknak megfelelő vertexek távolabb esnek az adott sokszög belsejében levő vertextől mint az illető sokszöget meghatározók. Ha minden vertexet összekötünk a köréje húzott sokszöget meghatározó összes „szomszédos” vertexszel, akkor egy gyakran egyértelműnek tartott háromszögfelbontást kapunk. E felbontás egyébként nem minden esetben egyértelmű, például egy négyzet sarokpontjai által alkotott halmaz két különböző módon is háromszögelhető a négyzet két átlójának megfelelően. Ezt a felbontást nevezik Delaunay-háromszögelésnek. A sokszögeket Voronoi- (Voronoj-) sokszögeknek vagy Voronoi-diagramnak nevezik.

A Voronoi sokszögek sarokpontjai egy-egy Delaunay háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontjai, tehát e sarokpontok a Delaunay háromszögek köré írható körök középpontjai. Egy ilyen körülírt kör belseje nem tartalmazhat egyetlen vertexet sem, egyrészt azért, mert az illető háromszög csúcspontjai a körön vannak, másrészt azért, mert a benne levő vertex közelebb lenne a háromszöget alkotó vertexek valamelyikéhez mint annak legalább egy másik vertexe.

A körön lehetnek további vertexek is. Például egy negyedik vertexet kapunk az említett négyzet háromszögelésénél.

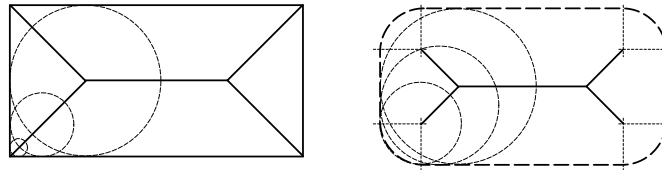


10.3. ábra. Delaunay-háromszögek és a Voronoi-diagram

A Voronoi-diagramot alkotó vonalakat, megszerkesztésük (definíciójuk) következtében a vertexektől legtávolabb eső pontok alkotják. Ezt a tulajdonságot bizonyos alakfelismerésen alapuló hálózó algoritmusok szokták kihasználni, ugyanis a peremen felvett vertexekre épített Voronoi-diagramból egy váznak („skeleton”) nevezett elágazó vonalat lehet felépíteni, amelyből az idom

geometriájára lehet következtetni. A síkidom váza tulajdonképpen azon pontok halmaza, amelyekből húzott körök legalább két pontban érintik a peremet. A topológiailag azonos geometriájú idomok topológiailag azonos vázzal rendelkeznek. A váz segítségével az összetett idomot egyszerű geometriájú alkotó részekre lehet bontani, a részek hálózásával (amely egyszerű geometriájuk miatt akár struktúrált is lehet) pedig az összetett idom hálózása is megoldható.

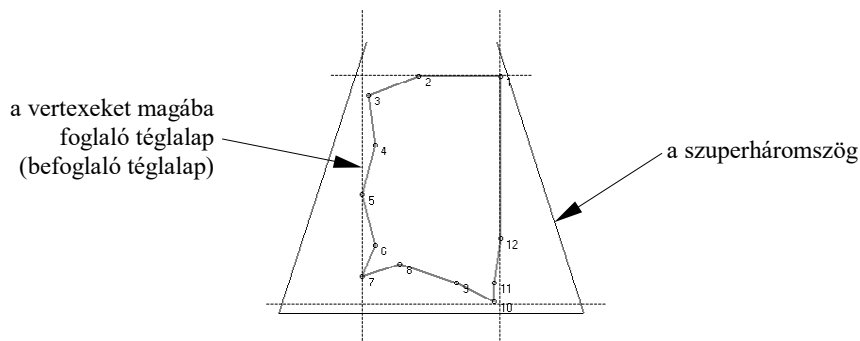
Ha a Voronoi-diagram felépítésekor a peremen végtelen sok vertexet veszünk fel, akkor a váz a Voronoi-diagrammal lesz azonos.



10.4. ábra. Két egyszerű idom váza

A Delaunay-háromszögelés elvégzésére megalkotott algoritmusok a Delaunay-háromszögek és a Voronoi-diagramok felsorolt tulajdonságaira alapoznak. Többféle eljárás is létezik, példaként lássuk a következőt, amelyet a 10.1. ábra bal oldalán látható idomra alkalmazunk. E körvonalat tizenkét vertex (a sarokpontok) segítségével adhatjuk meg, tehát háromszögelésünk e 12 pontra fog támaszkodni.

Első lépésként definiálunk egy olyan *szuperháromszöget*, amely minden vertexet magába foglal. Ez a lépés a vertexek legnagyobb és legkisebb koordinátáinak keresésével indul. E koordinátákkal egy befoglaló téglalapot lehet megrajzolni, a szuperháromszög pedig e téglalapot magába foglaló egyenlő szárú háromszög lesz. A 10.5. ábrán e szuperháromszög alsó része látható. A valóságban a szögek pontosabb kiszámításának érdekében a szuperháromszöget jóval nagyobbak kellene felvenni, azonban az ábrázolás átláthatóságáért most megelégszünk egy kisebbel.

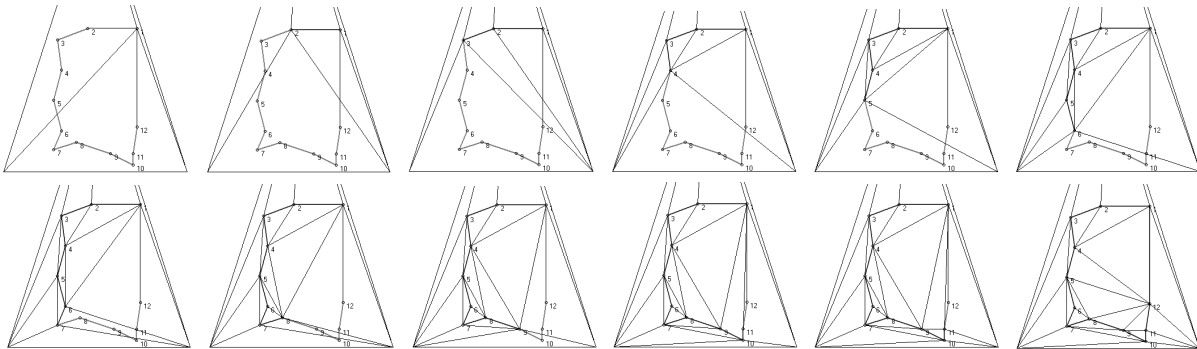


10.5. ábra. A befoglaló téglalap és a szuperháromszög

A szuperháromszög csúcsait új vertexekként kezeljük. Az algoritmus következő fázisában kiindulási állapotnak a szuperháromszöget, mint egyetlen Delaunay-háromszögből álló hálónak tekintjük, a háromszögelendő ponthalmaz vertexeit pedig egyenként adogatjuk hozzá az addig létrehozott háléhoz.

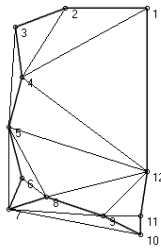
Valamely lépésben, amikor az éppen a sorra következő vertexet vesszük, minden addig létrehozott Delaunay-háromszög köré megszerkesztjük a befoglaló kört és megvizsgáljuk, hogy ez a vertex e kör belsejébe esik-e vagy sem. A számítógépes algoritmus persze nem rajzol köröket, csak

a vertexek és a háromszögek viszonyát vizsgálja: a háromszög csúcsainak koordinátájával kiszámítja a kör középpontjának helyzetét és annak sugarát, majd a vertexnek a középponttól mért távolságát összehasonlítja a sugárral. Ha e távolság kisebb a sugár hosszánál, akkor a vertex a körön belül van és az illető háromszög nem lehet Delaunay-háromszög, tehát újra fel kell osztani. Ez több szomszédos háromszöggel is megtörténhet, ekkor azok közös éleit törölni kell, majd a nem-Delaunay háromszögek csúcsait rendre összekötvén az újonnan beépített vertexszel megkapjuk a háromszögháló új formáját. Ezeket a lépéseket addig ismételtetjük, míg minden vertex beépítésre nem kerül. Ekkor példánkban a 10.6. ábrán látható helyzet alakul ki.



10.6. ábra. A vertexek beépítése

Az így kapott háló a szuperháromszög vertexeihez tartozó háromszögeket is tartalmazza. Ezek a vertexek csak a hálózáshoz kellettek, éppen ezért azokat a hozzájuk csatlakozó oldalakkal együtt töröljük, így a 10.7. ábrán látható Delaunay-háromszögeléshez jutunk.



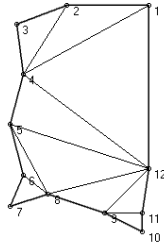
10.7. ábra. A háromszögháló a szuperháromszög törlése után

A szuperháromszöges módszer alternatívája lenne az, amikor az első három vertex által meghatározott háromszögből indulunk ki (amely Delaunay-háromszög, hiszen csak három vertexünk van) és ahhoz egyenként adogatjuk hozzá a további vertexeket – ebben az esetben meg kell győződjünk arról, hogy az első három vertex ténylegesen egy háromszöget alkot (tehát nem kolineárisak).

Amennyiben végelelemes hálót akarunk készíteni, akkor a dolgunkat e fázisban még nem végeztük el, hiszen a konkáv oldalakhoz tartozó háromszögek a behálózandó idomon kívül esnek, azonkívül a példánkban nem szereplő belső üregeket fedő háromszögeket is törölnünk kell. Az így keletkező hálót kötöttnek vagy kényszerítettnek (constrained) nevezik, hiszen az már nem a ponthalmaz Delaunay-háromszögelése.

Annak az eldöntése, hogy egy él a tartományhoz tartozik-e vagy sem, a középpontjának megfelelő körbejárási szög értékével dönthető el. Minden egyes peremhez tartozó szakasz esetében kiszámítjuk, hogy az milyen szög alatt látszik a tekintett él középpontjából: ez a középponttal és a

szakasszal megalkotott háromszögnek a csúcsszöge, amelyet előjelesen veszünk a tetszőlegesen megállapított körbejárási iránynak megfelelően. A körbejárási szög e csúcsszögek algebrai összege lesz.

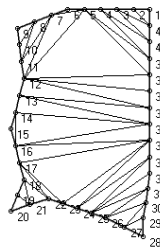


10.8. ábra. Az idom Delaunay-háromszög hálója

Ha a külső peremet jártuk körbe és e szög a teljes körnek felel meg, akkor az illető pont és vele együtt az él is a perem belsejében volt. Ha a pont a külső peremen kívül volt, akkor e szög mértéke zérus. Ha a pont (és vele együtt az él) a peremhez tartozik, akkor a körbejárási szög szintén zérus lesz, így a nulla szögek esetében törlés előtt meg kell vizsgálni azt, hogy az él nem-e tartozik a peremhez.

A külső élek törlésével kapott háromszögháló bizonyos szempontokból optimálisnak mondható (a lehető legkevesebb háromszöget tartalmazza), azonban a végeelem-analízis szempontjából bizonyosan nem az: az ideális egyenlő oldalú háromszög-formától messze álló háromszögeket kapunk, ráadásul egyes háromszögek túl nagyok ahhoz, hogy végeelemként használhassuk azokat. Ezen úgy lehet segíteni, hogy a tartomány egyenes oldalait valamilyen elgondolás szerint új vertexek beiktatásával rövidebb szakaszokra osztjuk. A felosztás bizonyos célok elérését tűzheti ki maga elé, például az elemek várható átlagos élhosszát (ez kb. azonos a peremet alkotó szakaszok átlagos hosszával), a görbe peremek kellő pontosságú megközelítését, vagy a háló lokális sűrítését (ott a peremen sűrűbben kell sorakozzanak a pontok) tekintve.

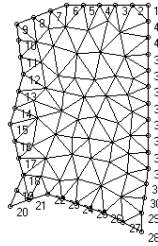
Ha a végeelemek átlagos élhosszának megválasztásában nincs semmilyen különösebb elképzelésünk és megelégszünk egy nagyjából egyenletes háromszöghálóval, akkor elegendő megkeresni a két egymáshoz legközelebb eső vertex távolságát. A biztonság kedvéért válasszuk a végeelemek várható t élhosszának e távolság felét. Ekkor minden peremhez tartozó egyenes és görbe szakaszt annyi egyenlő hosszúságú darabra osztunk fel, hogy egy így nyert darabka hossza ne haladja meg lényegesen a t mértéket. A 10.9. ábrán egy így elkészült kényszerített Delaunay-háromszögelés látható.



10.9. ábra. Az élek feldarabolásával nyert háromszögelés

Az így kapott háló többnyire igen hegyes, túszerű háromszögekből áll, így azokat tovább kell darabolni. Az algoritmus a következő: sorra minden háromszöget megvizsgálunk. Kiszámítjuk e

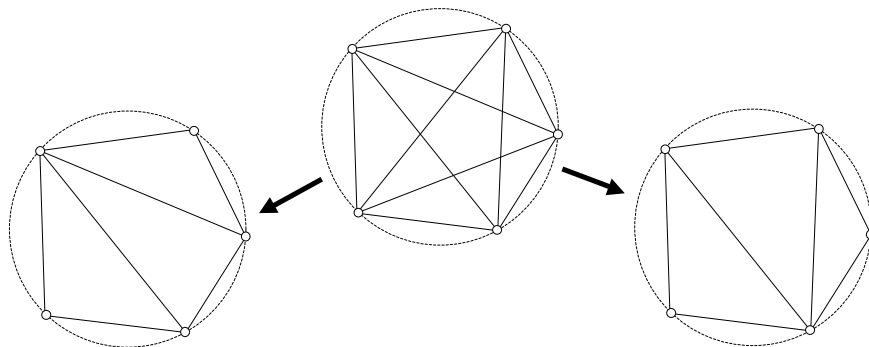
háromszög köré írható kör sugarát. Ha ez a sugár meghaladja a felosztás finomságának mértékét megadó t mennyiséggel megadott toleranciát (ha a körülírt egyenlő oldalú háromszög éle t , akkor a kör sugara $t \cdot \sqrt{3}$), akkor a kör középpontjába egy új vertexet szúrunk be és azt beillesztjük az addigi Delaunay-háromszögelésbe.



10.10. ábra. Delaunay-háromszögeléssel kapott háló

Mivel ekkor a háromszögek száma és alakja megváltozik, a keresgélést előlről kezdjük és ezt a folyamatot addig folytatjuk, amíg a torz háromszögek el nem tűnnek. E folyamat során a konkáv oldalak mentén és a belső üregekben megint olyan háromszögek jelenhetnek meg, amelyek kívül esnek a diszkretizálendő tartományon, tehát azokat törölnünk kell. A hálózás eredményét a 10.10. ábra mutatja.

A bemutatott eljárás kiszűri a háromszögelés egyértelműségénél megemlített problémát: ha a vertexek egy körön helyezkednek el (tehát kocirkulárisak), akkor a Delaunay-háromszögelés definíciójának szigorú értelmezésével egymást metsző éleket, csillagsokszögeket kapnánk (tehát tulajdonképpen nem lehetne a Delaunay-háromszögelést elvégezni). Ilyenkor a szóban forgó élekből annyit kellene eltávolítani, hogy azok ne messék egymást. Mivel ezeket az éleket tetszőlegesen választhatjuk meg, a háromszögháló is némileg tetszőleges lehet. A bemutatott eljárásban az egymást metsző élek keresése azért marad ki, mert a hálót vertexenként építjük fel és az új vertex beillesztését követően nem térünk vissza a korábban beillesztettekhez.



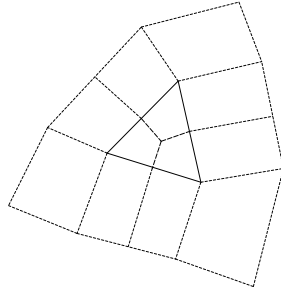
10.11. ábra. Egy körön levő vertexek Delaunay-háromszögelése

10.2. Nem strukturált egyenletes négyszöghálók előállítása

A négyszöghálók előállítása a háromszögelésnél valamivel nehezebb feladat, ugyanis a Delaunay-algoritmushoz hasonló négyszögelési eljárás nem létezik.

A legegyszerűbb eljárás egy szabályos négyszög- vagy négyzetháló peremhez (vagy a perem hálózhoz) igazítása lenne, ami a hasonló módon előállított háromszöghálók hátrányait hozná magával.

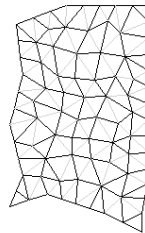
Létezik egy olyan eljárás, amely egy előzetesen előállított háromszöghálóra alapoz. Ez azon alapszik, hogy két háromszög egyesítésével egy négyszöget kapunk. Ugyanakkor, ha esetleg nem engedjük meg a háromszögelemek – mint degenerált négyszögelemek – jelenlétét, akkor a pár nélkül maradt háromszögeket négyszögekre oszthatjuk (10.12. ábra). Ez a felosztás viszont oldalközépen megjelenő csomópontokat eredményezne, tehát a felosztás a szomszédos négyszögeken keresztül propagálódik a perem fele.



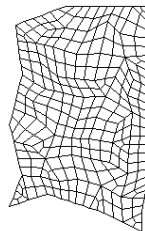
10.12. ábra. Egy háromszög négyszögekre osztása

A háromszögek egyesítése a peremek felől rétegenként halad befele. Egy adott rétegben nem minden egymással szomszédos háromszög egyesíthető. A bal alsó csücsökben levő két háromszög egyesítéséből például egy újabb háromszöget kapnánk. Más esetben megtörténhet az, hogy az egyesítésből nyert négyszög konkáv lenne. Éppen ezért a párok kiválasztásakor ellenőriznünk kell a létrejövő négyszög minőségét és hogy ha az elfogadhatatlan, akkor az illető háromszöget a következő réteghez tartozónak tekintjük és átugorjuk.

Ezt az eljárást rétegről rétegre addig ismételjük, míg minden háromszög beilleszthetőségét meg nem vizsgáltuk. Ezután az egyesíthető háromszögek közös éleit töröljük, a 10.13. ábrán a világosabb vonalak jelentik ezeket.



10.13. ábra. A törölhető élek megjelölése



10.14. ábra. Az négyszögek és a háromszögek feldarabolásával kapott háló

A megjelölt élek törlése után bizonyos számú háromszög is maradhat a hálóban. Ezeket a 10.12. ábra szerint négyszögekre osztjuk, majd a szomszédos érintett négyszögeket is felezzük és

így tovább. Ez azonban eléggé műveletigényes munka lenne, éppen ezért egyszerűbb minden háromszöget három és minden négyszöget négy négyszögre felbontani az élek megfelelésével és a háromszög középpontjában felvett új vertexeket összekötve (a háromszögek esetén a középpont alatt az oldalfelező merőlegesek metszéspontját kell érteni, amely a körülírt kör középpontja). Nem kell megfélekedni arról sem, hogy egy négyszög négybe vágásakor annak középpontjában is megjelenik egy új vertex.

10.3. A háló simítása

A 10.14. ábrán a háromszögekből előállított négyszögháló látható. Észrevehetjük, hogy egyesek szemlátomást közel állnak az ideális négyzet-alakhoz, mások nem. Vannak olyan elemek, amelyek a perem geometriája miatt sohasem vehetik fel az ideális alakot, mások minőségén viszont a vertexek áthelyezése esetleg segíthet, következhet tehát a háló simítása, javítása.

A háló minőségét az elemek minőségével lehet meghatározni, az elemek minőségét pedig az ideálisnak tartott geometriával való összehasonlítással.

Az ideális forma a négyzet, tehát a négyszög szögei minél közelebb kell álljanak a derékszöghöz és az oldalak hossza között minél kisebb kell legyen a különbség. Ezeket az eltéréseket számszerűsíthetjük: például definiálhatunk egy minőségi mutatót a szögekre vonatkozóan:

$$q_1 = 1 - \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1,4} \frac{|\alpha_i - \pi/2|}{\pi/2}, \quad (10.1)$$

egy másikat pedig az élekre vonatkozóan:

$$q_2 = 1 - \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1,4} \frac{|a_i - k|}{k}, \quad k = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1,4} a_i, \quad (10.2)$$

ahol α_i a négyszög szögeit, a_i pedig az oldalainak hosszát jelöli.

A negyedik fejezet végén szó esett a hálóra vonatkozó minőségi előírásokról, ahol a szögek és oldalhosszak elfogadható változási tartományát is ábrázoltuk. Ha ilyen kitételeket is teszünk (tehát ha a szögek és az oldalak arányát megadott intervallumokra szűkítjük le), akkor a fenti képleteket is módosítani kell:

$$\text{ha } \forall \alpha_i \notin [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}] \Rightarrow q_1 = 0, \quad (10.3)$$

illetve

$$\text{ha } \frac{a_{\max} - a_{\min}}{4 \cdot k} > r_{\lim} \Rightarrow q_2 = 0. \quad (10.4)$$

E szögekre és oldalakra vonatkozó minőségi mutatókkal a végelem minőségi mutatóját a következő súlyozott átlagként határozhatjuk meg:

$$\bar{q}_e = w_1 \cdot q_1 + w_2 \cdot q_2, \quad (10.5)$$

ahol ha a szögeknek és az oldalaknak egyenlő fontosságot tulajdonítunk, akkor $w_1 = w_2 = 0.5$, ellenben a fontosabbnak tartott mennyiséghez tartozó súlyzó tényezőt a másikénak rovására növeljük (de $w_1 + w_2 = 1$). A végelem minőségi mutatója így egy 0 és 1 közötti szám lesz.

A hálót alkotó elemek minőségi tényezőjéből egy globális, az egész hálót jellemző tényezőt határozhatunk meg. Ebben az esetben is többféleképpen járhatunk el, a háló minőségi tényezője lehet az elemek minőségi tényezőjének egyszerű átlaga:

$$Q = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1, n} \bar{q}_{e,i}, \quad (10.6)$$

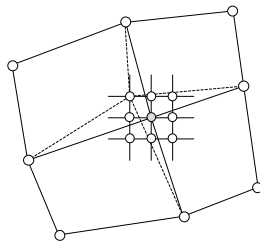
vagy, ha szigorúbb feltételeket akarunk szabni, akkor

$$Q = \prod_{i=1, n} \bar{q}_{e,i} \quad (10.7)$$

(ez utóbbi esetben egyetlen elfogadhatatlan minőségű elem miatt a globális minőségi mutató nulla lesz).

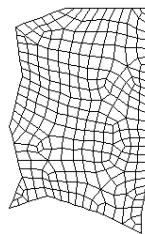
A háló simítása a vertexek mozgatásából és a minőségi mutató változásának figyeléséből áll. Vannak olyan vertexek, amelyeket mozdtítani nem lehet (mert például a körvonal sarokpontjaihoz tartoznak), másokat csak bizonyos irányokban lehetne mozgtatni (mert például egy élhez tartoznak), másokat viszont szabadon elmozdíthatunk. Az elmozdítás mértéke hálózásnál használt t mennyiség (a várható élhossz) valamely hányada lehet. Ekkor a vertexet – ha azt megtehetjük – az eredeti helyzetéhez képest a koordináták irányában $\pm c \cdot t$ távolságon elmozdítva (ahol például $c = 0.1$) annak nyolc új pozícióját kapjuk (10.15. ábra). Minden egyes pozíciójában megvizsgáljuk a háló minőségi mutatójának változását (elegendő csak az érintett végelemeket vizsgálni): ha valamely pozícióban e mutató javulást mutat, akkor az lesz az illető vertex új helyzete.

A háló javítását akkor tekintjük befejezettnek, ha minden vertexét sorra véve már nem érünk el további javulást. A javítást esetleg megpróbálhatjuk egy nagyobb lépéssel is, ekkor a pontokat nagyobb távolságon kell elmozdítani (például a $c = 0.2$ szorzóval dolgozunk).



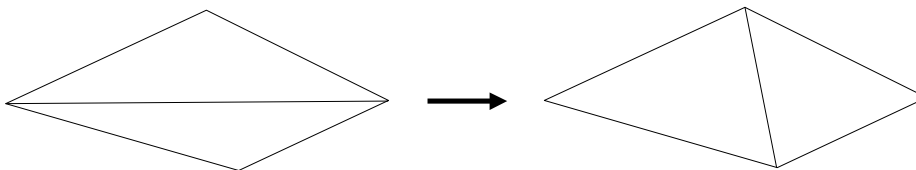
10.15. ábra. Egy vertex mozgatásának lehetőségei

A bemutatott eljárást Laplace-féle simításnak nevezik és az nem változtatja meg a háló topológiáját (a csomópontok összekapcsolódási viszonya változatlan marad). Ezt a háromszöghálók simítására is használhatjuk, ekkor a végelemek minőségére vonatkozó képleteket megfelelőképpen kell módosítsuk: a végelemeknek csak három oldalunk van és az ideális idom szögei $\pi/3$ nagyságúak. Megjegyzendő, hogy egy Delaunay-háromszögelést simítani nem kell, mivel az már eleve a lehető legjobb felbontást jelenti (maximálja a legkisebb szöget).



10.16. ábra. A simított háló

Egyszerű, de nem Laplace-féle simítási módszer a háromszöghálónál alkalmazott átlófelcserélő-eljárás, amelyet a 10.17. ábra illusztrál.



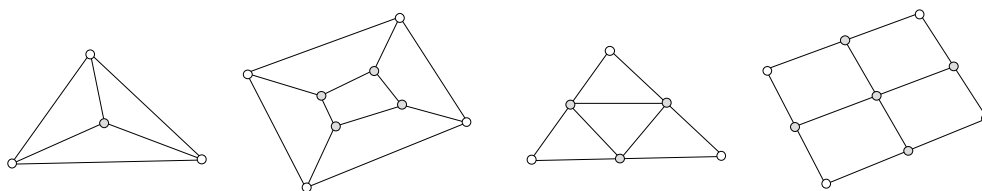
10.17. ábra. Simítás átlófelcseréléssel

10.4. A háló sűrítése

A 10.10. és a 10.16. ábrán bemutatott hálók egyenletes beosztásúak, tehát a végelemek méretei az átlagtól nem térnek el jelentős mértékben. Ez annak tulajdonítható, hogy a perem feldarabolása során a szomszédos vertexeket nagy vonalakban egyenlő távolságra vettük fel. Bizonyos esetekben a diszkretizált tartomány egyes részein szükségünk lehet a háló sűrűségének megváltoztatására. Elméletileg a háló sűrűsége a tanulmányozott függvény térbeli változásának mértékével kellene összhangban álljon, tehát egyes részeken az átlagosnál sűrűbb, más részeken az átlagosnál ritkább háló lenne az ideális. A háló sűrűségének megváltoztatása ezek szerint két irányban hatna, annak ritkítását és sűrítését egyaránt meg kellene oldanunk, e két művelet pedig egymás fordítottja lenne.

Egy háromszög feldarabolása nem nehéz feladat, ugyanis ha egy háromszög belsejében egy új vertex három kisebb háromszögre osztja fel az eredetit. Ez a feldarabolás a szomszédos háromszögekre nincs kihatással, azonban a felosztás nem a legoptimálisabb, mivel az újonnan keletkező háromszögek torzak lesznek. Ennek következtében a háló simítását is el kell végezzük.

Egy négyszög négyszögekre való felbontása már valamivel komplikáltabb dolog, mivel egyetlen vertex beillesztésével a szomszédos elemek módosítása nélkül e feladatot nem lehet elvégezni, a négyszöget öt darab konvex négyszögre bonthatjuk fel a szomszéd elemek módosítása nélkül (10.18. ábra). Ez esetben is torz elemeket kapunk, tehát a hálót simítani kell.



10.18. ábra. Egy háromszög és egy négyszög feldarabolásának lehetőségei

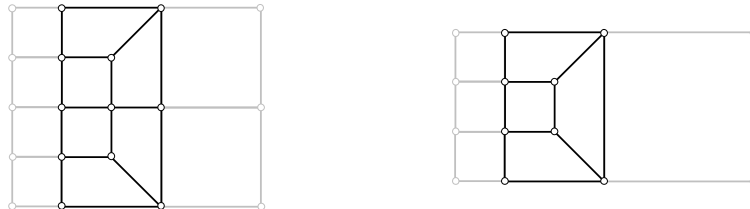
Ezeket a műveleteket fordítva is el lehetne végezni, azonban négyszöghálóknál csak hosszas keresgéléssel lehetne megtalálni az egybeolvasztható elemeket. Háromszögelemeknél ez egyszerűbb: ha egy vertex három (és csak három) háromszög közös csúcspontja és az nincs a peremen, akkor e vertex és a hozzá tartozó három él törlésével a három háromszög egyesíthető.

Mivel megvalósítását tekintve a háló sűrítése általában könnyebb, mint a ritkítása, inkább egy ritka (vagy durva) hálóból indulnak ki és azt sűrítik a kívánt helyeken és a kívánt mértékben.

A háromszögek és a négyszögek bemutatott felosztása nem optimális, hiszen torz elemeket kapunk, ráadásul a négyszögek esetében igen sokat. Ezért a sűrítés másként történik. Háromszöghálóknál kijelölt tartományban levő háromszögek köré írt körök középpontjába

illesztünk új vertexeket (ha a sugár meghalad egy megadott mértéket) és megismételjük a Delaunay-háromszögelést, vagy egyszerűen az élek megfelezésével a háromszöget négy darabra vágjuk.

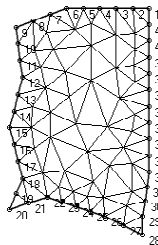
Négyszöghálók esetében a kijelölt tartományba eső négyszögek középpontjában és éleik közepén veszünk fel egy-egy vertexet és így egy négyszöget tulajdonképpen négy részre vágunk; az átlagos élhossz e tartományban a felére csökken. A tartománynak a sűrítetlen hálóval közös peremén ez a feldarabolás nem lehetséges, ott a 10.19. ábrán látható módon kell eljárunk.



10.19. ábra. A sűrített és a sűrítetlen tartomány csatlakoztatása

Ezeknek az eljárásoknak az egyszeri alkalmazásával a sűrített háló elemeinek átlagos élhossza a besűrített tartományban, minden különösebb átmenet nélkül, mintegy felére esik vissza. Léteznek olyan eljárások is, amelyeknél az átmenet fokozatos: a perem környékén a háló sűrű, majd a diskretizált tartomány belseje fele haladva az fokozatosan ritkul.

A Delaunay-háromszögelés bemutatott algoritmusát is át lehet alakítani úgy, hogy egy ilyen fokozatos (graduális) sűrítést mutató háromszöghálót kapjunk. Ez az eljárás az élek feldarabolásával nyert Delaunay-hálóból indul ki (10.9. ábra). Az algoritmus következő lépésében a torz háromszögeket bontjuk fel a már ismertetett módon, a körülírt kör középpontjába helyezett vertex segítségével. Az egyenletes beosztást eredményező eljárásnál a háromszög minőségére vonatkozó kitétel a körülírt kör sugara volt. Ha ezt a kritériumot most is elfogadnánk, akkor megint egyenletes háléhoz jutnánk, éppen ezért a háromszög minőségét a legkisebb szögének mértékével adjuk meg. A szinusz-tétel szerint $\sin \alpha / a = 1 / d$, ahol α az a éllel szemben levő csúcs szöge és d a körülírt kör átmérője. Ezek szerint, mivel a kör átmérője ismert és az oldalak hossza egyszerűen kiszámítható, a legrövidebb oldallal meghatározott a/d hányados lehet a háromszög minőségi mutatója: ha előírjuk, hogy e mennyiség nem lehet kisebb egy bizonyos ε határértéknél, akkor azzal a minimális szög nagysága $\arcsin \varepsilon$ lesz. A vertex beillesztését azonban egy feltételhez kötjük: ha e vertexet a beillesztése után valamely él „befogná”, akkor azt nem illesztjük be, hanem a befogott él (vagy élek) felezőpontjában helyezünk el egy új vertexet.

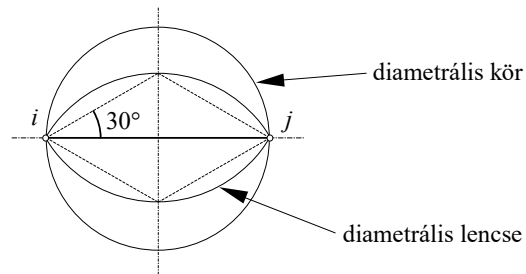


10.20. ábra. Fokozatosan változó elem-mérettel rendelkező háló

A vertexnek egy él általi befogását a következő módon értelmezzük: a vertexet az adott él befogja ha az a végpontjain át húzott legkisebb átmérőjű „diametrális” kör (annak átmérője éppen a tekintett él hossza) belsejében található.

Az ezzel a módszerrel elkészített háromszögháló a 10.20. ábrán látható.

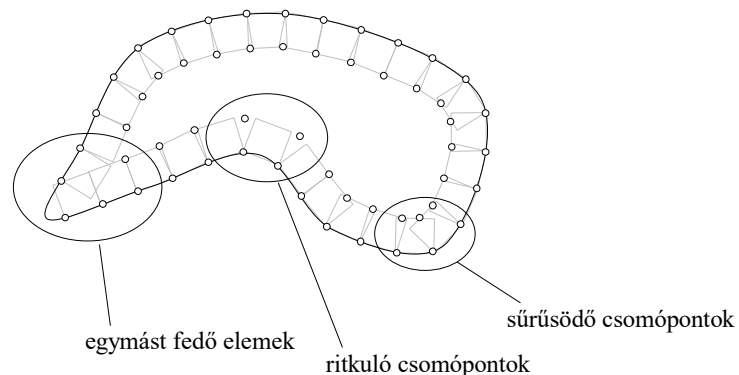
Szakirodalmi adatok szerint ez az algoritmus, amennyiben a minimális szög legkisebb értékét 20.7° -nál nagyobbak vesszük, végtelen ciklushoz vezethet. Egy továbbfejlesztett verziója a vertex befogásának vizsgálatában a diametrális kör helyett egy diametrális lencsét alkalmaz (10.21. ábra), és ez esetben a minimális szög értékét mintegy 30° -ra lehet emelni.



10.21. ábra. A diametrális kör és a diametrális lencse

10.5. Egyéb algoritmusok

Hálózasi eljárás igen sokfajta létezik, a teljesség igénye nélkül a fontosabbak közül még meg kell említeni a „progresszív frontvonal” (advancing front) összefoglaló névvel illetett módszereket. Ez az eljárás az első lépésben valamilyen megoldással a perem mentén egy, egyetlen elem mélységű réteget hoz létre. E réteg létrehozása nem jár nehézséggel, például a peremmel párhuzamosan a diszkretizálandó tartomány belsejében húzunk egy második körvonalat, s ezt a sávot elemekre osztjuk. Ha nincsenek éles sarkok és erősen görbült részek, akkor ez az első lépés nem jelent semmi különösebb problémát. Ellenben az említett helyeken valamilyen megoldást kell keressünk a túlságosan széthúzott vagy összenyomott tartományok diszkretizálására.



10.22. ábra. A progresszív hálógenerálásnál felmerülő problémák

Attól függően, hogy egy peremrész homorú vagy domború, úgy a vele párhuzamos rész hosszabb vagy rövidebb lesz és még enyhe ívek esetében is néhány körvonal felrajzolása után már igen széthúzott vagy összenyomott elemeket kaphatunk.

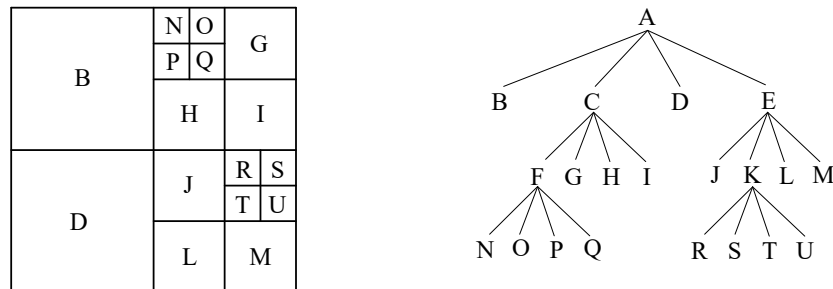
A párhuzamos körvonalak rajzolását nem folytathatjuk bármeddig, hiszen előbb-utóbb az önmagát érintené vagy metszené. Mielőtt az bekövetkezne, a frontvonal előrehaladásával meg kell állnunk és a megmaradt behálózatlan szigeteket csak valamilyen egyéb módszerrel oszthatjuk végelemekre. E szigetek eléggé nagyok kell legyenek ahhoz, hogy a frontvonal egymással szemben fekvő oldalain levő, eltérő méretű elemek között maradó részt használható geometriájú végelemekre oszthassuk.

A progresszív frontvonal módszere komplikáltabb algoritmusokat igényelhet mint a Delaunay-hálózás, azonban a perem közelében jobb minőségű hálót remélhetünk.

Egy másik említendő hálózási módszer a „quadtree” (négyágú fa) eljárás. Maga a négyágú fa a gráfelméletben szerepel és a számítógépes eljárások sokaságában használatos fogalom. Illusztrálása egy négyzetekre darabolt négyzettel és a hozzá tartozó fával történik. A gráf felépítésében egy-egy csomópontot egy adott méretű négyzet jelent. A csomópontoknál a gráf négyféle ágazhat el az általa képviselt négyzet feldarabolásának megfelelően. A fa levelei az ábrát alkotó négyzetek (10.23. ábra).

A négyágú fa gráfjának megfeleltetett négyzetekre bontás a hálózás segédeszköze, amelynek alkalmazása során az illusztrációként bemutatott feldarabolt négyzethez hasonló alakzathoz jutunk, s a hálózási módszer e négyzetekre támaszkodva hoz létre egy háromszöghálót.

E módszer első lépésében a vertexekkel megadott körvonalat befogadó négyzetet rajzoljuk meg, ez lenne a példaként felrajzolt gráf „A” csomópontja. Ezután a befogadó négyzetet négy kisebb négyzetre osztjuk fel, amelyek a gráf „B”, „C”, „D” és „E” csomópontjainak felelnek meg.



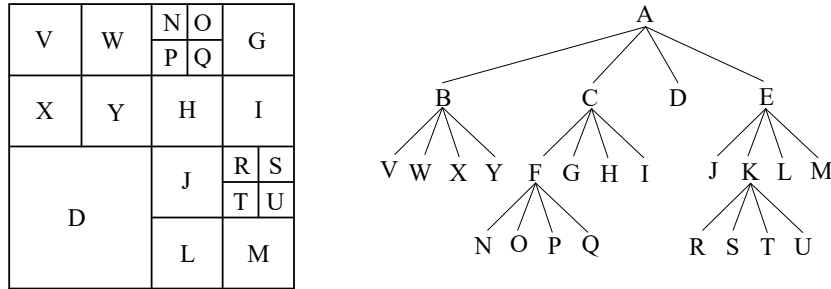
10.23. ábra. Négyágú fa

A feldarabolást (a négyzetek négyzetekre osztását) addig folytatjuk, míg minden egyes vertex külön cellába nem kerül (tehát bármely négyzet legfeljebb csak egy vertexet tartalmaz). A gyakorlatban előfordulhat az, hogy egy vertex két szomszédos cellát elválasztó vonalra vagy e vonalak kereszteződésébe kerül. A négyzetek további felosztásával e vertexeket nem lehet a cellák valamelyikébe behozni, ezt a koordináták kismértékű megváltoztatásával érik el (a vertexet egy kicsit odébb tolják); a háló létrehozása után az eredeti koordinátákat visszaállítják.

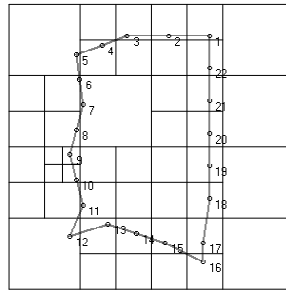
Az így megalkotott hálózat gráfja négyágú fa lesz, de a hálózás szempontjából az még nem optimális: a szomszédos cellák között igen nagy méretkülönbség lehet (a 10.23. ábrán például a „B” cella élhossza négyszerese az „N” celláénak). Emiatt a megrajzolandó háromszögek előállításában nehézségekbe ütközünk és a keletkező végelemek igen torzak lehetnek. Ezért a négyzetekre bontásnál egy szabályt vezetünk be: két szomszédos cella élhossza közötti arány leg több 2 lehet (ezt a szabályt a szakirodalom rendszerint 2:1 szabályként emlegeti). E szabályt már a vertexek elhatárolásánál történő felbontásnál alkalmazhatjuk: ha egy négyzetet négybe vágunk és valamely szomszédjának élhossza nem felel meg a fenti előírásnak, akkor az illető szomszédot is négybe

vágjuk. Ennek következtében a maga rendjén a szomszéd és annak szomszédai közötti viszonyban is változás jön létre, tehát esetleg a szomszéd szomszédjait is darabolni kell.

A szomszédok keresgélése a négyágú fa gráfján történik. Valamely szinten egy cellának négy szomszédja van, egy északi, egy déli, egy keleti és egy nyugati. Bármely szomszéd leg több egy szinttel lehet magasabban vagy alacsonyabban a tekintett cellánál. Ez a példa-gráfunkon a „B” levélre nem igaz, mert keleten három szomszédja is van. Ezért a 2:1 szabály értelmében, ha e gráfot hálózásra akarjuk használni, a „B” cellát négybe kell vágjuk, tehát a „B” csomóponthoz négy levelet kell illesszünk. A 10.24. és a 10.25. ábrákon az eddigi példákban szereplő idom hálózásához illő négyágú fa, illetve „quadtree”-háló látható.

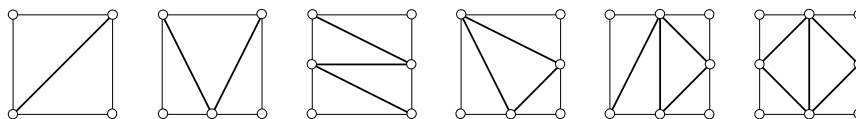


10.24. ábra. Hálózáshoz használható négyágú fa



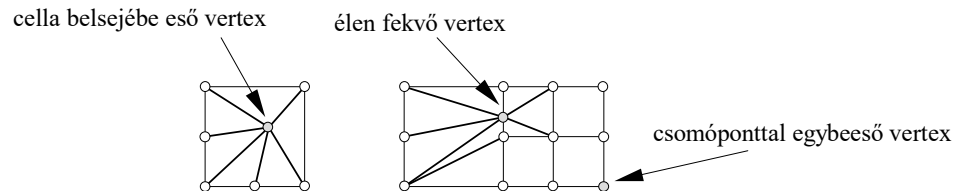
10.25. ábra. Négyágú fa- (quadtree-) háló

A hálózás következő lépése a négyzetekből álló háló háromszögekre bontása. Észrevehetjük, hogy a 2:1 szabály alkalmazásának következtében egy négyszög oldalán leg több egy pont lehet, amely az illető oldalt éppen megfelezi. Másként fogalmazva két lehetőség áll fenn: az oldalon vagy van felezőpont vagy pedig nincs. A négyszög négy oldalára ez $2^4 = 16$ különböző lehetőséget jelent, tehát egy üres négyszöget, amelynek belsejében nincs vertex, ennyi féle módon lehet háromszögekre darabolni. Az alapvető lehetőségeket a 10.26. ábra példázza, a háromszögekre osztás e minták alkalmazását jelenti.



10.26. ábra. Az üres négyzetek feldarabolása

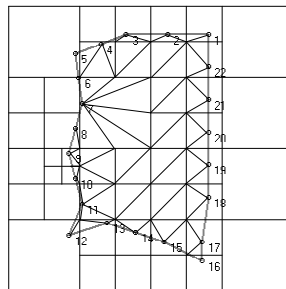
Ha a négyzet belsejében vertex is van, akkor más a helyzet: ilyenkor a vertexet összekötjük a négyzet négy sarokpontjával és az esetleges oldalfelező-pontokkal és így egy csillagszerű alakzathoz jutunk. Megtörténhet, hogy a vertex pontosan egy csomóponttal esik egybe vagy az egy élre esik. Az előbbi egy szerencsés helyzet, mert ilyenkor nem kell tennünk semmit, azonban az élre eső vertexek esetében mindkét érintett cellát (amelyek az adott él mentén érintkeznek) fel kell darabolnunk. E feldarabolással esetleg igen hegyes háromszögekhez jutunk, de azokon a későbbi simítás során segíteni lehet.



10.27. ábra. A vertexek beillesztése

A körvonalon kívül eső háromszögeket töröljük (tulajdonképpen létre sem hozzuk), az eredeti perem szakaszait pedig beillesztjük. A példaként vett idom hálóját a 10.28. ábra mutatja.

Az így kapott háromszögháló torz elemeket tartalmaz, tehát azt simítani kell. A simítás az eddig ismertett eljárással, a vertexek tologatásával történhet, azonban ezt rendszerint a perem közelébe eső vertexek vizsgálata előzi meg.



10.28. ábra. A négyzetek feldarabolásával és a vertexek beillesztésével kapott durva háló

Ha a négyszögháló megalkotásából származó vertex egy bizonyos mértéknél közelebb kerül valamely peremhez tartozó vertexhez, akkor azt rátoljuk az utóbbira (természetesen az érintett éleket is át kell rendezni). Ugyanígy a peremhez közeli vertexeket is ráhúzzhatjuk a peremre.

10.6. Háromdimenziós hálózás

Elvileg bármely eddig bemutatott módszer alkalmazható három dimenzióban is, azonban az elvek gyakorlatba való átültetésénél problémákkal is találkozhatunk.

A Delaunay-háromszögelésnek van egy térbeli megfelelője, amelynek során Delaunay-tetraéderekre bontjuk a diskretizálendő tértartományt. A tartomány határát ekkor is vertexekkel adjuk meg, amelyeket például a tartomány felületét közelítő poligonális síkidomok (facetták) sarokpontjaiban helyezünk el. Az eljárás során a vertexeket egyenként adjuk hozzá a háléhoz, a kiindulási pont most egy tetraéder (például a szuperháromszög mintájára megalkotott

szupertetraéder) lesz. A tetraéder akkor Delaunay, ha a körülírt gömb belsejében nincs egyetlen vertex sem.

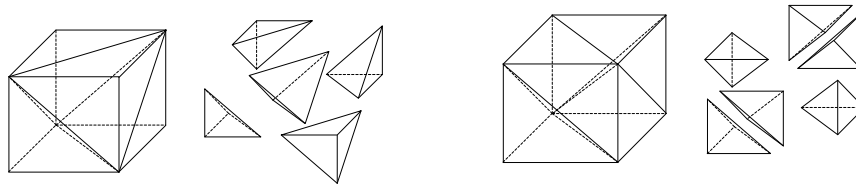
A tetraéderháló megalkotása nem jelent különösebb nehézségeket, emiatt a végeles programokban elterjedten használják.

A sík hálók esetében egy háromszöghálót aránylag egyszerűen négyszöghálóvá tudunk alakítani. Elméletileg egy tetraéderhálóból is ki lehetne alakítani egy hexaéderhálót, mivel öt-hat tetraéderből egy hexaédert lehet összeállítani, a mellékelt (10.29.) ábra szerint.

Ennek az ábrának a bal oldalán levő felbontást a hexaéder sarkainak levágdosásával nyerjük, a négy sarok levágása után a hexaéderekből egy ötödik tetraéder marad meg. A jobb oldali felbontás a hexaéder két háromszög-alapú hasábra való átmetszésével kezdődik, majd e hasábokat bontjuk három-három tetraéderre a négyszög alakú oldallapok berajzolt átlóin keresztülmennő síkokkal. E felbontásoknál feltételeztük, hogy a hexaéder oldallapjai síkok. E feladat megfordítása a hexaéder tetraéderekkel való felépítése lenne. Mivel a tetraéderek tetszőlegesek, a nyert idom oldallapjai általános esetben nem lesznek sík négyszögek, a keletkező test egy poliéder lesz.

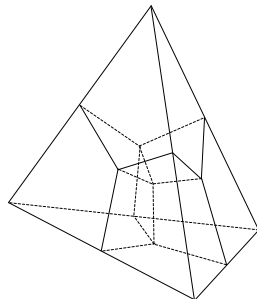
A gyakorlatban az ilyen algoritmusok bonyolultságuk miatt nem terjedtek el, ugyanis jóval több lehetőséget kell mérlegelni mint a háromszöghálók esetében, azonkívül a hexaéderek között megmaradó idomok felosztását is meg kell oldani.

Egyszerűbbnek ígérkezik a tetraéderek hexaéderekre való felbontásával nyert háló megszerkesztése.



10.29. ábra. Egy hexaéder tetraéderekre való szétbontásának két lehetősége

Egy tetraéder hexaéderekre való felbontásához először az éleit megfelezzük és a felezőpontokon keresztül merőleges síkokat állítunk az élre. Ezek a síkok az oldallapokat az oldalfelvező merőlegesek mentén metszik, a négy sík közös metszéspontja pedig a tetraéder köré húzott gömb középpontja lesz. Ezekkel a geometriai összefüggésekkel a felsorolt pontok koordinátáit a tetraéder négy sarokpontjának koordinátaival ki lehet számítani. E pontokat az élfelező merőleges síkok metszéspontjai mentén összekötjük, így a tetraédert négy darab hexaédere vágjuk szét (10.30. ábra). Megjegyzendő, hogy az így kapott hexaéderek oldallapjai síkok lesznek.



10.30. ábra. Egy tetraéder hexaéderekre bontása

A tetraéderek feldarabolásából nyert hexaéderek minőségi mutatói gyengék lehetnek, ezért ez esetben is elvégezhetjük a vertexek tologatásával történő heurisztikus simítást (vagy más egyéb hasonló célú eljárást). Ez esetben a vertexet térben mozgatjuk, tehát 26 új pozíciójában kell kiszámolni az érintett elemek mutatóit.

Nemcsak a Delaunay-háromszögelésnek, hanem a „quadtree” eljárásnak is van térbeli megfelelője, amelyet „octtree” eljárásnak neveznek (néha csak egy „t”-vel írják), és egy nyolcágú fa gráfjával lehet modellezni. Mivel a cellákra bontás három dimenzióban történik, azok kocka (szabályos hexaéder) alakkal rendelkeznek.

Megemlítendő, hogy a térbeli hálózás gyakran a diszkretizálandó tartományt határoló felület hálózásával kezdődik, hiszen létre kell hozni azon vertexek halmazát, amire például a Delaunay vagy nyolcágú fa eljárás támaszkodik. Van azonban két olyan szerencsés eset, amikor a test translációs vagy rotációs szimmetriával rendelkezik, vagy egy felület adott görbe mentén történő elmozdításával generálható. Ilyenkor a térbeli hálót a testet leíró felület két dimenziós hálójának eltolásával, elforgatásával, illetve az említett görbe mentén történő mozgatásával is létrehozható. Ezen ötlet alapján a valamely irányban csak csekély mértékben változó geometriájú testek hálózása a sík hálók előállítására alkalmas algoritmusok csekély módosításával is megoldható.

Könyvészet

1. BATHE, K. J.
1996. *Finite Element Procedures*. Prentice - Hall Inc, USA.
2. BRĂTIANU C.
1983. *Metode cu elemente finite în dinamica fluidelor*. E. Academiei, București.
3. COOK D. R.
1995. *Finite element modeling for stress analysis*. John Wiley & sons, USA.
4. COOK R., MALKUS D., PLESHA M. E.
1989. *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & sons, USA.
5. CUTEANU E., MARINOV R.
1980. *Metoda elementelor finite în proiectarea structurilor*. E. Facla, Timișoara.
6. FREY P. J, MARECHAL L.
– *Fast Adaptive Quadtree Mesh Generation*. Cedex, France.
7. GÂRBEA D.
1990. *Analiză cu elemente finite*. E. Tehnică, București.
8. KURUTZNÉ KOVÁCS MÁRIA, SCHARLE PÉTER
1985. *A végeselem-módszer egyszerű elemei és elemcsaládjai*. Műszaki könyvkiadó, Budapest.
9. MAZILU P, ȚOPA I, IEREMIA M.
1986. *Aplicarea teoriei elasticității și a plăcilor în calculul structurilor*. E. Tehnică, București.
10. MUTTYÁNSZKY ÁDÁM
1981. *Szilárdságtan*. Műszaki könyvkiadó, Budapest.
11. PACOSTE C., STOIAN V., DUBINĂ D.
1988. *Metode moderne în calculul structurilor*. E. Științifică și Enciclopedică, București.
12. PASCARIU I.
1985. *Elemente finite. Concepte - Aplicații*. E. Militară, București.
13. POPPER GYÖRGY
1985. *A végeselem-módszer matematikai alapjai*. Műszaki könyvkiadó, Budapest.
14. PRESS W. H., TEUKOLSKY S. A., VETTERLING W. T., FLANNERY B. P.
1992. *Numerical Recipes in Fortran*. Cambridge University Press, USA.
15. SHEWCHUK J. D.
1999. *Lecture Notes on Delaunay Mesh Generation*. Univ. of California, Berkeley, USA.
16. SINGIRESU S. RAO
1995. *Mechanical Vibrations*. Addison-Wesley Publishing Co, USA.
17. SHABANA A. A.
1997. *Vibration of Discrete and Continous Systems*. Springer-Verlag, New-York, USA.
18. STEMATIU D.
1988. *Calculul structurilor hidrotehnice prin metoda elementelor finite*. E. Tehnică, București.
19. VULPE A.
1978. *Statică, stabilitate, dinamică*. I. P. Iași.
20. ZIENKIEWICZ O. C., TAYLOR R. L.
1994. *The finite element method*. McGraw - Hill Book Co, G. Britain.