Kakucs András

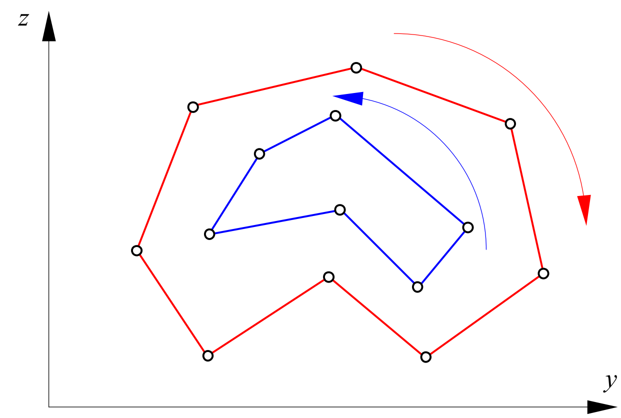
KERESZTMETSZETEK GEOMETRIAI JELLEMZŐI

– 2020 –

Az alábbi összefoglaló az Intersoft kft. (intersoftms.com) Turtle-projektjéhez készült, a keresztmetszetek geomemetriai jellemzőit, illetve azok számítógéppel történő kiszámításához szükséges algoritmusokat sorolja fel.

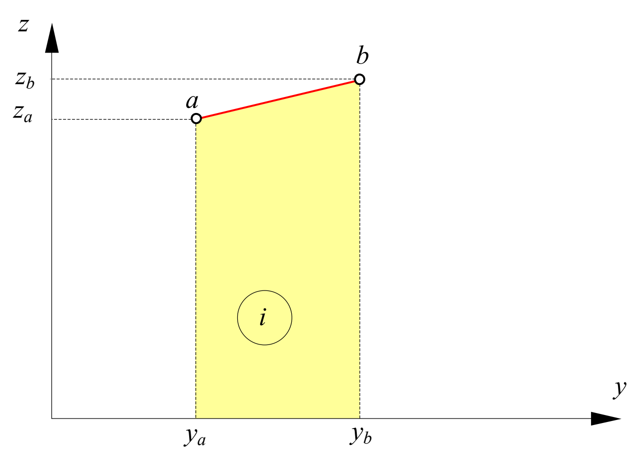
I. Keresztmetszeti jellemzők (Sectional Properties)

1. Terület (Area): $A = \int_A \mathrm{d}A$.



Kijelöljük a külső és a belső körvonalat vagy körvonalakat. Mindkettőt sokszögnek tekintjük, az íveket is egyenes szakaszokra bontjuk fel. E szakaszok hosszát a húr és az ív közötti legnagyobb távolság megengedett legnagyobb értékével állapíthatjuk meg. Kijelöljük a körbejárási irányokat, a belső körvonal körbejárási iránya a külsőével fordított. A sokszögeket körvonalanként a sarokpontok felsorolásával adjuk meg.

Valamely körvonal által bezárt területet az egyenes szakaszok alatti területek algebrai (előjeles) összegeként számítjuk ki.



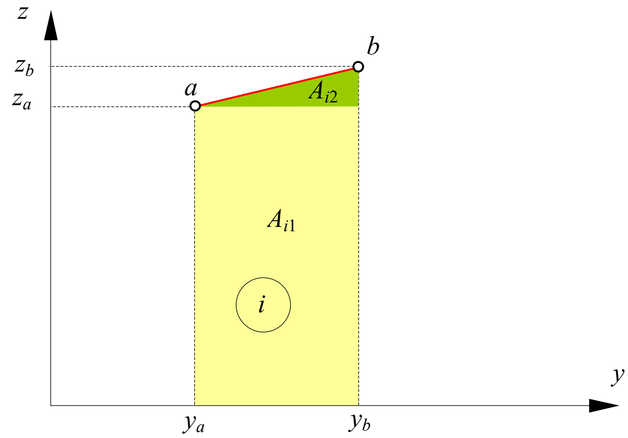
A fenti i trapéz területe: $A_i = \dfrac{(z_b + z_a)\cdot(y_b - y_a)}{2}$.

E mennyiség előjele a koordinátáktól függ. Ha az yz sík pozitív negyedében dolgozunk, a körvonal külső és az előbbi ábrán levő körbejárási irányt tekintjük, akkor e mennyiséget pozitívnak kapjuk a sokszög felső (jobbra haladó) részén és negatívnak az alsó (balra haladó) részen.

A sokszög területét összegzéssel kapjuk: $A = \sum_i A_i$, ahol i a körvonalakat alkotó élekre vonatkozik.

2. A sztatikai nyomatékok (Static moments): $S_y = \int_A z \cdot \mathrm{d}A$, $S_z = \int_A y \cdot \mathrm{d}A$

Kiszámításukhoz először meg kell határoznunk az *i* trapéz súlypontjának koordinátáit.



A trapézt egy téglalapra és egy háromszögre bontjuk fel.

A trapéz területe $A_i = \dfrac{(z_b + z_a)\cdot(y_b - y_a)}{2}$, a téglalapé $A_{i1} = z_a \cdot (y_b - y_a)$, a háromszögé pedig $A_{i2} = \dfrac{(z_b - z_a)\cdot(y_b - y_a)}{2}$. Mindhárom mennyiség előjeles (lehet negatív is).

A téglalap súlypontja az átlók metszéspontjában van, tehát $y_{Gi1} = \dfrac{y_a + y_b}{2}$ és $z_{Gi1} = \dfrac{z_a}{2}$. A háromszög súlypontja az oldalfelezők metszéspontjában van, a derékszögű háromszögünk lévén $y_{Gi2} = y_a + 2\cdot\dfrac{y_b - y_a}{3}$, $z_{Gi2} = z_a + \dfrac{z_b - z_a}{3}$.

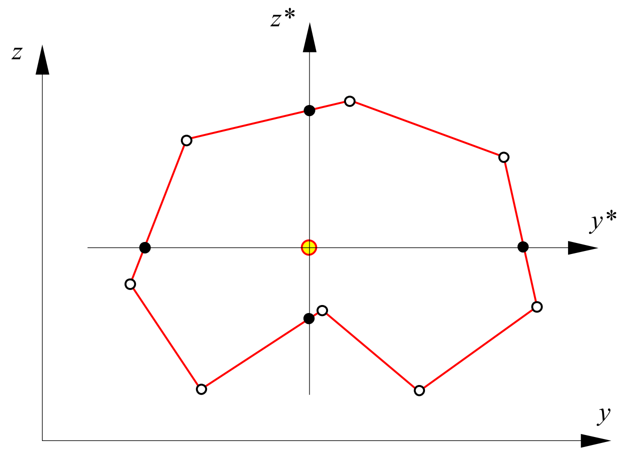
Valamely tengelyre vonatkoztatva a téglalap sztatikai nyomatéka plusz a háromszög sztatikai nyomatéka éppen a trapéz sztatikai nyomatékát kell adja, tehát a téglalap súlypontjának koordinátái $y_{Gi} = \dfrac{A_{i1}\cdot y_{Gi1} + A_{i2}\cdot y_{Gi2}}{A_i}$ és $z_{Gi} = \dfrac{A_{i1}\cdot z_{Gi1} + A_{i2}\cdot z_{Gi2}}{A_i}$ lesznek.

Az idomot alkotó *i* trapéz sztatikai nyomatékai $S_{yi} = A_i \cdot z_{Gi}$ és $S_{zi} = A_i \cdot y_{Gi}$, ahol a területet és a súlypont koordinátáit az előbbiekben már kiszámoltuk. Az idom sztatikai nyomatékait ezen mennyiségek összegzésével kapjuk: $S_y = \sum_i S_{yi}$, $S_z = \sum_i S_{zi}$.

3. Az idom súlypontjának (mértani középpontjának) koordinátái (Center of gravity): $y_G = \dfrac{S_z}{A}$, $z_G = \dfrac{S_y}{A}$.

4. A félkeresztmetszet sztatikai nyomatékai (a Plastic modulus kiszámításához): S_y*, S_z*

Kezdetben egy új $y*z*$ koordinátarendszert rajzolunk, melynek origója az idom súlypontjában van. Megkeressük a körvonalak metszéspontjait az új tengelyekkel és ott új csomópontokat illesztünk be.



A pontok új listájával az S_y* és S_z* mennyiségeket ugyanúgy számoljuk ki, mint az S_y és S_z mennyiségeket, de az $y*z*$ koordinátarendszert használjuk (az $y* = y - y_G$, $z* = z - z_G$ koordináta-transzformációt) és S_y* esetén csak a $z* \geq 0$, S_z* esetén csak az $y* \geq 0$ koordinátájú pontokon megyünk keresztül (az új $z*$ tengelytől jobbra eső, illetve az $y*$ tengely feletti fél idomot vesszük). Ha a másik két fél-idommal dolgozunk, úgy a $-S_y*$ és a $-S_z*$ mennyiségeket kapjuk.

A plasztikus nyomatéki modulusz e mennyiségek kétszerese lesz. Az idom sztatikai nyomatékai az $y*z*$ koordinátarendszerben nullák.

5. A tengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékok (Moments of inertia): $I_z* = \int_A y*^2 \cdot \mathrm{d}A$, $I_y* = \int_A z*^2 \cdot \mathrm{d}A$

Az i trapéz tehetetlenségi nyomatékait a téglalap és a háromszög tehetetlenségi nyomatékainak összegeként kapjuk.

Ha az eredeti yz koordinátarendszerben dolgozunk, akkor a következő ábrából a téglalap tehetetlenségi nyomatékát egyszerűen számíthatjuk:

$$I_{zi1} = \int_A y^2 \cdot \mathrm{d}A = \int_{y_a}^{y_b} y^2 \cdot z_a \cdot \mathrm{d}y = z_a \cdot \left.\frac{y^3}{3}\right|_{y_a}^{y_b} = \frac{z_a \cdot (y_b^3 - y_a^3)}{3},$$

és hasonló módon $I_{yi1} = \int_A z^2 \cdot \mathrm{d}A = \int_0^{z_a} z^2 \cdot (y_b - y_a) \cdot \mathrm{d}z = (y_b - y_a) \cdot \left.\frac{z^3}{3}\right|_0^{z_a} = \frac{z_a^3 \cdot (y_b - y_a)}{3}$.

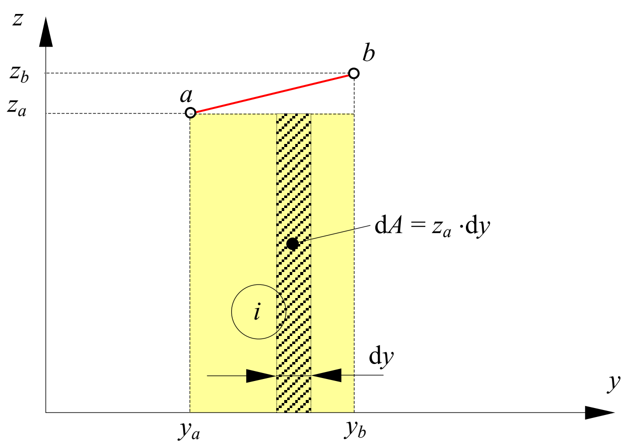
A háromszög esetében az elemi dA felület kiszámítása már kissé komplikáltabb:

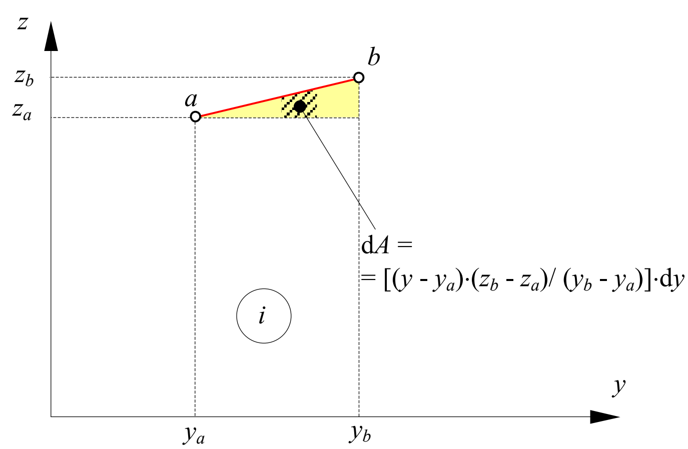
$$I_{zi2}=\int_A y^2\cdot \mathrm{d}A=\int_{y_a}^{y_b} y^2\cdot(y-y_a)\cdot\frac{z_b-z_a}{y_b-y_a}\cdot\mathrm{d}y=\frac{z_b-z_a}{y_b-y_a}\cdot\int_{y_a}^{y_b}(y^3-y^2\cdot y_a)\cdot\mathrm{d}y=$$

$$=\frac{z_b-z_a}{y_b-y_a}\cdot\left(\frac{y^4}{4}-y_a\cdot\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y_a}^{y_b}=\frac{z_b-z_a}{y_b-y_a}\cdot\left(\frac{y_b^4-y_a^4}{4}-\frac{y_a\cdot y_b^3-y_a^4}{3}\right)=\frac{z_b-z_a}{y_b-y_a}\cdot\frac{3\cdot y_b^4+y_a^4-4\cdot y_a\cdot y_b^3}{12},$$

$$I_{yi2}=\int_A z^2\cdot \mathrm{d}A=\int_{z_a}^{z_b} z^2\cdot(z_b-z)\cdot\frac{y_b-y_a}{z_b-z_a}\cdot\mathrm{d}z=\frac{y_b-y_a}{z_b-z_a}\cdot\int_{z_a}^{z_b}(-z^3+z^2\cdot z_b)\cdot\mathrm{d}z=$$

$$=\frac{y_b-y_a}{z_b-z_a}\cdot\left(-\frac{z^4}{4}+z_b\cdot\frac{z^3}{3}\right)_{z_a}^{z_b}\Bigg|=\frac{y_b-y_a}{z_b-z_a}\cdot\left(-\frac{z_b^4-z_a^4}{4}+z_b\cdot\frac{z_b^3-z_a^3}{3}\right)=\frac{y_b-y_a}{z_b-z_a}\cdot\frac{z_b^4+3\cdot z_a^4-4\cdot z_b\cdot z_a^3}{12}.$$





A trapéz tehetetlenségi nyomatékai a fenti mennyiségek megfelelő összegei: $I_{yi}=I_{yi1}+I_{yi2}$, $I_{zi}=I_{zi1}+I_{zi2}$, az idom tehetetlenségi nyomatékai pedig emezek összegei. E mennyiségeket azonban át kell számolni a centrális y^*z^* koordinátarendszerre, Steiner képletével:
$I_y{}^*=\sum_i I_{yi}+2\cdot z_G\cdot S_y+z_G^2\cdot A$, $I_z{}^*=\sum_i I_{zi}+2\cdot y_G\cdot S_z+y_G^2\cdot A$.

6. Centrifugális tehetetlenségi nyomaték (Planar moment): $I_{zy}{}^*=\int_A y\cdot z\cdot\mathrm{d}A$

Az *i* trapéz centrifugális tehetetlenségi nyomatékát is a téglalap és a háromszög tehetetlenségi nyomatékaiból számoljuk.

A téglalapra:

$$I_{zyi1}=\int_{y_a}^{y_b}\int_0^{z_a} z\cdot y\cdot\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}z=\int_{y_a}^{y_b} y\cdot\frac{z^2}{2}\bigg|_0^{z_a}\cdot\mathrm{d}y=\int_{y_a}^{y_b} y\cdot\frac{z_a^2}{2}\cdot\mathrm{d}y=\frac{y^2\cdot z_a^2}{4}\bigg|_{y_a}^{y_b}=\frac{(y_b^2-y_a^2)\cdot z_a^2}{4}.$$

A háromszögre:

$$I_{zyi2}=\int_{y_a}^{y_b}\int_{z_a}^{z(y)} z\cdot y\cdot\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}z\text{, ahol } z(y)=z_a+(z_b-z_a)\cdot\frac{y-y_a}{y_b-y_a}\text{. Tehát:}$$

$$I_{zyi2}=\int_{y_a}^{y_b} y\cdot\frac{z^2}{2}\Bigg|_{z_a}^{z_a+(z_b-z_a)\cdot\frac{y\text{-}y_a}{y_b-y_a}}\cdot\mathrm{d}y=\int_{y_a}^{y_b} y\cdot\frac{z_a^2+(z_b-z_a)^2\cdot\left(\frac{y\text{-}y_a}{y_b-y_a}\right)^2+2\cdot z_a\cdot(z_b-z_a)\cdot\left(\frac{y\text{-}y_a}{y_b-y_a}\right)-z_a^2}{2}\cdot\mathrm{d}y=$$

$$=\int_{y_a}^{y_b}\frac{\left(\frac{z_b\text{-}z_a}{y_b-y_a}\right)^2\cdot(y^3-2\cdot y^2\cdot y_a+y\cdot y_a^2)+2\cdot z_a\cdot\frac{z_b\text{-}z_a}{y_b-y_a}\cdot(y^2-y\cdot y_a)}{2}\cdot\mathrm{d}y=$$

$$=\left[\left(\frac{z_b-z_a}{y_b-y_a}\right)^2\cdot\left(\frac{y^4}{8}-\frac{y^3}{3}\cdot y_a+\frac{y^2}{4}\cdot y_a^2\right)+z_a\cdot\frac{z_b-z_a}{y_b-y_a}\cdot\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}\cdot y_a\right)\right]\Bigg|_{y_a}^{y_b}=$$

$$=\left(\frac{z_b-z_a}{y_b-y_a}\right)^2\cdot\left(\frac{y_b^4-y_a^4}{8}-\frac{y_b^3-y_a^3}{3}\cdot y_a+\frac{y_b^2-y_a^2}{4}\cdot y_a^2\right)+z_a\cdot\frac{z_b-z_a}{y_b-y_a}\cdot\left(\frac{y_b^3-y_a^3}{3}-\frac{y_b^2-y_a^2}{2}\cdot y_a\right)=$$

$$=\left(\frac{z_b-z_a}{y_b-y_a}\right)^2\cdot\frac{3\cdot y_b^4-3\cdot y_a^4-8\cdot y_a\cdot y_b^3+8\cdot y_a^4+6\cdot y_a^2\cdot y_b^2-6\cdot y_a^4}{24}+z_a\cdot\frac{z_b-z_a}{y_b-y_a}\cdot\frac{2\cdot y_b^3-2\cdot y_a^3-3\cdot y_a\cdot y_b^2+3\cdot y_a^3}{6}=$$

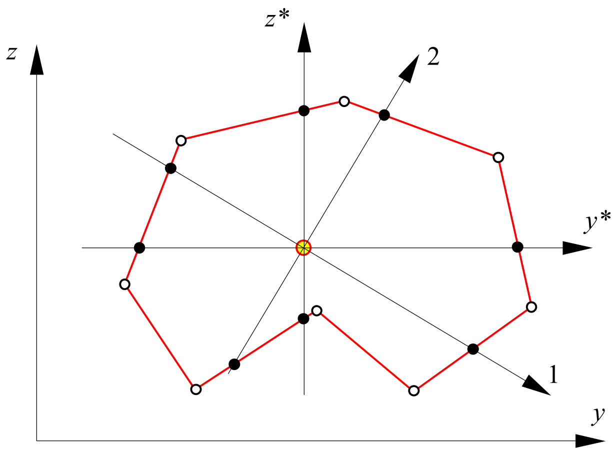
$$=\left(\frac{z_b-z_a}{y_b-y_a}\right)^2\cdot\frac{3\cdot y_b^4-y_a^4-8\cdot y_a\cdot y_b^3+6\cdot y_a^2\cdot y_b^2}{24}+z_a\cdot\frac{z_b-z_a}{y_b-y_a}\cdot\frac{2\cdot y_b^3+y_a^3-3\cdot y_a\cdot y_b^2}{6}.$$

A trapéz centrifugális nyomatéka $I_{zyi}=I_{zyi1}+I_{zyi2}$, az idomé pedig $I_{zy}=\sum_i I_{zyi}$. Ezt a mennyiséget is a centrális rendszerben kell megadni:

$$I_{zy}{*}=\sum_i I_{zyi}+y_G\cdot S_y+z_G\cdot S_z+y_G\cdot z_G\cdot A.$$

7. Poláris tehetetlenségi nyomaték (Polar moment): $I_p{*}=\int_A (y^{*2}+z^{*2})\cdot\mathrm{d}A=I_z{*}+I_y{*}$.

8. A főirányok kiszámítása (ezekben az irányokban a tengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékoknak szélső értékük van): $\mathrm{tg}\,2\cdot\alpha=\frac{2\cdot I_{zy}{*}}{I_y{*}-I_z{*}}\quad\Rightarrow\quad\alpha_{1,2}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2\cdot I_{zy}{*}}{I_y{*}-I_z{*}}$.



Ez két egymásra merőleges irányt ad, az 1. a tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték maximumának, a 2. pedig a minimumának felel meg (előző ábra, főértékek, principal values):

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}\cdot\left(I_z{*}+I_y{*}\pm\sqrt{(I_z{*}-I_y{*})^2+4\cdot I_{zy}{*}}\right),\ (I_1 \geq I_2,\ I_1+I_2 = I_y{*}+I_z{*}).$$

Egyébként a koordinátarendszer α szöggel történő elforgatásakor

$$I_z' = I_z\cdot\cos^2\alpha + I_y\cdot\sin^2\alpha + I_{zy}\cdot\sin 2\cdot\alpha\,,$$

$$I_y' = I_z\cdot\sin^2\alpha + I_y\cdot\cos^2\alpha - I_{zy}\cdot\sin 2\cdot\alpha\,,$$

$$I_{yz}' = \frac{I_y - I_z}{2}\cdot\sin 2\cdot\alpha + I_{zy}\cdot\cos 2\cdot\alpha\,,$$

innen

$$I_{12} = \frac{I_y{*}-I_z{*}}{2}\cdot\sin 2\cdot\alpha_{1,2} + I_{zy}{*}\cdot\cos 2\cdot\alpha_{1,2}\,.$$

Az $I_p{*}$ poláris nyomaték a $I_1+I_2 = I_y{*}+I_z{*}$ összefüggés szerint is a koordinátarendszer elforgatásakor nem változik (invariáns).

A fél-keresztmetszetek sztatikai nyomatékait az ismert eljárással kell kiszámítani az 12 koordinátarendszerben.

9. A tehetetlenségi sugarak (radius of giration): $i_y{*} = \sqrt{\frac{I_y{*}}{A}}$, $i_z{*} = \sqrt{\frac{I_z{*}}{A}}$, $i_p{*} = \sqrt{\frac{I_p{*}}{A}}$.

Az első kettőt a főértékekre is ki lehet számolni.

10. Szilárdsági modulusz (section modulus): $W_y{*} = \frac{I_y{*}}{|z{*}_{\max}|}$, $W_z{*} = \frac{I_z{*}}{|y{*}_{\max}|}$, $W_p = \frac{I_p{*}}{|r_{\max}|}$, $r{*} = \sqrt{y{*}^2 + z{*}^2}$.

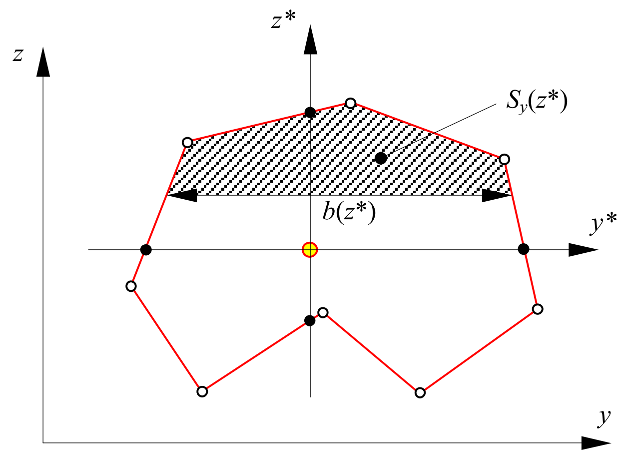
Az első kettőt a főértékekre is ki lehet számolni. E képletekben a moduluszban rendre az $y*$, illetve a $z*$ tengelytől, valamint az origótól legtávolabban fekvő pont távolsága szerepel. Mivel a külső kontúrt egy sokszög alkotja, e távolságok kiszámításakor elegendő a sarokpontokra szorítkoznunk.

Megjegyzendő, hogy a $k = \frac{W}{A}$ hányadost a keresztmetszet hajlításra igénybevett hatékonyságának kifejezésére szokták használni, mely hányados csak az alaktól függ (geometriailag hasonló, de méreteikben különböző idomokra azonos).

11. Az alaktényező: $k_y{*} = \frac{A}{I_z{*}^2}\cdot\int_{y{*}_{\min}}^{y{*}_{\max}}\frac{S_z(y{*})^2}{b(y{*})}\cdot \mathrm{d}y$, $k_z{*} = \frac{A}{I_y{*}^2}\cdot\int_{z{*}_{\min}}^{z{*}_{\max}}\frac{S_y(z{*})^2}{b(z{*})}\cdot \mathrm{d}z$.

E képletekben $b(y*)$ és $b(z*)$ a keresztmetszet „szélessége” az adott „magasságban”, $S_z(y*)$ és $S_y(z*)$ pedig az adott koordináta által adott függőleges, illetve vízszintes vonal valamely oldalán fekvő idom-rész sztatikai nyomatéka (a köv. ábrán).

E mennyiségeket numerikus integrálással lehet kiszámolni.



12. Az effektív nyírási keresztmetszet (effective shear area): $A_y = \frac{1}{k_y *} \cdot A$, $A_z = \frac{1}{k_z *} \cdot A$.

13. Egyezményes tehetetlenségi nyomaték csavarásra: I_t.

E mennyiséget a de Saint Venant hipotézisek alapján a $\Delta\varphi = -2$ differenciál-egyenlet megoldása adja, ahol $\varphi(y,z)$ az A-n értelmezett kétváltozós függvény, amely ki kell elégítse a $\varphi(y,z) = 0$ peremfeltételt az A idom határain (körvonalán). Ekkor az egyezményes tehetetlenségi nyomatékot (torziós merevségi együtthatót) az $I_t = 2 \cdot \int_A \varphi(y,z) \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$ integrál adja.

A Δ Laplace operátort részletesen felírva a megoldandó differenciál-egyenlet a következő: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2$. Ezt az egyenletet megoldani egy általános keresztmetszet esetében csak numerikus módszerekkel lehet. Kevésbé pontos, de könnyebben alkalmazható a véges differenciák módszere.

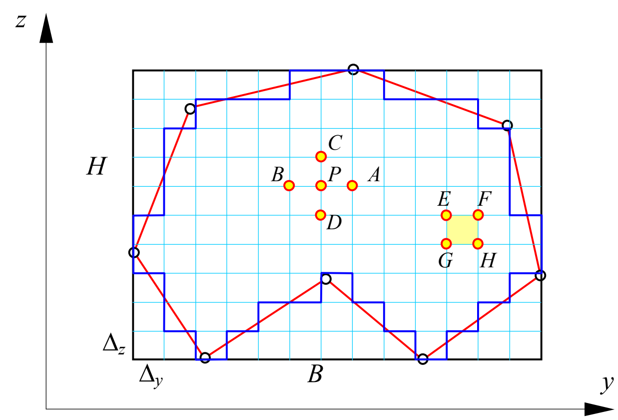
Ennek alkalmazásához először megkeressük az idomot magába foglaló téglalap B és H méreteit (a sarokpontok y és z koordinátáinak szélsőértékeit). Ugyanakkor megkeressük a sarokpontok közötti legkisebb d_{min} távolságot.

A megrajzolandó háló finomságát e távolsággal adhatjuk meg automatikusan, pl. $\Delta = \frac{d_{min}}{4}$. A pontosság kedvéért dolgozhatunk irányonként változó beosztással is, ekkor Δ_y a B/Δ, Δ_z pedig a H/Δ hányados felfele kerekített n_y, illetve n_z értékével számítható: $\Delta_y = \frac{B}{n_y}$, illetve $\Delta_z = \frac{H}{n_z}$.

A Δ, vagy a Δ_y és a Δ_z beosztással megrajzoljuk a hálót. Ha egyenletes Δ beosztással dolgozunk, a háló szélesebb vagy magasabb lehet az idomnál.

A háló vízszintes és függőleges vonalainak metszéspontjait megvizsgálva eldöntjük, hogy azok a keresztmetszeten kívül vagy belül vannak-e, esetleg éppen rajta vannak a körvonalán.

Ezután ahol a körvonal egy $\Delta_y \times \Delta_z$ téglalapot metsz, akkor meg kell vizsgálni, hogy a kívül eső terület nagysága hogyan viszonyul a belül maradó területhez. Ha ez utóbbi a téglalap területének legalább a fele, akkor az illető téglalapnak mind a négy sarokpontja belül van (ellenkező esetben nem kell tenni semmit).



Az így közelített kontúr belsejében definiáljuk a $\varphi(y,z)$ függvényt, melynek értéke a peremen nulla kell legyen. Ha e függvénynek ismerjük az értékét és a deriváltjait egy adott P pontban, akkor Taylor-sorba fejtéssel, az első három tag megtartásával:

$$\varphi_A \approx \varphi_P + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\Delta_y + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\cdot\Delta_y^2$$

$$\varphi_B \approx \varphi_P - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\Delta_y + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\cdot\Delta_y^2$$

$$\varphi_C \approx \varphi_P + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\Delta_z + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\cdot\Delta_z^2$$

$$\varphi_D \approx \varphi_P - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\Delta_z + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\cdot\Delta_z^2$$

ahonnan a másodrendű deriváltakra a következő közelítéseket kapjuk:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \approx \frac{1}{\Delta_y^2}\cdot(\varphi_A + \varphi_B - 2\cdot\varphi_P)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \approx \frac{1}{\Delta_z^2}\cdot(\varphi_C + \varphi_D - 2\cdot\varphi_P)$$

Ezeket a $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2$ egyenletbe behelyettesítve

$$\varphi_P = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta_z^2}{\Delta_y^2+\Delta_z^2}\cdot(\varphi_A+\varphi_B) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta_y^2}{\Delta_y^2+\Delta_z^2}\cdot(\varphi_C+\varphi_D) + \frac{\Delta_y^2\cdot\Delta_z^2}{\Delta_y^2+\Delta_z^2}.$$

Ha $\Delta_y = \Delta_z = \Delta$, akkor $\varphi_P = \frac{1}{4}\cdot(\varphi_A+\varphi_B+\varphi_C+\varphi_D) + \frac{\Delta^2}{2}$.

A keresztmetszet pereméhez tartozó és az annak belsejében levő rácspontokon végigmenve egy lineáris egyenletrendszert írunk fel:

- ha a P rácspont a peremen van, akkor $\varphi_P = 0$;

- ha a P rácspont az idom belsejében van akkor a négy szomszédos ponttal (kereszt irányban)

$$\varphi_P - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta_z^2}{\Delta_y^2 + \Delta_z^2} \cdot (\varphi_A + \varphi_B) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta_y^2}{\Delta_y^2 + \Delta_z^2} \cdot (\varphi_C + \varphi_D) = \frac{\Delta_y^2 \cdot \Delta_z^2}{\Delta_y^2 + \Delta_z^2}.$$

Az algoritmus szempontjából kedvezőbb a kettős indexek használata (a P pont helyzetét, így annak szomszédjait egy matrixból kiolvasni)

Az egyenletrendszer megoldására több eljárás is létezik.

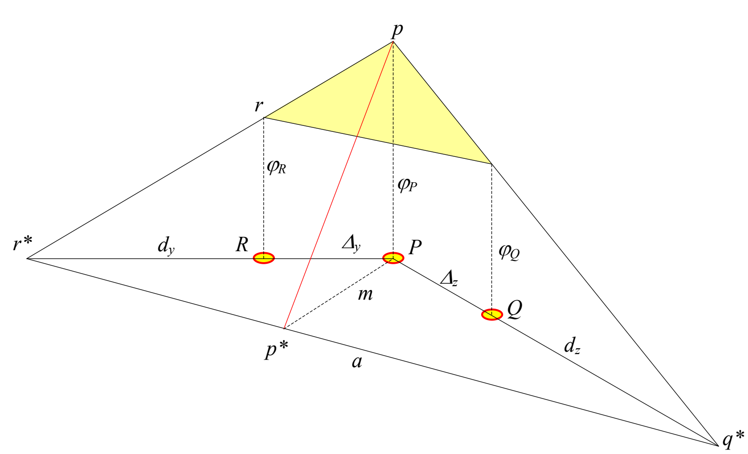
Az I_t nyomatékot a $I_t = 2 \cdot \int_A \varphi(y,z) \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$ integrál adja. Ha a négyszögrács egy j téglalapjának sarokpontjai E, F, G és H, akkor e téglalap felett

$I_{tj} = 2 \cdot \int_{A_j} \varphi(y,z) \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \approx \Delta_y \cdot \Delta_z \cdot \dfrac{\varphi_E + \varphi_F + \varphi_G + \varphi_H}{2}$, a keresett nyomaték pedig $I_t = \sum_j I_{tj}$.

Körkeresztmetszetre és csövekre $I_t \equiv I_p$

14. Szilárdsági modulusz, csavarásra: $W_t = \dfrac{I_t}{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{\max}}$.

E képletben $\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{\max}$ a $\varphi(y,z)$ függvény által leírt felület legnagyobb dőlése. Ha feltételezzük, hogy a véges differenciák alkalmazásánál a rácspontok eléggé sűrűn voltak felvéve ahhoz, hogy egy $\Delta_y \times \Delta_z$ téglalap felett a függvény eléggé sima legyen, akkor egy P pont két nem egy irányban fekvő szomszédjával, az előbbi pontban kiszámított függvényértékekkel a következő ábrán látható sík háromszög alakú *pqr* felületet definiálhatjuk.



Ha a háromszög két merőleges szárát meghosszabbítjuk, akkor azok valahol (a *p** és a *q** pontokban) metszik az *yz* síkot. A d_y és a d_z távolságok ezeket a metszéspontokat adják. A háromszögek hasonlóságából például $\frac{d_y}{\varphi_R} = \frac{d_y + \Delta_y}{\varphi_P}$, ahonnan $d_y = \Delta_y \cdot \frac{\varphi_R}{\varphi_P - \varphi_R}$, hasonló módon $d_z = \Delta_z \cdot \frac{\varphi_R}{\varphi_Q - \varphi_R}$. E mennyiségeket az előjelükkel kell venni (megtörténhet, hogy a másik oldalon van a metszéspont, ha fordítva dől a háromszög).

A *pqr* háromszög síkja egy vonalban metszi az *yz* síkot, mellyel egy újabb *pq*r** háromszöget alkothatunk. E háromszögnek a *pp** magasságvonala adja a ferde sík legnagyobb dőlésű vonalát. E háromszög alapja $a = \sqrt{(\Delta_y + d_y)^2 + (\Delta_z + d_z)^2}$.

Az *yz* síkban levő *Pr*q** háromszög magassága $m = \frac{(\Delta_y + d_y) \cdot (\Delta_z + d_z)}{a}$, amellyel a keresett meredekség $l = \frac{\varphi_P}{m}$.

Van néhány sajátságos esetünk is. Amennyiben például $\varphi_P = \varphi_R$ és $\varphi_P \neq \varphi_Q$, úgy a legnagyobb meredekség az ábra jelölései szerint $l = \frac{\varphi_Q - \varphi_P}{\Delta_y}$.

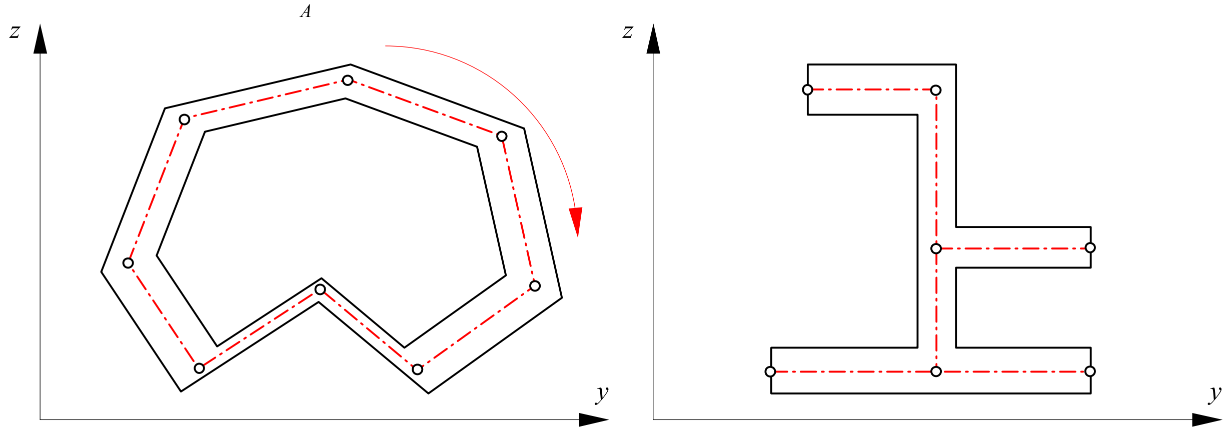
Ha $\varphi_P = \varphi_R = \varphi_Q$, akkor a háromszög vízszintes és $l = 0$.

$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{\max}$ értékét az így kiszámított *l* értékek modulusának legnagyobbika adja. Belső rácspontonként négy *l* értékünk van, a peremen legalább egy.

II. Keresztmetszeti jellemzők vékonyfalú szelvényekre (Sectional Properties for Thin Sections)

Az első részben foglaltak tömör rudakra vonatkoztak. Az alábbiak csak vékonyfalú rudakra érvényesek

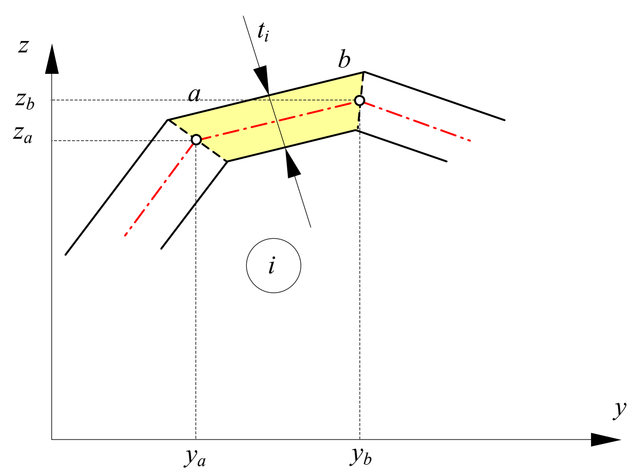
1. Terület (Area): $A = \int_A \mathrm{d}A$.



Körvonalak helyett most középvonalat adunk meg (a fenti ábrán látható módon), melyet tört vonalnak tekintünk. Ez lehet nyitott vagy zárt, elágazó és összetett (de konex). Az íveket is egyenes szakaszokra bontjuk fel. Az i egyenes szakaszokon a fal t_i vastagságát állandónak tekintjük. Ha egy hosszabb szakaszon a fal vastagsága lényegesen változna, akkor azt rövidebb szakaszokra osztjuk.

A zárt körvonalakat a sarokpontok felsorolásával adjuk meg valamely kijelölt irány szerint.

A keresztmetszet nagyságát az egyenes szakaszoknak megfelelő területek összege adja.



A fenti i trapéz területe: $A_i = t_i \cdot \sqrt{(z_b - z_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$ (mivel az ab szakasz a trapéz középvonala, melynek hossza $l_i = \sqrt{(z_b - z_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$). E mennyiség pozitív.

A rúd keresztmetszetének területét összegzéssel kapjuk: $A = \sum_i A_i$, ahol i a középvonalat alkotó élekre vonatkozik.

2. A sztatikai nyomatékok (Static moments): $S_y = \int_A z \cdot \mathrm{d}A$, $S_z = \int_A y \cdot \mathrm{d}A$

Kiszámításukhoz először meg kellene határoznunk az i trapéz súlypontjának koordinátáit. Azonban e trapéz t_i magassága sokkal kisebb, mint a középvonalának a hossza, emiatt jó közelítéssel téglalapnak tekinthetjük. E téglalap súlypontja a középvonal közepénél van, tehát koordinátái $y_{Gi} = \dfrac{y_a + y_b}{2}$ és $z_{Gi} = \dfrac{z_a + z_b}{2}$.

Az idomot alkotó i trapéz sztatikai nyomatékai jó közelítéssel $S_{yi} = A_i \cdot z_{Gi}$ és $S_{zi} = A_i \cdot y_{Gi}$, ahol a területet és a súlypont koordinátáit az előbbiekben már kiszámoltuk. Az idom sztatikai nyomatékait ezen mennyiségek összegzésével kapjuk: $S_y = \sum_i S_{yi}$, $S_z = \sum_i S_{zi}$.

3. Az idom súlypontjának (mértani középpontjának) koordinátái (Center of gravity): $y_G = \dfrac{S_z}{A}$, $z_G = \dfrac{S_y}{A}$.

4. A félkeresztmetszet sztatikai nyomatékai (a Plastic modulus kiszámításához): $S_y{*}$, $S_z{*}$

Akárcsak a tömör rudaknál, kezdetben egy új $y{*}z{*}$ koordinátarendszert rajzolunk, melynek origója az idom súlypontjában van. Megkeressük a középvonal metszéspontjait az új tengelyekkel és ott új csomópontokat illesztünk be.

A pontok új listájával az $S_y{*}$ és $S_z{*}$ mennyiségeket ugyanúgy számoljuk ki, mint az S_y és S_z mennyiségeket, a tömör rudak mintájára.

A plasztikus nyomatéki modulusz e mennyiségek kétszerese lesz. Az idom sztatikai nyomatékai az $y{*}z{*}$ koordinátarendszerben nullák.

5. A tengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékok (Moments of inertia): $I_z{*} = \int_A y{*}^2 \cdot \mathrm{d}A$, $I_y{*} = \int_A z{*}^2 \cdot \mathrm{d}A$, a planáris nyomaték (Planar moment): $I_{zy}{*} = \int_A y \cdot z \cdot \mathrm{d}A$ és a poláris nyomaték (Polar moment): $I_p{*} = \int_A (y{*}^2 + z{*}^2) \cdot \mathrm{d}A = I_z{*} + I_y{*}$

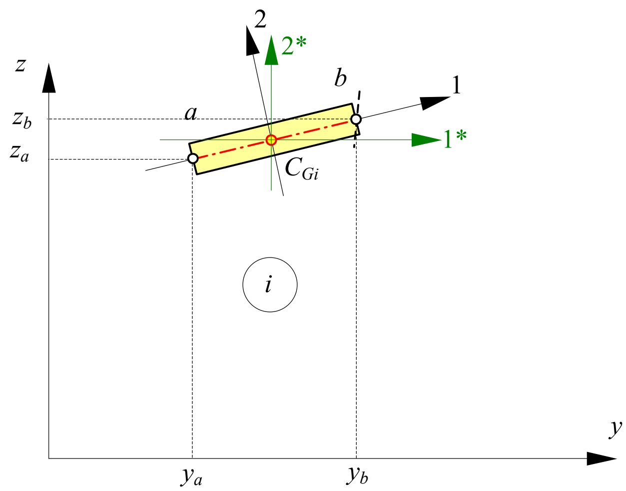
Az i trapéz tehetetlenségi nyomatékát jó közelítéssel a téglalap tehetetlenségi nyomatékával vehetjük egyenlőnek. A téglalap tehetetlenségi nyomatékait az alábbi ábra szerinti lokális koordinátarendszerben az $I_{1i} = \dfrac{t_i^3 \cdot l_i}{12}$ és $I_{2i} = \dfrac{t_i \cdot l_i^3}{12}$ képletek adják. Mivel a koordináta-tengelyek a téglalap szimmetriatengelyei, a planáris I_{12i} nyomaték zéró.

E koordinátarendszer 1. tengelye egy $\alpha_i = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{z_b - z_a}{y_b - y_a}$ szöget zár be az y tengellyel. A szög sajátságos eseteit, amikor értéke 0, π/2, π vagy 3·π/2 a koordináták viszonyából lehet kiszámítani:

- ha $z_b = z_a$ és $y_b > y_a$, akkor $\alpha_i = 0$;

- ha $z_b > z_a$ és $y_b = y_a$, akkor $\alpha_i = \pi / 2$;
- ha $z_b = z_a$ és $y_b < y_a$, akkor $\alpha_i = \pi$;
- ha $z_b < z_a$ és $y_b = y_a$, akkor $\alpha_i = 3 \cdot \pi / 2$.

A $z_b = z_a$ és $y_b = y_a$ eset nem fordulhat elő.



Ha az 12 rendszer elforgatjuk úgy, hogy tengelyei párhuzamosak legyenek a *yz* rendszer tengelyeivel (az 1 tengely az *y*-nal, ebből következően a 2 a *z*-vel), akkor ezen 1*2* rendszerben a tehetetlenségi nyomatékok

$$I_{2i}{}^* = I_{2i} \cdot \cos^2 \alpha + I_{1i} \cdot \sin^2 \alpha_i$$

$$I_{1i}{}^* = I_{2i} \cdot \sin^2 \alpha + I_{1i} \cdot \cos^2 \alpha_i$$

$$I_{12i}{}^* = \frac{I_{1i} - I_{2i}}{2} \cdot \sin 2 \cdot \alpha_i$$

Az 1*2* rendszerből az *yz* rendszerre a Steiner-képlettel lehet áttérni (az 1*2* rendszerben a sztatikai nyomatékok nullák):

$$I_{yi} = I_{1i}{}^* + z_{Gi}^2 \cdot A_i$$

$$I_{zi} = I_{2i}{}^* + y_{Gi}^2 \cdot A_i$$

$$I_{zyi} = I_{12i}{}^* + y_{Gi} \cdot z_{Gi} \cdot A_i$$

Az eredeti *yz* koordinátarendszerben keresztmetszet tehetetlenségi nyomatékai pedig emezek összegei. E mennyiségeket azonban át kell számolni a centrális *y*z** koordinátarendszerre, Steiner képletével:

$$I_y{}^* = \sum_i I_{yi} + 2 \cdot z_G \cdot S_y + z_G^2 \cdot A,$$

$$I_z{}^* = \sum_i I_{zi} + 2 \cdot y_G \cdot S_z + y_G^2 \cdot A,$$

$$I_{zy}{}^* = \sum_i I_{zyi} + y_G \cdot S_y + z_G \cdot S_z + y_G \cdot z_G \cdot A.$$

6. A főirányok, főértékek, tehetetlenségi sugarak, a szilárdsági moduluszok, alaktényezők, effektív nyírási keresztmetszetek kiszámítása ugyanazokkal a képletekkel és eljárásokkal történik, mint a tömör rudak esetében:

$$\operatorname{tg} 2\cdot\alpha = \frac{2\cdot I_{zy}*}{I_y * - I_z *} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{1,2} = \frac{1}{2}\cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{2\cdot I_{zy}*}{I_y * - I_z *}.$$

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}\cdot\left(I_z * + I_y * \pm \sqrt{(I_z * - I_y *)^2 + 4\cdot I_{zy} *}\right), \; (I_1 \geq I_2,\; I_1 + I_2 = I_y * + I_z *).$$

$$I_{12} = \frac{I_y * - I_z *}{2}\cdot \sin 2\cdot\alpha_{1,2} + I_{zy} * \cdot \cos 2\cdot\alpha_{1,2}.$$

$$i_y * = \sqrt{\frac{I_y *}{A}},\; i_z * = \sqrt{\frac{I_z *}{A}},\; i_p * = \sqrt{\frac{I_p *}{A}},$$

$$W_y * = \frac{I_y *}{|z*_{\max}|},\; W_z * = \frac{I_z *}{|y*_{\max}|},\; W_p = \frac{I_p *}{|r_{\max}|},\; r* = \sqrt{y*^2 + z*^2},$$

$$k_y * = \frac{A}{I_z *^2}\cdot \int_{y*_{\min}}^{y*_{\max}} \frac{S_z(y*)^2}{b(y*)}\cdot \mathrm{d}y,\; k_z * = \frac{A}{I_y *^2}\cdot \int_{z*_{\min}}^{z*_{\max}} \frac{S_y(z*)^2}{b(z*)}\cdot \mathrm{d}z,$$

$$A_y = \frac{1}{k_y *}\cdot A,\; A_z = \frac{1}{k_z *}\cdot A.$$

A fél-keresztmetszetek sztatikai nyomatékait is az ismert eljárással kell kiszámítani az 12 koordinátarendszerben.

7. Az egyezményes tehetetlenségi nyomaték csavarásra: I_t, és a megfelelő szilárdsági modulusz W_t.

E mennyiségeket a de Saint Venant hipotézisek alapján megállapított közelítő képletekkel számolják:

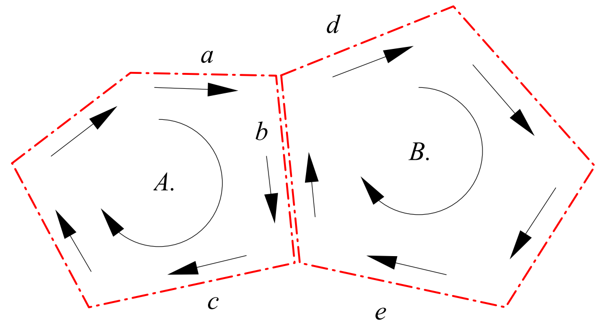
- nyitott keresztmetszetekre (opened section): $I_t = \dfrac{\sum_i l_i \cdot t_i^3}{3}$, $W_t = \dfrac{I_t}{t_{\max}}$;

- egyszerű zárt keresztmetszetekre (closed section): $I_t = \dfrac{4\cdot\Omega^2}{\oint_s \frac{\mathrm{d}s}{t}}$, $W_t = 2\cdot\Omega\cdot t_{\min}$.

E képletekben $t_{\max}$ és $t_{\min}$ a legnagyobb, illetve a legkisebb falvastagság, Ω pedig a zárt keresztmetszet középvonala által bezárt terület. Ezt úgy számítjuk ki, mint az első részben a külső körvonal által bezárt területet.

Az $\oint_s \frac{\mathrm{d}s}{t}$ integrál értékét numerikusan az $\frac{l_i}{t_i}$ hányadosok összegeként számoljuk ki.

Összetett keresztmetszetekre már kissé komplikáltabb a helyzet. Ha a keresztmetszet csak gyűrűkből áll (closed sections with multiple cells), akkor a középvonalat egymással érintkező gyűrűkre bontjuk fel. A csavaró-nyomatékot e gyűrűk veszik fel, egy hipotézis szerint a következő formula szerint: $M_t = \sum_j 2\cdot q_j \cdot \Omega_j$, ahol Ω_j a j gyűrű középvonala által bezárt terület, q_j pedig a τ csúsztatófeszültség fluxusa a fal vastagságában. E fluxus a nem közös ágakban $q_j = \tau_i \cdot t_i$ a j gyűrű bármely ágában, illetve a k gyűrűvel közös ágban $q_{jk} = q_j - q_k$. A fluxus irányát a nyilak jelzik, a közös ágban a két fluxus egymással szembe mutat.



Az elcsavarodás szöge bármely cellára azonos: $\theta = \frac{1}{G \cdot \Omega_j} \cdot \oint_{\Gamma_j} \frac{q}{t} \cdot \mathrm{d}s$, ahol G egy anyagállandó, Γ_j pedig az Ω_j pereme.

Az I_t merevség azt a nyomatékot jelenti, amikor egységnyi G-re egységnyi szögelfordulást okoz. Az elfordulás szögének képletéből tehát bármely j gyűrűre $\frac{1}{2 \cdot \Omega_j} \cdot \sum_n q_n * \cdot \frac{l_n}{t_n} = 1$, ahol az n indexek az adott gyűrűt alkotó szakaszokat jelentik, a q_n* mennyiségek pedig a nettó fluxusokat (tehát közös ágakon a különbségeket). Bővebben kifejtve $q_j * \cdot \sum_n \frac{l_n}{t_n} - \sum_k \left(q_k * \cdot \sum_m \frac{l_m}{t_m} \right) = 2 \cdot \Omega_j$, ahol q_j* a j gyűrű nem közös ágaiban levő fluxus, q_k* pedig a közös oldallal rendelkező k gyűrűben levő fluxus, az m indexek pedig a k gyűrűvel közös oldalakra vonatkoznak. Ilyen módon annyi egyenletet írhatunk fel, ahány gyűrűnk van, e lineáris egyenletrendszerből pedig a q_j* mennyiségek meghatározhatók. Ezen q_j* mennyiségek egységnyi G-re és θ-ra érvényesek, tehát a keresett nyomaték $I_t = \sum_j 2 \cdot q_j * \cdot \Omega_j$

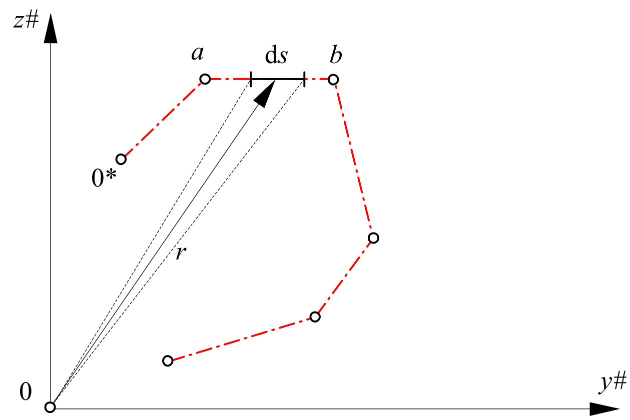
A megfelelő szilárdsági modulusz a legnagyobb nyírófeszültséget kell adja, tehát a nettó fluxusokkal a $\tau^* = \left(\frac{q_n *}{t_n} \right)_{\max}$ értéket. Mivel definíció szerint $\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}$, a szilárdsági modulusz értéke $W_t = \frac{I_t}{\left(\frac{q_n *}{t_n} \right)_{\max}}$ lesz, ahol a nevezőben levő mennyiséget már nem nehéz kiszámítani.

Olyan keresztmetszetek esetén, ahol zárt cellákhoz nyitott ágak is csatlakoznak (closed sections with fins) az I_t nyomatékot a zárt szelvényre és a nyitott ágakra számított nyomatékok összegeként kapjuk: $I_t = I_{t\,\text{nyitott}} + I_{t\,\text{zárt}}$. W_t értékét a nyitott és a zárt részekre számított mennyiségek minimuma adja: $W_t = \min(W_{t\,\text{nyitott}}, W_{t\,\text{zárt}})$.

8. A szektoriális mennyiségek (Sectorial quantities)

Ezek nyitott vékonyfalú szelvényeknél használt mennyiségek.

A szektoriális terület (sectorial area) egy tetszőleges pólus megválasztásával számított $\omega = \int_0^s r \cdot \mathrm{d}s$ mennyiség, a középvonalon végighaladó helyzetvektor által súrolt felület kétszerese. A pólus lehet a rajzolásra használt koordinátarendszer origója is. A koordinátarendszer pedig legyen a főirányok által meghatározott 12 rendszer, de a félreértések elkerülése végett jelöljük az 1. tengelyt *y#*-tel és a 2, tengelyt *z#*-tel. Az *s* ívet is egy tetszőlegesen kijelölt (de a középvonalon levő) 0* origótól mérjük.

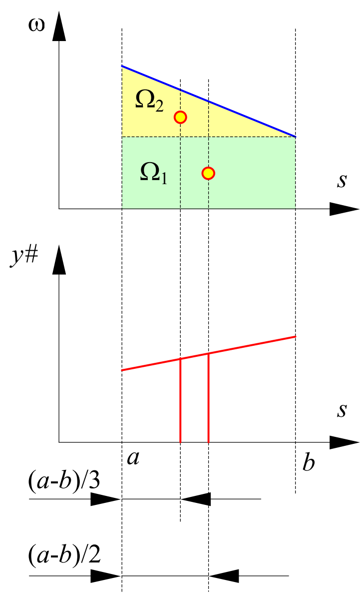


Mivel a középvonalunk egyenes szakaszokból áll, az *i* szakaszon a súrolt felület az 0*ab* háromszög területe: $\omega_i = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} y\#_b & z\#_b & 1 \\ y\#_a & z\#_a & 1 \\ y\#_0 & z\#_0 & 1 \end{vmatrix} = 0.5 \cdot (y\#_b \cdot z\#_a - y\#_a \cdot z\#_b)$, a szektoriális terület pedig $\omega = 2 \cdot \sum_i \omega_i$ lesz. Az ω_i mennyiségek előjelesek.

A szektoriális lineáris nyomatékok (sectorial linear moment) $S_{\omega y} = \int_A \omega \cdot y\# \cdot \mathrm{d}A$ és $S_{\omega z} = \int_A \omega \cdot z\# \cdot \mathrm{d}A$, ahol *A* a szelvény keresztmetszete. Mivel az *i* szakaszon $\mathrm{d}A = t_i \cdot \mathrm{d}s$, az *i* szakaszon például $S_{\omega yi} = t_i \cdot \int_i \omega \cdot y\# \cdot \mathrm{d}s$. Ezt az integrált a Veresceaghin szabállyal lehet a legegyszerűbben kiszámítani:

Ezek szerint az integrált a nemlineáris függvény diagramjának területének és a lineáris függvénynek az e diagram súlypontjának megfelelő abszcisszájú pontban számított értékének szorzata adja. Jelen esetben mindkét függvény lineáris (de a szorzatuk nem az!) és $S_{\omega yi} = t_i \cdot \left[\omega_b \cdot l_i \cdot \frac{y\#_a + y\#_b}{2} + (\omega_a - \omega_b) \cdot l_i \cdot \frac{2 \cdot y\#_a + y\#_b}{3} \right]$. Ekkor $S_{\omega y} = \sum_i S_{\omega yi}$.

Hasonlóképpen $S_{\omega zi} = t_i \cdot \left[\omega_b \cdot l_i \cdot \frac{z\#_a + z\#_b}{2} + (\omega_a - \omega_b) \cdot l_i \cdot \frac{2 \cdot z\#_a + z\#_b}{3} \right]$ és $S_{\omega z} = \sum_i S_{\omega zi}$.



A c nyíróközéppont (shear center) koordinátái e mennyiségekkel:

$y\#_c = -\dfrac{S_{\omega y}}{I_1}$ és $z\#_c = -\dfrac{S_{\omega z}}{I_2}$, ahol I_1 és I_2 a tehetetlenségi nyomatékok főértékei.

A szektoriális tehetetlenségi nyomaték (sectorial inertia moment) $I_\omega = \int_A \omega^2 \cdot \mathrm{d}A$. E mennyiséget a nyíróközépponthoz viszonyítva kell kiszámolni, tehát az 0* pólus helyett most a c pólussal kell kiszámolni az $\omega*$ szektoriális területeket. Az egyenes szakaszokon állandó vastagsággal $I_{\omega i} = t_i \cdot \int_i \omega*^2 \cdot \mathrm{d}s$. Veresceaghin szabályának alkalmazásához ekkor az $\omega*^2$ függvényt felfoghatjuk két függvény $\omega*\cdot\omega*$ szorzataként, tehát a súlypontoknak megfelelő függvényértékeket ugyanazon a diagramon olvassuk le. Ezzel:

$$I_{\omega i} = t_i \cdot \left[\omega*_b \cdot l_i \cdot \frac{\omega*_a + \omega*_b}{2} + (\omega*_a - \omega*_b) \cdot l_i \cdot \frac{2\cdot\omega*_a + \omega*_b}{3} \right] = t_i \cdot l_i \cdot \frac{4\cdot\omega*_a^2 + \omega*_b^2 + \omega*_a \cdot \omega*_b}{6}$$

és $I_\omega = \sum_i I_{\omega i}$.

A szektoriális sztatikai nyomaték (sectorial static moment) $S_\omega = \int_A \omega \cdot \mathrm{d}A$. E nyomatékot is a c pólussal kell kiszámolni, az $S_{\omega i} = 2 \cdot t_i \cdot \int_i \omega*_i \cdot \mathrm{d}s$ mennyiségek összegeként adhatjuk meg. Az integrál a szektoriális terület diagramjának területe az adott szakaszon. Mivel a középvonal egyenes szakaszokból áll, ez egy l_i magasságú trapéz, amelynek a két alapja a szektoriális terület nagysága a két végpontban. Tehát $S_{\omega i} = 2\cdot t_i \cdot \dfrac{(\omega*_a + \omega*_b)\cdot l_i}{2} = l_i \cdot t_i \cdot (\omega*_a + \omega*_b)$ és $S_\omega = \sum_i S_{\omega i}$.

III. Keresztmetszeti jellemzők mértékegységei
(Measuring Units for Sectional Properties)

1. Hosszúságok (Lengths): L (m, mm, inch, foot etc.)
2. Keresztmetszet területe (Area): L^2 (m^2, mm^2, square inch, square foot etc.)
3. Sztatikus nyomatékok (Static moments): L^3
4. Tehetetlenségi nyomatékok (Inertia moments): L^4
5. Centrifugál (planáris) nyomaték: (Centrifugal or planar moment): L^4
6. Poláris nyomaték (Polar moment): L^4
7. Tehetetlenségi sugarak (Radii of gyration): L
8. Szilárdsági modulusz (Section modulus): L^3
9. Alaktényező (Shape coefficient): dimenzió nélküli szám (dimensionless number)
10. Effektív nyírási keresztmetszet (Effective shear area): L^2
11. Egyezményes tehetetlenségi nyomaték csavarásra (Conventional polar moment for torsion): L^4
12. Plasztikus modulusz (Plastic modulus): L^3
13. Szektoriális terület (Sectorial area): L^2
14. Szektoriális lineáris nyomatékok (Sectorial linear moments): L^5
15. Szektoriális tehetetlenségi nyomaték (Sectorial inertia moment): L^6
16. Szektoriális sztatikus nyomaték (Sectorial static moment): L^4

IV. Anyagjellemzők mértékegységei, egyebek
(Meausring Units of Material Properties and Others)

1. Tömeg (Mass): M (kg, lb)
2. Erő, súly (Force, weight): F (N, lbf)
3. Nyomás (Pressure): F/L^2, P (Pa, PSI, etc)
4. Nyomaték (Moment): $F \cdot L$
5. Sűrűség (Mass per unit volume, density): M/L^3
6. Fajsúly (Weight per unit volume): F/L^3
7. Young modulusz (Modulus of elasticity): F/L^2, P
8. Nyírási modulusz (Shear modulus): F/L^2, P
9. Poisson koefficiens (Poisson ratio): dimenzió nélküli szám (dimensionless number)
10. Hőmérséklet (Temperature): T (°C, °F)
11. (Térfogati v. köbös) hőtágulási tényező (Coefficient of thermal expansion): L^3/T
12. Lineáris hőtágulási tényező (Coefficient of thermal expansion): L/T
13. Feszültség (Stress): F/L^2, P
14. Fajlagos alakváltozás (Strain): dimenzió nélküli szám (dimensionless number)
15. Szög (Angle): dimenzió nélküli szám fokokban vagy radiánban kifejezve (dimensionless number expressed in degrees or radians)