

Kakucs András

ÁRAMLÁSTAN
(jegyzet)

Tartalom

1. FOLYADÉKOK ÉS GÁZOK ÁLTALÁNOS JELLEMZÉSE.....	4
1.1. AZ ÁRAMLÁSTAN TÁRGYA.....	4
1.2. A FLUIDUMOK TULAJDONSÁGAI	4
1.2.1. <i>A fluidumok sűrűsége</i>	4
1.2.2. <i>A termikus együtthatók</i>	4
1.2.3. <i>Felületi jelenségek</i>	7
1.2.4. <i>Viszkozitás</i>	12
2. HIDROSZTIKA	15
2.1. A HIDROSZTIKAI NYOMÁS	15
2.2. A NYUGALOMBAN LEVŐ FLUIDUM EGYENSÚLYA.....	16
2.2.1. <i>Az összenyomhatatlan folyadék nyugalmi egyensúlya</i>	19
2.2.2. <i>Az összenyomott gáz izoterm nyugalmi egyensúlya</i>	22
2.2.3. <i>Az összenyomott gáz adiabatikus nyugalmi egyensúlya</i>	24
2.2.4. <i>Az összenyomott gáz politropikus nyugalmi egyensúlya</i>	25
2.2.5. <i>Pascal törvénye és annak technikai alkalmazásai</i>	26
2.2.6. <i>A hidrosztatika alaptörvényének alkalmazásai</i>	29
2.2.7. <i>A hidrosztatika alaptörvényének energetikai értelmezése</i>	34
2.3. A NYUGALOMBAN LEVŐ FLUIDUM FALAKRA KIFEJTETT HATÁSA	35
2.3.1. <i>A nyugalomban levő fluidum sík felületekre kifejtett hatása</i>	35
2.3.2. <i>A nyugalomban levő fluidum görbült felületekre kifejtett hatása</i>	40
2.3.3. <i>A nyugalomban levő fluidum zárt felületekre kifejtett hatása</i>	43
2.4. TESTEK ÚSZÁSA	44
3. A FLUIDUMOK KINEMATIKÁJA	49
3.1. A LAGRANGE-MÓDSZER ÉS AZ EULER-MÓDSZER.....	49
3.2. A FLUIDUMOK KINEMATIKÁJÁNAK ALAPFOGALMAI	53
3.2.1. <i>Az áramlást jellemző görbék és felületek</i>	53
3.2.2. <i>A hozam</i>	54
3.2.3. <i>Stacionárius és nem stacionárius áramlások</i>	54
3.2.4. <i>A folytonossági tétel</i>	55
3.2.5. <i>Örvénylő és örvénymentes áramlások</i>	57
3.3. A FLUIDUM ALAKVÁLTOZÁSI ÁLLAPOTA	58
4. A FLUIDUMOK DINAMIKÁJA.....	63
4.1. AZ IMPULZUSTÉTEL ÉS AZ IMPULZUS-NYOMATÉK TÉTELE	63
4.2. A FLUIDUM MOZGÁSEGYENLETE	66
4.2.1. <i>A fluidum feszültségi állapota</i>	66
4.2.2. <i>A viszkozitási törvény általánosítása</i>	70
4.2.3. <i>A Navier-Stokes egyenlet</i>	73
4.3. BERNOULLI EGYENLETE.....	74
4.3.1. <i>Az energia megmaradásának tétele</i>	74
4.3.2. <i>Bernoulli egyenletének egyszerűsített formái</i>	75
4.3.3. <i>A Hagen-Poiseuille sebességprofil</i>	77
4.3.4. <i>A Coriolis-együttható</i>	79
4.3.5. <i>Bernoulli egyenletének gyakorlati alkalmazásai</i>	80
4.3.6. <i>A kavitáció jelensége</i>	84
4.4. A TERMODINAMIKAI ÁLLAPOTVÁLTOZÁST SZENVEDŐ FLUIDUM ESETE.....	85
4.5. AZ ADIABATIKUSAN ÁRAMLÓ GÁZRA FELÍRT ENERGIAEGYENLET	86
4.6. SZAKADÁSI FELÜLETEK	89
4.7. HUGONIOT TÉTELEI.....	92
5. A HIDRAULIKA ALAPJAI.....	98
5.1. LAMINÁRIS ÉS TURBULENS ÁRAMLÁS	98
5.2. A CSŐSÚRLÓDÁSI VESZTESÉG	100
5.3. HELYI VESZTESÉGFORRÁSOK.....	104

5.4. GÁZVEZETÉKEK.....	107
5.5. CSATORNÁK	110
5.6. SZIVÁRGÁS PORÓZUS KÖZEGEKBEN.....	113
5.7. A KÖZEGELLENÁLLÁS ÉS A HATÁRRÉTEG	116
5.8. NEM PERMANENS ÁRAMLÁSOK.....	125
5.8.1. <i>Folyadéklengés egy U-csőben</i>	125
5.8.2. <i>Hidraulikus vezetékben fellépő átmeneti jelenségek</i>	127
5.8.3. <i>Az elektromos analógia</i>	130
6. DIMENZIÓANALÍZIS ÉS HIDRAULIKAI MODELLEZÉS.....	134
6.1. A DIMENZIÓANALÍZIS ÉS A MODELLEZÉS SZÜKSÉGESSÉGE	134
6.2. A DIMENZIÓANALÍZIS ELEMEI.....	134
6.2.1. <i>Dimenziók, mértékegységek</i>	134
6.2.2. <i>A Rayleigh-módszer</i>	136
6.2.3. <i>A Buckingham-módszer</i>	137
6.3. ÁRAMLÁSOK HASONLÓSÁGA	140
F. SKALÁR- ÉS VEKTORTEREKKEL LEÍRHATÓ MENNYISÉGEK.....	145
KÖNYVÉSZET	151

1. FOLYADÉKOK ÉS GÁZOK ÁLTALÁNOS JELLEMZÉSE

1.1. Az áramlástan tárgya

Az áramlástan, másképpen a *fluidumok mechanikája* a folyadékok és gázok mechanikájával foglalkozó tudományág. A kétfajta közeg sok szempontból azonos tulajdonságokat mutat és ugyanazok az összefüggések állapíthatók meg rájuk nézve. Emiatt a folyadékokat és a gázokat összefoglaló néven *fluidumoknak* nevezik; e szó eredeti latin jelentése „folyadék”.

A nyugvó folyadékok (és általában a fluidumok) egyensúlyi feltételeit tanulmányozó tudományágot *hidrosztatikának* nevezik, míg mozgásukkal a kinematika és a *hidrodinamika* foglalkozik. A gyakorlati szempontokat is figyelembe vevő, folyadékokat tanulmányozó műszaki tudományágot *hidraulikának* nevezik. Mindhárom elnevezésében a görög „víz” szó található meg.

Hasonló módon, a nyugvó gázok egyensúlyi feltételeit az *aerosztatika*, a mozgásban levő gázokat pedig az *aerodinamika* tanulmányozza. Elnevezésük alapja a görög „levegő” szó. A gyakorlati szempontokat is figyelembe vevő műszaki tudományág a *pneumatika* (a görög „szellő” szóból).

A hidrosztatika a hidrodinamika egyedi eseteként fogható fel. Az összenyomhatatlan fluidumokra (folyadékokra) felírt összefüggések ugyanakkor az összenyomható fluidumokra (gázokra) felírt összefüggésekből származtathatóak, ezért az *áramlástan* elnevezésen általánosan a folyadékok és gázok mechanikáját értik.

1.2. A fluidumok tulajdonságai

1.2.1. A fluidumok sűrűsége

A fluidum sűrűsége az egységnyi térfogatú fluidum tömege (a fajlagos tömeg):

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}. \quad (1.1)$$

A folyadékok sűrűségét piknométerrel vagy areométerrel mérik. A piknométer egy pontosan ismert térfogatú edény, amelynek a tömegét megméri amikor folyadékkal van tele és üres állapotában is. A tömegek különbségét a piknométer térfogatával elosztva az adott folyadék sűrűségét kapjuk. Hasonló eljárással lehet egy gáz sűrűségét is meghatározni, ekkor azonban figyelembe kell venni a légköri levegőbe merülő edényre ható hidrosztatikai felhajtóerőt is.

Az areométer egy, a folyadék felszínén úszó test, amelynek a folyadék felszíne fölé emelkedő magassága a folyadék sűrűségével arányos. Ezt a magasságot az areométer tömegének szabályozásával lehet egy állandó értéken tartani és ekkor a folyadék sűrűségét e tömeg és a folyadékba merülő rész térfogatával határozzuk meg, vagy pedig egy skálán olvassuk le, melyet általában közvetlenül sűrűség-egységekben adnak meg. Ez utóbbi típust denziméternek is nevezik. A pontosabb areométereket hőmérővel látják el.

A sűrűség reciproka a *fajlagos térfogat*, amely az egységnyi tömegű fluidum térfogata. A fajlagos térfogat jelölése v vagy υ . A *fajsúly* az egységnyi térfogatú fluidum súlya:

$$\gamma = \frac{G}{V} = \rho \cdot g = \frac{\text{N}}{\text{m}^3}, \quad (1.2)$$

ahol g a gravitációs gyorsulás.

1.2.2. A termikus együtthatók

Egy fluidum térfogata a hőmérsékletétől és a nyomásától is függ. A térfogat hőmérsékletfüggését az

$$\alpha = \frac{1}{V} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad \frac{1}{\text{K}} \quad (1.3)$$

izobár hőtágulási együttható jellemzi, mely szilárd testekre *köbös hőtágulási tényező*, folyadékokra pedig általában *hőtágulási tényező* nevet viseli.

A térfogatot az előbbi összefüggésből kifejtve a sűrűség hőmérsékletfüggésére izobár körülmények esetén a

$$\rho(T) = \frac{m}{V_0 \cdot [1 + \alpha \cdot \Delta(T - T_0)]} = \frac{\rho_0}{1 + \alpha \cdot \Delta T} \quad (1.4)$$

képletet kapjuk, ahol V_0 a T_0 referenciahőmérsékleten, például 0°C -on mért térfogat, ΔT pedig a T_0 -hoz viszonyított hőmérsékletkülönbség.

α értéke kisebb-nagyobb mértékben függ a hőmérséklettől. Amennyiben a hőtágulási együttható egy adott hőmérséklet-intervallumon állandónak tekinthető úgy a hőmérséklet megváltozását követő relatív térfogatváltozást a

$$\frac{\Delta V}{V} = \alpha \cdot \Delta T \quad (1.5)$$

egyszerű összefüggéssel számíthatjuk.

A nyomás változása szintén térfogatváltozáshoz vezet, mely gázok esetében kihangsúlyozottabb. A folyadékok (és a szilárd testek) esetében a nyomásváltozás okozta térfogatváltozás általában elhanyagolható. A hőtágulási tényezővel analóg módon meghatározott, a

$$\chi = -\frac{1}{V} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \quad \frac{1}{\text{Pa}} \quad (1.6)$$

összefüggéssel megadott izoterm kompresszibilitási tényezővel a sűrűség nyomásfüggését is kiszámíthatjuk egy állandó hőmérsékleten:

$$\rho(p) = \frac{m}{V_0 \cdot [1 - \chi \cdot \Delta(p - p_0)]} = \frac{\rho_0}{1 - \chi \cdot \Delta p} \quad (1.7)$$

A kompresszibilitási tényező reciproka az ε izoterm térfogati rugalmassági modulusz:

$$\varepsilon = \frac{1}{\chi} = -V \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \quad \text{Pa} \quad (1.8)$$

A kompresszibilitási tényező értéke nem állandó, hanem bizonyos mértékben függ a nyomástól. Ha a kompresszibilitási tényező egy adott nyomástartományon állandónak tekinthető, akkor a térfogat változását a

$$\frac{\Delta V}{V} = -\chi \cdot \Delta p \quad (1.9)$$

kifejezés adja. A negatív előjel a nyomás növekedésével járó térfogatcsökkenésre utal.

A fluidumok a kompresszibilitási tényező értéke szerint osztatók fel *összenyomható* (kompresszibilis) és *összenyomhatatlan* (inkompresszibilis) fluidumokra. Az összenyomhatatlan fluidum idealizált fogalom mivel a kompresszibilitási tényező még a szilárd testek esetén is zérónál nagyobb szám.

A folyadékok összenyomhatósága két nagyságrenddel nagyobb a szilárd testek összenyomhatóságánál, azonban elhanyagolhatóan kicsi a gázokéval szemben. Éppen ezért a gyakorlatban a folyadékokat általában összenyomhatatlannak, inkompresszibilis fluidumoknak tekintik, kivéve a nagynyomású hidraulikai rendszereket és azokat a jelenségeket, amikor nyomáslökések lépnek fel.

Állandó térfogat mellett a nyomás és a hőmérséklet változása között a

$$\beta = \frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dT} = \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \quad \frac{1}{\text{K}} \quad (1.10)$$

izochor feszültségi tényező (a nyomásváltozás hőmérsékleti együtthatója) teremt kapcsolatot.

A fluidumok kisebb-nagyobb mértékben összenyomhatók és a térfogatváltozást előidéző hatás megszűnése után visszanyerik eredeti térfogatukat, tehát rugalmas közegek. Ez a tulajdonság mechanikai rezgéseknek nyomáshullám, például hang formájában történő terjedését teszi lehetővé.

A nyomáshullám (hanghullám) a közeg nyomásának változása, mely a rezgés forrásából kiindulva a közegben pontról pontra terjed. A terjedés véges sebességű, egy bizonyos időre van szükség ahhoz, hogy a hullám egy adott távolságot megtegyen. Ez a sebesség a *c hangsebesség* (a rövidítés a latin *celeritas* szóból ered), mely a közeg anyagától és állapotától függ és amelyet Newton képletével adhatunk meg:

$$c = \sqrt{\frac{\varepsilon_{ad}}{\rho}}, \quad (1.11)$$

ahol ε_{ad} az adiabatikus térfogati rugalmassági modulusz. Összenyomhatatlan fluidumokra a térfogati rugalmassági modulusz végtelen nagy (ε a $\chi = 0$ kompresszibilitási tényező reciproka), tehát a nyomáshullám terjedési sebessége is végtelen nagy lenne. A folyadékok és a szilárd anyagok is – bár kis mértékben – összenyomhatók, emiatt a nyomáshullámok terjedési sebessége bármely közeg esetében egy véges érték. Mivel az összenyomhatóság a gáz–folyadék–szilárd halmazállapot sorrendjében csökken, a nyomáshullámok terjedési sebessége ugyanebben a sorrendben növekedik.

Az izoterm térfogati rugalmassági modulusz definíciójához hasonlóan az adiabatikus térfogati rugalmassági modulusz:

$$\varepsilon_{ad} = -V \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{ad}. \quad (1.12)$$

E mennyiség ideális gázok esetében az adiabatikus állapotváltozás egyenletének (a Poisson-egyenlet: $p \cdot V^\kappa = \text{konst.}$) logaritálásával határozható meg:

$$\ln(p \cdot V^\kappa) = \ln p + \kappa \cdot \ln V = \ln \text{konst.}, \quad (1.13)$$

ahonnan, a kapott összefüggés differenciálásával:

$$\frac{dp}{p} + \kappa \cdot \frac{dV}{V} = 0. \quad (1.14)$$

A tagok átrendezésével

$$\kappa \cdot p = -V \cdot \frac{dp}{dV}, \quad (1.15)$$

amelyet az 1.12. egyenlettel összevetve megkapjuk a keresett moduluszt:

$$\varepsilon_{ad} = \kappa \cdot p. \quad (1.16)$$

Megjegyzendő, hogy a Boyle-Mariotte törvény felhasználásával az előbbi eljárással az ideális gáz izoterm térfogati rugalmassági moduluszára az $\varepsilon = p$ összefüggést kapjuk, az izobár hőtágulási együttható és az izochor feszültségi tényező pedig egyaránt az abszolút hőmérséklet reciproka lesz ($\alpha = \beta = 1/T$).

Az adiabatikus térfogati rugalmassági modulusz és a sűrűség kifejezésével a hullámok terjedési sebességét egy ideális gáz esetében

$$c = \sqrt{\frac{\kappa \cdot R \cdot T}{\mu}} \quad (1.17)$$

formában kapjuk.

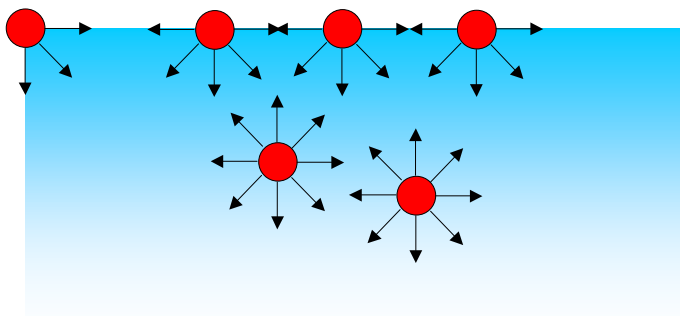
1.2.3. Felületi jelenségek

A különböző halmazállapotú fázisokat elválasztó határfelületeken végbemenő jelenségeket *felületi jelenségeknek* nevezzük.

Számos ilyen jelenséget figyelhetünk meg:

- egy vékony csőből lassan kiáramló folyadék cseppenként távozik és nem folyamatos sugárban folyik ki;
- egy folyadék szabad felszíne olyan tárgyakat is megtarthat, melyek egyébként nagyobb sűrűségük miatt elsüllyednének (ilyen például az óvatosan a víz felületére fektetett borotvapenge vagy pénzérme, bizonyos rovarok);
- a folyadékok a szilárd felületekhez hozzátapadhatnak (nedvesítik azokat);
- egy szűk csőben (kapillárisban) a folyadék szintje „magától” felemelkedhet vagy lesüllyedhet;
- a lyukacsos szerkezetű anyagok folyadékokat vagy gázokat köthetnek meg.

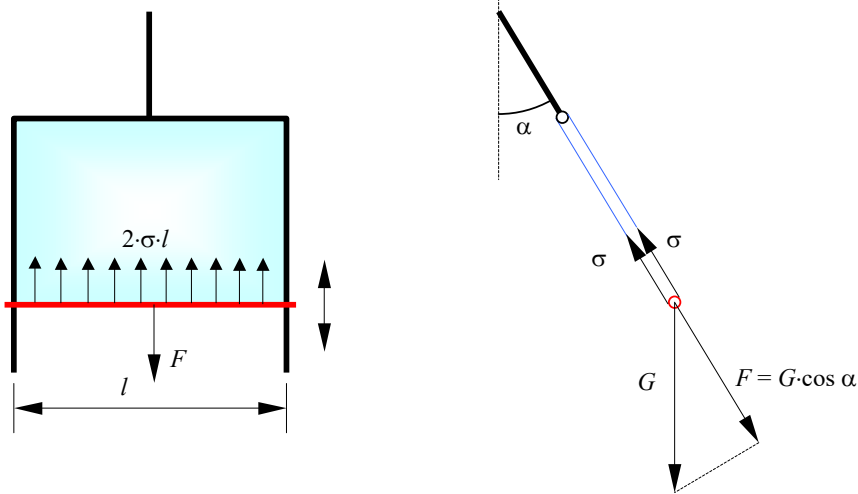
A felületi jelenségek azt mutatják, hogy a folyadékok szabad felszíne egy kifeszített membránként viselkedik. Ez a tapasztalat könnyen magyarázható a molekulák között ható erőkkel (1.1. ábra): míg a folyadék belsejében levő molekulákra a közöttük fellépő vonzóerő a hatásgömbön belül minden irányban egyformán hat, addig a folyadék szabad felszínén és annak közelében a vonzóerők eredője a folyadék felületére merőleges és befele mutat.



1.1. ábra. A felületi feszültség magyarázata

A befele mutató erők miatt a hatásgömb sugarával egyenlő vastagságú felületi réteg nyomást gyakorol a folyadék belsejére – ez a *belső nyomás*.

A felületi rétegben található molekulák közötti vonzóerő a folyadékfelszín felületét igyekszik csökkenteni, ezt a jelenséget az 1.2. ábrán látható kengyeles eszközzel lehet tanulmányozni.



1.2. ábra. A felületi feszültség mérése

Az ábrán egy drótkeret látható, melynek az alsó része a keret síkjában szabadon elmozdulhat. A keretet vékony folyadékfilm, például szappanos vízből előállított hártya tölti ki. A hártya vastagsága ugyan csekély, de a molekulák méretéhez viszonyítva jelentős és egy olyan folyadékrétegnek tekinthető, melynek mindkét szabad oldalát egy-egy felületi réteg alkotja. A keret mozgó részét a felületi feszültséget kiegyensúlyozó F erő tartja (ezt az erőt a kengyel megdőlésével lehet szabályozni, mivel F a mozgó rész súlyának a membrán síkjára eső vetülete):

$$F = 2 \cdot \sigma \cdot l, \quad (1.18)$$

ahol a σ arányossági tényező az adott határfelület *felületi feszültsége*, mely az egységnyi hosszúságon ható erővel azonos, így N/m-ben fejezhetjük ki. A képletben szereplő 2-es a folyadékhártya két oldala miatt került be. σ az egymással határos közegek anyagától függ, de értékét ugyanakkor a nyomás és a hőmérséklet is befolyásolja. Felületaktív anyagok hozzáadásával (például az előbb említett szappan) jelentősen megváltoztatható.

A felszín növeléséhez a befele mutató erőkkel szembeszegülve további molekulákat kell a felületi rétegbe juttatni. Az ekkor végzett mechanikai munka arányos lesz a felületváltozással. Ha a mozgó oldalt dx távolsággal mozgatjuk lefele, akkor az F erő által végzett elemi munka

$$dL = F \cdot dx = 2 \cdot \sigma \cdot l \cdot dx = \sigma \cdot dS \quad (1.19)$$

lesz, ahol

$$dS = 2 \cdot l \cdot dx \quad (1.20)$$

a felületi réteg felületének megnövekedését jelenti (mindkét oldal felülete megnövekedik). A felületi feszültséget az előbbi összefüggés alapján fajlagos felületi energiaként is definiálhatjuk:

$$\sigma = \frac{dL}{dS} = \frac{J}{m^2}. \quad (1.21)$$

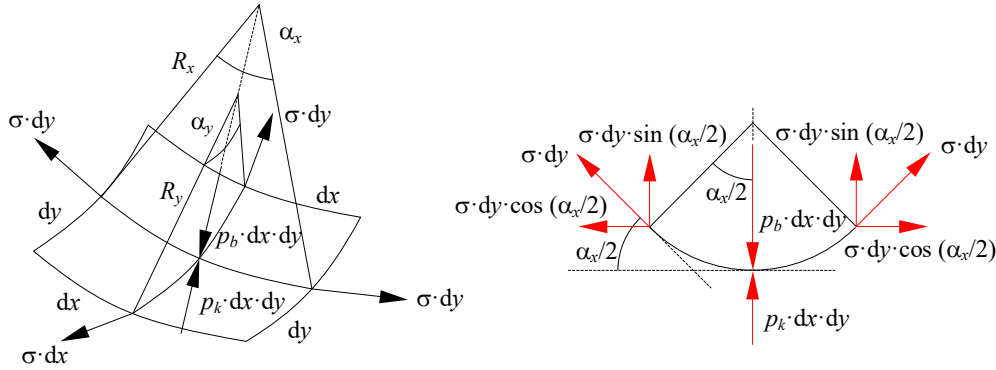
Megjegyzendő, hogy amíg egy rugalmas szilárd anyagból készített membrán kifeszítésének esetében a benne fellépő feszültség megnövekedne, a határfelület kiterjedésének ellenére a felületi feszültség értéke állandó marad.

A befektetett mechanikai munka a felületi réteg potenciális energiáját növeli meg. A nyugalomban levő rendszer stabil egyensúlyának feltétele a potenciális erő minimuma, tehát a folyadék felszíne igyekezik a minimális felületnek megfelelő formát felvenni. Külső erőterektől mentes állapotban nyugvó homogén folyadékokra ez a minimum a gömb felszínének felel meg.

A folyadék belső nyomását a görbült felületen kijelölt elemi tartomány tanulmányozásával határozhatjuk meg, ezért azt még görbületi nyomásnak is nevezik. Ezt a nyomást közvetlenül megmérni nem lehet, mivel a folyadék határfelülete a bemártott mérőeszköz körül is folyamatos lesz.

A kijelölt felületelem (1.3. ábra) a reáható erők hatására egyensúlyban kell legyen. Ezek az erők a felületi feszültségből, a külső és a belső nyomásból erednek. A függőleges vetületekkel:

$$\sigma \cdot [2 \cdot dx \cdot \sin(\alpha_y / 2) + 2 \cdot dy \cdot \sin(\alpha_x / 2)] = (p_b - p_k) \cdot dx \cdot dy. \quad (1.22)$$



1.3. ábra. A görbületi nyomás meghatározása

Az ívelemek hossza a görbületi sugarakkal és a nyílásszögekkel is kifejezhetők:

$$dx = R_x \cdot \alpha_x, \quad dy = R_y \cdot \alpha_y, \quad (1.23)$$

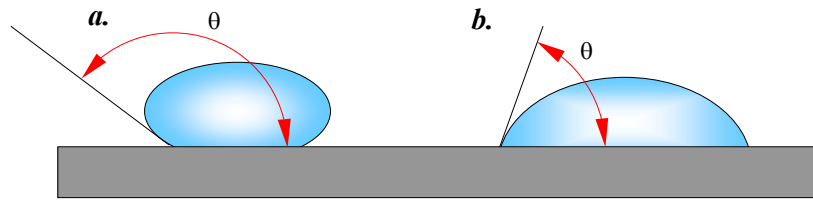
a szögek kicsinysége miatt pedig $\sin \alpha$ helyett α -t írhatunk (radiánban kifejezett kis szögek esetén $\sin \alpha \approx \alpha$). Ekkor az erők egyensúlyából a belső nyomást a következőképpen lehet meghatározni:

$$p_b = p_k + \sigma \cdot \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right), \quad (1.24)$$

mely formulát *Laplace-képletnek* neveznek.

A folyadék felületi rétege rendszerint egy másfajta közeggel érintkezik, ez lehet például egy másik folyadék, az edény szilárd fala vagy a felszín feletti gáz. Ezeknek az anyagoknak a molekulái kölcsönhatásba lépnek a folyadék felületi rétegében található molekulákkal és ezáltal módosítják a folyadék σ felületi feszültségét. Éppen ezért szigorúan véve a felületi feszültséget ilyen esetben *határfelületi* feszültségnek nevezik, a felületi feszültségről pedig a saját telített gőzeivel érintkező folyadék esetében beszélünk. Az 1.1. ábrán látható eset idealizált, ugyanis a párolgás miatt a folyadékfelszín felett tökéletes vákuumot előállítani nem lehet.

A folyadék (és általában bármely anyag) molekulái között ható összetartó erőket *kohéziós erőknek* nevezik, míg két különböző anyag molekulái között ható kötésesterőket *adhéziós erőknek* hívják.



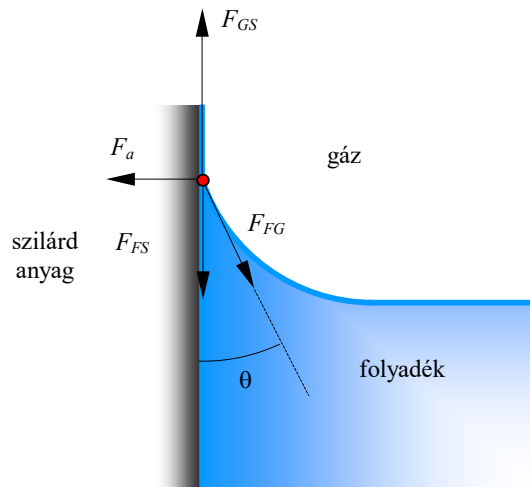
1.6. ábra. Felületet nem nedvesítő (a.) és felületet nedvesítő (b.) folyadék cseppje

Ha az adhéziós erő nagyobb, mint a kohéziós, az illető folyadék *nedvesíti* az adott felületet (ugyanaz gázokra is fennállhat, ilyenkor *adszorpcióról* beszélünk). Ellenkező esetben a felület nedvtaszító, nem tudja megkötni az adott folyadék molekuláit.

Az 1.4. ábra egy vízszintes szilárd felületre helyezett folyadékcseppeket mutat be. Mindkét cseppet a gravitáció egy kissé ellapítja. A jobb oldali cseppet alkotó folyadék nedvesíti a felületet, ezért az szétterül a felületen. A bal oldali cseppet alkotó folyadék viszont nem nedvesíti a felületet, alakja a gömbhöz közelít.

A folyadék felszíne és a szilárd felület által bezárt θ szög az *illeszkedési szög*. Ha a folyadék nem nedvesíti a felületet (mint például a higany az üveget) ez a szög derékszögnél nagyobb, ellenkező esetben, nedvesítő folyadékoknál (például víz és üveg) pedig θ a derékszögnél kisebb.

Az illeszkedési szöget az adhéziós, a kohéziós és a gravitációs erők egyensúlya adja (1.5. ábra). Az ábrán a három közeg közös határát jelentő pontban levő részecskére a határfelületi feszültségekből származó erők hatnak: a folyadék és a gáz határfelületén fellépő F_{FG} erő, a folyadék és a szilárd anyag határfelületén fellépő F_{FS} erő és a gáz és a szilárd anyag határfelületén fellépő F_{GS} erő (ha közegek közös érintkezési vonalának egységnyi hosszára írjuk fel e mennyiségeket akkor a megfelelő σ_{FG} , σ_{FS} és σ_{GS} felületi feszültségekkel is dolgozhatunk.). Ha a részecske saját súlyát elhanyagoljuk, akkor e három erővel az F_a adhéziós erő tart egyensúlyt.



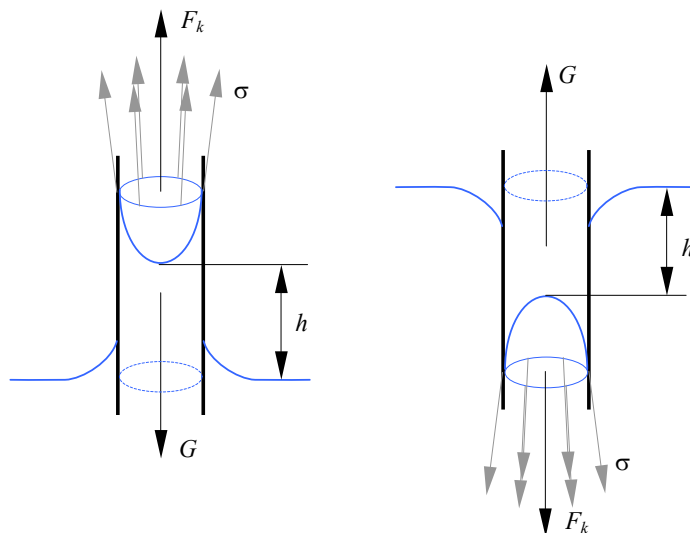
1.5. ábra. A meniszkusz és az illeszkedési szög egy felületet nedvesítő folyadék esetén

Az 1.5. ábrán a folyadék hozzátapad az edény falához és felszíne a fal közelében homorú – ez a meniszkusz. A meniszkusz θ szögét a feltüntetett erők egyensúlyából határozhatjuk meg. A

folyadék és az edény határfelületén a folyadékrészecskékre ható kohéziós erő az adhéziós erőnél ezen esetben kisebb.

Nem nedvesítő folyadék esetében a meniszkusz görbülete fordított, a folyadék felszíne domború, a kohéziós erő pedig nagyobb az adhéziósnál. A derékszögű θ szög határeset: az adhézió és a kohézió éppen kiegyenlítik egymást, a meniszkusz pedig ilyenkor eltűnik (például víz és ezüst esetében).

Még feltűnőbb az adhéziós és a kohéziós erők hatása kis átmérőjű *hajszálcsövek* esetén (1.6. ábra). A hármaskontaktvonalon ható határfelületi feszültségek az F_k *kapilláris erőt* eredményezik. A felszín görbületének ismeretében a Laplace-képlettel a szabad felszínen meghatározott nyomást ez esetben kapilláris nyomásnak nevezik.



1.6. ábra. Hajszálcsövesség

A kapilláris erő nedvesítő folyadékok esetén felfele (pontosabban: a folyadékfelszíntől kifelé) mutat. A kapillárisban folyadék felszíne homorú és a szabad felszín fölé emelkedik. A kapilláris emelkedés mértéke a kapilláris erő és a folyadékoszlop súlyának egyenlőségéből adódik.

Nem nedvesítő folyadékok esetében a kapilláris erő lefele (a folyadék belseje fele) mutat. A kapillárisban a folyadék felszíne domború és a szabad felszín alatt van. A kapilláris erő ekkor a „hiányzó” folyadékoszlop súlyával egyenlő.

Ezen egyenlőségekből a kapilláris magasság jó közelítéssel:

$$h = \frac{2 \cdot \sigma \cdot \cos \theta}{\rho \cdot g \cdot r}, \quad (1.25)$$

ahol ρ a folyadék sűrűsége és r a kapilláris sugara (a képlet azért közelítő, mert elhanyagolja a meniszkusz térfogatának megfelelő folyadékmennyiséget). Ez az összefüggés Jurin törvénye, melyet az irodalom néha „tökéletesen nedvesítő” folyadékokra ad meg ahol $\theta = 0$.

A felületi feszültséget különböző eljárásokkal, például a hajszálcsövekben fellépő szintkülönbség meghatározásával (Jurin törvényének alkalmazása) vagy pedig az 1.2. ábrán látható elven alapuló kengyeles módszerrel mérik. Értéke a hőmérséklettől függ és ezt a függőséget empirikus képletekkel szokták leírni. Ilyen például az Eötvös-képlet: $\sigma \cdot v_m^{2/3} = k \cdot (T - T_k)$, ahol v_m az illető folyadék móltérfogata (moláris térfogata: 1 mólnyi anyag térfogata) és T_k annak kritikus hőmérséklete, k pedig az adott anyagra jellemző állandó.

1.2.4. Viskozitás

Az áramlás során a fluidumok belsejében és az áramcső határán fellépő súrlódás következtében egy bizonyos ellenállás lép fel, melyet viszkozitásnak neveznek. Ez az ellenállás nem azonos a szilárd testek súrlódásával. A jelenség magyarázata folyadékokra és gázokra eltérő: folyadékok esetében a viszkozitás forrása a molekulák között ható összetartó erő, míg gázok esetében az eltérő sebességű molekulák ütközése során fellépő impulzuscserre jut fő szerephez.

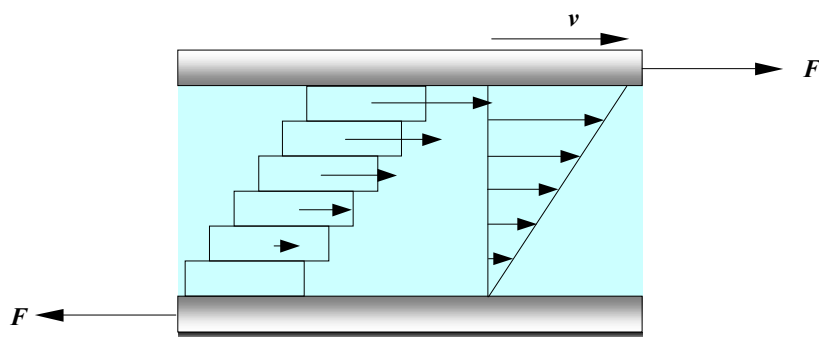
A folyadékok viszkozitása a hőmérséklet növekedésével csökken, mivel a molekulák növekvő hőmozgása miatt a közöttük fellépő kohéziós erő hatása is csökken. A gázoknál viszont éppen fordított a helyzet: a hőmérséklet növekedése a viszkozitás növekedéséhez vezet, mivel a molekulák ütközéseinek száma és ezzel az impulzuscserre intenzitása a hőmérséklet növekedésével együtt növekszik.

A nyomás viszkozításra gyakorolt hatása csekély, a tapasztalat szerint a nyomás növekedése a viszkozitás enyhe csökkenéséhez vezet. A nyomás változásának hatása a folyadékok viszkozításra azért csekély, mert a folyadékok gyakorlatilag összenyomhatatlanok és így a külső nyomás belső szerkezetüket csak igen kis mértékben befolyásolja. Gázok esetén a nyomás növekedése nem változtatja meg a molekulák impulzusát, tehát a viszkozitás ez esetben sem mutat lényeges változást.

Nyugalmi állapotban, a szilárd testekkel ellentétben, a fluidumok súrlódása zéró. E kijelentésnek a következménye az, hogy a nyugalomban levő fluidum által kifejtett nyomásnak csak normális (a felületre merőleges) összetevője van.

Amikor a fluidum áramlási sebessége nem halad meg egy bizonyos mértéket, akkor a tapasztalat szerint áramlás *lamináris* vagy *réteges*: a részecskék az áramlás irányában, egymással párhuzamosan mozognak. Az 1.7. ábra egy ilyen esetet mutat be: a két sík felület v sebességű relatív elmozdulása a közrezárt fluidumban egy lamináris áramláshoz vezet (ez a *Couette-áramlás*).

A két felület közvetlen közelében a fluidum molekuláinak átlagos sebessége megegyezik az adott felületek sebességével. Ez részben az adhézió hatása (folyadékok esetében kihangsúlyozottabb), de a molekulák rendezetlen mozgása is szerephez jut: a molekulák a falnak ütközve felveszik annak sebességét s így azzal együtt mozognak – ez a kísérletileg észlelt *tapadási* törvény. Az elmozduló réteg a szomszédos rétegen csúszva a kohézió és a molekulák ütközése folytán azt is mozgásba hozza. A fluidumréteg vastagságában, az áramlás keresztmetszetén, ha eltekintünk a molekulák diffúziós mozgásától a sebességek eloszlása (vagyis a *sebességprofil*) a Couette-áramlás esetében lineáris lesz.



1.7. ábra. Lamináris áramlás: a folyadékrétegek elmozdulása és a sebességprofil

Az egyenletes sebességű mozgás fenntartásához egy bizonyos erő kifejtéséhez van szükség, mely a folyadék áramlása közben fellépő belső súrlódási erőt kell legyőznie. Ennek a *viszkózus* erőnek nagyságát Newton kísérletileg megállapított viszkozitási törvénye adja:

$$F = S \cdot \tau = -S \cdot \eta \cdot \frac{dv}{dl}, \quad (1.26)$$

ahol τ az egységnyi felületen ható tangenciális igénybevétel (nyírófeszültség), S a két sík egymással szemben álló közös felülete, a dv/dl arány pedig a sebesség gradiensét (változását) adja a fluidumréteg vastagságában. A sűrűlési erő a fluidum természetétől függ, melyet az η , *dinamikai viszkozitásnak* (vagy dinamikai viszkozitási együtthatónak) nevezett mennyiség vesz figyelembe. Mivel a sűrűlési erő iránya ellentétes a sebesség irányával, a viszkozitás képletébe egy mínusz előjelet is be kell vezetni.

η anyagi jellemző, mely a hőmérséklet és – rendszerint elhanyagolható mértékben – a nyomás függvénye, mely függőséget empirikus, például $\eta = k \cdot T^n$ alakú képletekkel szoktak megadni. A viszkozitás reciproka az inkább csak a mérnöki tudományokban használt *fluiditás* vagy *folyékonyság*: $\varphi = 1/\eta$.

Az ideális fluidum viszkozitása nulla, fluiditása végtelen, tehát az sűrűlés nélkül áramlik. Ilyen anyag azonban nem létezik: még a szuperfolyékony anyagok esetén is a viszkozitás egy zérónál nagyobb szám (a szuperfolyékony anyagok gyakorlatilag ellenállás nélkül áramlanak, a szilárd felületeken vékony folyadékfilmet képezve az edény falán felkúsznak és így szintkülönbségeket is kiegyenlítene).

A dinamikai viszkozitás mértékegysége $\text{Pa} \cdot \text{s}$. A nemzetközi mértékegységén kívül gyakran találkozhatunk CGS (centiméter–gramm–szekundum) rendszerben használt mértékegységével, a *poise*-zal: $1 \text{ P} = 0.1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

A dinamikai viszkozitás és a sűrűség arányát *kinematikai viszkozitásnak* nevezik:

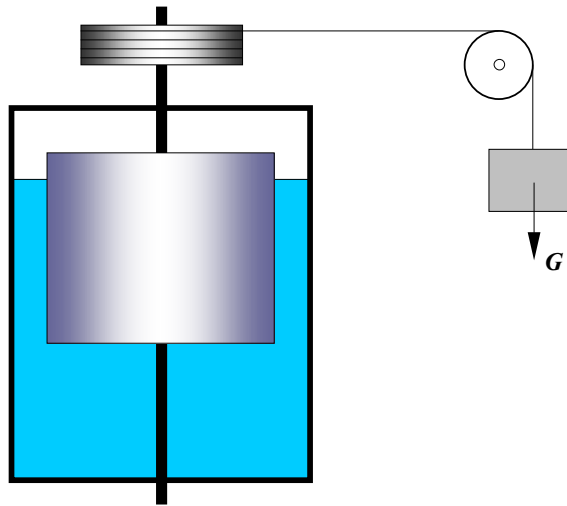
$$\nu_k = \frac{\eta}{\rho} \quad \frac{\text{m}^2}{\text{s}}, \quad (1.27)$$

CGS mértékegysége a *stokes*: $1 \text{ St} = 10^{-4} \text{ m}^2 / \text{s}$.

A viszkozitási törvény tehát a sűrűlési erő nagysága és a deformáció sebessége között állapít meg összefüggést. Ha a τ csúsztatófeszültséget a sebesség gradiensének függvényében ábrázoljuk, akkor Newton viszkozitási törvényének megfelelően egy η dőlésű egyenest kapunk. A lineáris Newton-törvény azonban nem általános érvényű. Azokat a fluidumokat, melyekre az említett összefüggés igaz, *newtoni folyadékoknak* nevezik. A nem newtoni fluidumok esetében az összefüggés nem lineáris, például a sebesség gradiense valamilyen hatványon szerepel vagy η nem állandó. Ekkor τ -t a sebesség gradiensének függvényében ábrázolván egy görbét kapunk: ez a *folyási görbe*. A nem newtoni folyadékokkal a *reológia* foglalkozik. Nem newtoni folyadék például a vér.

A viszkozitást különböző viszkoziméterekkel mérik, mint például a rotációs Couette-féle viszkozitásmérő. Működési elve az 1.8. ábrán látható: két koncentrikus hengerből áll, melyek közti térfogatot a mérendő folyadék tölti ki. A külső henger rögzített, a belső pedig állandó fordulatszámmal forog. A sebesség gradiensét a forgó felület kerületi sebességének és a két hengerfelület közötti távolságnak a hányadosa adja. A forgó henger felületén fellépő τ nyírófeszültség egy fékező nyomatékot fejt ki, mely a hengert forgató M nyomatékkal van egyensúlyban. A mérés elvégzésekor a forgó henger alaplapjára kifejtett fékező hatást is figyelembe kell venni.

A gyakorlatban több egyéb fajta viszkozitásmérő is elterjedt, melyek például előírt körülmények között mérik egy bizonyos folyadékmennyiség kiáramlásának idejét (például az Engler, Ostwald és Ubbelohde viszkoziméterek) vagy egy rögzített méretű és tömegű golyó süllyedési sebességét (ilyen a Höppler viszkoziméter).



1.8. ábra. *A Couette-viszkozitásmérő működési elve*

Ezek közül a műszaki gyakorlatban elterjedtebb az Engler-viszkoziméter, mely egy állandó hőmérsékletű termosztát-edényből áll, amelynek alján egy kapilláris van. A viszkoziméter felépítése és a mérés folyamata szabványosított. A mérés során a kapillárison keresztül egy adott térfogatú folyadékmennyiséget hagyunk kifolyni. A viszkozitást a folyadék kifolyási idejének és az azonos térfogatú 20 °C hőmérsékletű desztillált víz kifolyási idejének hányadosa adja, melyet Engler-fokban (°E) adnak meg. Ez a hányados tulajdonképpen a relatív viszkozitást adja, melyet át lehet számítani a tulajdonképpeni viszkozitásra.

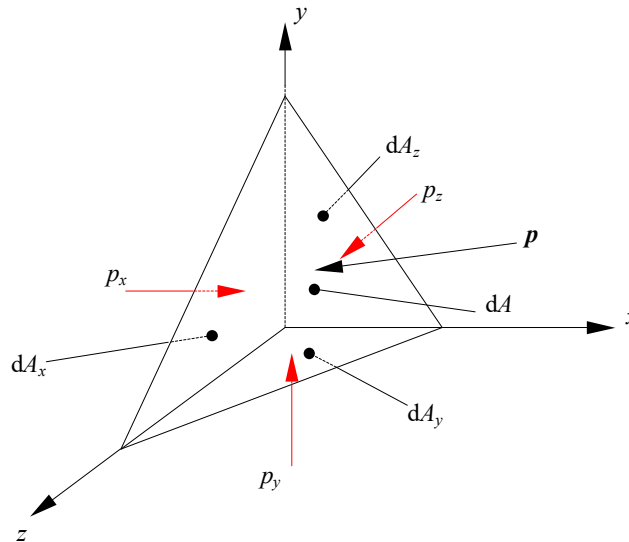
A Höppler-viszkoziméter egy enyhén megdőntött üveghengerből áll, amelyet a mérendő folyadék tölt ki. Működési elve a Stokes-kísérleten alapul: a hengerbe egy kalibrált golyót ejtünk, mely esési sebességét a közegellenállás hamarosan állandósítja. A viszkozitás megállapítása az állandósult sebesség mérésével történik (tulajdonképpen azt az időt mérik meg, amely alatt a golyó megteszi a henger falán levő két bekarcolt jel közötti ismert távolságot). Az üveghenger enyhe megdőntése az átlátszatlan vagy sötét folyadékok tanulmányozásakor szükséges.

2. HIDROSZTATIKA

2.1. A hidrosztatikai nyomás

A fluidum a kontinuumok egyike, melynek tanulmányozásakor eltekintünk annak molekuláris szerkezetétől. Mechanikája egy infinitezimális térfogatelem tanulmányozásán alapul: a vizsgálat célja a feszültségi és az alakváltozási állapot meghatározása.

A nyugalomban levő (tulajdonképpen: a nem áramló) fluidumokban a Newton-féle viszkozitási törvény értelmében csúsztató feszültségek nincsenek jelen, a normális komponensek pedig a hidrosztatikai nyomást adják. E komponensek meghatározásához a fluidum térfogatából annak az adott tanulmányozott pontja körül egy olyan, tetraéder alakú végtelen kis térfogatelemet különítünk el, melynek három oldallapja a koordinátasíkokkal párhuzamos (2.1. ábra), a negyedik pedig tetszőleges helyzetű. Ez utóbbi felületét dA -val jelöljük, a koordinátasíkokkal párhuzamos oldallapok felülete pedig ennek a dA felületnek a megfelelő vetületei lesznek (dA_x , dA_y és dA_z).



2.1. ábra. A tetraéder alakú térfogatelem egyensúlya

Mind a négy oldallapra a merőleges irányú (az illető oldallap normálisával párhuzamos) hidrosztatikai nyomás hat. A négy oldallapra kifejtett erő hatása alatt a tetraéder egyensúlyban kell legyen, mely feltételt a koordinátatengelyekre eső vetületek egyensúlyaként írhatjuk elő.

Ha a tetszőleges helyzetű oldallap normálisának iránytényezői l , m és n , akkor a koordinátasíkokkal párhuzamos oldallapok felületeit

$$dA_x = l \cdot dA \quad (2.1)$$

formájú összefüggések adják.

Egy adott oldallapra ható erőt a nyomás és a felület szorzataként számíthatjuk ki, például a dA_x felületre azt a

$$dF_x = p_x \cdot dA_x \quad (2.2)$$

szorzat adja.

A tetszőleges helyzetű felületre ható erő vetületeit szintén az irányítványozókkal számíthatjuk ki, például annak az x tengelyre eső vetülete

$$dF'_x = l \cdot p \cdot dA \quad (2.3)$$

lesz, amely, mivel a tetraéder egyensúlyban van, az előbb kiszámított dF_x erővel egyenlő kell legyen.

Így mindhárom irány szerint egy-egy

$$p_x \cdot dA_x = l \cdot p \cdot dA \quad (2.4)$$

formájú egyenletet kapunk. A dA_x felületet a 2.1. képlettel helyettesíthetjük, így a 2.4. formájú egyenleteket egyszerűsíthetjük és összevonhatjuk:

$$p_x = p_y = p_z = p. \quad (2.5)$$

A kapott összefüggés szerint a nyugalomban levő fluidum bármely pontjában a hidrosztatikai nyomás minden irányban azonos.

A csúsztató feszültségek hiányában a nyugvó fluidum feszültségállapotát a hidrosztatikai nyomás egyértelműen leírja. Megegyezés szerint a nyomás pozitív értékének megfelelő vektor a térfogatelem belseje fele mutat (tehát a térfogatot csökkenteni igyekszik, ellentétben a szilárdságban a normális σ feszültségek pozitív irányával, mely kifele mutat):

$$\mathbf{p} = -\mathbf{n} \cdot p, \quad (2.6)$$

ahol \mathbf{n} a felületre merőleges, kifele mutató egységvektor, a felület normálisa az adott pontban.

A nyugvó fluidum hidrosztatikai nyomása manométerekkel vagy piezométerekkel mérhető, a mért értékek pedig nem függenek a mérési iránytól.

2.2. A nyugalomban levő fluidum egyensúlya

A 2.5. összefüggés szerint a nyugalomban levő fluidumok belsejében a hidrosztatikai nyomás értéke nem irányfüggő, viszont ez az összefüggés még nem határozza meg annak értékét.

Akárcsak a szilárd testek esetében, a fluidumok feszültségi állapotát is a felületi és a térfogati erők határozzák meg, mint például a felületükön ható atmoszférikus nyomás és a térfogatukban ható saját súlyuk.

A nyugalomban levő fluidum egyensúlyának tanulmányozásához belőle egy téglatest alakú elemi térfogatot különítünk el (2.2. ábra). Az erre ható felületi erők lehetnek a szomszédos elemi térfogatokkal közös határfelületen ható feszültségekből származó erők (esetünkben tehát a hidrosztatikai nyomásból eredő erők), a fluidum felszínén ható nyomásnak megfelelő erő vagy pedig az edény falának reakciója (ha a tekintett elemi térfogat adott oldallapja a fluidum határfelületén van).

A térfogatelem éleinek hossza rendre dx , dy és dz , tömege pedig

$$dm = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz, \quad (2.7)$$

(ahol ρ a fluidum sűrűsége) a reá ható térfogati erő vetületei pedig

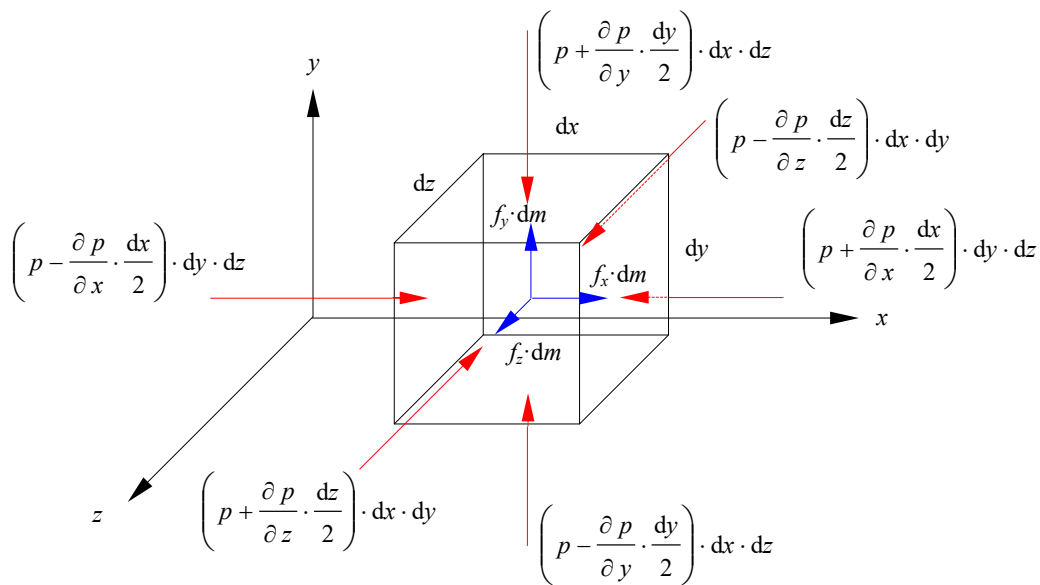
$$dF'_x = f_x \cdot dm \quad (2.8)$$

formájúak, ahol f_x az egységnyi tömegre ható \mathbf{f} térfogati erő megfelelő vetülete; ez utóbbi gyorsulás jellegű mennyiség.

A térfogatelem középpontjában a hidrosztatikai nyomás értéke p , mely a térfogatelemre ható erők miatt mindhárom koordinátatengely irányában a távolság függvényében változik. E változás mértékét a $\partial p / \partial x$ formájú parciális deriváltak adják. E deriváltakat az elem kicsisége miatt annak tartományán állandónak tekinthetjük. Ekkor például az ábra szerinti jobb oldali lapra ható nyomás

$$p'_x = p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2}, \quad (2.9)$$

lesz, ahol a középpontban ható p nyomáshoz viszonyított különbséget a változás sebességének és a távolságnak a szorzata adja. Megjegyzendő, hogy az így kiszámított nyomás csupán csak az oldallap közepén érvényes értékkel azonos, mivel annak értéke e lap mentén is változik. Azonban mivel ezt a változást lineárisnak tekintettük, a további számításokban a nyomás változó értékét az imént kiszámított középértékkel helyettesíthetjük.



2.2. ábra. A téglatest alakú térfogatelem egyensúlya

A térfogatelem egyensúlyát most is a koordinátatengelyek irányában felírt vetületi egyenletekkel adhatjuk meg. Amennyiben az oldallapokon a nyomást az előbbi középértékekkel adjuk meg, az x tengely irányában ható vetületek egyensúlyát a következőképpen kapjuk:

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) \cdot dy \cdot dz + f_x \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \rho - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) \cdot dy \cdot dz = 0. \quad (2.10)$$

Egyszerűsítés után

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f_x \cdot \rho. \quad (2.11)$$

Hasonlóképpen eljárva a másik két irány szerint azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = f_x, \quad \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = f_y, \quad \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = f_z, \quad (2.12)$$

mely három összefüggés a következő vektoriális egyenletben vonható össze:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \text{grad } p = \mathbf{f}, \quad (2.13)$$

ahol \mathbf{f} a térfogati erő vektora.

A fenti levezetésben feltételeztük, hogy a fluidum sűrűsége állandó. A fluidum sűrűsége azonban megváltozhat, az lehet például a nyomás és a hőmérséklet függvénye. Amennyiben ρ csak a nyomástól függ, akkor e függőséget egy $\rho = \rho(p)$ egyenlettel írjuk le s ez esetben a fluidumot *barotróp*nak nevezzük. Ez az eset a gyakorlatban inkább gázok esetében fordul elő.

Barotróp fluidumok esetében tehát az előbbi egyenletben a sűrűség a nyomás, a nyomás pedig a geometriai koordináták függvénye. Ekkor az összetett függvény deriválására érvényes láncszabály

alkalmazásával (mely szerint $\text{grad} \int_0^p \frac{1}{\rho} dp = \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad } p$) a következő alakot kapjuk:

$$\text{grad} \int_0^p \frac{1}{\rho} dp = \mathbf{f}. \quad (2.14)$$

A változó felső határértékű integrált, vagyis a $P(p) = \int_0^p \frac{1}{\rho} dp$ mennyiséget nyomásfüggvénynek, nyomáspotenciálnak szokták nevezni. Az így kapott egyensúlyi egyenlet a hidrosztatika alapegyenlete vagy alaptörvénye.

Az alapegyenlet az egységnyi tömegre ható térfogati erők \mathbf{f} vektorát egy skaláris mennyiség (például a 2.13. egyenlet szerint a hidrosztatikai nyomás) gradiensevel hozza kapcsolatba, ebből következően a hidrosztatikai egyensúly csak konzervatív erőterben alakulhat ki. Ez a térfogati erő egy skaláris $U(x, y, z)$ potenciálból is származtatható:

$$\mathbf{f} = -\text{grad } U. \quad (2.15)$$

Ilyen módon az alapegyenletet egy újabb alakra hozhatjuk:

$$\text{grad} \int \frac{1}{\rho} dp + \text{grad } U = 0, \quad (2.16)$$

melyet egy tetszőleges $d\mathbf{r}$ vektorral skalárisan beszorozva annak

$$\frac{1}{\rho} \cdot dp + dU = 0 \quad (2.17)$$

differenciális formájához jutunk. Ez a forma az előbbivel ellentétben egy skaláris egyenlet. Ez utóbbi integrálásával a szintén skaláris

$$\int \frac{1}{\rho} dp + U = \text{konst.} \quad (2.18)$$

integrális formát kapjuk.

A fluidumok sztatikájának alapegyenletét, annak a gyakorlat szempontjából fontos esetekben érvényes sajátos formáit a sűrűség és a nyomás viszonyának bevezetésével írhatjuk fel.

2.2.1. Az összenyomhatatlan folyadék nyugalmi egyensúlya

Összenyomhatatlan folyadékok esetében a sűrűség állandó (a P nyomásfüggvény értéke p/ρ) így az integrális forma az egyszerű

$$p + \rho \cdot U = \text{konst.} \quad (2.19)$$

összefüggéshez vezet. A gyakorlatban az U potenciál az esetek többségében gravitációs:

$$U = g \cdot z + \text{konst.}, \quad (2.20)$$

ahol g a gravitációs gyorsulás, amely a műszaki feladatokban általában a függőlegesnek tekintett z tengellyel párhuzamos és negatív irányban hat. A gravitáció által előidézett egységnyi térfogati erő komponensei tehát ennek az egyezménynek az alapján:

$$f_x = 0, \quad f_y = 0, \quad f_z = -g. \quad (2.21)$$

A gravitációs potenciál bevezetésével az inkompresszibilis fluidumok (a folyadékok) hidrosztatikai egyensúlyát az alaptörvény

$$p + \rho \cdot g \cdot z = p + \gamma \cdot z = \text{konst.} \quad (2.22)$$

formája adja, amelyet

$$p = p_0 - \gamma \cdot z \quad (2.23)$$

formában is használnak, ahol p_0 a referenciaszinten (nulla kótán, $z = 0$) mért hidrosztatikai nyomás.

Ennek az összefüggésnek egy másik alternatív formája a

$$p = p_0 + \gamma \cdot h \quad (2.24)$$

képlet, ahol h a folyadék felszínétől mért mélység, p_0 pedig a felszíni nyomás – ez lehet például a szabad felszín feletti gáz nyomása vagy pedig egy dugattyú által gyakorolt nyomás.

Az utóbbi két egyenlet tagjait γ -val elosztva szintkülönbségekkel kifejezett relációkat kapunk, mivel a p/γ formájú tagok szintén hosszúság jellegűek.

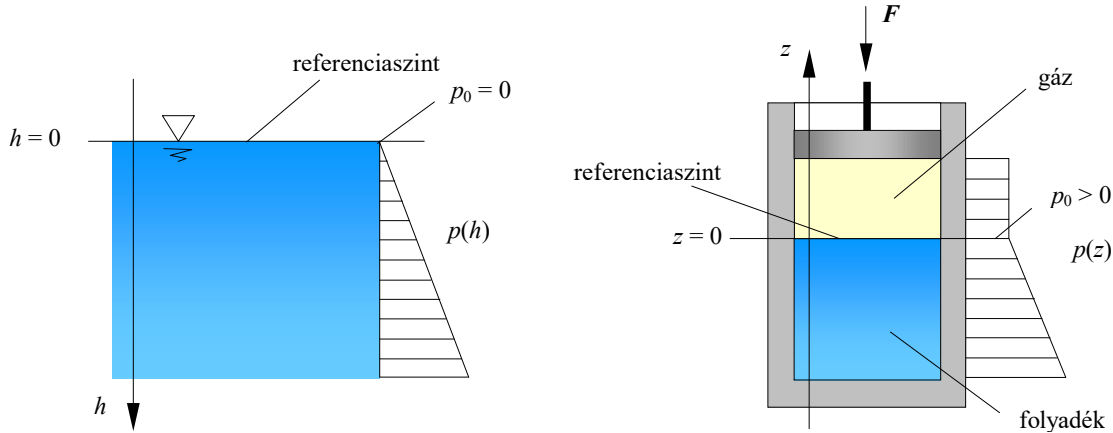
Definíció szerint azok a pontok, amelyekben az U potenciál értéke azonos, egy ekvipotenciális felületet (sík esetben görbét) adnak. Homogén gravitációs térben levő nyugvó fluidumokban az előbbieket szerint az ekvipotenciális felületek egymással párhuzamos síkok. Megállapítható, hogy a folyadék szabad felülete is egy ilyen sík, „vízszintes” ekvipotenciális felület lesz. Valójában a Föld gravitációs tere sugaras szerkezetű és az ekvipotenciális felületei gömbfelületekhez közelítenek. A hétköznapi gyakorlatban viszont e felületek nagy görbületi sugár miatt a síknak tekinthetők.

A hidrosztatikai nyomás értékét egy diagramon szokták ábrázolni, amint az a 2.3. ábrán is látható. A fentiek alapján esetünkben a diagram lineáris, esetleg konstans lesz. Amennyiben a nyomás referenciaértéke az atmoszférikus nyomás, mint ahogy az a műszaki gyakorlatban gyakran előfordul, akkor a diagram nullpontja az atmoszférikus nyomásnak felel meg és a diagramból a tényleges (*abszolút*) hidrosztatikai nyomás és a légköri nyomás különbsége, a *relatív* nyomás olvasható le:

$$p = \gamma \cdot h \quad (2.25)$$

A referenciaszint lehet a folyadék szabad felszíne, a legmélyebben fekvő pontjának megfelelő szint vagy pedig bármely tetszőlegesen megválasztott vízszintes sík is.

A 2.3. ábra jobb oldalán a dugattyú a folyadék feletti gázra fejt ki közvetlen hatását. Mivel a gázok sűrűsége jóval kisebb a folyadékok sűrűségénél (például atmoszférikus nyomáson és szobahőmérsékleten a levegő sűrűsége 1.2 kg/m^3 , ami mintegy ezredrésze a víz sűrűségének), bennük a nyomás magassággal történő változása kisebb szintkülönbségek esetében elhanyagolható. Ezért a dugattyú által létrehozott p_0 nyomást a gáz belsejében állandónak tekinthetjük.



2.3. ábra. A nyomásdiagram összenyomhatatlan folyadékokra

A hidrosztatikában a „nyugvó” fluidum fogalma azt jelenti, hogy az nem áramlik, például a tároló edényhez viszonyítva nyugalomban van. Ha ez az edény gyorsuló mozgást végez, akkor a benne nyugalomban levő fluidumra a tehetetlenségi erő is hat – ekkor a fluidum *relatív* nyugalmaról beszélünk, ellentétben az eddig tárgyalt *abszolút* nyugalomról. A fluidumra ható tehetetlenségi erő a tartály egyenesvonalú gyorsuló vagy lassuló mozgása mellett az elfordulás (forgó mozgás) következménye is lehet. Ekkor az egységnyi tömegre eső térfogati erőt a gyorsulásvektor komponenseivel adhatjuk meg:

$$f_x = a_x, \quad f_y = a_y, \quad f_z = a_z, \quad (2.26)$$

melyeket az edény mozgástörvényéből számíthatunk. A megfelelő potenciált ekkor egy

$$U = -\int (a_x dx + a_y dy + a_z dz) \quad (2.27)$$

összefüggés adja.

A gyakorlatban a tehetetlenségi erők hatása rendszerint a gravitációs hatással összegződik.

Példaként tekintsünk egy hengeres edényt, melyben egy folyadék van és amelyet függőleges tengelye körül állandó ω szögsebességgel forgatunk (2.4. ábra). E példában a gravitációs gyorsulásnak megfelelő komponensekhez a centrifugális gyorsulásból származó összetevőket is hozzá kell adnunk:

$$f_x = x \cdot \omega^2, \quad f_y = y \cdot \omega^2, \quad f_z = -g. \quad (2.28)$$

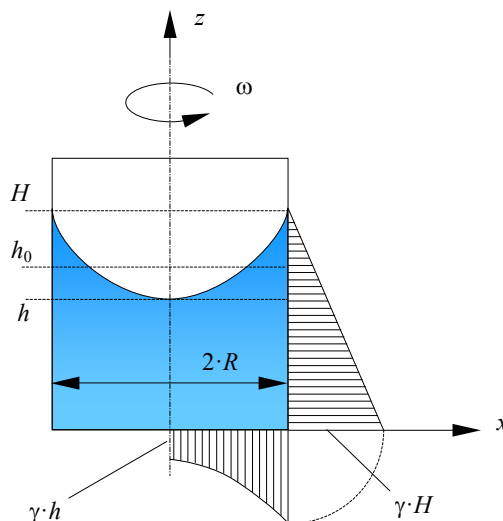
A teljes potenciál tehát

$$U = -\int (x \cdot \omega^2 dx + y \cdot \omega^2 dy - g dz) = -\frac{\omega^2}{2} \cdot (x^2 + y^2) + g \cdot z + \text{konst.} \quad (2.29)$$

lesz. Az ekvipotenciális felületeket az $U = \text{állandó}$ egyenletből határozhatjuk meg és forgásparaboloid felületekhez jutunk. A szabad felszín is egy ekvipotenciális felület, egyenlete tehát

$$z - \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot (x^2 + y^2) = k_1, \quad (2.30)$$

ahol a zárójelben levő tag az adott pont sugarának négyzete ($r^2 = x^2 + y^2$), k_1 pedig egy újabb konstans.



2.4. ábra. Saját tengelye körül forgó hengerben levő folyadék

A k_1 paramétert abból a feltételből határozhatjuk meg, mely szerint a paraboloid alatti térfogat a folyadék térfogatával egyenlő kell legyen. Ebből a feltételből azt kapjuk, hogy k_1 a szabad felszínnek az $r=0$ sugarú pontban mért magasságával azonos (a használt jelölések értelmezése az ábrán látható, h_0 a nyugalomban levő folyadék magassága):

$$k_1 = h = h_0 - \frac{\omega^2 \cdot R^2}{4 \cdot g}. \quad (2.31)$$

A hidrosztatika alapegyenlete a potenciál kifejezésével

$$p + \rho \cdot \left(-\frac{\omega^2 \cdot r^2}{2} + g \cdot z \right) = k_2 \quad (2.32)$$

lesz, ahol a k_2 állandót az $r=0$ sugarú, a szabad felületen levő pontban mérhető nyomás előírásával kapjuk:

$$k_2 = p_0 + \gamma \cdot h \quad (2.33)$$

(p_0 a felszínen ható nyomás).

Az így meghatározott k_2 -es állandóval a fundamentális egyenlet végső soron

$$p = p_0 - \gamma \cdot \left(z - h - \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2 \cdot g} \right) \quad (2.34)$$

lesz. Ennek alapján levonható az a következtetés, mely szerint a nyomás a forgástengellyel párhuzamos irányban lineárisan, sugárirányban pedig parabolikusan változik. Az ábrán a henger

palástjára, illetve az edény aljára gyakorolt relatív hidrosztatikai nyomás diagramja látható, ahol a nyomást az előbbi képlet adja.

Az említett példákban a térfogati erőt létrehozó U potenciál mechanikai természetű volt, azonban a gyakorlatban előfordulhat más, például elektromos és mágneses kölcsönhatásból származó térfogati erő is.

2.2.2. Az összenyomott gáz izoterm nyugalmi egyensúlya

A gázok összenyomhatósága miatt az alapegyenletben szereplő sűrűség általános esetben nem állandó. A gáz sűrűségét a térfogata határozza meg, mely szoros kapcsolatban áll a nyomásával és a hőmérsékletével. A sűrűség számításakor tehát figyelembe kell venni a gáz összenyomásának vagy kiterjeszkedésének termodinamikai körülményeit is.

Három idealizált esetet szoktak megkülönböztetni a gáz hőforgalmát tekintve. Amennyiben a nyomás változása állandó hőmérsékleten megy végbe, akkor izoterm állapotváltozásról beszélünk, mely az első idealizált esetet jelenti. Ez például abban a hipotetikus esetben következik be, amikor a gázt magába foglaló edény és a gáz tökéletes hővezető, a környezet hőmérséklete pedig állandó. Ideális gázok esetében az izotermikus állapotváltozás egyenlete (a Boyle-Mariotte törvény) szerint a $p \cdot V$ szorzat állandó, avagy a gáz két különböző állapotára felírva

$$\frac{p_0}{p} = \frac{V}{V_0}. \quad (2.35)$$

A sűrűség definícióját felhasználva, a jobboldali tört számlálóját és nevezőjét egyaránt a gáz m tömegével beszorozva

$$\frac{p_0}{p} = \frac{\rho_0}{\rho}, \quad (2.36)$$

tehát izoterm körülmények között a nyomás és a sűrűség egyenes arányban állanak (másként fogalmazva a p/ρ hányados állandó), vagyis e körülmények között a gáz barotróp fluidum. Ebből p -t kifejezve, annak differenciálját képezve a

$$dp = \frac{p_0}{\rho_0} \cdot d\rho \quad (2.37)$$

összefüggéshez jutunk, mellyel az összenyomható fluidumok izoterm nyugalmának egyenlete (a 2.17. egyenlet újabb formája) a következőképpen írható fel:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \cdot d\rho + dU = 0. \quad (2.38)$$

E differenciális forma integrálásával

$$\frac{p_0}{\rho_0} \cdot \ln \rho + U = \text{konst.} \quad (2.39)$$

Ha a sűrűségek helyett nyomásokkal dolgozunk, akkor a 2.36. képletből kifejtett $\rho = \rho_0 \cdot \frac{p}{p_0}$ sűrűséggel az alapvető egyenlet integrális formája

$$\frac{p_0}{\rho_0} \cdot \ln p + U = \text{konst.} \quad (2.40)$$

lesz (a P nyomásfüggvény értéke a fenti összeg bal oldali tagjával azonos). A 2.39. és 2.40. egyenletek jobb oldalán két különböző konstans szerepel, tehát belőlük nem következik a $p = \rho$ egyenlőség.

Az előbbieken megállapítottuk, hogy gázok sűrűsége elég kicsi és így egyensúlyi állapotukban kis szintkülönbségek esetében a gravitációs térben nyomásukat és sűrűségüket teljes térfogatukban állandónak tekintjük. Nagy szintkülönbségek esetén azonban ez az egyszerűsítés már nem alkalmazható. Így például ha a légkör tengerszinten mért nyomása p_0 és sűrűsége ρ_0 , akkor egy bizonyos h magasságban nyomása $p < p_0$ és sűrűsége $\rho < \rho_0$ lesz (2.5. ábra).

Ha feltételezzük, hogy a hőmérséklet nem változik a magassággal és a Föld forgásából származó centrifugális erő hatását is elhanyagoljuk, akkor a légkör egyensúlyát izoterm körülmények között számíthatjuk. Ekkor a tanulmányozott légtömeget (gáztömeget) különböző nyomású rétegek alkotják ugyan, de azok hőmérséklete azonos. A légkör nyomása a gravitáció következménye, tehát az U potenciál gravitációs, amivel a nyomásokkal kifejezett alapegyenlet

$$\frac{p_0}{\rho_0} \cdot \ln p + g \cdot z = \text{konst.} \quad (2.41)$$

lesz. Ha a választott referenciaszint a tengerszint, akkor az integrálási konstans a $z = 0 \rightarrow p = p_0$ feltételből határozható meg:

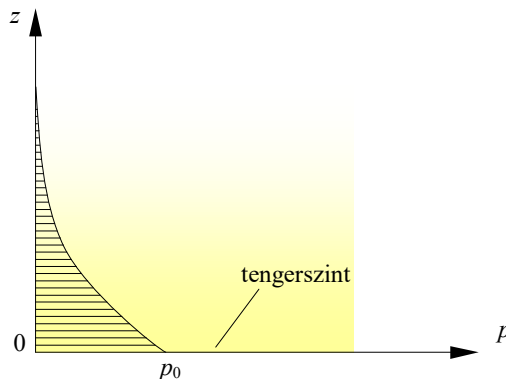
$$\text{konst.} = \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \ln p_0, \quad (2.42)$$

amellyel

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot z, \quad (2.43)$$

vagy

$$p = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot z\right) = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{\mu \cdot g}{R \cdot T} \cdot z\right). \quad (2.44)$$



2.5. ábra. A légnyomás változása a magassággal

Ez az összefüggés a *barometrikus magasságformula*, mely kis magasságokra a légnyomás jó közelítését adja (kb. 6-7000 m-ig). Nagyobb magasságokra az eltérés a hőmérséklet

kihangsúlyozottabb változása miatt jelentős, ugyanakkor a g gravitációs gyorsulás magassággal való változását és a Föld forgásának hatását is figyelembe kellene venni.

A barometrikus egyenlet a gravitációs térbe helyezett, termodinamikai (izoterm) egyensúlyban levő kompresszibilis fluidumok nyomását adja, amelyet ábrázolva, az eddigiektől eltérően, egy exponenciális diagramot kapunk. A légköri nyomást ábrázolva a diagram exponenciálisan, aszimptotikusan csökken a nulla érték fele (2.5. ábra). Ha a nyomás helyett a sűrűséget számítjuk és ábrázoljuk, akkor az a nyomáshoz hasonlóan szintén exponenciális változást fog mutatni.

Ha a barometrikus formulából a magasságot a nyomás függvényében fejezzük ki, akkor a Halley-egyenlethez jutunk:

$$z = \frac{P_0}{\rho_0 \cdot g} \cdot \ln \frac{P_0}{p}. \quad (2.45)$$

A Halley-egyenlet alapján a barométer magasság mérésére is használható, az ilyen célra készült eszközöket *hipszométer*nek nevezik.

2.2.3. Az összenyomott gáz adiabatikus nyugalmi egyensúlya

A termodinamikai állapotváltozások egy másik idealizált típusa az adiabatikus állapotváltozás: az összenyomás és a kiterjeszkedés adiabatikus körülmények között, tehát hő cserélése nélkül megy végbe. Ekkor a nyomás növekedésekor a gáz felmelegszik, kiterjeszkedéskor pedig lehűl.

A gáznemű anyagok hővezető képessége alacsony s emiatt előfordulhat, hogy a mechanikai egyensúlyban levő gáztömeget elkülönülő, egymással csak csekély mértékben keveredő rétegek építik fel, melyek között tehát gyakorlatilag nincs hőátadás. Ekkor – bár adiabatikus egyensúlyról beszélünk – a tekintett termodinamikai rendszer nincs tulajdonképpen egyensúlyban, mivel a termikus egyensúly kritériuma nem teljesül: a hőmérséklet nem állandó. Ez az eset fordulhat elő a lassan emelkedő vagy süllyedő légtömegeknél is, éppen ezért a meteorológiában az adiabatikus egyensúlyban levő légtömeg egy gyakran használt modell.

Az ideális gázok esetében az adiabatikus állapotváltozás egyenlete (a Poisson-egyenlet) szerint a $p \cdot V^\kappa$ szorzat állandó, ahol κ az adott gáz adiabatikus kitevője (ezt a termodinamikában általában γ -val jelölik, azonban mivel γ -val a fajsúlyt jelöltük, most szerencsésebb a κ használata). A gáz két különböző állapotára felírva:

$$\frac{p_0}{p} = \frac{V_0^\kappa}{V^\kappa}, \quad (2.46)$$

vagy, a sűrűségekkel:

$$\frac{p_0}{p} = \frac{\rho_0^\kappa}{\rho^\kappa}. \quad (2.47)$$

Mivel a nyomás és a sűrűség között most is egy egyértelmű megfeleltetés írható fel, a gáz adiabatikus körülmények között is barotróp fluidumnak tekinthető. Az előbbi képletből a nyomást kifejezve

$$dp = \kappa \cdot \frac{p_0}{\rho_0^\kappa} \cdot \rho^{\kappa-1} \cdot d\rho, \quad (2.48)$$

melyet az alapegyenlet differenciális formájába behelyettesítve, annak integrálásával a sűrűségekkel kifejezett

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\kappa-1} + U = \text{konst.} \quad (2.49)$$

integrális formához jutunk. Innen, a sűrűség és a nyomás viszonyát adó 2.47. összefüggés alapján a nyomásokkal megadott

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} + U = \text{konst.} \quad (2.50)$$

egyenlet is megállapítható, mely összeg bal oldali tagja most is a P nyomásfüggvény értéke.

Az előbbi formulába a gravitációs potenciál bevezetésével a nyomás magassággal történő változását kapjuk. Ez esetben a fluidum belsejében nemcsak a nyomás, hanem a hőmérséklet is változni fog; a gáz hőmérséklete a Clapeyron-Mendelejev egyenlet alapján számítható. A fentieket a légkörre alkalmazva azt kapjuk, hogy a hőmérséklet a magassággal csökken. Nagyobb magasságok esetén a gravitációs gyorsulás változását is számításba lehet venni, ekkor a potenciált

$$U = \frac{g_0 \cdot r_0^2}{r} \quad (2.51)$$

formában kell felírunk, ahol g_0 a tengerszinten mért gravitációs gyorsulás, r_0 a Föld sugara és $r = r_0 + z$ a z magasságban levő pont távolsága a Föld középpontjától mérve. E potenciált a 2.50. képletbe behelyettesítve a nyomás magassággal történő változását kapjuk. A konstans értékét most a $r = r_0 \Rightarrow p = p_0$ feltételből határozzuk meg, a légtömegek adiabatikus egyensúlyi egyenletét pedig végső soron a

$$p = p_0 \cdot \left[1 - \frac{\kappa-1}{\kappa} \cdot \frac{g_0 \cdot \rho_0 \cdot r_0^2}{p_0} \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (2.52)$$

képlet fogja adni.

2.2.4. Az összenyomott gáz politropikus nyugalmi egyensúlya

A termodinamikai állapotváltozások harmadik idealizált típusa a politropikus állapotváltozás: amennyiben a gáz és a gázt magába foglaló edény nem tökéletes hőszigetelő és nem tökéletes hővezető, a összenyomás során a rendszer felmelegszik és hőt ad le a környezetének, kiterjeszkedéskor pedig lehűl és hőt vesz fel a környezetétől. Az idealizálás abban áll, hogy e folyamat alatt a gáz hőkapacitását állandónak tekintjük, melynek következtében bármely dt hosszúságú időtartam alatt a cserélt hő és a végzett munka hányadosa állandó marad. Ekkor az ideális gáz viselkedését egy, a Poisson-egyenlethez hasonló egyenlet írja le, mely szerint a $p \cdot V^n$ szorzat állandó, ahol n az adott gáz politropikus kitevője, az említett hányados függvénye. Mivel ez az egyenlet formailag azonos az adiabatikus állapotváltozás Poisson-egyenletével, a hidrosztatika alapegyenletének erre az esetre megállapított formái is alakilag azonosak lesznek az adiabatikus körülményekre felírt megfelelő egyenletekkel, csupán az adiabatikus κ kitevőt kell a politropikus n kitevővel helyettesítenünk.

A politropikus állapotváltozás hipotézise közelebb áll a valósághoz, mint az izoterm vagy adiabatikus folyamaté, éppen ezért a politropikus tényezővel felírt 2.52. egyenlet lenne a legalkalmasabb a légtömegek egyensúlyának modellezéséhez. A nehézség az n kitevő meghatározásában áll.

2.2.5. Pascal törvénye és annak technikai alkalmazásai

Amikor a szintkülönbségek miatti nyomáskülönbség elhanyagolható a számítások lényegesen leegyszerűsíthetők. Ekkor ugyanis a hidrosztatika alapegyenlete az egyszerű

$$p = p_0 \quad (2.53)$$

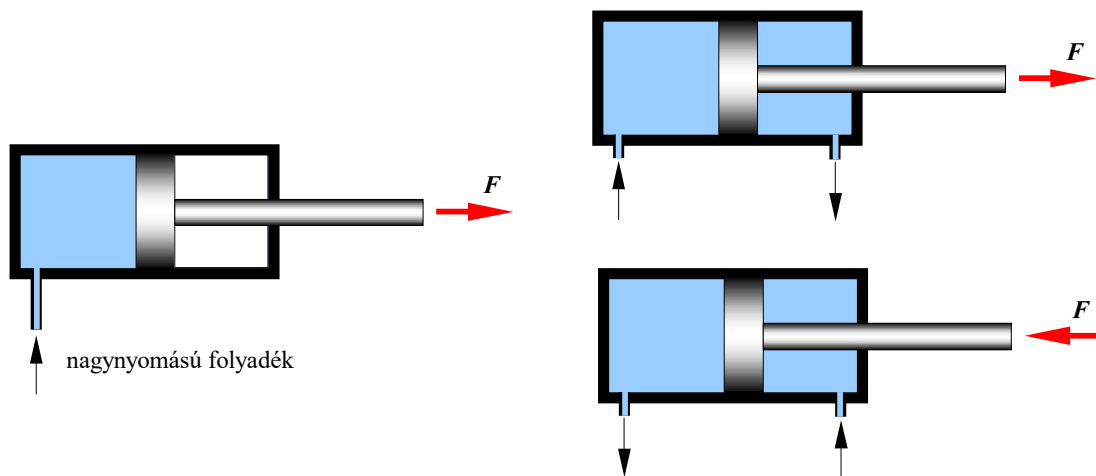
formára hozható, melyet Pascal törvényének neveznek

Ez az eset például akkor fordulhat elő, amikor a p_0 nyomás egy hidraulikus berendezés belsejében uralkodó nagy értékű dugattyúnyomás. Ekkor a folyadék belsejében bármely pontban a nyomás közel azonos értékkel rendelkezik, mivel annak a szintkülönbségek miatti változása a p_0 értékhez viszonyítva elenyészően kicsi lesz. Egy magasnyomású berendezésben tehát a nyomás értékét jó közelítéssel mindenütt azonosnak tekinthetjük.

Ez az észrevétel számos gyakorlati alkalmazásban, például a hidrosztatikus gépek számításában jut fontos szerephez.

Egy dugattyús hidrosztatikus gépben a fluidumnak a dugattyúra kifejtett nyomása egy erő megjelenéséhez vezet, melynek nagyságát az ismert $F = p \cdot A$ összefüggés adja (A a dugattyú keresztmetszete). Ezt az erőt munkavégzésre használhatjuk, ezen az elven működnek például a 2.6. ábrán látható hidraulikus munkahengerek (hidraulikus aktuátorok). A kar kétirányú mozgását gyakran kettős hatású hengerekkel oldják meg. Kettős hatású hengert akkor használnak, amikor mindkét irányba ugyanazt az erőt kell kifejteni vagy amikor a folyadék eltávolításával létrehozható depresszió (mely legfeljebb az atmoszférikus nyomással egyenlő) és a működtetett szerkezet saját súlya nem tudná a dugattyút eredeti helyzetébe visszahozni.

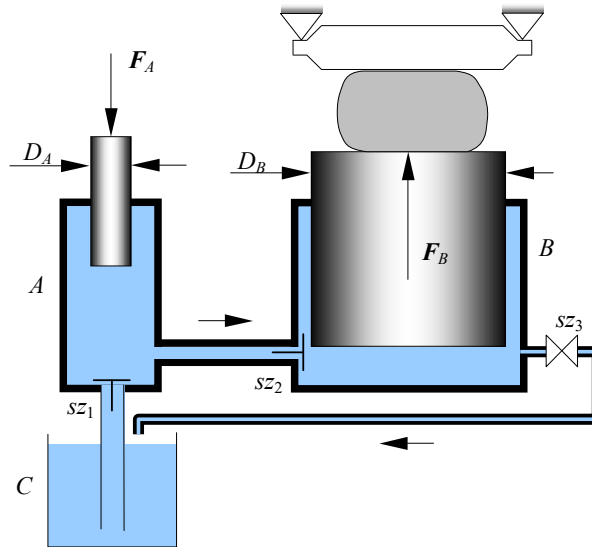
A hidraulikus munkahengerek alkalmazási köre igen tág, különböző hidraulikus szervomechanizmusok felépítésében vesznek részt.



2.6. ábra. Egyszerű (balra) és kettős hatású (jobbra) hidraulikus henger

Vegyük további példának a 2.7. ábrán látható hidraulikus sajtót. E sajtó két, különböző átmérőjű, dugattyúval ellátott hengerből áll, melyeket hidraulikus olaj tölt ki. A bal oldali, kisebb átmérőjű dugattyú lenyomásával bizonyos térfogatú olaj az A hengerből a B hengerbe jut át az sz_2 szelepen keresztül, melynek szerepe az olaj visszafolyásának meggátolása. Az átmérők különbsége miatt a jobb oldali dugattyú elmozdulása sokkal kisebb lesz, mint a bal oldalon levőé, az elmozdulások a keresztmetszetekkel fordított arányban állnak (amennyivel csökken a bal oldali henger térfogata ugyanannyival növekedik a jobb oldali hengeré). Az A dugattyú felfele mozgatásával a C tartályból a bal oldali hengert a szintén egyirányú sz_1 szelepen keresztül fel lehet

tölteni, így a kisebb átmérőjű dugattyú ismételt le-fel mozgásával a nagyobb átmérőjű dugattyú kívánt elmozdulása elérhetővé válik.



2.7. ábra. Hidraulikus sajtó elvi vázlata

Ha az A hengerre gyakorolt erő F_A , akkor a kisebb átmérőjű dugattyú által létrehozott nyomás

$$p = \frac{4 \cdot F_A}{\pi \cdot D_A^2} \quad (2.54)$$

lesz. Pascal törvényének alkalmazásával a B hengerben a nagyobb átmérőjű dugattyúra gyakorolt nyomás ugyanekkora lesz, tehát ez a dugattyú egy

$$F_B = \frac{p \cdot \pi \cdot D_B^2}{4} \quad (2.55)$$

nagyságú erőt fog kifejteni az összepréselendő tárgyra.

A nyomás behelyettesítésével az erők aránya (az elért növekedés mértéke, az erőátvitel) a dugattyúk keresztmetszetének arányával lesz azonos:

$$\frac{F_B}{F_A} = \frac{D_B^2}{D_A^2}. \quad (2.56)$$

A nagyobbik átmérőjű henger eredeti helyzetébe visszaállítani a B henger kiürítésével lehet, a megnyitott sz_3 szelepen a hidraulikus olaj a C tartályba áramlik vissza.

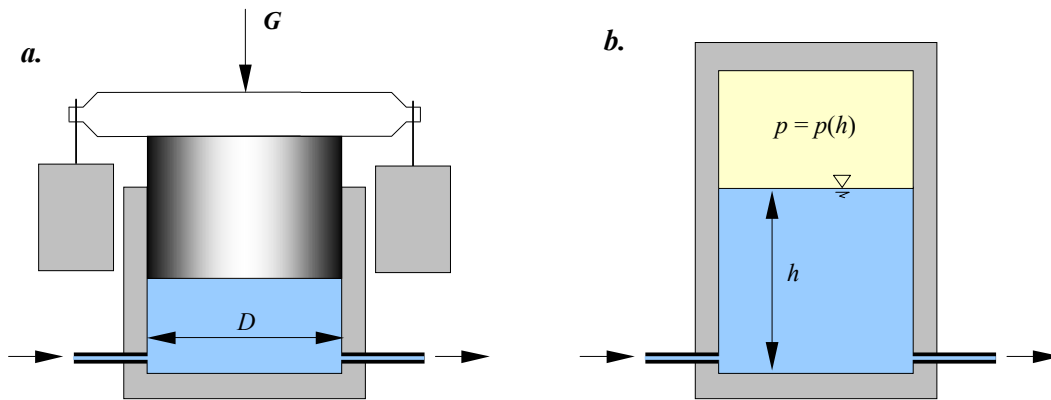
A hidraulikus sajtó elvének, a *hidraulikus áttétel* alapján számos szerkezet működik. A gyakorlati megvalósításnál a kisebbik átmérőjű dugattyút sokszor egy egykarú emelő szerkezettel mozgatják (ilyen például a nehezebb járművek felemelésére használt hidraulikus emelő vagy a hidraulikus fék) – ekkor a szerkezetet működtető emberi erőt az egykarú emelő is megnöveli –, vagy pedig egy szivattyúval (például egy fogaskerekes szivattyúval) helyettesítik.

Pascal törvényének egy másik alkalmazása a hidraulikus akkumulátor (nyomástároló), melyet a nyomás- és a hozamfluktuációk kiegyenlítésére használnak. A nyomástárolókat olyan hidraulikus

berendezésekben alkalmazzák, amelyek egy szakaszosan működő hidraulikus gépet foglalnak magukba. Ez utóbbi gép lehet például egy hidraulikus prés, amelynek működtetéséhez szükséges pillanatnyi hozam nagyobb annál, mint amelyet szivattyú folyamatosan továbbítani tud. A hiányt a tároló pótolja. Míg a prés szakaszos működése közben áll, a folyamatosan járó szivattyú a nyomástárolót újra feltölti.

A szakaszosan működő gép a nyomást létrehozó szivattyú is lehet: ilyenkor a fogyasztás kisebb mint az a hozam, melyet a szivattyú gazdaságos üzemmódban biztosítana. A folyadéktöbbletet átmenetileg a nyomástárolóban raktározzák, tehát az egy adott pillanatban megtelik. Ekkor a szivattyút megállítják és csak a tároló kiürülésekor indítják újra.

A hidraulikus akkumulátor tehát egy olyan tárolóedény, mely egy bizonyos mennyiségű folyadékot raktároz el állandó vagy közel állandó nyomáson (2.8. ábra).



2.8. ábra. Állandó (a.) és nem állandó (b.) nyomású hidraulikus tárolók

Az állandó nyomású tároló egy D átmérőjű, dugattyúval ellátott hengerből áll, melynek a dugattyúját egy nehezék terheli. Ha a dugattyú és a nehezék együttes súlya G , akkor a dugattyú által létrehozott nyomás

$$p = \frac{4 \cdot G}{\pi \cdot D^2} \quad (2.57)$$

lesz. Ez a tartály a szivattyú által nyomott folyadékot tárolja: ahogy az telik, úgy a dugattyú felemelkedik s így a henger belső térfogata megnövekszik. Amikor a fogyasztás nagyobb, mint a betáplálás, a tárolóból a p nyomású folyadék ürül és közben a dugattyú a súly hatására lefele mozog.

A nyomástároló egyszerűbb formája a *hidrofor*, mely egy olyan merev falú tartály, amelyet kezdetben levegő vagy valamilyen más gáz tölt ki. A folyadék tárolásakor a levegő a tartály feltöltésének mértékében összenyomódik, tehát a tartályban a nyomás megnő. A folyadék elfolyásakor az előbbieket fordítottja játszódik le, a levegő kiterjeszkedik és a tartályban a nyomás csökkenni fog. Ez a típusú tároló tehát nem biztosítja a nyomás állandóságát, az bizonyos határértékek között fog változni.

Pascal törvényének alkalmazásával működik a hidraulikus nyomásnövelő (illetve a nyomáscsökkentő) is, melyet hidraulikus erősítőnek is neveznek. Ez a szerkezet két különböző átmérőjű, dugattyúval ellátott hengerből áll, melyek dugattyúi egy közös testet alkotnak (2.9. ábra).

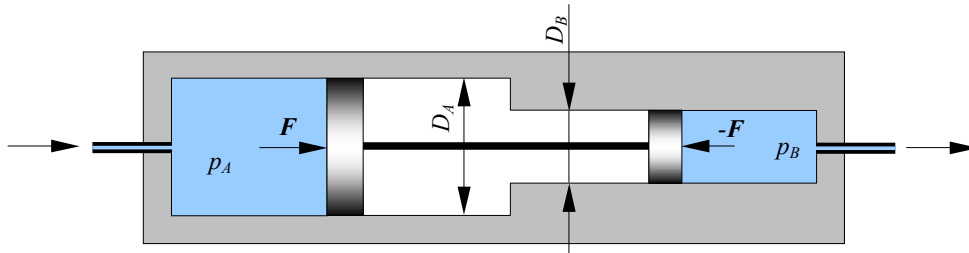
A nyomásnövelő működése közben a bal oldali, nagyobb átmérőjű hengerbe a p_A nyomású folyadék kerül. E folyadék a nagyobb átmérőjű dugattyúra egy

$$F = p_A \cdot \frac{\pi \cdot D_A^2}{4} \quad (2.58)$$

erőt gyakorol. Mivel a két dugattyú egy közös testet alkot ez az erő a kisebbik átmérőjű dugattyún keresztül átadódik a jobb oldali hengerben levő folyadéknak, ennek nyomása pedig

$$p_B = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot D_B^2} \quad (2.59)$$

lesz.



2.9. ábra. Hidraulikus nyomásnövelő elvi vázlata

A nyomás növekedése a dugattyúk keresztmetszetével (az átmérők négyzetével) fordítottan arányos:

$$\frac{p_B}{p_A} = \frac{D_A^2}{D_B^2} \quad (2.60)$$

Az átmérők $D_A > D_B$ viszonya miatt a kimeneti p_B nyomás nagyobb lesz, mint a bemeneti p_A érték. Mivel a két dugattyú elmozdulása egyenlő, a nyomásnövelőt a magasnyomású oldalon kevesebb folyadék hagyja el, mint amennyit az alacsonynyomású oldalon betápláltunk.

A fordított irányú berendezés nyomáscsökkentőként működik.

2.2.6. A hidrosztatika alaptörvényének alkalmazásai

A gyakorlat szempontjából sokszor hasznosabb a hidrosztatika alapegyenletét a már említett magasságokkal kifejezett formájában használni. E formát a nyomásokkal felírt alapegyenlet tagjainak γ -val való beosztásával kapjuk, például

$$\frac{p}{\gamma} + z = \text{konst.} \quad (2.61)$$

alakban. Mivel a kapott egyenlet tagjai mind hosszúság-jellegűek, azt geometriai megközelítésben is értelmezhetjük. A baloldali összeg első tagja a nyomás és a faj súly hányadosa:

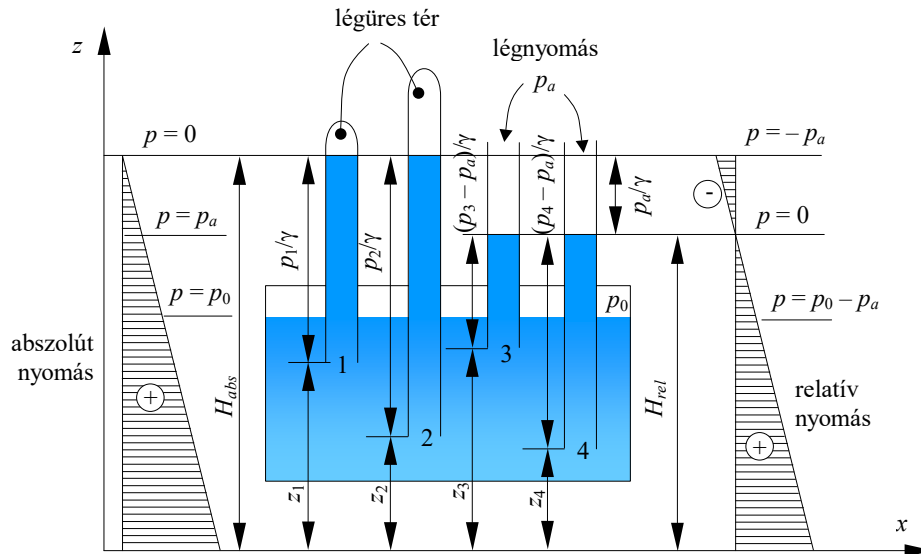
$$h = \frac{p}{\gamma} \quad (2.62)$$

Ez a mennyiség annak a folyadékoszlopnak a magassága lenne, melynek hidrosztatikai nyomása éppen a megadott p nyomással egyenlő. Megjegyzendő, hogy amikor a p nyomás a folyadék felszínére gyakorolt nyomást is magába foglalja h a folyadékoszlop tényleges magasságánál nagyobb. Amennyiben a p nyomás a légköri nyomáshoz viszonyított relatív nyomás, akkor h -t

piezometrikus magasságnak nevezünk, ha pedig p a fluidum abszolút nyomása, akkor h a barometrikus magasság nevet viseli.

A 2.61. egyenletben szereplő összeg második tagja a viszonyítási szinttől számított z geodéziai magasság, mely a hidrosztatika alapegyenletének kiindulási formájában is szerepelt.

Az egyenlet jobb oldalán szereplő konstansnak szintén magasság jellege kell legyen. Amennyiben az atmoszférikus nyomáshoz viszonyított relatív nyomásokkal dolgozunk, úgy a 2.61. összeg a folyadék szabad felszínének a kiválasztott referenciasíkhöz viszonyított magasságával egyenlő, ez a H_{rel} piezometrikus szint. Ellenben, ha abszolút nyomásokkal dolgozunk, akkor a H_{abs} összeg a barométercsőben levő folyadék felszínének felel meg és barometrikus szintnek nevezik.



2.10. ábra. A hidrosztatika alaptörvényének geometriai értelmezése

A különböző szintek, magasságok és nyomások viszonyát a 2.10. ábra szemlélteti. Az ábrán egy zárt tartály látható, amelyet részben egy homogén folyadék tölt ki. A folyadék felett valamilyen gáz helyezkedik el, melynek p_0 nyomása nagyobb a légköri nyomásnál ($p_0 > p_a$). A tartályba két zárt és két nyitott cső nyúlik be.

A zárt csövek barométer-csövek, bennük a folyadék felszíne felett légüres tér van. (Ezt a teret tulajdonképpen a folyadék telített gőzei töltik ki. Mivel a folyadékok gőznyomása szobahőmérsékleten általában nem túl jelentős, a barométercsőben levő teret légüresnek tekinthetjük).

A nyitott csövek piezométer-csövek, bennük a folyadék felszíne felett p_a nyomású légköri levegő van. A belső p_0 nyomás és az atmoszférikus p_a nyomás közötti különbség hatására a csövekben a folyadékszint magasabban van, mint a tartályban levő folyadék felszíne.

A barométer-csövekben a p_0 nyomást a folyadékoszlop magassága egyenlíti ki, melyhez a piezométer-csövekben a légköri nyomás is hozzáadódik.

Az abszolút nyomásra a magasságokkal felírt alapegyenlet a következő lesz:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = \frac{p_3}{\gamma} + z_3 = \frac{p_4}{\gamma} + z_4 = H_{abs}, \quad (2.63)$$

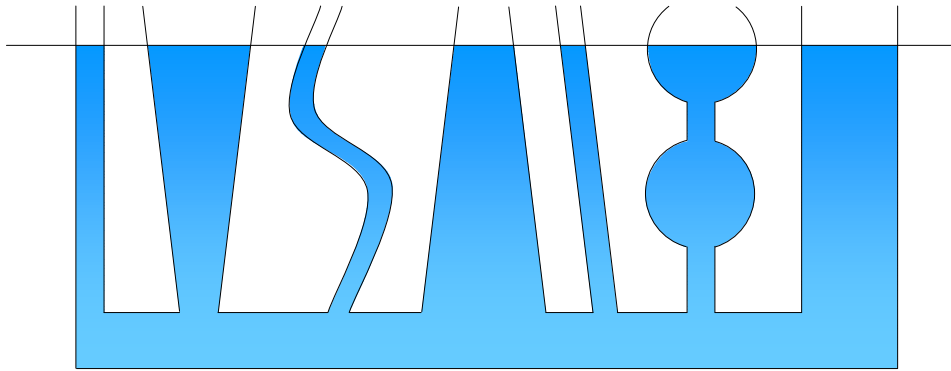
mely a relatív nyomásokkal a

$$\frac{p_1 - p_a}{\gamma} + z_1 = \frac{p_2 - p_a}{\gamma} + z_2 = \frac{p_3 - p_a}{\gamma} + z_3 = \frac{p_4 - p_a}{\gamma} + z_4 = H_{rel} \quad (2.64)$$

formát ölti.

A nyomás diagramja a folyadék összenyomhatatlansága miatt lineáris változást mutat. Az abszolút nyomás diagramja csak pozitív értékeket tartalmaz, a nyomás zéró értékét a barometrikus szinten éri el (ez a barométer-csövekben levő folyadék felszíne). A barométer-csövekben a folyadékszint minden csőben azonos, függetlenül attól, hogy a cső milyen mélyen merül bele a tartályban levő folyadékba (tehát független a cső alsó végének geodéziai magasságától). A barometrikus szint magassága a folyadék felszínére ható p_0 nyomástól és a folyadék fajsúlyától függ.

A relatív nyomás diagramján a zérus érték a folyadék szabad felszínének felel meg (a szabad felszín nem azonos a tartályban levő folyadék felszínével, mivel ott az nyomás alatt van). A szabad felszín feletti tartományban a nyomás értéke negatív, amit depresszióknak vagy vákuumnak neveznek. Ez a negatív nyomás a barometrikus magasságban éri el a teljes vákuumnak megfelelő minimumát, alatta a vákuum részleges. Minden piezométer-csőben a folyadék ugyanaddig a szintig emelkedik fel. A piezometrikus szint magassága a folyadék fajsúlya és a p_0 nyomás értéke mellett a légköri p_a nyomástól is függ.

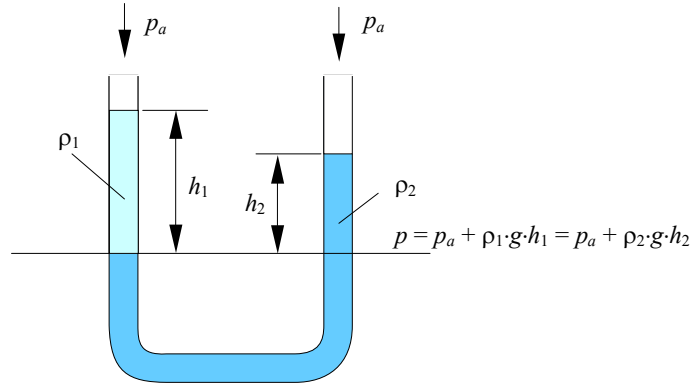


2.11. ábra. Közlekedő edények

Megállapítottuk, hogy a nyugalomban levő homogén folyadékban a vízszintes síkok izobár felületek. E kijelentés következménye a közlekedő edények elve. A közlekedő edények különböző alakú és keresztmetszetű, felül nyitott, alul pedig egymással kapcsolatban levő edények, melyek nagy átmérője meggátolja a hajszálcsövesség megjelenését. Amikor a közlekedő edényekben levő egynemű folyadékra csak a nehézségi erő hat, nyugalmi állapotban a folyadékszint minden ágban azonos lesz, függetlenül annak alakjától és térfogatától (2.11. ábra).

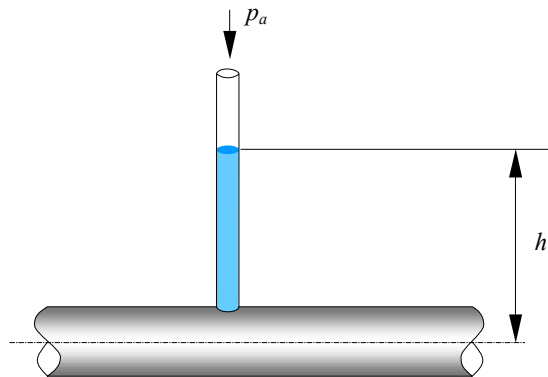
Ha a közlekedő edények ágaiban különböző fajsúlyú folyadékok vannak, akkor a folyadékszintek különbözőek lesznek. A folyadékoszlopok nyomása egy bizonyos vízszintes síkban a különböző ágakban egymástól eltérő lehet.

Például a 2.12. ábrán látható U alakú cső esetében azonnal észrevehetjük, hogy míg a jobboldali ágban levő folyadék felszínén a nyomás az atmoszférikus nyomással azonos, addig ugyanazon a szinten a baloldali ágban levő nyomás a $\rho_1 \cdot g_1 \cdot (h_1 - h_2)$ mennyiséggel lesz nagyobb. Ekkor azonban a két ágban levő folyadékoszlop egyensúlyban kell legyen egymással, a nyomás az edény mélypontjában mindkét ágra kiszámítva azonos lesz.



2.12. ábra. Nyitott U-cső két, egymástól különböző sűrűségű folyadékkal

A közlekedő edények elvének alapján működik a piezométer is (2.13. ábra). A piezométer egy nyitott cső, mely a megméréendő, ismeretlen nyomású folyadékba merül. A csőben felemelkedő folyadékoszlop hidrosztatikai nyomásának a mérendő nyomás és a légnyomás különbségével kell egyensúlyban lennie, következésképpen a folyadékoszlop magasságának mérésével az ismeretlen nyomás meghatározhatóvá válik.



2.13. ábra. Nyitott piezométer

A folyadékoszlop h magasságát megmérve a hengeres vezeték tengelyében a relatív hidrosztatikai nyomás a

$$p = \gamma \cdot h \tag{2.65}$$

képlettel számítható, ahol γ a folyadék fajsúlya. Az abszolút nyomás kiszámításához ehhez az értékhez még hozzá kell adni a légköri nyomás értékét is.

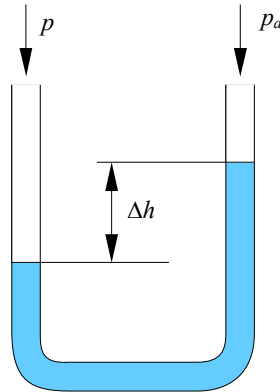
A közlekedő edények elvét hasznosítja a folyadékmanométer is (2.14. ábra). Az U alakú cső egyik ága a mérendő nyomású edényhez csatlakozik, a másik ága pedig nyitott. A mérendő p nyomás általában egy gáz nyomása, vagy legalábbis az összekötő vezetékben levő levegőn keresztül adódik át.

Az U alakú cső két ágában levő folyadék felszínének szintkülönbségéből az ismeretlen p nyomás meghatározható, így például az abszolút nyomás:

$$p = p_a + \gamma \cdot \Delta h \quad (2.66)$$

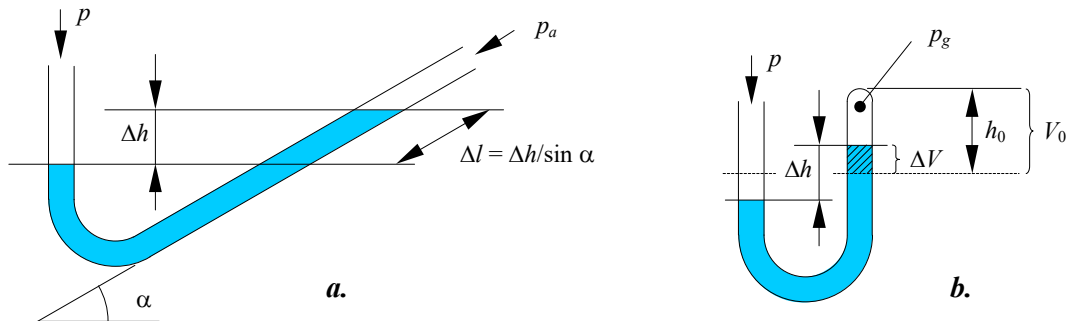
lesz, ahol γ a manométerben levő folyadék fajsúlya.

Ha a manométer másik ága nem a szabadba nyílik, hanem egy második tartályhoz csatlakozik, akkor a manométer a két tartály közötti nyomáskülönbséget fogja mutatni.



2.14. ábra. Nyitott folyadékmanométer

A piezométereknek és a manométereknek több változatuk is van. Pontosabb mérésekhez vagy kis nyomásváltozások megállapításához a mérőcsövet elforgatják, amely a vízszintessel egy derékszögnél kisebb α szöget fog bezárni. Így a ferdecsövű piezométer vagy a manométer skálájának beosztásai közötti távolság a függőleges csövű eszköz beosztásainak $1/\sin \alpha$ -szorosa, tehát nagyobb lesz, ami pontosabb leolvasást tesz lehetővé. A 2.15. ábra bal oldalán egy ferdecsövű manométert láthatunk.



2.15. ábra. Ferdecsövű (a.) és zártcsövű (b.) folyadékmanométer

A nyitott piezométerek és manométerek nyomáshatárát a mérőcső magassága határozza meg: túl nagy nyomás mérésekor a folyadékszint a cső pereméig emelkedve abból kifolyna. Ennek elkerüléséhez zárt csöveket használnak: ekkor a mérendő nyomással a folyadékoszlop Δh magassága által adott hidrosztatikai nyomás és a zárt csővégeben levő összenyomott gáz p_g nyomása tart egyensúlyt. A 2.15. ábrán látható zártcsövű manométerre például

$$p = p_g + \gamma \cdot \Delta h . \quad (2.67)$$

Feltételezvé, hogy a cső zárt végében levő gáz nyomása a kiindulási állapotban a p_a légköri nyomással volt egyenlő és hogy izoterm összenyomása alatt kezdeti V_0 térfogata ΔV -vel csökkent (hőmérséklete tehát nem változott meg), a mérés elvégzésekor a zárt csővégenben a nyomás

$$p_g = \frac{p_a \cdot V_0}{V_0 - \Delta V} \quad (2.68)$$

lesz. A ΔV térfogatváltozás a Δh szintkülönbségből számítható. Ha a cső S keresztmetszete állandó, akkor

$$\Delta V = S \cdot \frac{\Delta h}{2} . \quad (2.69)$$

Így a zártcsövű manométer által mutatott nyomás a Δh szintkülönbséggel

$$p = p_a \cdot \frac{V_0}{V_0 - S \cdot \frac{\Delta h}{2}} + \gamma \cdot \Delta h = p_a \cdot \frac{h_0}{h_0 - \frac{\Delta h}{2}} + \gamma \cdot \Delta h \quad (2.70)$$

lesz. Észrevehetjük, hogy ha a manométer skáláját nyomás-egységekben adjuk meg, akkor a nyitott csövű változat skálája egyenletes lesz, a zárt csövű változat beosztásai pedig felfele sűrűsödni fognak.

2.2.7. A hidrosztatika alaptörvényének energetikai értelmezése

A hidrosztatika alapegyenletét energetikai szempontból is lehet értelmezni. Ezt az értelmezést úgy tekintik, mint az energiamegmaradás törvényének hidrosztatikai alkalmazását. Ekkor az alapegyenletet a tekintett fluidumrész

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{G}{\gamma} \quad (2.71)$$

térfogatával beszorozva egy

$$p \cdot V + G \cdot h = E \quad (2.72)$$

formájú egyenletet kapunk. Itt a $p \cdot V$ szorzat a nyomással szemben kifejtett térfogatváltozás energiája (ez annak a mechanikai munkának felel meg, melyet az adott p nyomáson végez a fluidum, miközben térfogata nulláról az adott V értékre növekedik), mely a H entalpia egyik komponense (a másik az U belső energia). A $G \cdot h$ szorzat az m tömegű fluidum gravitációs térben számított helyzeti energiája. E két tag E összege a fluidumrész összes potenciális energiáját adja.

Ez az E energia, ha a kiragadott részt a fluidum tömegében bármilyen irányban mozgatjuk, a 2.72. egyenlet értelmében állandó marad.

Amikor egy homogén fluidum belsejében elkülönített a V térfogatú rész egy Δh mennyiséggel magasabbra kerül, akkor a nyomása $\Delta p = \gamma \cdot \Delta h$ mennyiséggel lesz kisebb, vagyis az első tag $\Delta p \cdot V = G \cdot \Delta h$ mennyiséggel csökken. A második tag ugyanekkor a $G \cdot \Delta h$ mennyiséggel növekszik, tehát az összegük végső soron állandó marad.

A vízszintes irányú elmozdulás során az összeg mindkét tagja változatlan marad, mivel a vízszintes síkokban sem a nyomás, sem a gravitációs potenciális energia nem változik

2.3. A nyugalomban levő fluidum falakra kifejtett hatása

Definíciója szerint a nyomás az egységnyi felületre merőlegesen ható nyomóerővel azonos. A sík A felületre ható p hidrosztatikai nyomás által kifejtett erő nagysága e meghatározás szerint

$$F = p \cdot A. \quad (2.73)$$

Ha a hidrosztatikai nyomással terhelt S felület nem sík és/vagy a nyomás értéke nem állandó, akkor ennek az erőnek a nagyságát az infinitezimális dS felületelemekre ható elemi $d\mathbf{F}$ erők eredőjeként számítjuk. A dS felületre ható elemi erő vektoriális mennyiség, mely a felület \mathbf{n} normálisának irányában hat és azzal ellentétes irányítású, amint azt a 2.6. összefüggés is leszögezi:

$$d\mathbf{F} = -p \cdot \mathbf{n} \cdot dS \quad (2.74)$$

(az $\mathbf{n} \cdot dS$ vektort néha dS -sel jelölik). Ilyen módon a teljes S felületre ható hidrosztatikai erő

$$\mathbf{F} = -\int_S p \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (2.75)$$

lesz, ahol az integrált a hidrosztatikai nyomással terhelt S felületen számítjuk.

Az elemi $d\mathbf{F}$ erőnek egy tetszőlegesen megválasztott O pontra vonatkoztatott nyomatéka

$$d\mathbf{M} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F}, \quad (2.76)$$

ahol az \mathbf{r} vektor a $d\mathbf{F}$ erő támadáspontjának az O pontból húzott helyzetvektora. A teljes S felületre számított nyomaték a $d\mathbf{F}$ elemi erő behelyettesítésével az elemi nyomatékok integrálja,

$$\mathbf{M} = -\int_S p \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{n} \, dS \quad (2.77)$$

lesz. Varignon tétele szerint ez a forgatónyomaték azonos az \mathbf{F} rezultáns O pontra vonatkoztatott nyomatékával:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_c \times \mathbf{F}, \quad (2.78)$$

ahonnan \mathbf{M} és \mathbf{F} ismeretében a hidrosztatikai erő támadáspontjának (a *nyomásközéppont*) \mathbf{r}_c helyzetvektora meghatározható.

A továbbiakban az eddig bemutatott általános összefüggéseket néhány sajátos esetre fogjuk alkalmazni.

2.3.1. A nyugalomban levő fluidum sík felületekre kifejtett hatása

Ebben az esetben az elemi dS felületekhez húzott \mathbf{n} normális vektorok egymással párhuzamosak, így kihozhatók az integrál alól. A hidrosztatikai erőt adó összefüggés tehát

$$\mathbf{F} = -\mathbf{n} \cdot \int_S p \, dS \quad (2.79)$$

lesz, nyomatékának képlete pedig

$$\mathbf{M} = \mathbf{n} \times \int_S p \cdot \mathbf{r} \, dS \quad (2.80)$$

formára hozható (a vektoriális szorzás antikommutatív tulajdonsága miatt a mínusz előjel eltűnik).

Vegyük példának a 2.16. ábrán látható sík tartályfalat, amely a vízszintessel egy adott α szöget zár be és amelyet egy γ fajsúlyú folyadék hidrosztatikai nyomása terhel. A számítások megkönnyítéséhez célszerű a vonatkoztatási rendszert a fal síkjához igazítani. Ennek z tengelye a

terhelt felület G geometriai középpontján megy át, az y tengely pedig a fal síkjában van, az ábra síkjára merőleges irányba kifelé mutat. A terhelt felületet annak merőleges vetületével az yz síkban ábrázoljuk.

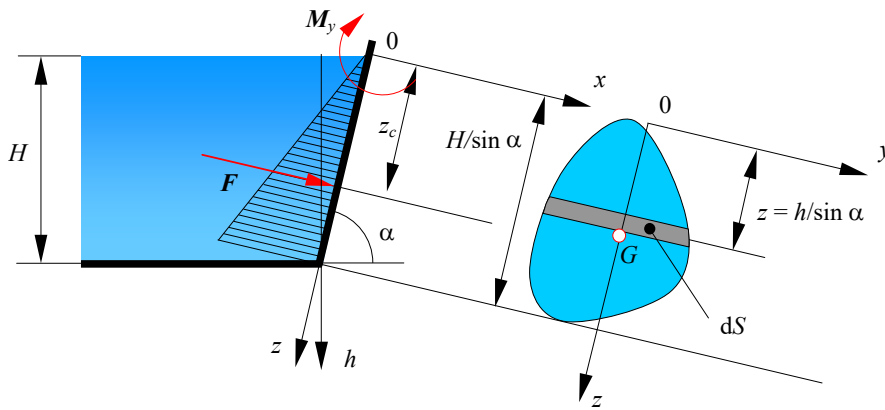
Mivel a légköri nyomás a fal mindkét felületén hat, elegendő lesz a folyadék által gyakorolt relatív nyomást számításba venni. Mivel a z tengely most nem függőleges, a hidrosztatikai nyomást a

$$p = \gamma \cdot h = \gamma \cdot z \cdot \sin \alpha \quad (2.81)$$

összefüggés fogja adni, ahol h -t a folyadék felszínétől lefele, függőleges irányban mérjük. A falra ható hidrosztatikai erő nagysága ekkor

$$F = \int_S p \, dS = \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \int_S z \, dS = \gamma \cdot \sin \alpha \cdot S_y \quad (2.82)$$

lesz, ahol a második integrálban a terhelt felület y tengelyre vonatkoztatott S_y sztatikai nyomatékát ismerhetjük fel (S_y geometriai mennyiség, mely elsőrendű nyomaték néven is ismeretes). Mint tudjuk, ez a sztatikai nyomaték egyenlő a terhelt felület nagyságának és a geometriai középpont megfelelő koordinátájának $z_G \cdot S$ szorzatával.



2.16. ábra. Folyadék hidrosztatikai nyomása által terhelt sík tartályfal

A hidrosztatikai erőnek a választott koordináarendszer y tengelyéhez viszonyított forgatónyomatéka a 2.80. képletben szereplő vektoriális szorzat kifejtésével

$$M_y = \int_S p \cdot z \, dS \quad (2.83)$$

lesz, mivel az \mathbf{r} helyzetvektor és a felület \mathbf{n} normálisa egymásra merőlegesek. A hidrosztatikai nyomás behelyettesítésével

$$M_y = \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \int_S z^2 \, dS = \gamma \cdot \sin \alpha \cdot I_y, \quad (2.84)$$

ahol az integrál ezúttal a terhelt felület y tengelyre vonatkoztatott I_y tehetetlenségi (más néven másodrendű) nyomatékával azonos, mely szintén egy geometriai mennyiség.

Az előbbi észrevételekkel az \mathbf{F} erő támadáspontjának z koordinátáját a

$$z_c = \frac{M_y}{F} = \frac{\int_S z^2 dS}{\int_S z dS} = \frac{I_y}{S_y} = \frac{I_y}{z_G \cdot S} \quad (2.85)$$

hányadosként állapíthatjuk meg.

Amennyiben a választott koordináta-rendszer z tengelye nem megy át a terhel felület geometriai középpontján, úgy az előbbi, y tengely körül forgató nyomaték mellett egy z tengely körül forgató

$$M_z = \int_S p \cdot y dS = \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \int_S x \cdot z dS = \gamma \cdot \sin \alpha \cdot I_{xz} \quad (2.86)$$

komponens is megjelenik, ahol az integrál most a terhelt felület xz síkra vonatkoztatott I_{xz} centrifugális (másodrendű) nyomatéka (ez is egy geometriai mennyiség). Az F erő támadáspontjának y koordinátája

$$y_c = \frac{M_z}{F} = \frac{\int_S x \cdot z dS}{\int_S z dS} = \frac{I_{xz}}{S_y} = \frac{I_{xz}}{z_G \cdot S} \quad (2.87)$$

lesz.

Az előbbi, „nehéz” fluidumokra (folyadékokra) megállapított összefüggések „könnyű” fluidumokra (gázokra) is felírhatók. Ekkor a nyomásnak a magasság szerinti változása elhanyagolható (tehát p állandó), a hidrosztatikai erőt

$$F = -\mathbf{n} \cdot p \cdot \int_S dS = -p \cdot \mathbf{n} \cdot S, \quad (2.88)$$

az erő nyomatékát pedig

$$M = p \cdot \mathbf{n} \times \int_S \mathbf{r} dS \quad (2.89)$$

formában kapjuk. Vegyünk például egy sík falakkal rendelkező tartályt, melyet egy p nyomású gáz tölt ki (2.17. ábra). A vonatkoztatási rendszer megegyezik az előbbi példában használttal.

A falra ható erő nagysága p változásának elhanyagolása mellett

$$F = \int_S p dS = p \cdot \int_S dS = p \cdot S, \quad (2.90)$$

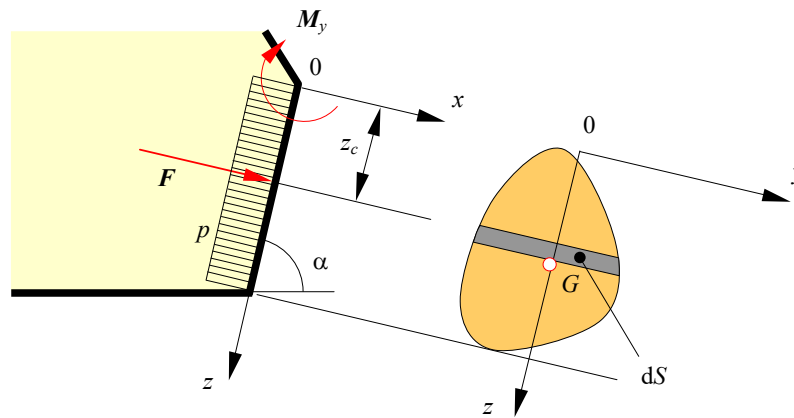
annak nyomatéka pedig

$$M_y = p \cdot \int_S z dS = p \cdot S_y, \quad (2.91)$$

ahol az utolsó integrál a terhelt felület y tengelyre vonatkoztatott sztatikai nyomatéka. A támadáspont z_c koordinátája ekkor

$$z_c = \frac{M_y}{F} = \frac{p \cdot S_y}{p \cdot S} = z_G \quad (2.92)$$

lesz. Hasonló módon levezethető, hogy $y_c = y_G$, tehát a hidrosztatikai erő a terhelt felület geometriai középpontjában (súlypontjában) hat.



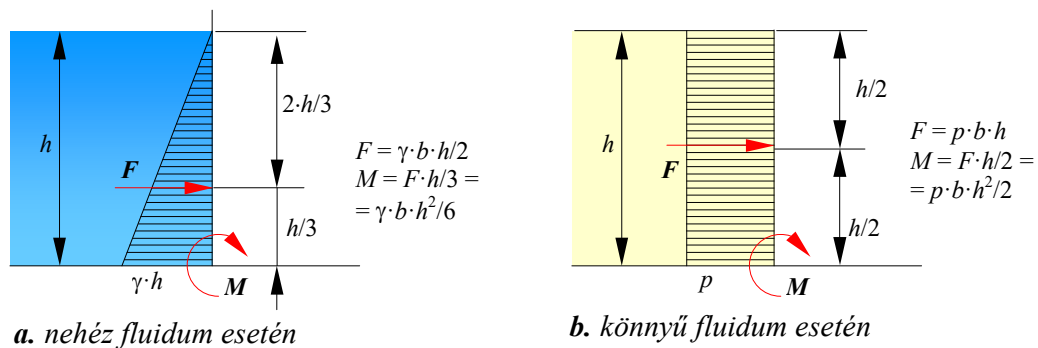
2.17. ábra. Gáz hidrosztatikai nyomása által terhelt sík tartályfal

Észrevehetjük, hogy úgy a könnyű mint a nehéz fluidumokra megállapított képletek alapján a támadáspont koordinátái függetlenek a fluidum fajsúlyától, illetve annak nyomásától.

A terhelt felület gyakran négyszög alakú, ami további egyszerűsítésekhez vezet. Ekkor az elemi felületet

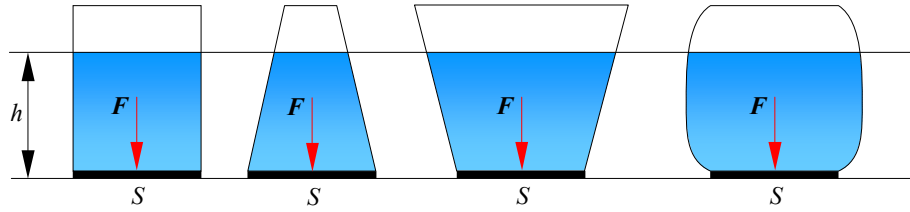
$$dS = b \cdot dz \quad (2.93)$$

formában írjuk fel, ahol b a terhelt felület szélessége. Az elemi felület e kifejezését a 2.79. képletbe behelyettesítve a hidrosztatikai erőt a nyomásdiagram területének és a terhelt felület szélességének szorzataként kapjuk, támadáspontja pedig a terhelt felület függőleges középvonalában, a nyomásdiagram súlypontjának megfelelő magasságban lesz (2.18. ábra).



2.18. ábra. Függőleges téglalap alakú felületek hidrosztatikai terhelése

Amennyiben a hidrosztatikai nyomással terhelt felület vízszintes, a fenék- és fedélnyomásból származó erő és annak nyomatéka a nyomás állandósága miatt a gázok esetében megállapított összefüggésekkel számítható. Folyadékok esetében az edény fenekére ható erő a folyadékoszlop magasságával arányos és nincs közvetlen kapcsolatban az edényben levő folyadék mennyiségével – ez a megállapítás a *hidrosztatikai paradoxon* (2.19. ábra).

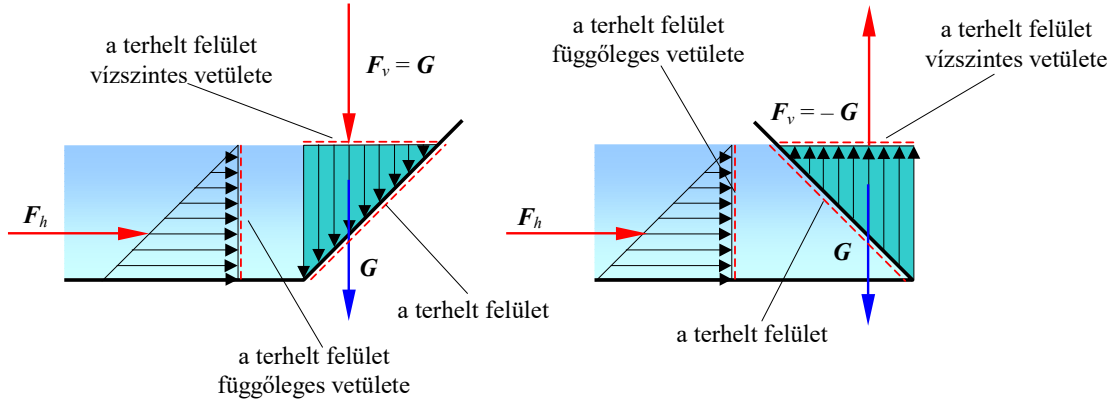


2.19. ábra. A hidrosztatikai paradoxon (a fenéknomás nem függ az edény alakjától)

A hidrosztatikai nyomás által előidézett (\mathbf{F}, \mathbf{M}) vektorkettős (dinám) tagjai általános esetben térbeli vektorok, amelyeket vetületeikkel határozzunk meg. Így a hidrosztatikai erő vetületeinek nagyságát a következő mennyiségek adják:

$$\begin{aligned} F_x &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{i} = - \int_S p \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}) \, dS = \int_{S_{yz}} p \, dS_{yz}, \\ F_y &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{j} = - \int_S p \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) \, dS = \int_{S_{xz}} p \, dS_{xz}, \\ F_z &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = - \int_S p \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) \, dS = \int_{S_{xy}} p \, dS_{xy}, \end{aligned} \quad (2.94)$$

ahol \mathbf{i} , \mathbf{j} és \mathbf{k} a koordinátatengelyek egységvektorait jelölik. Az $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}$ formájú skaláris szorzatok az S felület normálisának iránytényezőit adják, a S_{xy} formájú tagok pedig az S felületnek a koordinátasíkokra eső vetületei.



2.20. ábra. A hidrosztatikai erő vetületei

A műszaki gyakorlatban a z tengely általában függőlegesen felfele mutat. Ekkor a fenti három összefüggés szerint az oldalirányú (vízszintes) F_x és F_y komponenseket úgy számítjuk, mint a terhelt felület függőleges síkokra eső S_{xz} , illetve S_{yz} vetületeire ható erőket. A harmadik, függőleges F_z komponens nagysága a terhelt felület és a szabad felszín közötti térfogatot kitöltő folyadék súlyával egyenlő: ezt rögtön belátjuk, ha a nyomást a $\gamma \cdot h$ szorzattal helyettesítjük (2.20. ábra).

Az ábrán két esetet is látunk. Ha a folyadék a terhelt felület alatt van, akkor a függőleges összetevőt a folyadékfelszín meghosszabbításával kapott sík és a terhelt felület közötti térrészt kitöltő folyadék súlyaként kapjuk.

Gázok esetében a nyomás állandósága miatt a komponenseket $p \cdot S_{yz}$ formájú szorzatokként (az állandó nyomás és a terhelt felület vetületeinek szorzataként) állapíthatjuk meg.

2.3.2. A nyugalomban levő fluidum görbült felületekre kifejtett hatása

Görbült felületek esetében az elemi dS felületre ható $d\mathbf{F}$ erő vetületeit a 2.94. képleteknek megfelelően

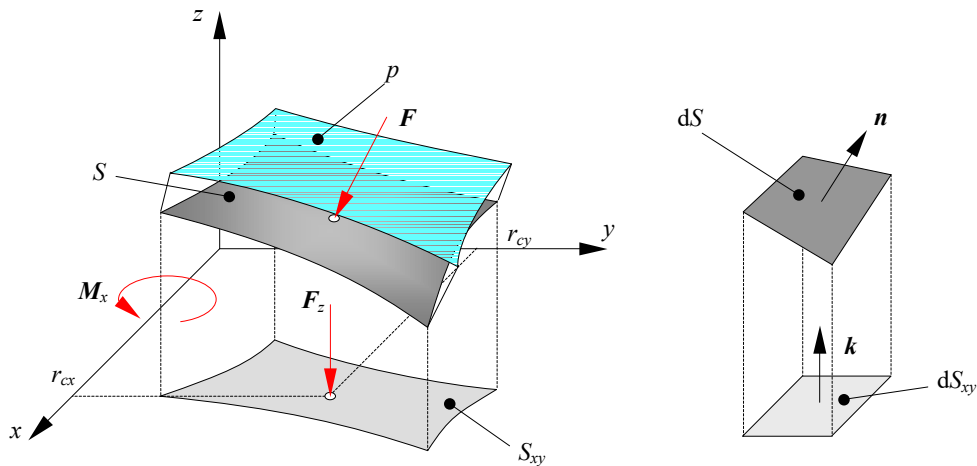
$$\begin{aligned} dF_x &= d\mathbf{F} \cdot \mathbf{i} = -p \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}) \cdot dS = p \cdot dS_{yz}, \\ dF_y &= d\mathbf{F} \cdot \mathbf{j} = -p \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) \cdot dS = p \cdot dS_{xz}, \\ dF_z &= d\mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = -p \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) \cdot dS = p \cdot dS_{xy} \end{aligned} \quad (2.95)$$

formában számítjuk (2.21. ábra).

A hidrosztatikai erő vetületeit az elemi mennyiségek integrálásával kapjuk. Az integrálokat az S felület vetületein kell számítani, nagyságuk

$$\begin{aligned} F_x &= \int_{S_{yz}} p \cdot dS_{yz}, \\ F_y &= \int_{S_{xz}} p \cdot dS_{xz}, \\ F_z &= \int_{S_{xy}} p \cdot dS_{xy}, \end{aligned} \quad (2.96)$$

előjelük „+” vagy „-” a felület orientációjától függően (az előjelet az $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}$ formájú szorzatok adják).



2.21. ábra. Hidrosztatikai nyomásból származó erő és annak egy vetülete

A hidrosztatikai erő nyomatékát szintén a vetületekkel adhatjuk meg. Az elemi erők tengelyek körül forgató nyomatékai rendre

$$\begin{aligned}
dM_x &= dF_z \cdot y - dF_y \cdot z = p \cdot (dS_{xy} \cdot y - dS_{xz} \cdot z), \\
dM_y &= dF_x \cdot z - dF_z \cdot x = p \cdot (dS_{yz} \cdot z - dS_{xy} \cdot x), \\
dM_z &= dF_y \cdot x - dF_x \cdot y = p \cdot (dS_{xz} \cdot x - dS_{yz} \cdot y),
\end{aligned} \tag{2.97}$$

ahol a számítások elvégzésekor az elemi erőket és az erőkarokat előjelükkel kell behelyettesíteni. A tengelyek körüli forgatás pozitív iránya a fűrószabállyal állapítható meg. Az elemi mennyiségek integrálásával

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_{S_{xy}} p \cdot y \, dS_{xy} - \int_{S_{xz}} p \cdot z \, dS_{xz}, \\
M_y &= \int_{S_{yz}} p \cdot z \, dS_{yz} - \int_{S_{xy}} p \cdot x \, dS_{xy}, \\
M_z &= \int_{S_{xz}} p \cdot x \, dS_{xz} - \int_{S_{yz}} p \cdot y \, dS_{yz}.
\end{aligned} \tag{2.98}$$

A nyomásközéppont koordinátáit a Varignon-tétel alkalmazásával határozzuk meg, a nyomatékokra felírt

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -z_c & y_c \\ z_c & 0 & -x_c \\ -y_c & x_c & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \tag{2.99}$$

egyenletrendszer megoldásával.

A kapott egyenletek most is felírhatók „nehéz” vagy „könnyű” fluidumokra.

Alkalmazásként számítsuk ki a 2.22. ábrán látható szektor alakú zárószerkezetre ható \mathbf{F} hidrosztatikai erőt és annak a szerkezet tengelyére vonatkoztatott \mathbf{M} nyomatékát. A szektor egy b magasságú és r sugarú henger palástjának negyede.

Minden vízszintes irányú komponens úgy számítható, mint a terhelt felület megfelelő vetületére ható hidrosztatikai erő. Az F_y erő nyilvánvalóan nulla lesz, ugyanis a terhelt felület palástjának vetülete az xz síkra egy körív, melynek nincs területe.

A függőleges irányú komponens számításakor észrevehetjük, hogy az annak a folyadékmennyiségnek a súlyával egyenlő, amely a szabad felszín és a terhelt felület közötti térrészt töltené ki, esetünkben felfele irányul és pozitív mennyiségnek tekinthető.

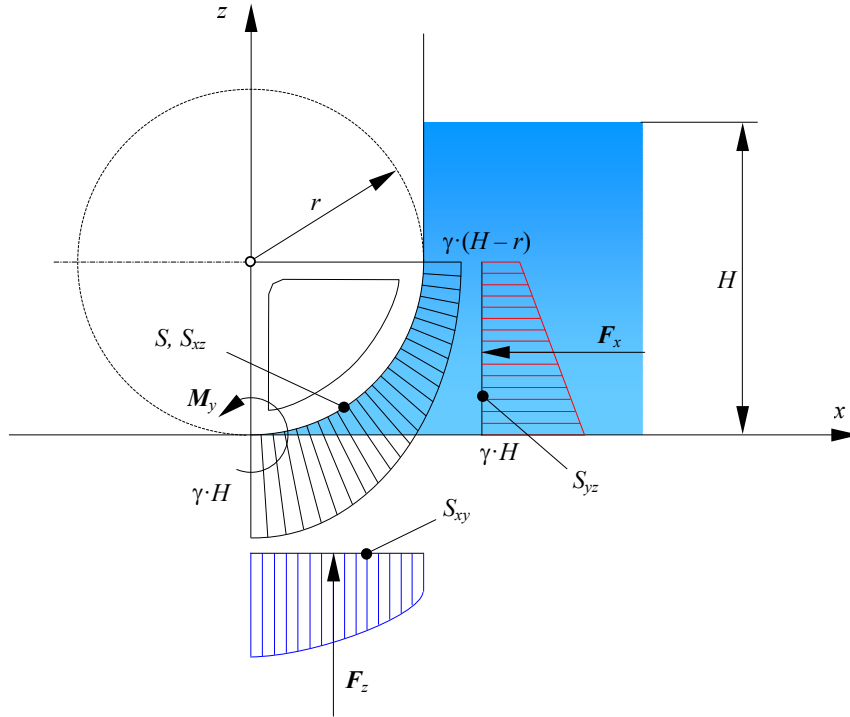
Mindhárom komponenszt a $p = \gamma \cdot (H - z)$ nyomás behelyettesítésével kapjuk, nagyságuk:

$$\begin{aligned}
F_x &= \int_{S_{yz}} p \cdot dS_{yz} = \int_0^r \gamma \cdot (H - z) \cdot b \, dz = \gamma \cdot b \cdot \int_0^r (H - z) \, dz, \\
F_y &= \int_{S_{xz}} p \cdot dS_{xz} = 0, \\
F_z &= \int_{S_{xy}} p \cdot dS_{xy} = \int_0^r \gamma \cdot [H - z(x)] \cdot b \, dx = \gamma \cdot b \cdot \int_0^r \left(H - r + \sqrt{r^2 - x^2} \right) dx.
\end{aligned} \tag{2.100}$$

E képletekből

$$\begin{aligned}
F_x &= -\frac{\gamma \cdot b \cdot r \cdot (2 \cdot H - r)}{2}, \\
F_y &= 0, \\
F_z &= \gamma \cdot b \cdot \left[(H - r) \cdot r + \frac{r^2 \cdot \pi}{4} \right],
\end{aligned}
\tag{2.101}$$

melyek tehát a kért \mathbf{F} erő vetületei.



2.22. ábra. Szektor alakú zárószerkezet hidrosztatikus terhelése

A hidrosztatikai erőnek a koordinátatengelyekre vonatkoztatott nyomatékainak kiszámításakor megfigyelhetjük, hogy a terhelt felület és a terhelés szimmetriája miatt csak az y tengely körül forgató nyomaték lesz nullától különböző ($M_x = 0$, $M_z = 0$).

A zárószerkezet tengelye körül forgató nyomatékot a mechanikából ismert

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_y + \mathbf{R} \times \mathbf{F}
\tag{2.102}$$

képlet alkalmazásával számíthatjuk, ahol \mathbf{R} a zárószerkezet tengelyének helyzetvektora az xz síkban és

$$M_y = \int_{S_{xy}} p \cdot x \, dS_{xy} - \int_{S_{yz}} p \cdot z \, dS_{yz} = \int_0^r \gamma \cdot (H - r + \sqrt{r^2 - x^2}) \cdot x \cdot b \, dx + \int_0^r \gamma \cdot (H - z) \cdot z \cdot b \, dz.
\tag{2.103}$$

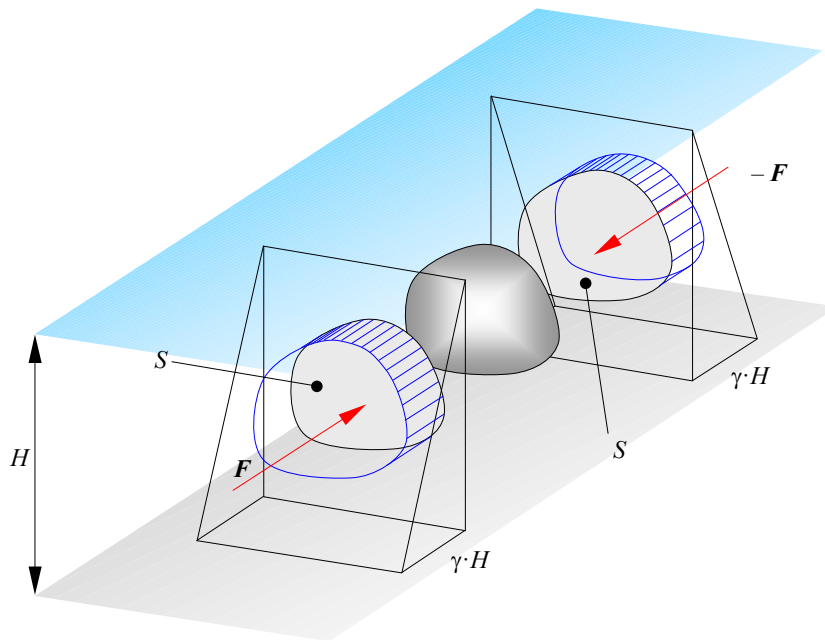
Az integrált ki lehetne számítani, azonban észrevehetjük, hogy az elemi dS felületre ható elemi nyomóerő a zárószerkezet felületének bármely pontjában annak tengelye fele mutat, tehát nincs arra vonatkoztatott nyomatéka (\mathbf{n} minden pontban sugárirányú). Ilyen módon Varignon tételének alapján, a hidrosztatikai erőnek nincs nyomatéka a zárószerkezet tengelyére nézve, tehát

ha eltekintenénk a szerkezet saját súlyától és a sűrlődési erőktől, akkor a szerkezet nyitására szükséges erő vagy nyomaték zéró lenne.

2.3.3. A nyugalomban levő fluidum zárt felületekre kifejtett hatása

A zárt felületekre ható hidrosztatikai erőt és annak nyomatékát az előbbi fejezetben megállapított 2.96, illetve 2.98. egyenletekkel számíthatjuk ki.

A gyakorlatban a „zárt” felület a fluidumba merülő test felületének a fluidum által nedvesített része, mely felület a felszínen úszó testek esetében a folyadék felszínén záródik. Ekkor észrevehetjük, hogy a nedvesített felület bármely függőleges síkra eső algebrai vetülete nulla, mivel az egymással szemben levő oldalak geometriai vetületei takarják egymást (2.23. ábra). A zárt felület két szemben fekvő oldalára ható erővektorok nagysága azonos, ugyanazon a tartóegyenesen vannak, de ellentétes irányításúak. Az oldalirányú erők eredője ezek szerint bármilyen irányban nulla lesz. Ha ez nem így lenne, akkor léteznie kellene egy olyan testnek, melyet ha valamilyen fluidum vesz körül csupán alakjának köszönhetően oldalirányú elmozdulásra törekedne.



2.23. ábra. A zárt felületre ható oldalirányú hidrosztatikai erő

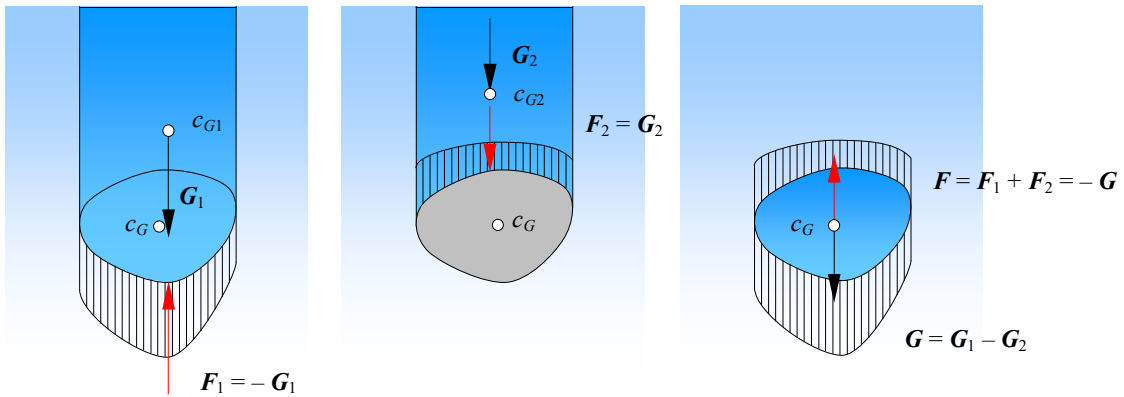
A vízszintes irányú erőkkel szemben a függőleges irányú erő zérótól különbözik. Az előbbi fejezetben elmondottak alapján a függőleges irányú erő a terhelt felület és a szabad felszín közötti térfogatot kitöltő folyadék súlyával azonos. A zárt felület alsó fele fölött levő térfogat nyilvánvalóan nagyobb, mint a felső fele fölötti térfogat, így a zárt felületre egy függőlegesen felfele irányuló erő fog hatni, melynek nagysága megegyezik a zárt felület által kiszorított fluidum súlyával (2.24. ábra). Ez a megállapítás Archimédész törvénye, a felfele ható erőt pedig *felhajtóerő*nek nevezik. Ha a fluidum „könnyű” és a test „nehéz” ($\rho_{\text{fluidum}} \ll \rho_{\text{test}}$), akkor a felhajtóerőt zérónak lehet tekinteni.

A felhajtó erő nyomatékát az alsó és a felső felületekhez tartozó, a vízszintes síkban egymást fedő vetületű felületelemekre ható elemi erők nyomatékainak eredőjeként számíthatjuk (2.25. ábra).

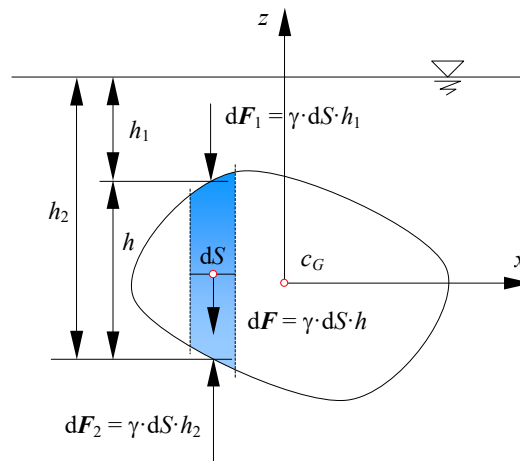
Az elemi $d\mathbf{F}_1$ és $d\mathbf{F}_2$ erők eredője ($d\mathbf{F}$) a zárt felület által lehatárolt folyadék dS keresztmetszetű, h magasságú elemi térfogatrészének súlya, melynek egy bizonyos $d\mathbf{M} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F}$

nyomatéka van a kiszorított folyadék c_G súlypontjára vonatkoztatva. (Mivel a folyadék összenyomhatatlan és homogén ez a pont a test geometriai középpontjával azonos). Ha ezeket az elemi forgatónyomatékokat a test egészen összegezzük, akkor a zárt felület által lehatárolt folyadék súlyának a súlypontra vonatkoztatott nyomatékát kapjuk, mely definíció szerint nulla.

Következtetésképpen kijelenthetjük, hogy a felhajtóerő a kiszorított folyadéktérfogat súlypontjában hat. Megjegyzendő, hogy annak ellenére, hogy a felhajtóerőt a kiszorított térfogattal hoztuk összefüggésbe, az nem térfogati, hanem felületi erő.



2.24. ábra. Az Archimédesz-féle felhajtóerő



2.25. ábra. A felhajtóerő forgatónyomatéka

2.4. Testek úszása

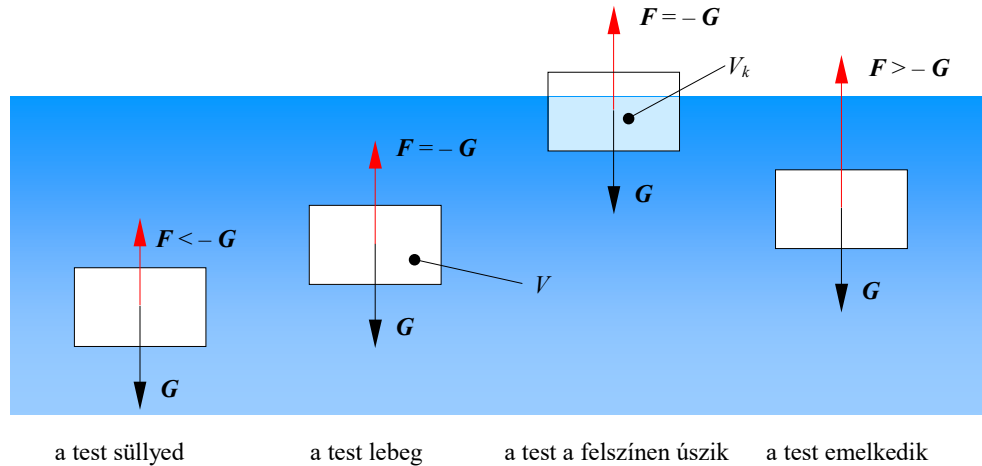
Egy nyugvó fluidumba merülő nyugalomban levő testre a gravitációs térben két erő hat: a saját súlya, melyet átlagos γ_m fajsúlyának és V térfogatának szorzataként számíthatunk ki:

$$G = \gamma_m \cdot V, \quad (2.104)$$

valamint az előbbi fejezetben ismertetett felhajtóerő, melyet a fluidum γ fajsúlyának és a kiszorított fluidum V_k térfogatának szorzataként határoztunk meg:

$$F = \gamma \cdot V_k. \quad (2.105)$$

Ha a testre nem hat más erő, akkor három lehetséges eset állhat elő a súly és a felhajtóerő viszonyától függően (2.26. ábra).



2.26. ábra. A felhajtóerő és a súly viszonya

Az első eset az, amikor a test súlya nagyobb, mint a felhajtóerő ($G > F$) – ekkor a test a lefele mutató $G - F$ eredő erő hatására lesüllyed.

A második lehetséges esetben a kétfajta erő egymással egyenlő ($G = F$), ekkor a test nem mozdul, a fluidum belsejében lebeg vagy annak felszínén úszik. A test lebegése akkor állhat elő, amikor átlagos fajsúlyuk egyenlő a folyadék fajsúlyával ($\gamma_m = \gamma$), ugyanis ekkor a kiszorított fluidum térfogata éppen a test térfogatával egyenlő ($V_k = V$). A test akkor úszik a felszínen, ha átlagos sűrűsége kisebb, mint a folyadék sűrűsége. Ekkor a test folyadékba merülő részének térfogatát (a *kiszorítását*) a kétfajta erő egyenlőségéből határozhatjuk meg:

$$V_k = V \cdot \frac{\gamma_m}{\gamma}. \quad (2.106)$$

Végül a harmadik lehetséges esetben a test súlya a felhajtóerőnél kisebb ($G < F$), tehát a test a felfele mutató eredő erő miatt a felszín fele emelkedik.

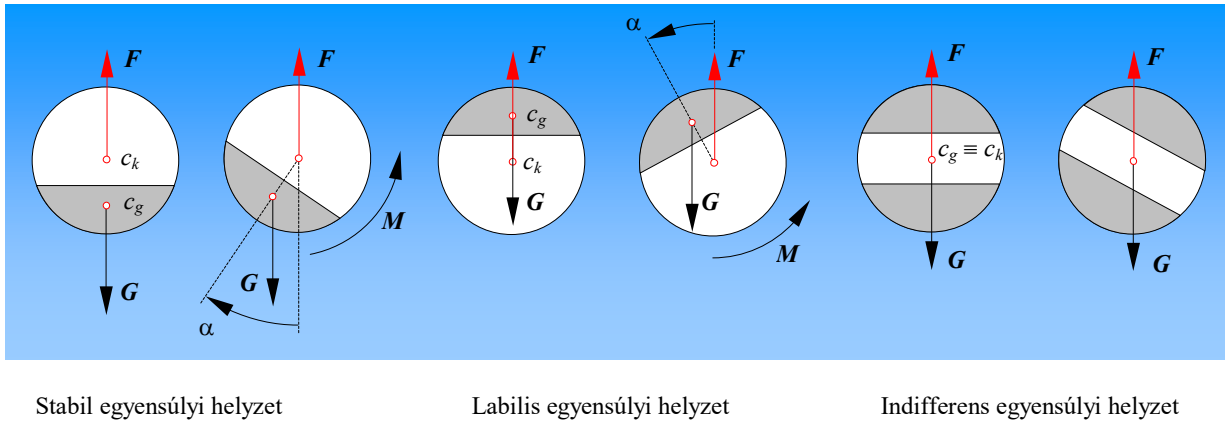
A test emelkedésének vagy süllyedésének a sűrűség magassággal történő változása szabhat határt: ha egy bizonyos magasságban (mélységben) a fluidum fajsúlyuk egyenlővé válik a test átlagos fajsúlyával, az emelkedés, illetve a süllyedés az adott szinten megáll.

A lebegő vagy a felszínen úszó test stabilitásának tanulmányozásakor a két erő egyensúlyán kívül meg kell vizsgálni a nyomatékaik egyensúlyát is. Az F felhajtóerő a kiszorított fluidum térfogatának geometriai középpontjában hat (ez a *kiszorítási középpont*), amely még a teljesen elmerülő testek esetében is csak sajátságos esetekben azonos a test súlypontjával, mely a G súlyerő támadáspontja (például ez akkor fordul elő amikor az illető test homogén; ekkor a test súlypontja egybeesik a geometriai középpontjával).

Amennyiben G és F támadáspontja azonos, a fluidumba merülő test egyensúlya indifferens, azaz bármely elforgatott helyzetében egyensúlyban marad.

Amikor a súlypont és a kiszorítási középpont nem esik egybe az egyensúly feltételét az $M = 0$ egyenlethől állapíthatjuk meg: a két erővektor ugyanazon a függőlegesen kell legyen. Ez az egyensúly csak akkor stabil, amikor az egyik erő a másik támadáspontjával ellenkező irányba mutat – ekkor az egyensúlyi helyzetéből kibillentett testre egy olyan nyomaték fog hatni, mely az egyensúlyi helyzetet visszaállítani igyekszik.

Ellenben amikor a két erő egymás fele mutat az egyensúlyi helyzet labilissá válik. Ilyen esetben az elfordulás után fellépő nyomaték a kibillentés irányában hat és egy új, stabilabb egyensúlyi helyzetbe forgatja a testet (2.27. ábra).



2.27. ábra. A lebegő test egyensúlyának stabilitása

A felszínen úszó testek esetében az egyensúly stabilitásának vizsgálata bonyolultabb, ugyanis a test elfordításakor a kiszorított térfogat alakja megváltozhat és a kiszorítási súlypont áthelyeződhet.

Tekintsük a 2.28. ábrán látható, egyensúlyban levő úszó testet. A testnek a szabad felszín síkjában levő metszete az *úszási felület* (S), melyet a *vízvonal* határol le. A test súlypontja (c_g) és kiszorítási súlypontja (c_k) ugyanazon a függőlegesen, az *úszási tengelyen* van.

Ha ezt a testet egy bizonyos, nem túl nagy α szöggel elfordítjuk, akkor az úszási felület a *dőléstengely* körül ugyanezzel a szöggel fog elfordulni. A kiszorítási súlypont az eredeti c_k helyzetéből egy újabb c'_k helyzetbe kerül, mivel egy bizonyos kiszorított V_1 folyadéktérfogat az dőléstengely egyik oldaláról a másikra kerül ($V_1 = V_2$). A kiszorított ösztérfogat nem változik, hiszen a felhajtóerő most is a test súlyával egyenlő, de a súly és a felhajtóerő vektorainak tartóegyenesé ekkor már nem azonos.

Az úszási tengelynek és a felhajtóerő támadóvonalának c_m metszéspontját *metacentrumnak* nevezik. A metacentrum és a súlypont távolsága a h -val jelölt *metacentrikus magasság*, a súlypont és a kiszorítási súlypont e távolsága az *excentrikusság*, a metacentrum és a kiszorítási súlypont távolsága pedig a *metacentrikus sugár* (r).

A számítások elvégzésének céljából egy olyan koordináta-rendszert veszünk fel, melynek x tengelye az úszási felület síkjában van, y tengelye a dőléstengellyel egybeesik, z tengelye pedig az úszási tengellyel párhuzamos.

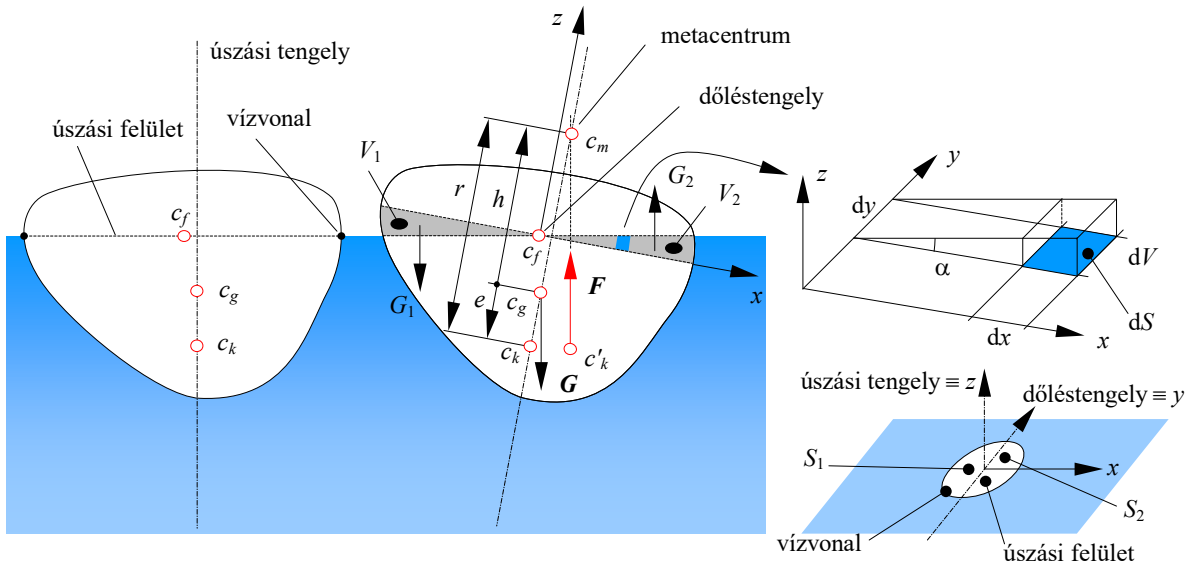
A dőléstengelytől jobbra és balra fekvő V_1 és V_2 térfogatok egyenlők egymással:

$$V_1 = \int_{S_1} (x \cdot \operatorname{tg} \alpha) dS = \int_{S_2} (-x \cdot \operatorname{tg} \alpha) dS = V_2, \quad (2.107)$$

melyeket az elemi dS alapfelületű és $x \cdot \operatorname{tg} \alpha$ magasságú dV elemi térfogatokkal számítottunk ki (a 2.28. ábra jobb oldalán). Az S_1 felület az ábrán az úszási felületnek a dőléstengelytől balra, S_2 pedig a jobbra eső része. Az egyenletből, $\operatorname{tg} \alpha$ -val való egyszerűsítés után

$$\int_{S_1} x dS + \int_{S_2} x dS = \int_S x dS = 0. \quad (2.108)$$

A két integrál összege az úszási felületnek a dőléstengelyre vonatkoztatott sztatikai nyomatékát adja. Mivel e nyomaték a fenti összefüggés értelmében zéró, következik, hogy a dőléstengely az úszási felület c_f geometriai középpontján megy át. Ez a pont általános esetben nincs rajta az úszási tengelyen.



2.28. ábra. Az úszó test egyensúlyának stabilitása

A V_1 térfogat áthelyeződése miatt létrejövő forgatónyomaték

$$M_y = \gamma \cdot \int_S x \cdot (x \cdot \operatorname{tg} \alpha) dS, \quad (2.109)$$

melyet a dV térfogatelemek súlyának rezultáns nyomatékaként számítunk ki. Ez a nyomaték az áthelyeződött térfogatnak megfelelő G_1 és G_2 erők által alkotott erőpár nyomatékának felel meg (e két erő nagysága a térfogatok egyelősége miatt ugyanakkora). Az összefüggést továbbalakítva észrevehetjük, hogy az integrál végső soron az S úszási felületnek a dőléstengelyre vonatkoztatott I_y tehetetlenségi nyomatékát adja, tehát:

$$M_y = \gamma \cdot I_y \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (2.110)$$

Ezt a forgatónyomatékot az F felhajtóerő támaszpontjának áthelyeződése folytán létrejövő nyomatékkal azonosíthatjuk:

$$M_y = F \cdot r \cdot \sin \alpha = \gamma \cdot V_k \cdot r \cdot \sin \alpha, \quad (2.111)$$

ahol az $r \cdot \sin \alpha$ erőkar a metacentrikus sugár vízszintes vetülete. A felhajtóerőt a folyadék fajsúlyának és a V_k kiszorított térfogatnak szorzata adja.

Az M_y nyomaték nagyságára kapott két egyenletből

$$\gamma \cdot I_y \cdot \operatorname{tg} \alpha = \gamma \cdot V_k \cdot r \cdot \sin \alpha, \quad (2.112)$$

ahonnan a metacentrikus sugár az

$$r = \frac{I_y}{V_k \cdot \cos \alpha} \quad (2.113)$$

egyenlet formájában határozható meg. Mivel kiindulási feltételként megszabtuk, hogy az α dőlésszög kicsi, $\cos \alpha \approx 1$ és a koszinusz tag a fenti formulából elhagyható:

$$r = \frac{I_y}{V_k}, \quad (2.114)$$

ez az összefüggés Bouguer-formula néven ismeretes.

Az ábrát szemrevéve megállapítható, hogy amíg a c_m metacentrum a test c_g súlypontja felett van, az elforgatást követően fellépő M nyomaték az elfordítás ellen hat, tehát az úszó test egyensúlya stabil. Képletileg a stabil egyensúlyi helyzetet a $h > 0$ vagy a $r > e$ relációkkal adhatjuk meg, ahol $h = r - e$.

Ellenben, ha a metacentrum a súlypont alatt van, az M nyomaték a kibillentés irányába fog hatni és az úszó test felborul, egyensúlya tehát instabil volt. Ekkor $h < 0$, illetve $r < e$.

A $h = 0$ (vagy $r = e$) határeset az úszó test indifferens egyensúlyát írja le: a kibillentett test az új helyzetében marad.

A testet visszaforgató vagy felborító M nyomaték nagyságát a felhajtóerő és a súlyerő által alkotott erőpár nyomatékként határozhatjuk meg:

$$M = \gamma \cdot V_k \cdot h \cdot \sin \alpha. \quad (2.115)$$

Megjegyzendő, hogy az úszó test elbillenésekor az úszási felület geometriája általában megváltozik. Éppen ezért a Bouguer-formula és az M nyomaték nagyságára kapott 2.115. képlet rendszerint csak igen kis α szögekre használható és csak az úszás stabilitásának felmérésére valók.

3. A FLUIDUMOK KINEMATIKÁJA

3.1. A Lagrange-módszer és az Euler-módszer

A kinematika (mozgástan) a testek mozgását tanulmányozza anélkül, hogy a mozgást okozó erőket vagy a jelenségek energiaviszonyait figyelembe venné. A kinematika célkitűzése a testek pályájának, sebességének és gyorsulásának tanulmányozása és e felsorolt mennyiségek közötti kapcsolat megállapítása.

A fluidumok kinematikája a tanulmányozott folyadékot vagy gázt igen nagy számú, anyagi pontnak tekinthető részecskékből álló közegnek tekinti, e részecskékre pedig az anyagi pont általános kinematikájában megállapított összefüggéseket alkalmazza. E részecskék infinitezimálisan kicsinyek ugyan, de kellőképpen nagyok ahhoz hogy eltekinthessünk a fluidum molekuláris szerkezetétől. Tisztán geometriai szemléletmódja miatt a fluidumok kinematikájának eredményei egyaránt igazak ideális és nem ideális fluidumokra is.

Az anyagi pontokból álló rendszerek kinematikájában a részecskék mozgását általában egy rögzítettnek tekintett vonatkoztatási rendszerhez viszonyítjuk. Egy részecske pillanatnyi helyzete a mozgás t_0 kezdetén mért koordinátáktól (x_0 , y_0 és z_0), valamint az időtől (t) függ. A helyzetet megadhatjuk a koordinátákkal:

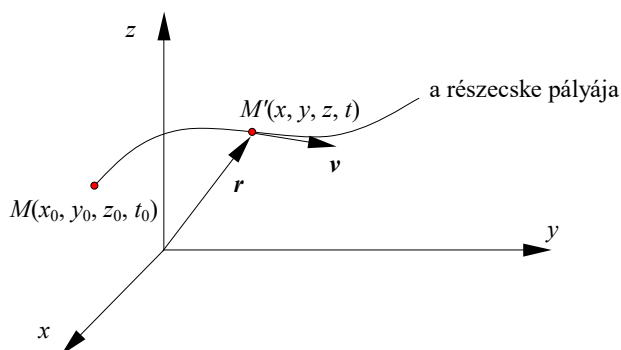
$$\begin{aligned}x &= x(x_0, y_0, z_0, t), \\y &= y(x_0, y_0, z_0, t), \\z &= z(x_0, y_0, z_0, t),\end{aligned}\tag{3.1}$$

vagy, tömörebben, az anyagi pont helyzetvektorának segítségével:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x_0, y_0, z_0, t) = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k},\tag{3.2}$$

ahol \mathbf{i} , \mathbf{j} és \mathbf{k} a koordinátatengelyek egységvektorai. A kezdeti x_0 , y_0 , z_0 koordinátákat és a t időt Lagrange-féle változóknak is nevezik, melyek független mennyiségek.

A koordinátákat leíró skaláris függvények által alkotott 3.1. egyenletrendszer, illetve a helyzetvektor 3.2. egyenlete a részecske pályáját adja meg. E pálya a kiszemelt pontszerű fluidumrészecske egymást követő pillanatokban elfoglalt helyeit összekötő görbe (3.1. ábra).



3.1. ábra. A Lagrange-féle ábrázolási mód

A helyzetvektor idő szerinti deriváltja a sebességvektor:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = v_x \cdot \mathbf{i} + v_y \cdot \mathbf{j} + v_z \cdot \mathbf{k} \quad (3.3)$$

(e derivált parciális, hiszen \mathbf{r} az x_0 , y_0 és z_0 koordinátáktól is függ), vetületeinek nagysága:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial x}{\partial t}, \\ v_y &= \frac{\partial y}{\partial t}, \\ v_z &= \frac{\partial z}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

A sebességvektor idő szerinti deriváltja (vagy a helyzetvektor második deriváltja) a gyorsulásvektor:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = a_x \cdot \mathbf{i} + a_y \cdot \mathbf{j} + a_z \cdot \mathbf{k}, \quad (3.5)$$

mely komponenseinek nagysága:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \\ a_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \\ a_z &= \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

E lépéseket folytatva magasabb rendű deriváltakat, gyorsulásokat is kiszámíthatunk, azonban ezeket a mennyiségeket csak ritkán használják.

A 3.1. vagy a 3.2. függvényekkel tehát a részecskék kinematikai jellemzői egyértelműen megállapíthatók. A fluidum kinematikus elemzésének ezen eljárása, a *Lagrange-módszer* az egyes fluidumrészecskék mozgását írja le. A sebességen és a gyorsuláson kívül a minket érdeklő egyéb fizikai mennyiségeket is, mint a amilyen a nyomás és a hőmérséklet, a részecske pillanatnyi helyzetéhez kötve a fenti négy független változó függvényeként adhatjuk meg. Mivel e módszer a tanulmányozott mennyiségeket a kiemelt részecskéhez köti, „anyagi leírás”-nak is szokták nevezni.

Ez a leírási módszer kényelmetlennek bizonyult, mivel a tanulmányozott fluidumot általában nem a pontszerű részecskék egyéni mozgásával, hanem az áramlási állapottal szokták jellemezni. Legtöbbször ugyanis nem a részecskék egyéni sorsa érdekel, hanem az, hogy mi történik a tér bizonyos pontjaiban (az áramló fluidum belsejében).

A fluidumok kinematikájában hasznosabbnak bizonyult tehát *Euler módszere*, amely a tanulmányozott tér rögzített pontjaiban írja le a különböző mennyiségeket. Így a sebesség pillanatnyi értékét a hely és az idő függvényeként (3.2. ábra) a

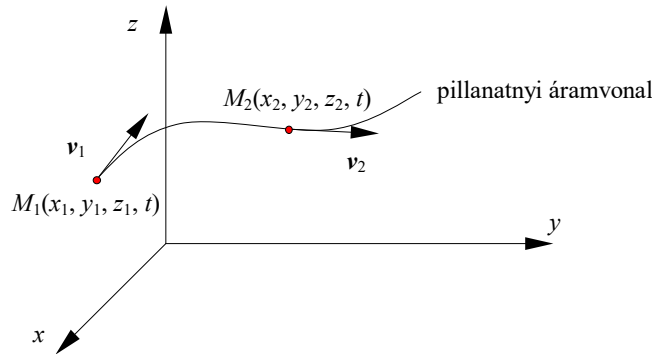
$$\begin{aligned} v_x &= v_x(x, y, z, t), \\ v_y &= v_y(x, y, z, t), \\ v_z &= v_z(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

skaláris összefüggésekkel adja meg, melyet vektoriálisan is felírhatunk

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad (3.8)$$

formában.

Az x , y és z koordinátákat és a t időt Euler-féle változóknak is nevezik, melyek e módszerben független mennyiségek.



3.2. ábra. Az Euler-féle ábrázolási mód

A 3.7. - 3.8. összefüggésekkel meghatározott *lokális* sebesség annak a részecskének a pályamenti sebessége, amely az adott t pillanatban éppen az adott, x , y és z koordinátájú helyen található. Ugyanebben a pontban egy dt idővel később mért \mathbf{v} sebesség már nem az előbbi részecske, hanem a $t + dt$ pillanatban éppen itt áthaladó részecske pályamenti sebességét jelenti.

A lokális sebesség egy vektorteret alkot. A fluidum mozgásának teljes leírásához a részecskék sebességét bármely pillanatban, a tanulmányozott tartomány bármely pontjában ismernünk kell.

Az Euler-módszerben tehát a fizikai mennyiségek nem az anyaghoz, hanem a térhez kötött jellemzők s emiatt ezt a tárgyalási módot „térbeli leírás”-nak is nevezik. Euler módszere Lagrange módszerével szemben könnyebben használható, mivel a vektorterek tanulmányozásának matematikai módszereit alkalmazza. Ezen kívül megemlíthető, hogy az Euler-féle tárgyalásmód közelebb áll a kísérleti módszerekhez mivel az áramló közegben a fizikai jellemzőket rendszerint rögzített pontokban mérik. A gyakorlati fontosságú esetek jelentős részében a lokális sebességek állandók, ami az Euler-módszer használatában további egyszerűsítéseket tesz lehetővé.

Euler módszerében a koordináták független változók (a kiszemelt pont helyzetét adják), míg Lagrange módszerében a koordináták függvények (a kiszemelt részecske pillanatnyi helyzetét adják). A sebesség és a gyorsulás mindkét módszerben függő változó.

Akárcsak a Lagrange-módszerben, Euler módszerében is a sebesség az út idő szerinti deriváltja, de mivel a koordináták független változók, ez a derivált a Lagrange-módszerben érvényes 3.3. összefüggéssel szemben teljes és nem parciális:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x \cdot \mathbf{i} + v_y \cdot \mathbf{j} + v_z \cdot \mathbf{k} . \quad (3.9)$$

A tér egy rögzített pontjában, egy adott pillanatban a lokális sebesség az éppen ott áthaladó részecske pályamenti sebességével azonos. A sebességet adó 3.9. képletből az elemi út vetületeit (a helyzetvektor $d\mathbf{r}$ változásának vetületeit) a

$$\begin{aligned}
dx &= v_x \cdot dt, \\
dy &= v_y \cdot dt, \\
dz &= v_z \cdot dt
\end{aligned}
\tag{3.10}$$

összefüggések adják. E mennyiségek integrálásával a részecskék pályáját, vagyis a Lagrange-módszer 3.1. függő változóit kapjuk, ahol az x_0, y_0, z_0 koordináták mint integrálási konstansok szerepelnek. A 3.10. összefüggések tehát a kétfajta szemléletmód változói közötti kapcsolatot adják.

Az Euler-módszerben a részecskepályák helyett egy másfajta görbesereget használnak. A fluidum egy *áramvonal* egy olyan görbe, amelyet a lokális sebességvektor egy adott pillanatban minden pontjában érint; vagy más szavakkal: az áramvonal a sebességvektorok burkológörbéje (3.2. ábra). Az áramvonal nem feltétlenül azonos a részecske pályájával.

Az áramvonal egyenletét definíciójából eredendően a

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = 0 \tag{3.11}$$

összefüggés adja, ahol $d\mathbf{r}$ az áramvonal egy elemi darabját jellemzi: nagysága az elemi út hosszával egyenlő, a pályához érintőleges és az elmozdulás irányába mutat. A két vektor (\mathbf{v} és $d\mathbf{r}$) minden pontban kollineáris, vektoriális szorzatuk tehát zéró. Párhuzamosságuk feltételét az előbbi vektoriális egyenletnél könnyebben kezelhető egyenletrendszer formájában is felírhatjuk:

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)}. \tag{3.12}$$

Az áramvonalak érinthetik, de nem metszhetik egymást (elméleti kivételek lennének a nulla vagy a végtelenül nagy sebességű szinguláris pontok). Két egymást metsző áramvonal esetén a sebességvektor az illető pontban mindkét görbéhez érintőleges kellene legyen, ez azonban véges és zérótól különböző sebességek esetén nem állhat fenn.

Egy részecske gyorsulását a helyzetvektor második idő szerinti deriváltjaként határozzuk meg. Akárcsak az első derivált (a 3.9. sebesség) ez is teljes. A gyorsulás ugyanakkor a sebesség első idő szerinti deriváltjával azonos, mely utóbbi mennyiség az Euler-módszerben egy helytől és időtől függő négyváltozós függvény. A gyorsulás tehát

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \cdot dz \right) \cdot \frac{1}{dt} \tag{3.13}$$

lesz. A zárójelben a sebességvektor teljes $d\mathbf{v}$ differenciálját látjuk. dt -vel beosztva a gyorsulásra az

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \cdot v_z \tag{3.14}$$

összefüggést kapjuk, amelyet az

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} + \text{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v} \tag{3.15}$$

formákban is felírhatunk (a $\text{grad} \frac{x^2}{2} = (\mathbf{x} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x} \times \text{rot} \mathbf{x}$ képletet felhasználásával).

A gyorsulás, mint látható, két tag összegéből áll: az előbbi kifejezésekben szereplő összeg első tagját *lokális gyorsulásnak* nevezik, a további tagjai pedig a *konvektív gyorsulást* adják.

A lokális sebesség $\partial \mathbf{v} / \partial t$ deriváltja (a lokális gyorsulás) nem azonos a kiszemelt ponton áthaladó részecske pillanatnyi gyorsulásával, mivel az csak a lokális sebesség időbeni változását adja – ezért nevezik e mennyiséget „lokális gyorsulás”-nak, bár definíciója különbözik a lokális sebességétől. A konvektív gyorsulás a lokális sebesség térbeli változása egy adott pillanatban. E két tag összegét „szubsztanciális” gyorsulásnak nevezik – ez az összeg adja a részecske pillanatnyi gyorsulását.

Megjegyzendő, hogy a fluidumok kinematikájában a 3.13. - 3.14. relációkban is szereplő $\partial / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla (\)$ alakú deriváltakat szintén a „szubsztanciális” jelzővel látják el és néha „D”-vel jelölik „d” helyett. A lokális összetevőket adó idő szerinti parciális deriváltakat „lokális”, a konvektív tagoknak megfelelő derivált kifejezést pedig „konvektív” deriváltaknak nevezik.

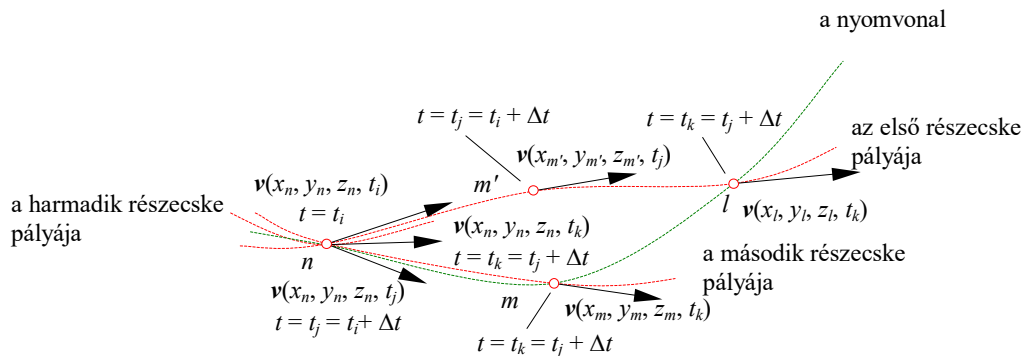
A továbbiakban csak az Euler-féle ábrázolási módot fogjuk használni.

3.2. A fluidumok kinematikájának alapfogalmai

3.2.1. Az áramlást jellemző görbék és felületek

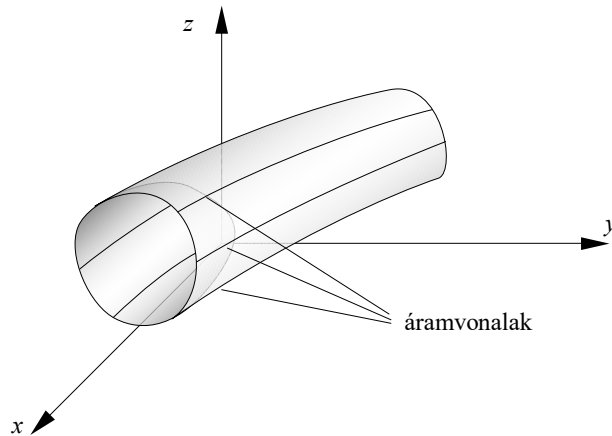
Az előbbi fejezetben bevezettük a pálya és az áramvonal fogalmait: a pályához a kiszemelt részecske sebességvektora bármely pillanatban érintőleges, az áramvonal pedig a pillanatnyi sebességvektorok burkológörbéje. Ha kísérletileg szemléltetni szeretnénk ezeket a görbéket, akkor ezt a feladatot az áramló fluidum belsejébe helyezett parányi lebegő testekkel oldhatjuk meg. A pályát egy ilyen lebegő test helyzetének követésével határozhatjuk meg, míg az áramvonalat a pillanatnyi sebességvektorok irányába rendeződő hosszúkás részecskék rajzolják ki.

A fluidumok mozgásának tanulmányozásában egy újabb fontos fogalom a *nyomvonal*. A nyomvonal a tér egy adott pontján egymás után áthaladó részecskéket összekötő görbe (3.3. ábra). Ilyen például az áramlástan kísérletekben az áramló folyadékba fecskendezett színes tinta vagy a szélcsatorna-kísérletekben a létrehozott füstcsík. Megszerkesztéséhez azoknak a részecskéknek kell meghatározniuk a t_k pillanatban érvényes helyzetét, melyek egy adott n ponton haladtak át.



3.3. ábra. A nyomvonal grafikus értelmezése

Az *áramfelületet* egy kijelölt görbére támaszkodó áramvonalak alkotják. Mivel a sebességvektor az áramvonalhoz, így az áramfelülethez is érintőleges, ezeken a felületeken keresztül nincs átáramlás. Az *áramcső* az áramfelület egy különleges esete, amikor az áramvonalak támasztógörbéje zárt (3.4. ábra). Áramcsövet alkotnak a műszaki gyakorlatban alkalmazott csövek és csatornák, hiszen felületükön nem lép fel anyagátlépés.



3.4. ábra. Áramcső

3.2.2. A hozam

Egy adott felületen időegység alatt áthaladó fluidum mennyiségét *hozamnak* (áramnak) nevezzük:

$$Q_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \int_S q_m \, dS = \int_S \rho \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad \frac{\text{kg}}{\text{s}}. \quad (3.16)$$

Az előbbi mennyiség a *tömeghozam* (tömegáram), ahol q_m az egységnyi felületen mért fajlagos tömeghozam. Inkompresszibilis fluidumok esetében az anyag mennyiségét a térfogata egyértelműen meghatározza, mivel ρ sűrűsége állandó. Ilyenkor gyakran kényelmesebb a térfogatokkal dolgozni, a *térfogathozamot* (térfogatáramot) pedig

$$Q_V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \int_S q_V \, dS = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \quad (3.17)$$

formában definiálhatjuk. E definíció szerint a térfogathozam a sebességvektor fluxusa az adott felületen. A $q_V = q_m / \rho$ mennyiség a fajlagos térfogathozam.

Megjegyzendő, hogy a magyarországi szakirodalomban általában a „hozam” megnevezés helyett az „áram” megnevezést használják.

3.2.3. Stacionárius és nem stacionárius áramlások

Az áramlás igen fontos sajátossága az időfüggése: valamely pontban mért jellemzői (például a sebesség, a nyomás és a sűrűség) lehetnek időben változó vagy időtől független, állandó mennyiségek.

A *stacionárius* (permanens vagy időálló) áramlásban a jellemzők nem függenek az időtől, így a sebességteret a

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{v}(\mathbf{r}) \quad (3.18)$$

vektortér írja le. Ekkor a paraméterek között az időtől függő vektortérrel leírt instacionárius esettel ellentétben (3.8. képlet) a t idő nem jelenik meg.

Stacionárius áramlás esetében a fluidum bármely pontjában bármely jellemző idő szerinti parciális deriváltja zéró. Ilyen módon a lokális gyorsulás is nulla:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0, \quad (3.19)$$

mely azonban nem jelenti azt, hogy az áramló fluidum részecskéinek gyorsulása zéró lenne (az most a konvektív komponenssel lesz azonos).

Belátható, hogy stacionárius áramlás esetében az áramvonal, a pálya és a nyomvonal egybeesik és rögzített. Ez az egybeesés ad lehetőséget arra, hogy a stacionárius áramlásba bevezetett füst- vagy tintacsikkal (ami tulajdonképpen egy nyomvonal) a bennünket leginkább érdeklő áramvonalakról kapjunk felvilágosítást.

Megjegyzendő, hogy egyes áramlások attól függően lehetnek stacionáriusak vagy nem stacionáriusak, hogy milyen koordináta-rendszerből vizsgáljuk azokat. Például egy tavon egyenletes sebességgel haladó csónak körüli áramlás egy nyugvónak tekintett rendszerből (a tópartról) nézve instacionárius, mivel a korábban nyugvó folyadékreszek a csónak közeledtére mozgásba jönnek. Ha viszont az áramlást a csónakhoz viszonyítjuk, akkor a csónakhoz kötött mozgó koordinátarendszer egyes pontjaiban a relatív sebesség időben nem változik, azaz az áramlás stacionárius.

Vannak olyan áramlások, amelyeknél a tér különböző pontjaiban a fizikai jellemzők egy időben állandó középérték körül véletlenszerűen ingadoznak. Ezeket *kvázistacionárius* áramlásoknak nevezzük.

3.2.4. A folytonossági tétel

A stacionárius áramlás fontos jellemzője a tömeghozam állandósága: ekkor egy áramcső bármely két keresztmetszeten időegység alatt azonos tömegű fluidum áramlik keresztül:

$$Q_{m1} = Q_{m2}. \quad (3.20)$$

A teljes keresztmetszeten átáramló hozamot a fajlagos hozamokkal számíthatjuk:

$$\int_{S_1} q_m \, dS = \int_{S_2} q_m \, dS, \quad (3.21)$$

ahol q_m a keresztmetszet valamely pontjában mért fajlagos tömeghozam. Ugyanezt kifejezhetjük a q_V fajlagos térfogathozamokkal is:

$$\int_{S_1} \rho \cdot q_V \, dS = \int_{S_2} \rho \cdot q_V \, dS, \quad (3.22)$$

mely összenyomhatatlan fluidumokra ($\rho = \text{konst.}$) a térfogathozamok egyenlőségét adja:

$$Q_{V1} = Q_{V2}. \quad (3.23)$$

Ez utóbbi négy összefüggés az áramcsőre felírt *folytonossági egyenlet* (kontinuitási tétel) egy-egy sajátos formája.

A folytonossági tétel általánosításához tekintsünk az áramló fluidum belsejében egy rögzített zárt felületet (3.5. ábra). E felületen egységnyi idő alatt átáramló fluidum tömege

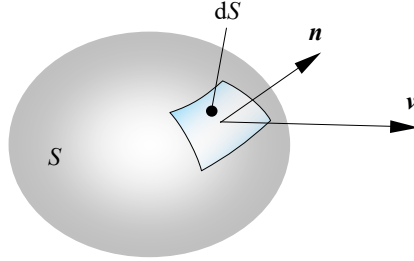
$$Q_m = \oint_S \rho \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (3.24)$$

mely csak akkor lehet nullától különböző, ha az S felület által lehatárolt térfogatrészben a fluidum tömege megváltozik.

Mivel a felületre állított \mathbf{n} normális kifele mutat, az integrál pozitív értéke a tömeg fogyatkozását jelenti:

$$\oint_S \rho \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV, \quad (3.25)$$

a kapott összefüggés pedig az általános kontinuitási tétel integrális alakja. Itt V a zárt S felület által lehatárolt térfogatot jelenti.



3.5. ábra. Zárt felületen keresztüláramló fluidum

Az előbbi összefüggés bal oldalán a sűrűséggel megszorozott sebességvektor fluxusát találjuk, az adott zárt S felületen keresztül. Ezt a felületi integrált a Gauss-Ostrogradsky képlet segítségével térfogati integrállá lehet átalakítani, a kontinuitási tétel pedig a

$$\int_V \operatorname{div} \rho \cdot \mathbf{v} \, dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV \quad (3.26)$$

alakra hozható. Innen

$$\operatorname{div} \rho \cdot \mathbf{v} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (3.27)$$

ez pedig a kontinuitási tétel differenciális alakja. A jobb oldali parciális derivált a sűrűség lokális változását jelenti, mely stacionárius körülmények között zéró. A bal oldal a sűrűség konvektív változását adja.

Ha a vizsgált térben az anyag mennyisége megváltozik, azaz „források” vagy „nyelők” vannak jelen, akkor a kontinuitási tételbe ezek hatását is be kell vezetni. A differenciális alak teljesebb kifejezése tehát

$$\operatorname{div} \rho \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} = q \quad (3.28)$$

lesz, ahol q a *forráserősség*. E differenciális alak integrálásával a jobb oldalon a V térfogatrészben időegység alatt megjelenő vagy az onnan eltávozó anyag mennyiségét (tömeghozamát) kapjuk:

$$\int_V \operatorname{div} \rho \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = Q. \quad (3.29)$$

A folytonossági tételnek ez utóbbi, teljesebb integrális és differenciális alakja egyaránt igaz stacionárius és nem stacionárius áramlásokra.

A kontinuitási egyenlet a tömeg megmaradásának elvét fejezi ki: a források és a nyelők hozama valamilyen fizikai folyamat (fázisátalakulás, kémiai reakció) következményeként jelenik meg, azonban az egymásba átalakuló anyagok összömege nem változik meg.

A 3.28. reláció alapján a sebességvektor divergenciájának fizikai értelmét is megadhatjuk: a $\text{div } \mathbf{v}$ mennyiség értéke az áramlási tér egy adott pontjában megmutatja, hogy egységnyi idő alatt az egységnyi térfogathból mennyivel több fluidum lép ki a belépőnél: ennek a zérótól eltérő értéke valamilyen forrás vagy nyelő jelenlétét, illetve a sűrűség megváltozását jelenti.

Az áramlási teret többnyire áramvonalakkal szoktuk jellemezni: a sebességtér források az áramvonalak számának megváltozásával jár.

3.2.5. Örvénylő és örvénymentes áramlások

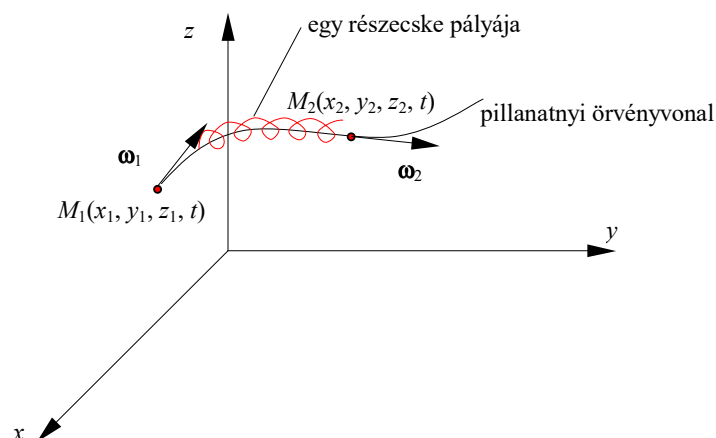
A fluidumrészecske mozgása két egyszerű mozgásforma eredőjeként fogható fel: az egy elmozdulás (transzláció) és egy elfordulás (rotáció) együttes eredménye. A részecske elmozdulásának sebességét a lokális \mathbf{v} sebességvektorral adtuk meg, elfordulásának sebességét pedig az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor írja le. A szögsebességvektor a \mathbf{v} sebességvektor $\boldsymbol{\Omega}$ rotorjának (rotációjának) fele:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \cdot \text{rot } \mathbf{v} = \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (3.30)$$

(ezt majd később fogjuk levezetni).

Amikor egy vektortér $\boldsymbol{\Omega}$ rotorja zéró, akkor az illető vektorteret *örvénymentesnek* nevezik. Ha a lokális sebességek örvénymentes vektorteret alkotnak, akkor örvénymentes áramlásról beszélünk. Ebben az esetben a sebességvektor egy potenciálfüggvény gradienseként adható meg, a vektorteret és az áramlást pedig *potenciálosnak* is nevezik. Ellenkező esetben, örvénylő áramlásban a lokális sebesség nem származtatható egy skaláris potenciálfüggvényből, a vektortér és az áramlás tehát nem potenciálos.

Az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség a fluidumrészecske elfordulását jellemzi és nem a pályáját. Elképzelhető egy olyan mozgásfajta is, amikor a fluidumrészecske egy zárt pályán mozog anélkül, hogy közben a rögzített koordináta-rendszerhez viszonyítva elfordulna. A szemlélő az ilyen áramlást örvénylőnek látja, viszont a \mathbf{v} sebesség $\boldsymbol{\Omega}$ rotorja zéró – az ilyen áramlásformát *potenciálos örvénynek* nevezik.



3.6. ábra. Örvényvonal

A szögsebesség $\boldsymbol{\omega}$ vektora és az $\boldsymbol{\Omega}$ rotor a lokális sebesség vektorához hasonlóan egy-egy vektorteret határoz meg, amelyeket a \mathbf{v} vektortérhez hasonló módon jellemezhetünk. Így az

áramvonallal analóg *örvényvonal* egy olyan görbe, amelyet az ω szögsebességvektor és az Ω rotor egy adott pillanatban minden pontjában érint és melynek egyenlete

$$\frac{dx}{\omega_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{\omega_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{\omega_z(x, y, z, t)} \quad (3.31)$$

(az ω szögsebesség komponensei helyett használhatjuk az Ω rotor komponenseit is).

A szögsebességvektor tartóegyenese a részecske pillanatnyi forgástengelye, tehát az áramló fluidum molekulái az örvényvonalak körül forognak (3.6. ábra).

Az *örvényfelület* és az *örvénycső* az áramfelülettel és az áramcsővel analóg fogalmak.

Az áramcsövekre felírt folytonossági tételnek is van analóg párja: az Ω rotor fluxusa az örvénycső bármely keresztmetszetén állandó ($\text{div } \omega = \text{div}(\text{rot } \mathbf{v}) = 0$, *Helmholtz tétele*). E tétel egyik következménye az, hogy az örvénycső nem végződhet az áramló fluidum belsejében: az örvénycsövek vagy gyűrűszerűen zártak (ilyen például egy füstkarika), vagy az áramló fluidum felületén végződnek (ez lehet a fluidum szabad felszíne vagy a vezeték fala). Egy másik fontos következmény szerint az örvénylő áramlás mindvégig megtartja örvénylő jellegét.

Ez a tétel a sebességvektor cirkulációjának felírásával igazolható, amikor a cirkulációt a két keresztmetszet kerületén és egy azokat összekötő örvényvonal mentén számítjuk. A \mathbf{v} sebességvektor G zárt görbe menti cirkulációját a

$$\Gamma = \oint_G \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}, \quad (3.32)$$

integrál adja, ahol a $d\mathbf{l}$ vektor a görbe egy elemi szakaszát jellemzi:

$$d\mathbf{l} = dx \cdot \mathbf{i} + dy \cdot \mathbf{j} + dz \cdot \mathbf{k}. \quad (3.33)$$

Fontos következtetésre vezet *Thomson tétele* is, amely a sebességvektor cirkulációjának időbeni változására vonatkozik. Ha a zárt G görbe egy *folyékony vonal*, amelyet az áramló fluidum mozgásban levő részecskéi rajzolnak ki és azzal együtt mozdul el, akkor a cirkuláció változási sebessége barotróp fluidum súrlódásmentes áramlása esetén, konzervatív erőterben

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0 \quad (3.34)$$

lesz. Thomson tétele önmagában nem tűnik különösen hasznosnak, viszont van egy fontos következménye: a barotróp fluidum súrlódásmentes áramlása potenciális erőterben potenciális marad, azaz benne örvények nem keletkeznek. Ez a következmény *Lagrange tétele*.

3.3. A fluidum alakváltozási állapota

A kontinuumok mechanikája az alak megváltozásával járó jelenségeket három egyenlet-csoporttal írja le, amelyek e jelenségek geometriai, sztatikai és fizikai aspektusait célozzák meg. Ezek közül a geometriai aspektus egyenletei az elmozdulás és az alakváltozás közötti kapcsolatot állapítják meg.

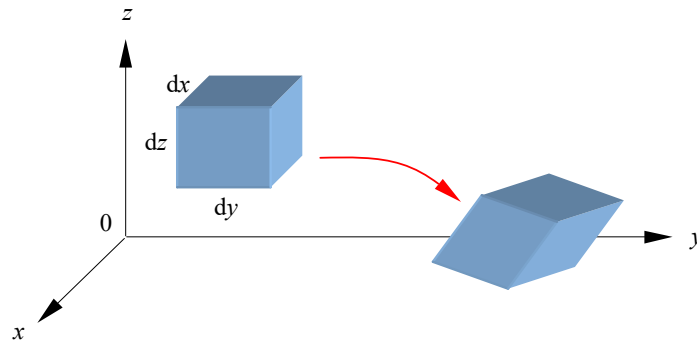
Helmholtz elve szerint a kontinuum kiragadott térfogatelemének mozgása két komponensre osztható: *merevtest-elmozdulásra* és *alakváltozásra*, mely utóbbi a térfogatelemet alkotó anyagi pontoknak (molekuláknak) az elem középpontjához viszonyított elmozdulásából ered (3.7. ábra).

A merevtest-elmozdulás egy eltolás (transzláció) és egy elfordulás (rotáció) eredője, az alakváltozás pedig a térfogatváltozás és az alak torzulásának (a forma megváltozásának) együttes hatása.

Amennyiben egy tetszőleges $P(x, y, z)$ pontban a \mathbf{v} lokális sebesség vetületei v_x , v_y és v_z , akkor a közeli $P'(x + dx, y + dy, z + dz)$ pontban a \mathbf{v}' sebesség vetületeit a

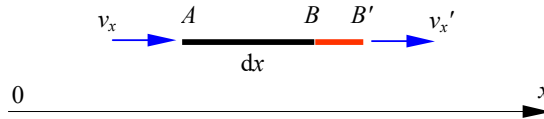
$$\begin{aligned} v_x' &= v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot dz, \\ v_y' &= v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial v_y}{\partial z} \cdot dz, \\ v_z' &= v_z + \frac{\partial v_z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial v_z}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot dz \end{aligned} \quad (3.35)$$

összefüggésekkel lehet megadni, ahol a parciális deriváltak a sebességkomponensek térbeli változását adják a koordinátatengelyek irányában (azt, hogy milyen mértékben változnak e komponensek a távolság függvényében).



3.7. ábra. A térfogatelem elmozdulása és alakváltozása

Ha egy x tengellyel párhuzamos, kezdetben dx hosszúságú szakasz két végpontjának kis elmozdulását tanulmányozzuk, akkor azt tapasztaljuk, hogy az A és a B végpontok x irányban mért sebességének különbsége miatt a szakasz hossza az elmozdulás során megváltozik (3.8. ábra).



3.8. ábra. Sebességkülönbség által előidézett lineáris alakváltozás

A végpontok sebességei közötti különbséget a következő kifejezés adja:

$$\Delta v_x = v_x' - v_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dx. \quad (3.36)$$

Az x tengely irányában mért fajlagos lineáris alakváltozást a szakasz megnyúlásának (vagy megrövidülésének) és kezdeti hosszának hányadosa adja:

$$\varepsilon_x = \frac{BB'}{AB} = \frac{\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dt - v_x \cdot dt}{dx}. \quad (3.37)$$

E törtet egyszerűsítve

$$\varepsilon_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dt. \quad (3.38)$$

A fajlagos lineáris alakváltozás tehát egy időben változó mennyiség, változási sebessége az előbbi összefüggés alapján

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} = s_x. \quad (3.39)$$

Hasonló módon kapjuk a másik két irányban mért fajlagos lineáris alakváltozásokat (ε_y , ε_z) és azok változási sebességét is (s_y , s_z).

A térfogatelem éleinek megnyúlása vagy rövidülése a térfogatának megváltozásához vezet. Az élek hosszának megváltozását ismerve a térfogatváltozást

$$dV = (1 + \varepsilon_x) \cdot dx \cdot (1 + \varepsilon_y) \cdot dy \cdot (1 + \varepsilon_z) \cdot dz - dx \cdot dy \cdot dz \quad (3.40)$$

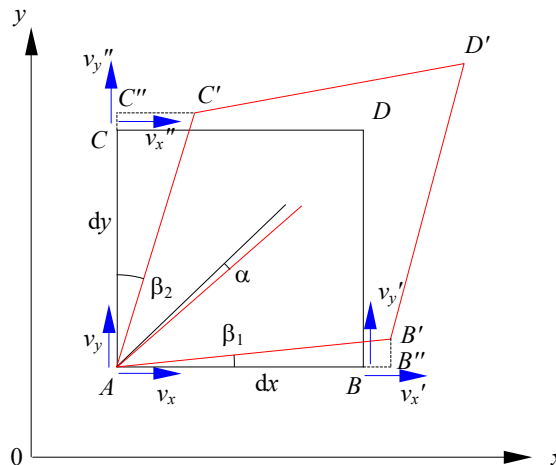
formában kapjuk. A fajlagos térfogatváltozás a térfogatváltozás és az eredeti térfogat aránya:

$$\varepsilon_V = \frac{dV}{dx \cdot dy \cdot dz} \approx (\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z) \cdot dt = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \cdot dt = \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot dt, \quad (3.41)$$

a térfogat változásának sebessége pedig

$$\dot{\varepsilon}_V = \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (3.42)$$

lesz.



3.9. ábra. Sebességkülönbség által előidézett torzulás

A térfogatelem formájának megváltozását oldallapjainak egymáshoz viszonyított elfordulása okozza, melyet szintén a térfogatelemet alkotó részecskék sebességének különbözőségének

tulajdoníthatunk. Egy oldallap teljes β elfordulását két összetevő adja: a merevtest-elmozdulásból adódó α elfordulás és az alakváltozásból származó γ szög.

A 3.9. ábrán egy négyszög alakú oldal elfordulásának és torzulásának együttes hatását látjuk. Az AB oldal z tengely körüli elfordulásának szöge:

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{B'B''}{AB''} = \frac{\left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dt - v_y \cdot dt}{dx \cdot \left(1 + \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)} \approx \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot dt. \quad (3.43)$$

Kis, radiánban mért szögekre $\operatorname{tg} \beta \approx \beta$, tehát ennek az oldalnak az elfordulása

$$\beta_1 = \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot dt. \quad (3.44)$$

Az AC oldal elfordulását hasonlóan kapjuk:

$$\beta_2 = \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot dt. \quad (3.45)$$

A két él által bezárt szög a kezdetben derékszög volt és annak megváltozása tehát

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \beta_1 + \beta_2 = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \cdot dt \quad (3.46)$$

lesz. A derékszög megváltozása is időben változó mennyiség, változási sebességét a következő módon írhatjuk fel:

$$\dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma}_{yx} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} = 2 \cdot s_{xy} = 2 \cdot s_{yx}. \quad (3.47)$$

A másik két koordinátasíkkal párhuzamos oldallap szögeinek változását és a megfelelő változási sebességeket hasonló módon kapjuk.

Amint az a 3.9. ábrából is kiderül, a részecskék sebességkülönbsége miatt a térfogatelem a saját tengelye körül elfordul. Az AB oldal β_1 és az AC oldal β_2 elfordulása a térfogatelem α elfordulásának és a derékszög γ megváltozásának együttes eredménye:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \gamma_1 + \alpha, \\ \beta_2 &= \gamma_2 - \alpha, \end{aligned} \quad (3.48)$$

ahol γ_1 és γ_2 összege γ_{xy} -t adja, α pozitív értéke pedig a pozitív forgatási iránynak felel meg. Az α elfordulást a CAB szög felezővonalának elfordulásával azonosíthatjuk. A derékszög torzulásának szimmetriája miatt $\gamma_1 = \gamma_2$ (mindkettő a derékszög felének a torzulása). A második egyenletet az elsőből kivonva a térfogatelem z tengely körüli elfordulásának szögét

$$\alpha = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \cdot dt \quad (3.49)$$

alakban kapjuk.

A szögsebesség a szögváltozás idő szerinti deriváltja. A térfogatelem szögsebességének ω_z vetülete az előbbi képlet alapján

$$\omega_z = \dot{\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (3.50)$$

lesz, mely mennyiség az $\mathbf{\Omega}$ rotor megfelelő vetületének fele, ahogyan azt 3.30. összefüggésben már előzőleg használtuk. Hasonló módon kapjuk a szögsebesség másik két vetületét is.

A sebességvektor vetületeinek az előbbi összefüggésekben szereplő parciális deriváltjait egy matrixba rendezhetjük:

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

Ez egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus matrixra bontható fel:

$$[\mathbf{D}] = [\mathbf{S}] + [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} s_x & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_y & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

ahol a szimmetrikus komponens az *alakváltozás sebességének tenzora*, míg az antiszimmetrikus komponens az *örvénytenzor*.

Az alakváltozás sebességének tenzorával a fajlagos alakváltozás $[\mathbf{\epsilon}]$ tenzorát

$$[\mathbf{\epsilon}] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 1/2 \cdot \gamma_{xy} & 1/2 \cdot \gamma_{xz} \\ 1/2 \cdot \gamma_{yx} & \epsilon_y & 1/2 \cdot \gamma_{yz} \\ 1/2 \cdot \gamma_{zx} & 1/2 \cdot \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_y & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_z \end{bmatrix} \cdot dt = [\dot{\mathbf{\epsilon}}] \cdot dt \quad (3.53)$$

formában kapjuk, mely összefüggés a fluidumok alakváltozásának geometriai aspektusát írja le.

Megjegyzendő, hogy mivel az $[\mathbf{\epsilon}]$ tenzornak csak hat egymástól különböző eleme van, azt gyakran az

$$\{\mathbf{\epsilon}\} = \left\{ \begin{array}{c} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{array} \right\} \quad (3.54)$$

vektoriális formában írják fel.

4. A FLUIDUMOK DINAMIKÁJA

4.1. Az impulzustétel és az impulzus-nyomaték tétele

Míg a kinematika (a mozgástan) a mozgást geometriai szempontból vizsgálja, addig a dinamika (az erőtan) már a mozgás okát is tanulmányozza. A newtoni mechanika a mozgást a kölcsönhatásokból származó erőkkel és a potenciális energia segítségével írja le. A fluidumok dinamikája a newtoni mechanika eredményein alapul, amelyek alkalmazását a közeg leírásához igazítjuk.

A fizika (és azon belül a mechanika) alapvető tételei között szerepelnek a különböző megmaradási elvek, így a tömeg (az anyag), az impulzus, az impulzusmomentum és az energia megmaradásának tételei.

A fluidumok mechanikájában a tömeg megmaradásának elvét az előbbi fejezetben bemutatott kontinuitási tétel fogalmazza meg. Az impulzus- és az impulzusmomentum megmaradásának tételeit alkalmazva olyan összefüggésekhez jutunk, melyek az áramló fluidum által kifejtett erők és nyomatékok határozhatók meg.

Egy anyagi pont impulzusán a

$$\mathbf{P} = m \cdot \mathbf{v} \quad (4.1)$$

szorzatot értjük, ahol m az anyagi pont tömege, \mathbf{v} pedig a sebessége. E mennyiség változási sebessége (idő szerinti deriváltja) az anyagi pontra ható erők eredőjét adja:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d(m \cdot \mathbf{v})}{dt}; \quad (4.2)$$

ez az összefüggés az *impulzustétel* (Newton második axiómája, melyet állandó tömegű rendszerekre $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$ formában szoktak felírni).

A \mathbf{P} impulzusvektor valamely ponthoz viszonyított nyomatéka definíció szerint az

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = \mathbf{r} \times m \cdot \mathbf{v} \quad (4.3)$$

impulzusnyomaték (vagy *impulzusmomentum*), melynek idő szerinti deriváltja az anyagi pontra ható erők forgatónyomatékainak rezultánsát adja:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{N}}{dt} = \frac{d(\mathbf{r} \times m \cdot \mathbf{v})}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}; \quad (4.4)$$

ez utóbbi összefüggés pedig az *impulzusnyomaték tétele*.

Ha az anyagi pontra ható erők rezultánsa nulla, akkor az impulzustétel értelmében annak \mathbf{P} impulzusa állandó: ez az észrevétel az anyagi pontra felírt impulzus-megmaradás tétele.

Az előbbiekhöz hasonló módon, ha az anyagi pontra ható erőknek valamely pontra vonatkoztatott eredő nyomatéka zéró, akkor az impulzusnyomaték tételének értelmében annak az adott pontra vonatkoztatott \mathbf{N} impulzusnyomatéka állandó, ez pedig az impulzusnyomaték megmaradásának a tétele.

Egy anyagi pontrendszer impulzusa és impulzusnyomatéka definíció szerint egyenlő a rendszert alkotó anyagi pontok impulzusainak, illetve impulzusnyomatékainak összegével. Ha ezeket az összegeket kifejtjük, akkor a fenti definíciókkal megegyező formulákhoz jutunk, ahol most m a rendszer össztömegét, \mathbf{v} a tömegközéppontjának sebességét, \mathbf{r} pedig a tömegközéppont helyzetvektorát jelenti.

A rendszert alkotó anyagi pontok kölcsönhatásban lehetnek, ekkor közöttük páronként bizonyos $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ belső erők hatnak. Egy ilyen erópárból származó eredő erő és azok eredő nyomatéka egyaránt nulla, tehát az anyagi pontrendszerre felírt impulzustétel és impulzusnyomaték-

tétel bal oldalán szereplő F erő, illetve annak M nyomatéka a rendszerre ható külső erők rezultánsát, illetve azok rezultáns nyomatékát jelentik. Ezek alapján az impulzus és az impulzusnyomaték megmaradás törvényeit a következőképpen fogalmazhatjuk meg: a zárt anyagi pontrendszer impulzusa és az impulzusnyomatéka nem változik.

A szilárd testek és a fluidumok mechanikájában az impulzust és az impulzusnyomatékot egy V térfogatú anyagra kell felírnunk:

$$F = \frac{d}{dt} \int_V \rho \cdot v \, dV, \quad (4.5)$$

$$r \times F = M = \frac{d}{dt} \int_V r \times \rho \cdot v \, dV. \quad (4.6)$$

E képletekben az F erő az adott fluidumrészre ható térfogati és felületi külső erők rezultánsa, illetve azok rezultáns nyomatéka.

Ha az impulzustételt és az impulzusnyomaték tételét stacionárius áramlás esetén egy áramcsőre írjuk fel (ez a gyakorlatban legtöbbször előforduló eset, 4.1. ábra), akkor a feladat lényegesen leegyszerűsödik. A 4.1. ábrán a két ellenőrző keresztmetszet közötti fluidum mennyisége és impulzusa időben nem változik, mivel az áramlás stacionárius. Egy rövid dt idő alatt az 1–1 keresztmetszeten a

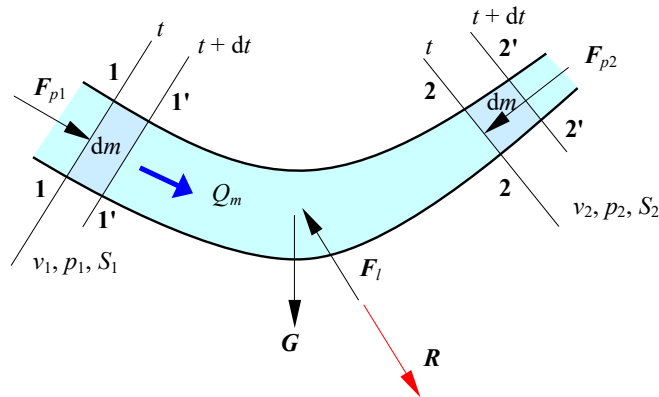
$$dm = Q_m \cdot dt \quad (4.7)$$

tömegű fluidum áramlik keresztül és a 2–2 keresztmetszeten keresztül ugyanannyi fluidum hagyja el a tanulmányozott áramcső-szakaszt. A dt idő alatt belépő fluidum impulzusa

$$dP_1 = dm \cdot v_1, \quad (4.8)$$

míg az ezalatt távozó fluidum impulzusa

$$dP_2 = dm \cdot v_2. \quad (4.9)$$



4.1. ábra. Az impulzus-megmaradás törvényének alkalmazása

A dt idő alatt tehát az impulzus változása az előbbi két mennyiség különbsége lesz, amely egy

$$F = \frac{dP}{dt} = \frac{dP_2 - dP_1}{dt} = dm \cdot \frac{v_2 - v_1}{dt} = Q_m \cdot (v_2 - v_1) \quad (4.10)$$

erő megjelenését jelenti.

Amennyiben az áramcső rögzített, a reá ható erők egyensúlyban vannak. Ezek az erők a következők: az 1–1 és a 2–2 keresztmetszetre ható hidrosztatikai erők, melyek nagysága

$$F_{p1} = p_1 \cdot S_1, \text{ illetve } F_{p2} = p_2 \cdot S_2, \quad (4.11)$$

az áramcső fala által a folyadékra gyakorolt F_l laterális erő (ez a nyomásból és a csősúrlódásból eredő visszaható erő), valamint az áramcsőben levő fluidum saját súlya. Ekkor tehát

$$Q_m \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_{p1} + \mathbf{F}_{p2} + \mathbf{G}, \quad (4.12)$$

ahonnan az ismeretlen laterális erő könnyen meghatározható. Ezáltal az áramló folyadék által a csőre kifejtett erő, a hatás-ellenhatás elvének alkalmazásával

$$\mathbf{R} = -\mathbf{F}_l \quad (4.13)$$

lesz. A gyakorlatban rendszerint a cső rögzítéséhez szükséges erő kiszámítása a cél, a cső saját súlyának elhanyagolásával ez F_l -lel azonos. Ennek az erőnek a támadáspontját az impulzusnyomaték tételének segítségével kapjuk.

A dt idő alatt be- és kilépő fluidumnak egy rögzített O pontra vonatkoztatott impulzusnyomatékát

$$dN_1 = dm \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1), \quad (4.14)$$

illetve

$$dN_2 = dm \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2) \quad (4.15)$$

formában kapjuk, ahol \mathbf{r}_1 és \mathbf{r}_2 a kontroll-keresztmetszetek geometriai középpontjának a tekintett O pontból húzott helyzetvektorai.

E mennyiségek különbsége a külső erők (az előbb felsorolt mennyiségek) eredő nyomatékát adja:

$$\mathbf{M} = \frac{dN_2 - dN_1}{dt} = Q_m \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2 - \mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1). \quad (4.16)$$

A csőre ható erők nyomatékával tehát:

$$\mathbf{r}_R \times \mathbf{R} = -\mathbf{r}_R \times \mathbf{F}_l = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{p1} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{p2} + \mathbf{r}_G \times \mathbf{G} - Q_m \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2 - \mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1), \quad (4.17)$$

ahonnan, az előzetesen kiszámított \mathbf{R} ismeretében annak támadáspontja (az \mathbf{r}_R helyzetvektor) meghatározható. A cső rögzítéséhez ezt a nyomatékot (és a cső saját súlyának nyomatékát) kell kiegyensúlyozni.

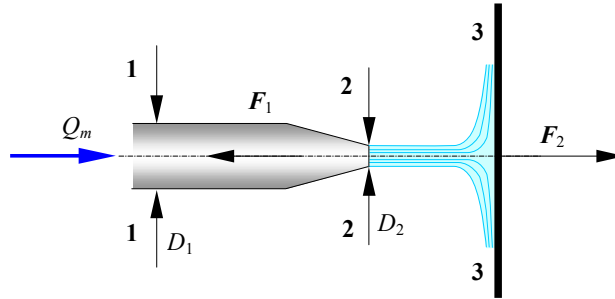
Az egyenleteket egy alkalmasan megválasztott koordinátarendszer tengelyeire eső vetületekkel írhatjuk fel a legegyszerűbben.

Ugyancsak az impulzustételt és az impulzusmomentum tételét használjuk az áramló fluidum vagy a szabad fluidum-sugarak szilárd felületre gyakorolt hatásának kiszámításakor. Legyen például a 4.2. ábrán látható eset, ahol a függőleges sík felületre egy fűvókából kiáramló sugár hat.

A fűvókát a kiáramló fluidum visszafele löki. Ha a fluidumot összenyomhatatlannak tekintjük, elhanyagoljuk a csősúrlódást és a gravitáció hatását, akkor ennek az erőnek a nagysága

$$F_1 = Q_m \cdot (v_2 - v_1) - \frac{p_1 \cdot \pi \cdot D_1^2}{4} + \frac{p_2 \cdot \pi \cdot D_2^2}{4} \quad (4.18)$$

lesz, mely összefüggést az impulzustételnek az 1–1 és a 2–2 keresztmetszetek közötti fluidumrészre való alkalmazásával kapjuk.



4.2. ábra. Az impulzus-megmaradás törvényének alkalmazása szabad sugarakra

E képletben az áramlási sebességeket a kontinuitási tétellel határozzuk meg. A kilépési nyomás $p_2 = p_a$, a belépési nyomást pedig az 1–1 és 2–2 keresztmetszetekre felírt Bernoulli-képletből kapjuk.

A sík felülettel ütközve a fluidum áramlási sebessége nullára csökken ($v_3 = 0$), majd a felületről távozik. Az impulzustételt most a 2–2 és a 3–3 keresztmetszetek közötti fluidumra írjuk fel, ahonnan a sík falra ható erő nagysága:

$$F_2 = Q_m \cdot (v_2 - v_3) = Q_m \cdot v_2 = \frac{4 \cdot Q_m^2}{\pi \cdot \rho \cdot D_2^2}. \quad (4.19)$$

4.2. A fluidum mozgásegyenlete

4.2.1. A fluidum feszültségi állapota

Az alak megváltozásával járó jelenségek sztatikai aspektusán a fluidumra ható erők és az általuk előidézett feszültségi állapot közötti kapcsolatot értjük.

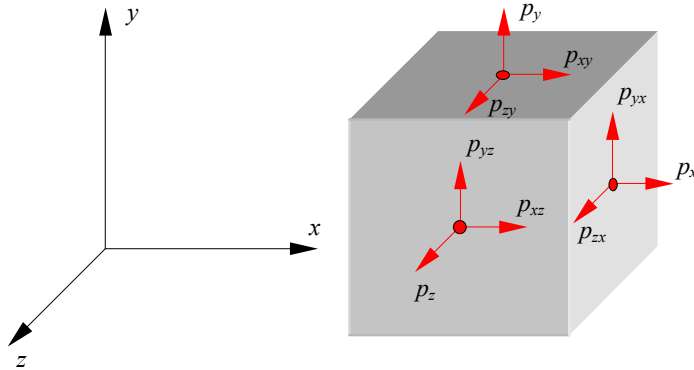
A fluidumból kiragadott térfogatelemre ható erők kétfélek: a határfelületein fellépő felületi erők, valamint a külső erők hatásából és a tehetetlenségből származó térfogati erők. Mindkettő fajlagosított: az előbbit az egységnyi felületen ható erőként (nyomás), az utóbbi pedig az egységnyi tömegre ható erőként (például a gravitációs gyorsulás) adják meg.

Mivel a hidrosztatikától eltérően most a mozgásban levő fluidum egyensúlyát tanulmányozzuk, a viszkozitás miatt a térfogatelem felületére merőleges összetevők mellett az oldallapok síkjában ható érintőleges komponensek is megjelennek. A normális összetevőket az oldallap normálisával párhuzamos koordinátatengely betűjével jelöljük, míg a tangenciális összetevőket kettős indexszel látjuk el: az első index a normális irányát, a második pedig a komponens irányát jelöli (4.1. ábra).

Minden oldallapon három-három összetevő vehető fel, amelyeket a térfogatelem középpontjában mért értékekkel és a növekményekkel adhatunk meg a már ismert módon.

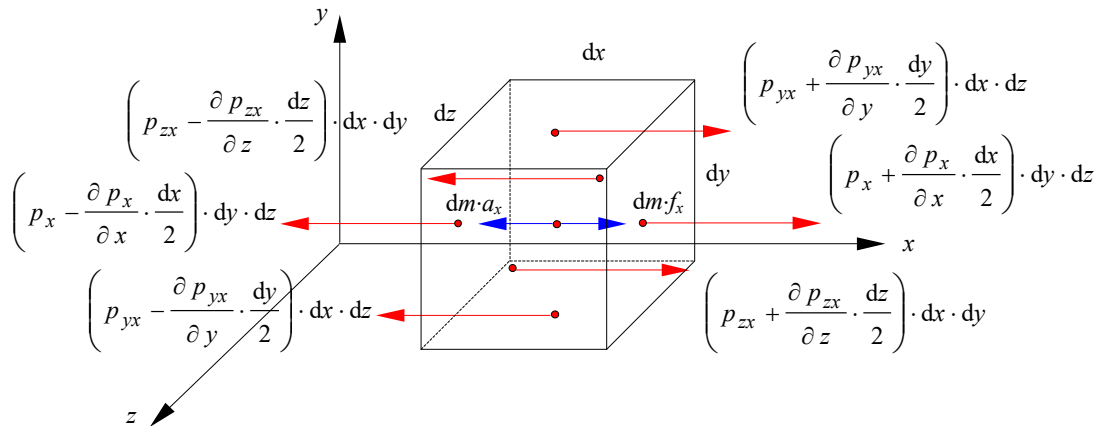
A térfogatelem tömegére ható erőt az f fajlagos térfogati erők és az elem dm tömegének szorzataként kapjuk. A térfogatelem tömegét az elemi térfogat és a sűrűség szorzata adja ($dm = \rho \cdot dV$, $dV = dx \cdot dy \cdot dz$). Ezeket az erőket szintén tengely irányú vetületeikkel adjuk meg, melyek a térfogatelem közepében, a tengelyek irányában hatnak.

A sztatikai aspektus egyenleteit a részecskére ható erők egyensúlya adja. A részecske akkor van egyensúlyban, ha a reá ható erőrendszer rezultánsa zéró és annak a nyomatéka is zéró. A rezultánsra vonatkozó feltétel kifejtése a tengelyirányú vetületek egyensúlyának felírásával történik. A nyomatékokra vonatkozó feltételt a vetületek tengely körüli forgatónyomatékainak összegzésével állapítjuk meg a nyugalomban levő fluidum egyensúlyának tanulmányozásakor alkalmazott módszer szerint.



4.3. ábra. A térfogatelemre ható nyomás tengely irányú összetevői

Az erőrendszer eredőjére vonatkozó feltételek felírásához tekintsük először az x irányt. Az áttekinthetőség kedvéért 4.4. ábra a felületi erőknek csak ebben az irányában ható komponenseit tünteti fel, valamint a térfogati erők megfelelő vetületét. A másik két tengely irányában ható erőket a koordináták ciklikus permutációjával írhatjuk fel. Egy felületi erő támadáspontja a megfelelő oldallap közepe, a térfogati erőé pedig a térfogatelem középpontja.



4.4. ábra. Az x tengely irányában ható erők

Az előbbiekből alapján az erők x tengelyre eső vetületeinek egyensúlyi egyenlete tehát a következőképpen lesz felírható:

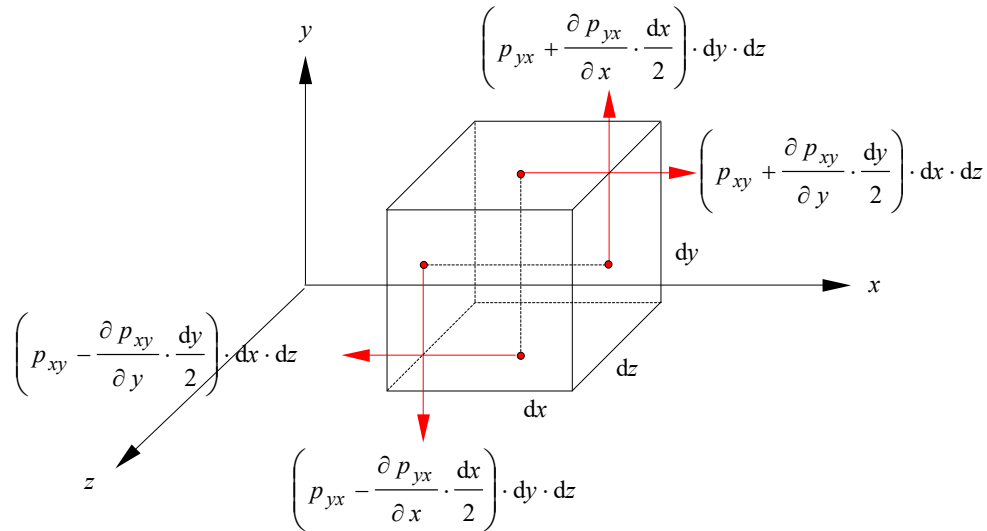
$$\begin{aligned}
\rho \cdot a_x \cdot dx \cdot dy \cdot dz &= \rho \cdot f_x \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \\
&+ \left(p_x + \frac{\partial p_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) \cdot dy \cdot dz + \left(p_{yx} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} \right) \cdot dx \cdot dz + \\
&+ \left(p_{zx} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2} \right) \cdot dx \cdot dy - \left(p_x - \frac{\partial p_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) \cdot dy \cdot dz - \\
&- \left(p_{yx} - \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} \right) \cdot dx \cdot dz - \left(p_{zx} - \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2} \right) \cdot dx \cdot dy,
\end{aligned} \tag{4.20}$$

ahonnan ρ -val beosztva és a $dx \cdot dy \cdot dz$ szorzattal egyszerűsítve:

$$a_x = f_x + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right). \tag{4.21}$$

A másik két tengely irányában hasonló módon járva el még két vetületi egyensúlyi egyenletet kapunk.

Egyensúlyi állapotban a forgatónyomatékok eredője is zéró kell legyen. Az egyszerűség kedvéért a forgatónyomatékokot a térfogatelem középpontján átmenő, a koordinátatengelyekkel párhuzamos tengelyek körül forgató komponenseivel adjuk meg.



4.5. ábra. A z tengely körül forgató erők

A 4.5. ábra csak a z tengely körül forgató erőket tünteti fel, a másik két tengely körül forgató erőket szintén a koordináták ciklikus permutációjával kaphatjuk meg. A térfogati erők a részecske középpontjában hatnak, így nyomatékuk nulla. Az ábrázolt erőknek a z -vel párhuzamos tengelyre vonatkoztatott rezultáns nyomatéka zéró kell legyen:

$$\begin{aligned} & \left(p_{xy} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} \right) \cdot dx \cdot dz \cdot \frac{dy}{2} + \left(p_{xy} - \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} \right) \cdot dx \cdot dz \cdot \frac{dy}{2} - \\ & - \left(p_{yx} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{dx}{2} - \left(p_{yx} - \frac{\partial p_{yx}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{dx}{2} = 0, \end{aligned} \quad (4.22)$$

ahonnan egyszerűsítés után:

$$p_{xy} = p_{yx}. \quad (4.23)$$

Ez utóbbi összefüggés a tangenciális komponensek *dualitását* fejezi ki. Hasonló módon kapjuk a másik két tengely körül forgató erők nyomatékainak egyensúlyi egyenleteit is.

A fajlagos felületi erők összetevőit egy mátrixba (tenzorba) rendezhetjük:

$$[\mathbf{P}] = \begin{bmatrix} p_x & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_y & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_z \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

amelynek a tangenciális komponensek dualitása miatt a fajlagos deformációk tenzorához hasonlóan szintén csak hat egymástól különböző tagja van (ezért ezt is gyakran egy $\{\mathbf{P}\}$ vektor formájában írják fel). E $[\mathbf{P}]$ tenzort egy izotróp (szférikus) és egy anizotróp (deviátor) komponensre bonthatjuk fel. A szférikus tenzor a térfogatelem térfogatának megváltozását, a deviátor pedig annak alakváltozását idézi elő:

$$[\mathbf{P}] = [\mathbf{P}_i] + [\mathbf{P}_a] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p'_x & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p'_y & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p'_z \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

ahol

$$\begin{aligned} p_x &= -p + p'_x, \\ p_y &= -p + p'_y, \\ p_z &= -p + p'_z. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Az izotróp p komponens a hidrosztatikai nyomással azonos, az anizotróp tagokat pedig a viszkozitás által okozott normális és csúszató feszültségek adják. Ezzel a felbontással az egyensúlyt leíró 4.21. alakú összefüggéseket a következő formára lehet hozni:

$$\begin{aligned} a_x &= f_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial p'_x}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right), \\ a_y &= f_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p'_y}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right), \\ a_z &= f_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p'_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

E három összefüggés a fluidumok általános mozgásegyenletét alkotja és a fluidum alakváltozásának sztatikai aspektusát írja le.

Ideális fluidumok esetében a viszkozitás hiánya folytán a zárójelben levő tagok eltűnnek. Nyugalomban levő fluidumokra a zárójelben levő tagok mellett a gyorsulások (a bal oldali tagok) is zérók, így visszakapjuk a hidrosztatika 2.12. egyenleteit.

4.2.2. A viszkozitási törvény általánosítása

Az alakváltozás jelenségének fizikai aspektusa a deformációs állapot és a feszültségi állapot közötti összefüggést írja fel. Fluidumok esetében a fizikai aspektus egyenletei a Newton-féle viszkozitási törvény általánosításából erednek.

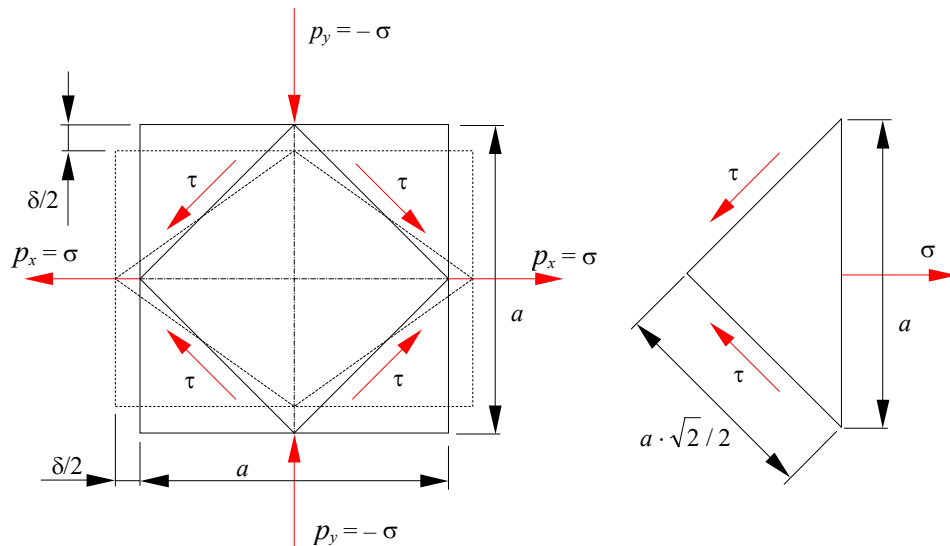
A tangenciális komponensekre a viszkozitási törvény általánosítása nem jelent nehézséget, ugyanis azt felírhatjuk a csúsztatófeszültségre is (beosztunk az S felülettel), a sebesség gradiense pedig a derékszög megváltozásának sebességét adja:

$$\tau = \eta \cdot \dot{\gamma}. \quad (4.28)$$

Általános térbeli esetben hat tangenciális komponensünk (csúsztatófeszültségünk) van, amelyekre a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\begin{aligned} p_{xy} = p_{yx} &= \eta \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \\ p_{yz} = p_{zy} &= \eta \cdot \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \\ p_{zx} = p_{xz} &= \eta \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

A normális komponens és a lineáris deformációsebesség ($\dot{\epsilon}$) közötti kapcsolat már nem ennyire nyilvánvaló. Megállapításához a szilárdságtan módszereihez folyamodunk: egy olyan hasáb alakú térfogatelemet tekintünk, mely alapjának élhossza a , az ábra síkjára merőleges magassága l és amelyet csak a $p_x = -p_y = \sigma$ feszültségek terhelnek (4.6. ábra).



4.6. ábra. A nyújtó- és a nyírófeszültség kapcsolata

A hasáb belsejében egy másik, az előbbivel $\pi/4$ szöggel elforgatott hasábot különítünk el, mely tiszta nyírásnak van kitéve: oldallapjain az adott p_x és p_y komponensek által létrehozott térbeli feszültségnek csak tangenciális komponense van. E komponens nagyságát a belső hasáb felezésével kapott háromszög-alapú hasáb egyensúlyának előírásával határozhatjuk meg:

$$l \cdot a \cdot \sigma = 2 \cdot l \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot a}{2} \cdot \tau \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (4.30)$$

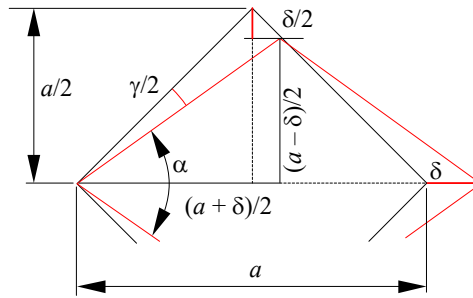
ahonnan

$$\tau = \sigma. \quad (4.31)$$

Az ábrázolt irányú p_x és p_y nyomások hatására a külső hasáb x irányban megnyúlik és y irányban megrövidül. A p_x és p_y nyomások közötti kapcsolat miatt a méretváltozás mindkét irányban egyenlő nagyságú, éspedig az

$$\delta = a \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dt = -a \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot dt \quad (4.32)$$

lesz (e méretváltozást $a \cdot \varepsilon = a \cdot \dot{\varepsilon} \cdot dt$ -ként számítjuk).



4.7. ábra. A nyúlás és a torzulás kapcsolata

E méretváltozás a belső négyzet alapú hasáb torzulását idézi elő, amelyet a τ tangenciális komponens hatásának is tulajdoníthatunk. A 4.7. ábrán e hasáb torzult alakjának körvonalaiából a két bal oldali oldallap szöge meghatározható:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a - \delta}{2}}{\frac{a + \delta}{2}} = \frac{a - \delta}{a + \delta}. \quad (4.33)$$

A két oldallap eredetileg derékszöget zárt be, tehát e szög változása γ -hoz vezet. A 4.7. ábrán látható háromszögből:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{a - \delta}{a + \delta} = \frac{1 - \frac{\delta}{a}}{1 + \frac{\delta}{a}}. \quad (4.34)$$

Egy trigonometriai összefüggés alapján a szögek különbségének tangensét a következőképpen írhatjuk fel:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}. \quad (4.35)$$

A két utóbbi összefüggés tagjait egyenlővé téve:

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\delta}{a}, \quad (4.36)$$

ahonnan, mivel γ kicsi $\operatorname{tg}\gamma/2 \approx \gamma/2$ és felhasználván δ 4.32. kifejezését:

$$\gamma=2\cdot\frac{\delta}{a}=2\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{\partial v_x}{\partial x}\cdot a\cdot dt=2\cdot\frac{\partial v_x}{\partial x}\cdot dt. \quad (4.37)$$

A derékszög változásának sebessége tehát végül is

$$\dot{\gamma}=2\cdot\frac{\partial v_x}{\partial x}=2\cdot\dot{\varepsilon}_x=-2\cdot\dot{\varepsilon}_y \quad (4.38)$$

lesz.

A Newton-féle viszkozitási törvény ismeretében, a 4.18, 4.31. és a 4.38. képletek alapján a fluidum belső súrlódása által előidézett normálfeszültségre a következő kifejezést kapjuk:

$$p_x=2\cdot\eta\cdot\frac{\partial v_x}{\partial x}. \quad (4.39)$$

Ez az összefüggés ebben a formában csak a 4.6. ábrán feltüntetett terhelésre igaz. Általánosításakor figyelembe kell venni a térfogatváltozás hatását is. A nyomás tenzorának izotróp komponense minden irányba azonos ütemű tágulást vagy zsugorodást idéz elő. Miután a fajlagos térfogatváltozás sebessége (a 3.53. képletből)

$$\dot{\varepsilon}_V \approx \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (4.40)$$

következik, hogy a szférikus tenzor által okozott, valamennyi irányban azonos méretváltozás üteme a fenti mennyiség egy harmada lesz. Ez a tágulás nem jár a fluidum áramlásával, tehát nem okozza viszkozus erők megjelenését. A normális komponensekre tehát a viszkozitási törvény képletébe nem a $\partial v_x/\partial x$ formájú mennyiségeket kell beírunk, mert ezekből le kell vonnunk a viszkozus erők fellépését elő nem idéző $\operatorname{div} \mathbf{v}/3$ mértékű tágulás vagy zsugorodás hatását. E korrekcióval, a 4.26. egyenletek figyelembe vételével a viszkozitási törvény a normális irányú komponensekre a következő lesz:

$$\begin{aligned}
p_x &= -p + \lambda \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + 2 \cdot \eta \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x}, \\
p_y &= -p + \lambda \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + 2 \cdot \eta \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y}, \\
p_z &= -p + \lambda \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + 2 \cdot \eta \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z},
\end{aligned} \tag{4.41}$$

ahol a

$$\lambda = -\frac{2}{3} \cdot \eta \tag{4.42}$$

mennyiséget *térfogati viszkozitási együtthatónak* szokták nevezni.

A viszkozitási törvény 4.29. és 4.41. egyenletei a fluidum alakváltozásának fizikai aspektusát írják le. A szilárdságban használatos jelölések bevezetésével a fenti egyenletek Hooke általánosított törvényével analóg formára hozhatók:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= k \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) - \frac{2}{3} \cdot \eta \cdot (\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z) + 2 \cdot \eta \cdot \dot{\varepsilon}_x, \\
\sigma_y &= k \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) - \frac{2}{3} \cdot \eta \cdot (\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z) + 2 \cdot \eta \cdot \dot{\varepsilon}_y, \\
\sigma_z &= k \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) - \frac{2}{3} \cdot \eta \cdot (\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z) + 2 \cdot \eta \cdot \dot{\varepsilon}_z, \\
\tau_{xy} &= \eta \cdot \dot{\gamma}_{xy}, \quad \tau_{yx} = \eta \cdot \dot{\gamma}_{yx}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}, \\
\tau_{xz} &= \eta \cdot \dot{\gamma}_{xz}, \quad \tau_{zx} = \eta \cdot \dot{\gamma}_{zx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \\
\tau_{yz} &= \eta \cdot \dot{\gamma}_{yz}, \quad \tau_{zy} = \eta \cdot \dot{\gamma}_{zy}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy},
\end{aligned} \tag{4.43}$$

ahol a k együttható a fluidum térfogati rugalmassági modulusza (például az izoterm vagy az adiabatikus modulusz, melyet korábban ε -nal jelöltünk). A 4.43. egyenletek a kompresszibilis newtoni fluidumok reológiai viselkedését írják le.

4.2.3. A Navier-Stokes egyenlet

Az általánosított viszkozitási törvény felhasználásával a fluidum 4.27. mozgásegyenleteit tovább alakíthatjuk:

$$\begin{aligned}
a_x &= f_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_k}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + v_k \cdot \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \\
a_y &= f_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{v_k}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + v_k \cdot \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right), \\
a_z &= f_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{v_k}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + v_k \cdot \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right),
\end{aligned} \tag{4.44}$$

mely összefüggéseket tömören vektoriális alakban is felírhatunk:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad } p + \frac{v_k}{3} \cdot \text{grad}(\text{div } \mathbf{v}) + v_k \cdot \Delta \mathbf{v}. \tag{4.45}$$

Itt Δ a Laplace-operátor és v_k a kinematikai viszkozitás. ρ és v_k lehet állandó vagy bizonyos paraméterek függvénye (például barotróp fluidumok esetén a sűrűség a hidrosztatikai nyomástól függ). A gyorsulást célszerű a sebesség 3.14. szubsztanciális deriváltjával helyettesíteni, ugyanis e differenciálegyenletek megoldásánál a sebességkomponenseket keressük és a peremfeltételeket is így könnyebben előállíthatjuk.

A mozgásegyenletek e formáit *Navier-Stokes egyenleteknek* nevezik.

Összenyomhatatlan fluidumok esetében a sebesség divergenciáját tartalmazó tag nulla lesz, sűrűségmentes fluidumokra pedig az utolsó két tag eltűnik ($v_k = 0$):

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad } p. \quad (4.46)$$

Az így kapott *Euler-egyenlet* (tulajdonképpen annak differenciális formája) a sűrűségmentes fluidumok mozgásegyenlete. Ennek integrális formája:

$$\int_V \mathbf{a} \cdot \rho \, dV = \int_V \mathbf{f} \cdot \rho \, dV + \int_S \mathbf{p} \, dS, \quad (4.47)$$

ahol S a V térfogatot határoló felület.

A második fejezetben a hidrosztatika alapegyenletének különböző formáit használtuk: azok a most levezetett képletek egyszerűsítéséből származtathatóak, amikor a folyadék gyorsulása zéró ($\mathbf{a} = 0$).

4.3. Bernoulli egyenlete

4.3.1. Az energia megmaradásának tétele

A tömeg, az impulzus és az impulzuszómomentum megmaradásának tételeihez hasonló fontossággal bír az energia megmaradásának elve: Helmholtz megfogalmazása szerint az energia nem semmisülhet meg és a semmiből nem keletkezhet, a különféle energiatípusok egymásba kölcsönösen átalakulhatnak, de csak úgy, hogy a zárt rendszer összes energiája állandó marad. Ezt a megfogalmazást a termodinamikából ismerjük. A fluidumok mechanikájában az energia megmaradásának törvényét a Navier-Stokes egyenletnek (a 4.45. reláció) egy adott görbe menti integrálásával írják fel. Az egyenlet a fluidumrészecskék gyorsulását adja, a gyorsulás pedig az egységnyi tömegre ható erővel egyenlő. Az integrál tehát végső soron mechanikai munka jellegű, amelyet egységnyi tömegű fluidumra számítunk ki. Az ilyen módon felírt megmaradási tétel csak a mechanikai energiára szorítkozik.

Tekintsük tehát az összenyomható fluidum sűrűségű áramlásának általános esetét, ahol a Navier-Stokes egyenletbe a gyorsulást annak 3.15. kifejtett formájával helyettesítjük:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad } \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}. \quad (4.48)$$

Ekkor a következő relációt kapjuk:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad } \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad } p + \frac{v_k}{3} \cdot \text{grad}(\text{div } \mathbf{v}) + v_k \cdot \Delta \mathbf{v}. \quad (4.49)$$

Ezt az egyenletet egy görbe két tetszőleges pontja (1 és 2) között integrálva egy meglehetősen bonyolult összefüggéshez jutunk, mely az általánosabb formájú *Bernoulli-egyenlet*, az energia-megmaradás tételének áramló (de technikai munkát nem végző és termodinamikai állapotváltozást nem szenvedő, tehát csak a mechanikai energiára vonatkozó) fluidumokra alkalmazott kifejezése:

$$\begin{aligned}
& \int_1^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \, ds + \int_1^2 \text{grad} \frac{v^2}{2} \, ds - \int_1^2 \mathbf{v} \times \text{rot} \, \mathbf{v} \, ds = \\
& = \int_1^2 \mathbf{f} \, ds - \int_1^2 \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad} \, p \, ds + \frac{v_k}{3} \cdot \int_1^2 \text{grad} (\text{div} \, \mathbf{v}) \, ds + v_k \cdot \int_1^2 \Delta \mathbf{v} \, ds.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Ez utóbbi egyenlet bonyolultsága miatt a műszaki gyakorlatban nehezen használható, de ha a tagokat külön-külön megvizsgáljuk, akkor a következő egyszerűsítési lehetőségek mutatkoznak:

- az első integrál stacionárius áramlásokra zéró, mivel ekkor a lokális gyorsulás zéró ($\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$);
- a második integrál értéke minden esetben $(v_2^2 - v_1^2) / 2$;
- a harmadik integrál több esetben is zéró lehet, így: potenciális áramlások esetében a lokális sebesség rotorja nulla ($\text{rot} \, \mathbf{v} = 0$); vagy, ha $ds \parallel \mathbf{v}$ (amikor áramvonal mentén integrálunk – ez a legtöbbször előforduló eset), vagy ha $ds \parallel \text{rot} \, \mathbf{v}$ (ha örvényvonal mentén integrálunk), vagy amikor $\mathbf{v} \parallel \text{rot} \, \mathbf{v}$ (amikor a részecske spirális pályán mozog – Beltrami-áramlás), vagy ha \mathbf{v} , $\text{rot} \, \mathbf{v}$ és ds egy síkban van, akkor a vektorok egymáshoz viszonyított sajátos helyzetéből eredendően a velük végzett műveletek eredménye lesz zéró;
- ha az \mathbf{f} erő potenciális erőteréből származik ($\mathbf{f} = -\text{grad} \, U$), akkor a negyedik integrál értéke a másodikhoz hasonlóan $-(U_2 - U_1)$ lesz;
- ha ρ állandó, akkor az ötödik integrál a másodikhoz hasonlóan $-(p_2 - p_1) / \rho$ lesz;
- ha a fluidum összenyomhatatlan, az utolsó előtti tag nulla (mert $\text{div} \, \mathbf{v} = 0$);
- ha a fluidum ideális ($v_k = 0$), akkor az utolsó két tag eltűnik.

4.3.2. Bernoulli egyenletének egyszerűsített formái

A műszaki gyakorlatban legtöbbször előforduló feladatokban az áramlás stacionárius, áramvonalon integrálunk, az erőtér a Föld nehézségi erőtere (ami potenciális), a sűrűség pedig állandó.

Ha a súrlódási veszteségeket is elhanyagoljuk, akkor az áramvonal két különböző pontjára felírt Bernoulli-egyenlet az alábbi, jól ismert egyszerű egyenlőség lesz:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + U_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + U_2. \tag{4.51}$$

Ez az összefüggés az egységnyi tömegre vonatkoztatott mechanikai energia megmaradásának tétele, súrlódásmentes fluidum stacionárius áramlásában.

E Bernoulli-egyenletből következik, hogy a stacionáriusan áramló súrlódásmentes fluidum nem végezhet mechanikai munkát és rajta sem végezhetünk mechanikai munkát a stacionaritás feltételének betartása mellett.

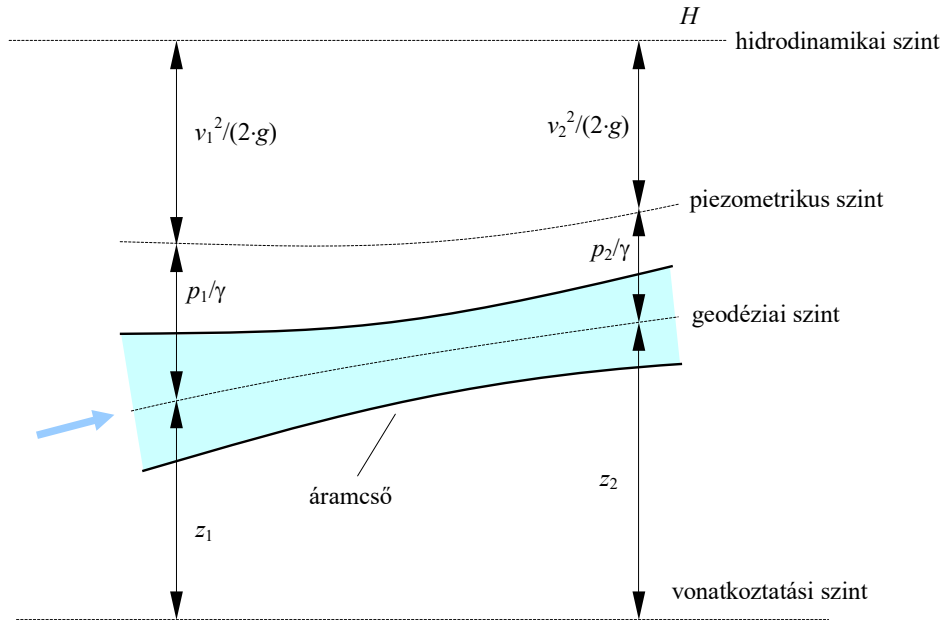
Ez az egyenlet a gravitációs potenciál behelyettesítésével és g -vel elosztva

$$\frac{v_1^2}{2 \cdot g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \tag{4.52}$$

lesz, ahol a tagoknak hosszúság-dimenziójuk van (az energia megmaradásának tétele itt egységnyi súlyra vonatkozik). Ezt az egyenletet

$$H = \frac{v^2}{2 \cdot g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{konst.} \tag{4.53}$$

formában lehet általánosítani, mely az áramlás energiaviszonyainak grafikus ábrázolását teszi lehetővé (4.8. ábra), mivel tagjai hosszúság jellegű mennyiségek.



4.8. ábra. Bernoulli törvénye ideális folyadék áramlása esetén

A H mennyiség a Bernoulli-összeg, mely az adott referencia-síkhöz viszonyított hidrodinamikai szint, z pedig a geodéziai szint vagy kóta. A $z + p/\rho$ mennyiség a piezometrikus szintet adja. A geodéziai szint a tekintett áramvonalnak vagy pedig az áramcső tengelyének a viszonyítási szinttől mért magasságát adja. A piezometrikus szint az áramláshoz csatlakoztatott piezométercsőben felemelkedő folyadék szabad felszínének magasságában van, a hidrodinamikai szintet pedig ugyancsak a piezométercsőben felemelkedő folyadék szabad felszíne adja amikor az áramlást megállítjuk.

Ha Bernoulli törvényének előző formáját beszorozzuk a ρ sűrűséggel, akkor az összeg tagjainak nyomás dimenziójuk lesz:

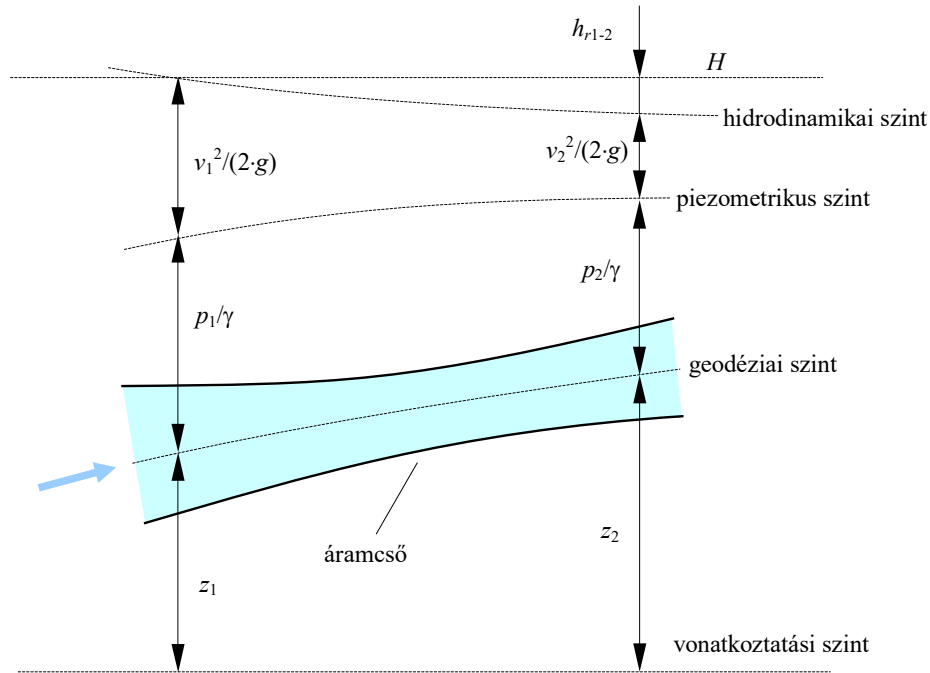
$$p_t = \frac{\rho \cdot v^2}{2} + p + \rho \cdot g \cdot z = \text{konst.} \quad (4.54)$$

Ez a forma az energia megmaradás tételének az egységnyi térfogatú fluidumra felírt alakja. Ebben az összegben a p hidrosztatikai nyomás mellett a $\rho \cdot v^2 / 2$ hidrodinamikai és a $\rho \cdot g \cdot z$ helyzeti nyomást definiáljuk, a Bernoulli-összeg pedig a p_t össznyomást (másképpen: torlónyomást) adja.

A valóságos folyadékok áramlása nem súrlódásmentes és legtöbbször a súrlódási veszteségek nem hanyagolhatók el. E veszteséget a 4.50. egyenlet utolsó két integrálja adja, amelyeket legfeljebb sajátságos esetekben számíthatunk ki analitikusan. Emiatt a veszteségeket általában mérés útján határozzák meg vagy mérési eredmények alapján megállapított empirikus összefüggésekkel számítják ki.

Ha szintkülönbségekkel (magasságokkal) dolgozunk, akkor ez a veszteség a két keresztmetszet között a h_{r1-2} szintkülönbség (4.9. ábra), nyomások esetén pedig a p_{r1-2} nyomásesés lesz. Az előbbi esetben a két keresztmetszetre felírt Bernoulli-törvény a következőképpen módosul:

$$\frac{v_1^2}{2 \cdot g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_{r1-2} \quad (4.55)$$



4.9. ábra. Bernoulli törvénye valóságos folyadék áramlása esetén

Ez esetben a hidrodinamikai szint h_r -rel van alacsonyabban a megállított áramlásba merülő piezométercsőben mérhető szabad felszínnél.

4.3.3. A Hagen-Poiseuille sebességprofil

A fluidum viszkozitása miatt fellépő jelenségek következtében a lokális sebességek az egyenes áramcső keresztmetszetén is térbeli változást mutatnak és egy bizonyos sebességprofil rajzolnak ki.

Lamináris áramlásokra ezt a változást elméletileg is le lehet vezetni a fluidumrészecske egyensúlyának tanulmányozásával. Gyakorlati szempontból fontos eset a kör keresztmetszetű csövekre érvényes Hagen-Poiseuille képlet, melynek levezetéséhez az áramló folyadék belsejében egy henger alakú folyadék részt különítünk el. E folyadékra ható erők a henger két alapkörére gyakorolt nyomásból és a henger palástján a súrlódás miatt fellépő τ nyírófeszültségből származnak (4.10. ábra).

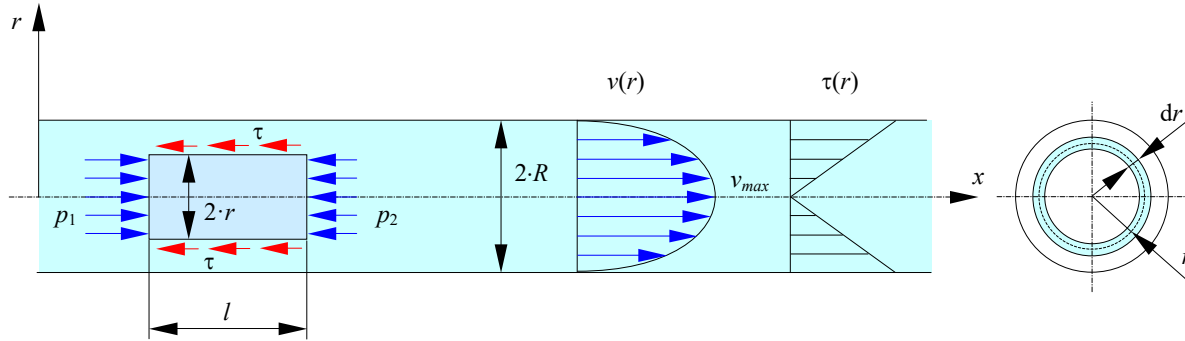
Az elkülönített henger egyensúlyát a következő egyenlet adja:

$$(p_1 - p_2) \cdot \pi \cdot r^2 - \tau \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l = 0, \quad (4.56)$$

ahol r a henger sugara, l pedig a magassága. Feltételezzük, hogy a fluidum belső súrlódását a Newton-féle viszkozitási törvénnyel írhatjuk le, ekkor a csúsztatófeszültség Newton törvénye szerint:

$$\tau = -\eta \cdot \frac{dv}{dr}, \quad (4.57)$$

ahol a mínusz előjel azt mutatja, hogy τ iránya a sebesség irányával ellentétes.



4.10. ábra. A Hagen-Poiseuille sebességprofil

A csúsztatófeszültséget az egyensúlyi egyenletbe behelyettesítve egy differenciálegyenletet kapunk, amelyet a következő formára lehet hozni:

$$dv = -\frac{p_1 - p_2}{2 \cdot \eta \cdot l} \cdot r \cdot dr. \quad (4.58)$$

A sebesség kifejezését ennek integrálásával kapjuk (peremfeltételként előírjuk, hogy a cső belső fala mentén az áramlási sebesség nulla). Az integrálási tartomány a tekintett fluidum-henger palástjától a cső faláig terjed (a sugár alsó határértéke r , felső határértéke pedig R), mivel a kiragadott hengeres folyadék részt az ebben a csőszerű térfogatban levő, egymáson elcsúszó koncentrikus rétegek közötti súrlódás fékezi. Az r sugarú körön a sebesség tehát

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4 \cdot \eta \cdot l} \cdot (R^2 - r^2) \quad (4.59)$$

lesz.

Ez utóbbi egyenlet tehát a kör keresztmetszetű csőben laminárisan áramló newtoni folyadékok sebességét adja a sugár függvényében. Az egyenletet szemrevéve megállapítható, hogy a sebesség maximális értékét a cső tengelyében éri el, ahol $r = 0$:

$$v_{max} = \frac{p_1 - p_2}{4 \cdot \eta \cdot l} \cdot R^2, \quad (4.60)$$

míg a cső belső fala mentén, ahol $r = R$, a sebesség értéke zéró. A sebesség maximumának felhasználásával

$$v = v_{max} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad (4.61)$$

mely képlet a Hagen-Poiseuille sebességprofil néven ismeretes.

A sebesség 4.59. kifejezését τ 4.57. képletébe helyettesítve a csúsztatófeszültségek diagramját is meghatározhatjuk:

$$\tau(r) = \frac{p_1 - p_2}{2 \cdot l} \cdot r, \quad (4.62)$$

mely tehát sugárirányban lineáris változást mutat (a 4.10. ábra jobb oldalán).

Amennyiben a keresztmetszeten egy r átlagos sugarú, dr vastagságú gyűrűszerű elemi felületet különítünk el, akkor ezen keresztül az elemi

$$dQ_V = v \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \quad (4.63)$$

térfogathozam fog átáramlani. A cső teljes keresztmetszetén átfolyó hozamot a sebesség behelyettesítésével, e mennyiség integrálásával kapjuk:

$$Q_V = \frac{\pi \cdot (p_1 - p_2) \cdot R^4}{2 \cdot \eta \cdot l \cdot 4}; \quad (4.64)$$

ez a Hagen-Poiseuille törvény.

E képletet az η dinamikai viszkozitás kísérleti meghatározására is fel lehet használni. Segítségével az áramló folyadék átlagos sebessége is megadható:

$$\bar{v} = \frac{Q_V}{R^2 \cdot \pi} = \frac{1}{2} \cdot v_{max}, \quad (4.65)$$

mely tehát a sebesség maximális értékének a fele.

4.3.4. A Coriolis-együttható

A Bernoulli törvényét kifejező képleteket egy áramvonalra vagy egy elhanyagolható keresztmetszetű áramcsőre (egyenletes sebességeloszlásra) állapítottuk meg. A gyakorlatban viszont azt olyan áramcsövekre alkalmazzuk, amelyeknél a sebességeloszlást csak ritkán lehet egyenletesnek tekinteni. Ekkor az energia megmaradás összefüggéseit olyan elemi dS keresztmetszetekre kell felírjuk, melyeken a sebesség állandónak tekinthető. Az időegység alatt áthaladó fluidum teljes mozgási energiáját az elemi mennyiségek integrálásával kapjuk ($E_k = m \cdot v^2 / 2$):

$$E_k = \int_S \frac{\rho \cdot v_l \cdot v_l^2}{2} dS = \int_S \frac{\rho \cdot v_l^3}{2} dS. \quad (4.66)$$

Ha a képletekben szereplő, a keresztmetszetre merőleges v_l lokális sebességet a sebességeloszlás f_l függvényének ismeretében a \bar{v} átlagsebességgel fejezzük ki, mint $v(x, y) = \bar{v} \cdot f_l(x, y)$, akkor a keresztmetszeten időegység alatt átáramló fluidum kinetikus energiája

$$E_k = \frac{\rho \cdot \bar{v}^3}{2} \cdot \int_S f_l^3 dS = \alpha \cdot \frac{\rho \cdot \bar{v}^3}{2} \quad (4.67)$$

lesz. Az integrál előtti tag az átlagos sebességgel kiszámított kinetikus energia, melyet az integrál α értéke korrigál. Az α mennyiség a *Coriolis-együttható*, mely tehát a sebességeloszlás egyenetlenségének hatását tükrözi. Nagysága a sebességprofil ismeretében határozható meg.

Kör keresztmetszetű csövekre lamináris áramlás esetében az f_l függvényt a Hagen-Poiseuille sebességprofil kifejezéséből írhatjuk fel. Felhasználván azt a tényt, hogy az átlagsebesség ekkor a maximális sebesség fele (4.65. képlet),

$$f_l(r) = 2 \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad (4.68)$$

melynek integrálásával az $\alpha = 2$ értéket kapjuk. Turbulens áramlás esetén a sebességeloszlás ellaposodása miatt a Coriolis-együttható 1.05 fele tartva csökken.

A Coriolis-együttható bevezetésével a Bernoulli-egyenlet a következő lesz:

$$\frac{\alpha_1 \cdot v_1^2}{2 \cdot g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{\alpha_2 \cdot v_2^2}{2 \cdot g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_{r1-2}, \quad (4.69)$$

ahol v_1 és v_2 a két keresztmetszeten mért átlagsebesség. Ha a sűrűséget az adott keresztmetszeten állandónak tekintjük, akkor az átlagos sebességet a hozam ismeretében

$$v = \frac{Q_m}{\rho \cdot S} = \frac{Q_V}{S} \quad (4.70)$$

formában határozhatjuk meg.

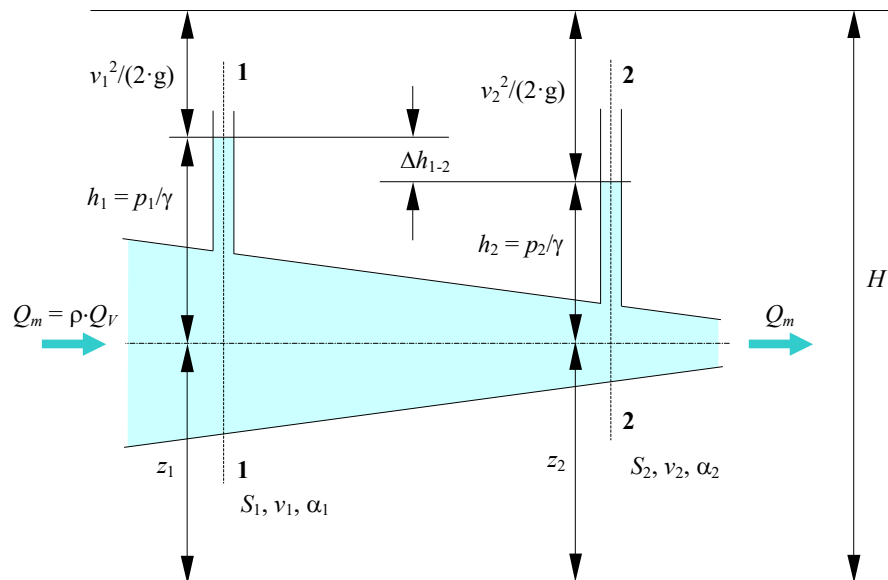
4.3.5. Bernoulli egyenletének gyakorlati alkalmazásai

Bernoulli törvényének számos gyakorlati alkalmazása van. Tekintsük első példaként azt az esetet, amikor a stacionáriusan áramló fluidum hidrosztatikai nyomása megváltozik és ennek a változásnak a kiszámítása a kitűzött feladat. Legyen tehát egy változó átmérőjű vízszintes vezeték, melyben egy ideális folyadék áramlik. A vezetékhez csatlakoztatott piezométercsövekben a folyadékszint a csatlakozási pontban mért relatív hidrosztatikai nyomásnak felel meg (4.11. ábra). A folyadék összenyomhatatlan, emiatt annak Q_V térfogathozama a kontinuitási tétel értelmében a vezeték bármely függőleges keresztmetszeten azonos. A viszkozitás nulla, tehát a súrlódási veszteségek által okozott szintkülönbség is nulla lesz.

Tegyük fel, hogy az áramlási állapot a cső hosszában egynemű, például mindenhol turbulens, és hogy a sebesség változása a cső keresztmetszeten elhanyagolható. Ekkor Bernoulli egyenletét az 1–1 és a 2–2 keresztmetszetre felírva a

$$\frac{v_1^2}{2 \cdot g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + \frac{p_2}{\gamma} \quad (4.71)$$

egyenlethez jutunk, mivel $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $z_1 = z_2$ és $h_{r1-2} = 0$.



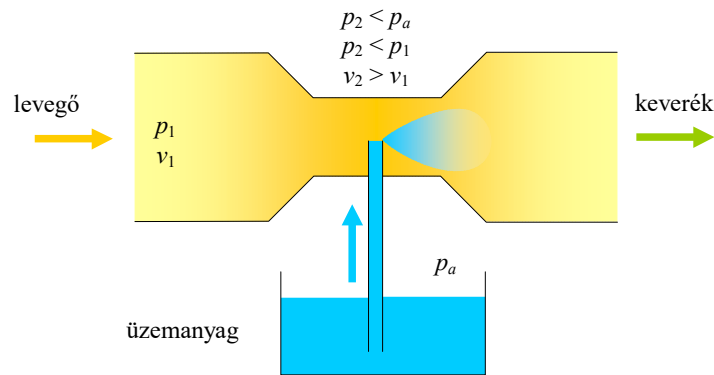
4.11. ábra. Bernoulli törvénye vízszintes csőszakaszon áramló ideális folyadékra

A v_1 és a v_2 átlagos sebességeket a Q_V térfogathozammal számíthatjuk ki. Q_V állandósága miatt a keresztmetszet szűkülésével a sebesség növekedését tapasztalhatjuk: mivel $S_1 > S_2$, következik, hogy $v_1 < v_2$. A sebességek közötti egyenlőtlenségből és a felírt egyenletből következik, hogy $p_2 < p_1$, vagyis az áramlási sebesség növekedése a hidrosztatikai nyomás csökkenéséhez vezet.

A két keresztmetszet között a piezometrikus szint különbsége tehát:

$$\Delta h_{1-2} = h_2 - h_1 = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g}. \quad (4.72)$$

Megfelelően nagy áramlási sebesség mellett egy adott keresztmetszetben a p hidrosztatikai nyomás az atmoszférikus nyomás alá csökkenhet. Ezt a jelenséget használja fel az Otto-motorok üzemanyag-porlasztója (karburátora) is: a leszűkített légjáratban uralkodó alacsony nyomás az üzemanyagot felszippantja, mely az örvénylő áramlatban apró cseppekre bomlik és elkeveredik az áramló levegőben (4.12. ábra).



4.12. ábra. Üzemanyag-porlasztó működési elve

Szintén Bernoulli törvényének alkalmazásán alapulnak a különböző nyomás-, sebesség- és hozammérő szondák. (4.13. ábra). A 4.8. ábrán a cső falához csatlakoztatott piezométerső a hidrosztatikai nyomást méri a csatlakozás helyén. Ha a cső (szonda) végét az áramlás belsejébe, az áramlás irányára merőlegesen helyezzük el, akkor a piezométerső ott is a p hidrosztatikai nyomást fogja mérni (4.13.a. ábra).

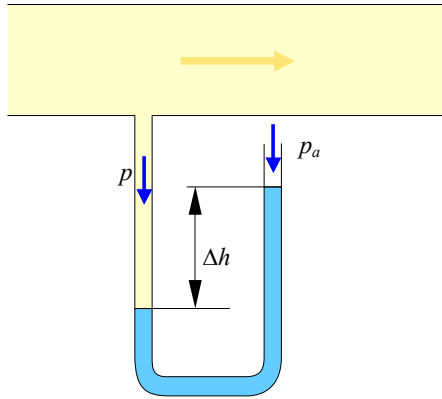
Ha a cső végét az áramlás irányával szembe fordítjuk, akkor ez az eszköz a p_t össznyomást fogja mérni: ez a készülék a Pitot-cső (4.13.b. ábra).

Egy differenciál-manométerrel az össznyomás és a hidrosztatikai nyomás különbségét, a hidrodinamikai nyomást mérhetjük. Ez a készülék a Prandtl-cső (4.13.c. ábra). Az ábra csak a működési elvet szemlélteti, a gyakorlatban a szondát U cső helyett koncentrikus csövekkel építik fel és így a méréseredmények pontosabbá válnak (nem az U két szára között, hanem egy adott pont közvetlen környékén méri a nyomáskülönbséget).

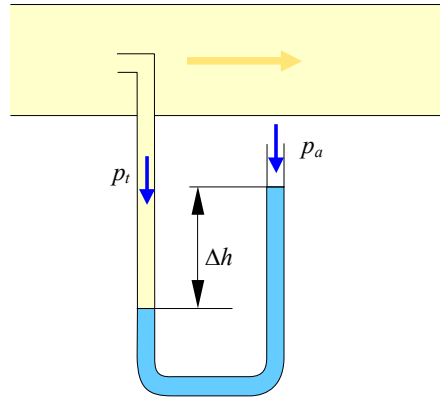
Ha a differenciál-manométer mindkét vége merőleges az áramlásra, akkor a mért nyomáskülönbség az áramlási sebességektől fog függeni. Ilyen készülék a Venturi-cső, mely tulajdonképpen a hidrosztatikai nyomások különbségét méri (4.13.d. ábra). A nyomáskülönbség az áramlási sebességektől függ, a 4.72. képlet alapján

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \gamma \cdot \frac{v_2^2 - v_1^2}{2 \cdot g}, \quad (4.73)$$

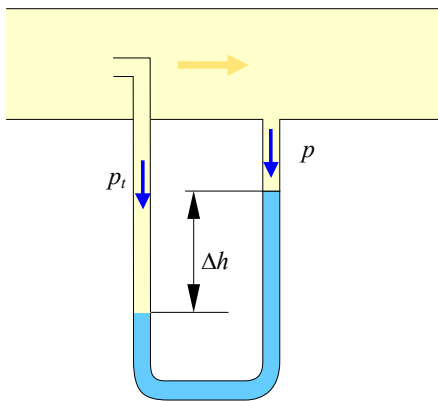
ahol γ az áramló fluidum fajsúlya (nem a mérőfolyadéké). Innen az áramlási sebesség és a hozam a szűkület előtti keresztmetszet (S_1) és a leszűkített keresztmetszet (S_2) ismeretében határozható meg.



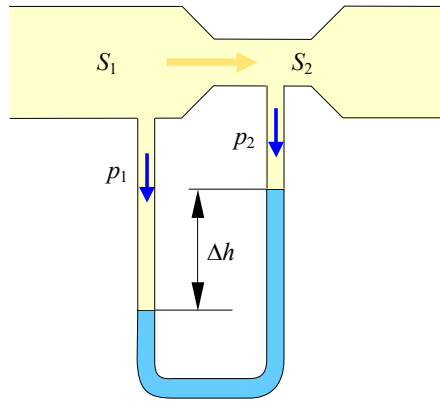
a. Nyomásmérő szonda (piezométer-cső) a hidrosztatikai nyomás mérésére



b. Pitot-cső az össznyomás mérésére



c. Prandtl-cső a dinamikus nyomás mérésére



d. Venturi-cső a áramlási sebesség (hozam) mérésére

4.13. ábra. Nyomásmérő szondák

Ha feltételezzük, hogy az áramló fluidum sűrűsége állandó, akkor a kontinuitási-tétel értelmében

$$v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2, \quad (4.74)$$

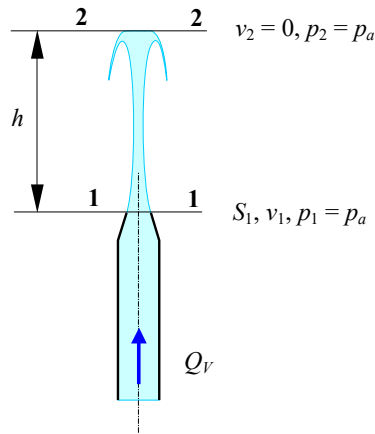
ahonnan v_2 -t kifejezve és az előbbi, Δp -t adó képletbe behelyettesítve a mérendő áramlási sebességet kapjuk:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot \Delta p}{\gamma \cdot \left[1 - \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 \right]}}, \quad (4.75)$$

a térfogathozamot pedig az $S_1 \cdot v_1$ szorzat fogja adni. Így a Venturi-cső az áramlási sebesség és a térfogathozam meghatározására is alkalmas. A közegben haladó testnek (például egy repülőgépnél) a közeghez viszonyított relatív sebességét is e készülékkel mérhetjük meg.

Az előbbi példákban Bernoulli egyenletét vízszintes vezetékekre írtuk fel. Az egyenlet azonban bármilyen helyzetű áramcsőre felírható, így a 4.14. ábrán látható függőleges szabad vízszugárra is.

Az 1–1 keresztmetszetet a szabad vízszugár kilépésénél vesszük fel, ott ahol a folyadék elhagyja a függőleges csővezetékét. Itt a hidrosztatikai nyomás a légköri nyomással egyenlő, a v_1 áramlási sebességet pedig a kilépés S_1 keresztmetszetével és a folyadék Q_V hozamával határozhatjuk meg. A vízszugár legmagasabb pontjában (a 2–2 keresztmetszeten) az áramlási sebesség zéró, innen a víz visszaesik a talaj fele.



4.14. ábra. Szabad vízszugár

Ha a viszonyítási sík az 1–1 keresztmetszet síkja, akkor Bernoulli törvényét a következőképpen írhatjuk fel:

$$\frac{v_1^2}{2 \cdot g} + \frac{p_a}{\gamma} = \frac{p_a}{\gamma} + h, \quad (4.76)$$

ahonnan a vízszugár magasságára a

$$h = \frac{v_1^2}{2 \cdot g} \quad (4.77)$$

képletet kapjuk. Észrevehetjük, hogy ez megegyezik a v_1 függőleges kezdősebességgel elhajított test pályájának maximális magasságával.

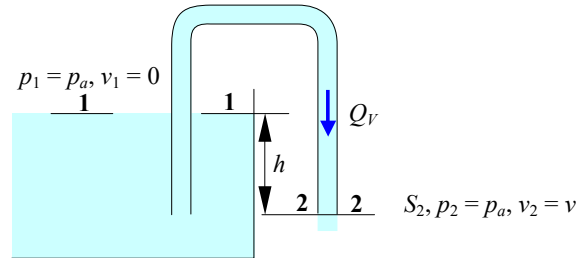
Ugyancsak Bernoulli törvényének alkalmazásával állapíthatjuk meg egy tartályból távozó fluidum hozamát. Legyen például a 4.15. ábrán látható szifon. Az első keresztmetszetet a tartályban levő folyadék szabad felszínén, a másodikat pedig a szifon kiömlésénél vesszük fel. Ha a folyadék ideális és a viszonyítási sík a 2–2 keresztmetszet, akkor:

$$\frac{p_a}{\gamma} + h = \frac{v^2}{2 \cdot g} + \frac{p_a}{\gamma}, \quad (4.78)$$

innen pedig v könnyen kifejthető (a h magasságról szabadon eső test sebességének képletét kapjuk). A szifon keresztmetszetével annak hozama

$$Q_V = S_2 \cdot v = S_2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad (4.79)$$

lesz.

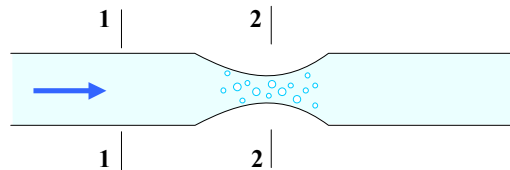


4.15. ábra. Szifon

4.3.6. A kavitáció jelensége

Legyen egy szűküettel ellátott vízszintes cső, amelyben egy bizonyos folyadék áramlik (4.16. ábra). Bernoulli törvényét a cső ábrázolt két keresztmetszetére felírva a hidrosztatikai nyomásnak a szűkületben mért p_2 értékét kisebbnek találjuk, mint amekkora az a szűkület előtt volt (p_1):

$$p_2 = p_1 - \gamma \cdot \frac{v_2^2 - v_1^2}{2 \cdot g}. \quad (4.80)$$



4.16. ábra. A kavitáció megjelenése egy szűkületben

Az áramlási sebesség a cső szűkületében megnövekszik és a hidrosztatikai nyomás pedig ott lecsökken. Ha a csőben áramló hozamot növeljük, akkor egy adott hozamnál a p_2 nyomás értéke a eléri a folyadék telített gőzeinek nyomását (mely egyébként rendszerint igen alacsony érték). Ekkor a folyadék belsejében kisebb-nagyobb üregek, gőzzel teli buborékok keletkeznek. A folyamatban részt vehetnek a folyadékban oldott gázok is, melyek oldékonysága a nyomás növekedésével csökken.

A keletkező buborékokat az áramlás magával sodorja és amikor azok egy eléggé magas nyomású helyre érnek a bennük levő gőz kondenzálódik (vagy a gázok visszaoldódnak) s így összeroppannak.

Ezt a jelenséget *kavitációnak* vagy *üregképződésnek* nevezik és bármely olyan esetben előfordul, amikor az áramlási sebesség megnövekedése miatt a hidrosztatikai nyomás megfelelőképpen lecsökken, így például a turbinalapátok felületén.

A buborékok keletkezése és összeroppanása a folyadék belsejében rezgéseket kelt. Ha a buborékok összeroppanása a folyadékkal érintkező szilárd felületeken vagy azok közelében megy végbe, a keletkező nyomáshullámok ismételt hatása miatt az adott felület erőteljesen roncsolódhat. A képződő buborékoknak egyéb kedvezőtlen hatása is lehet, így például a hajócsavar hatásfokát csökkenti; következőképpen a kavitáció káros jelenségnek számít.

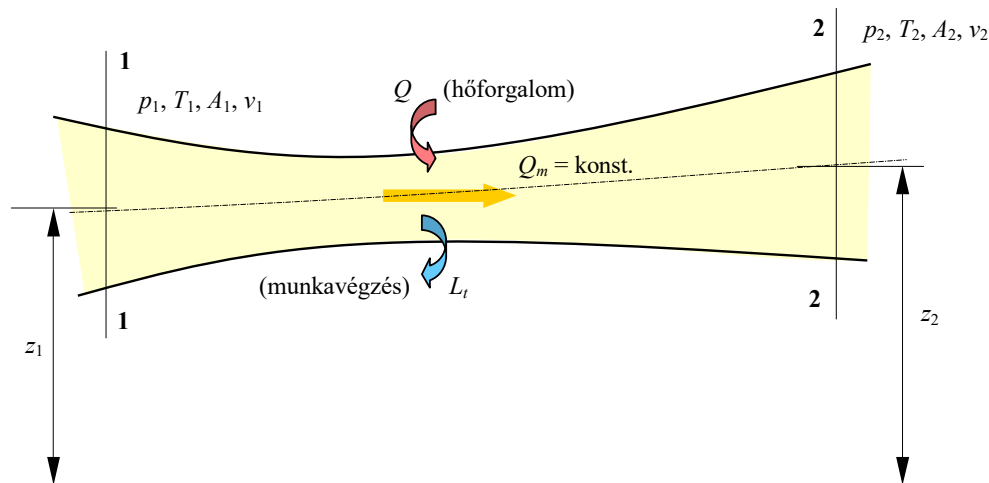
4.4. A termodinamikai állapotváltozást szenvedő fluidum esete

Az előbbi fejezetben az energia megmaradásának tételét az áramló fluidum mechanikai energiájára vonatkoztattuk, a helyzeti és a mozgási energia kapcsolatát tanulmányoztuk a súrlódási veszteségek figyelembevételével.

Az áramló fluidum azonban mechanikai (technikai) munkát is végezhet és termodinamikai állapotváltozáson mehet keresztül, így belső energiája is megváltozhat. Az energia megmaradásának elvét ekkor e jelenségeket is szem előtt tartva kell felírunk, a kapott megmaradási egyenlet pedig a termodinamika első főtételének nyitott rendszerekre (4.17. ábra) felírt formája lesz.

A termodinamika nyugvó, zárt rendszerekre felírt első főtétele szerint, ha a rendszer belsejében nem megy végbe fázisátalakulás vagy kémiai reakció, a rendszer által végzett L munka a felvett Q hő és a belső energia ΔU megváltozásának különbségével azonos. Differenciális formában az első főtétel képletilen:

$$\delta L = dQ - \delta U . \quad (4.81)$$



4.17. ábra. Nyitott, átáramlott termodinamikai rendszer

A tömegre fajlagosított mechanikai munkát (a mechanikai energia változását), amelyet valamely tetszőleges görbe két kijelölt pontja között számíthatunk, a 4.50. egyenlet adja. Ezt bevezetvén az első főtételt kifejező egyenletbe a következő relációhoz jutunk:

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} ds + \int_1^2 \text{grad} \frac{v^2}{2} ds - \int_1^2 \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v} ds - \int_1^2 \mathbf{f} ds + \int_1^2 \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad} p ds -$$

$$-\frac{v_k}{3} \cdot \int_1^2 \text{grad} (\text{div} \mathbf{v}) ds - v_k \cdot \int_1^2 \Delta \mathbf{v} ds + l_t^{1-2} = q^{1-2} - \Delta u^{1-2},$$
(4.82)

ahol l_t , q és u tömegre fajlagosított mennyiségek (a két pont között végzett technikai munka, a cserélt hő és a belső energia változása). Ez az úgynevezett *energiaegyenlet*.

Ezt az egyenletet egy áramcső két keresztmetszetére, örvénymentes áramlásra és állandósult állapotra felírván, amikor az \mathbf{f} térfogati erő a fluidum saját súlyából származik (4.17. ábra), a következő egyszerűbb formát kapjuk:

$$l_t^{1-2} + l_s^{1-2} + \frac{1}{2} \cdot (v_2^2 - v_1^2) + g \cdot (z_2 - z_1) + \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) = q^{1-2} - \Delta u^{1-2},$$
(4.83)

ahol l_s a súrlódási erők munkája.

4.5. Az adiabatikusan áramló gázra felírt energiaegyenlet

Az energiaegyenlet sajátosságos esetekben tovább egyszerűsödik. Tegyük fel, hogy az áramcsőben egy ideálisnak tekinthető gáz áramlik, mely nem végez munkát és nem cserél hőt a környezetével. Mivel az ideális gáz viszkozitása nulla, ez az adiabatikus folyamat reverzibilis és a súrlódási erők munkája nulla. A gáz sűrűsége alacsony, tehát a gravitációs helyzeti energiájának, a $g \cdot z$ szorzatnak változása elhanyagolható. Az energiaegyenlet előbbi formáját ekkor a következőképpen egyszerűsíthetjük:

$$\frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} + u_2 = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} + u_1.$$
(4.84)

Mivel az $1/\rho$ mennyiség az v fajlagos térfogattal azonos, az összeg második és harmadik tagja a

$$h = \frac{p}{\rho} + u = p \cdot v + u$$
(4.85)

fajlagos entalpiát adja, amellyel az energiaegyenlet most a

$$\frac{v_2^2}{2} + h_2 = \frac{v_1^2}{2} + h_1$$
(4.86)

vagy

$$\frac{v^2}{2} + h = \text{konst.}$$
(4.87)

formákban írható fel. Mivel

$$h = c_p \cdot T,$$
(4.88)

ahol c_p a gáz izobár fajhője, T pedig az abszolút hőmérséklet, az energiaegyenletet a következő módon is kifejezhetjük:

$$\frac{v^2}{2} + c_p \cdot T = \text{konst.} \quad (4.89)$$

Ez utóbbi egyenletet c_p -vel beosztva az áramló gáz hőmérsékletére kapunk egy újabb egyenletet, melynek tagjai hőmérséklet jellegűek:

$$\frac{v^2}{2 \cdot c_p} + T = T_t = \text{konst.} \quad (4.90)$$

Ebben az egyenletben az abszolút T hőmérséklet a „sztatikus” hőmérséklet, az első tag a

$$T_d = \frac{v^2}{2 \cdot c_p} \quad (4.91)$$

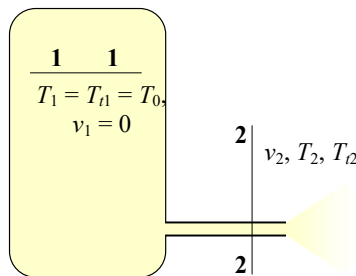
„dinamikus” hőmérséklet, a kettő összege pedig az „összhőmérséklet”.

Az energiaegyenlet ez utóbbi formája szerint az áramvonal mentén a levezetés elején felsorolt feltételek betartása mellett az összhőmérséklet állandó.

Alkalmazzuk ezt az egyenletet egy tartályból adiabatikusan kiáramló gáz sugarra (4.18. ábra). Az energiaegyenletet két keresztmetszetre írjuk fel, melyek közül az elsőt a tartály belsejében vesszük fel, a másodikat pedig valahol a kiömlő vezetéken.

A tartályban a gáz gyakorlatilag nem áramlik, belsejében az összhőmérséklet a sztatisztikus hőmérséklettel azonos, amelyet egy behelyezett közönséges hőmérővel mérhetünk.

Ha a második keresztmetszeten az áramló gáz belsejébe egy közönséges hőmérőt helyeznénk, akkor az itt a T_2 sztatisztikus hőmérsékletet mérné, amely a tartályban uralkodó hőmérsékletnél alacsonyabb lenne. Ha ugyanitt a hőmérsékletet egy *torlóponthőmérő*vel mérnénk meg (ez a fajta hőmérő az érzékelőjének közelében a gázt megállítja), az ugyanazt az összhőmérsékletet mutatná mint a tartály belsejében elhelyezett hőmérő.



4.18. ábra. Tartályból kiáramló gáz

Ezen hőmérsékletek ismeretében az áramlás v_2 sebessége meghatározható:

$$T_0 = T_2 + \frac{v_2^2}{2 \cdot c_p}, \quad (4.92)$$

ahonnan

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot c_p \cdot (T_0 - T_2)}. \quad (4.93)$$

A gáz termikus állapotegyenletének felhasználásával az energiaegyenlet további ekvivalens formáit is elő lehet állítani. A termikus állapotegyenletet most a következő alakban írjuk fel:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R}{\mu} \cdot T, \quad (4.94)$$

(ez az általánosabb $p \cdot V = \nu_m \cdot R \cdot T$ formának az m tömeggel való beosztásából származik). Az egyenletben szereplő $\mu = m / \nu_m$ mennyiség a gáz móltömege, az R egyetemes gázállandót pedig a Robert-Mayer képlet alapján az izobár és az izochor mólhő különbsége adja:

$$R = C_p' - C_V'. \quad (4.95)$$

A mólhők és a fajhők közötti kapcsolat, e mennyiségek definíciója szerint:

$$\begin{aligned} C_p' &= \mu \cdot c_p, \\ C_V' &= \mu \cdot c_V. \end{aligned} \quad (4.96)$$

A mólhők, fajhők aránya az adiabatikus kitevő, melyet most κ -val jelölünk, hogy meg tudjuk különböztetni a γ fajsúlytól:

$$\kappa = \frac{c_p}{c_V} = \frac{C_p'}{C_V'}. \quad (4.97)$$

Ha a T hőmérsékletet a 4.94. állapotegyenletből kifejezzük és azt az energiaegyenlet 4.89. megfogalmazásába behelyettesítjük, akkor az utóbbi összefüggésekkel az energiaegyenlet újabb formája

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{p}{\rho} = \text{konst.} \quad (4.98)$$

lesz. Ha ezt az egyenletet a 4.18. ábrán látható tartályra és a kiömlési keresztmetszetre írjuk fel, akkor a kiömlési sebességet

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \left(1 - \frac{p}{p_0} \cdot \frac{\rho_0}{\rho}\right)} = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]} \quad (4.99)$$

formájában kapjuk – ez a Saint Venant-Wantzel képlet.

A hang terjedési sebessége az 1.11. és az 1.16. relációkkal kifejezhető, mint

$$c = \sqrt{\frac{\kappa \cdot p}{\rho}}. \quad (4.100)$$

Innen a p/ρ hányadost kifejezve és a 4.98. képletbe behelyettesítve az energiaegyenlet tovább alakítható:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\kappa-1} = \text{konst.} \quad (4.101)$$

Ez a reláció a lokális hangsebességet adja a gáz áramlási sebességének függvényében. Ha visszatérünk a 4.18. ábrán látható tartályra és ezt az egyenletet felírjuk a két kijelölt keresztmetszetre:

$$\frac{c_1^2}{\kappa - 1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{c_2^2}{\kappa - 1}, \quad (4.102)$$

a fűvókában (a 2 – 2 keresztmetszeten) a hang terjedési sebességét

$$c_2 = \sqrt{c_0^2 - (\kappa - 1) \cdot \frac{v_2^2}{2}} \quad (4.103)$$

formában határozhatjuk meg. Itt c_0 a hangnak a nyugalomban levő gázban mért terjedési sebessége ($c_1 = c_0$), az áramló gázban pedig a hang terjedési sebességét kisebbnek találjuk, mint amekkora az a nyugalomban levő gázban volt.

A 4.101. egyenletet $2/c^2$ -tel beszorozva egy további, dimenzió nélküli formát kapunk:

$$Ma^2 + \frac{2}{\kappa - 1} = \text{konst.}, \quad (4.104)$$

ahol

$$Ma = \frac{v}{c} \quad (4.105)$$

a *Mach-féle szám*, mely tehát a közeg áramlási sebességének (vagy a benne haladó tárgy sebességének) és a hang terjedési sebességének hányadosa.

Megjegyzendő, hogy az energiaegyenletre kapott 4.90, 4.98, 4.101. és 4.104. összefüggések csak a súrlódásmentesen és adiabatikusan (tehát izentropikusan) áramló gázra érvényesek.

4.6. Szakadási felületek

Az áramlásokat a Mach-szám segítségével jellemezhetjük: ha az áramlás sebessége a hang terjedési sebessége alatt van, vagyis $Ma < 1$, akkor az áramlás *szubszonikus*. Ha az áramlási sebesség a hang terjedési sebessége fölött van, akkor a mozgás *szuperszonikus* vagy *hiperszonikus* (ez utóbbi esetben $Ma > 5$).

A hangsebesség a közegben keletkező nyomáshullámok terjedési sebessége s emiatt ha az áramló közeg sebessége túllépi ezt a határértéket, az áramlás jellege várhatóan meg fog változni.

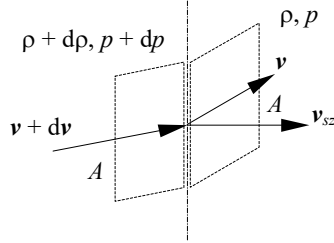
A cseppfolyós közeget általában összenyomhatatlannak tekintjük, mert erőteljes nyomásváltozás alatt is csak elhanyagolhatóan kis térfogatváltozást mutat. Az áramló gáz tanulmányozásánál is joggal feltételezhetjük a sűrűség állandóságát, amennyiben az áramlási sebesség a hang terjedési sebességéhez viszonyítva kicsiny és nincsenek nagy sebesség- és nyomáskülönbségek. Viszont ha e feltételek nem teljesülnek, akkor a vizsgált áramlásban olyan „szakadási” felületek jelennek meg, amelyen áthaladva a jellemzők (például a sűrűség, a nyomás és a sebesség) megváltozását tapasztaljuk.

E szakadási felületeket *gyengének* nevezik, ha az áramlást jellemző mennyiségek fokozatosan változnak meg, de e jellemzők deriváltjai nem folytonosak. Az *erős* szakadási felületen maguk a jellemzők változnak ugrásszerűen.

A 4.19. ábrán a függőleges vonal egy áramló fluidumban jelentkező gyenge szakadási felületet jelképez, mely egy rögzített koordináta-rendszerből nézve egy bizonyos v_x sebességgel halad (a szakadási felület terjedési sebességét e felületre merőleges irányban értelmessük). E szakadási felület két oldala között a sűrűség ρ , a nyomás dp és az áramlási sebesség dv véges kis megváltozását észleljük.

A jelenséget könnyebb a szakadási felülettel együtt mozgó koordináta-rendszerből tanulmányozni. E felület két oldalán egy olyan ellenőrző felületet jelölünk ki, melynek oldalai a

szakadási felülettel, illetve a sebességvektorokkal párhuzamosak. A függőleges belépő és a kilépő felületek azonos nagyságúak (A), a megtört oldal felületek pedig a sebességvektorokhoz igazodván áramcsövet alkotnak.



4.19. ábra. Gyenge szakadási felület

A fluidumrészecskék sebességét és a szakadási felület terjedési sebességét egyaránt az álló koordinátarendszerben vettük fel, a részecskéknek az ellenőrző felülethez viszonyított relatív sebességét tehát a $v_{sz} - v$, illetve a $v_{sz} - (v + dv)$ különbségek adják.

A fluidumrészecskék vektorait a szakadási felületre nézve normális és tangenciális komponensekre bonthatjuk fel. A felület jobb oldalán a normális komponens v_n , míg a bal oldalán az $v_n + dv_n$ lesz. E mennyiségekkel kijelölt kontrollfelületen a folytonossági tételt

$$(v_{sz} - v_n) \cdot \rho = (v_{sz} - v_n - dv_n) \cdot (\rho + dp) \quad (4.106)$$

formában írhatjuk fel, melyből a másodrendűen kicsiny tagok elhagyásával

$$\rho \cdot dv_n = (v_{sz} - v_n) \cdot dp. \quad (4.107)$$

A kontrollfelület által lehatárolt fluidumra, saját súlyának elhanyagolása mellett, csak a nyomásból származó külső erő hat. Az impulzustétel értelmében ez az erő a fluidum impulzusának megváltozásával egyenlő. A be- és a kilépési keresztmetszeten időegység alatt átlépő fluidumra felírva:

$$A \cdot \rho \cdot (v_{sz} - v_n - dv_n) \cdot (v_n + dv_n) - A \cdot \rho \cdot (v_{sz} - v_n) \cdot v_n = A \cdot p - A \cdot (p + dp), \quad (4.108)$$

ahonnan, a másodrendűen kicsiny tagok újbóli elhagyolásával

$$\rho \cdot (v_{sz} - v_n) \cdot dv_n = dp. \quad (4.109)$$

A 4.107. és a 4.109. egyenletekből álló rendszer megoldásával

$$v_{sz} - v_n = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}, \quad (4.110)$$

mely különbség a gyenge szakadási felület terjedési sebességét adja (a haladási sebességből levonjuk a közeg áramlásából fakadó sebességkomponenst). E mennyiség értelmezéséhez az adiabatikus állapotváltozás egyenletét

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \text{konst.} \quad (4.111)$$

formában írjuk fel, ahonnan

$$d\left(\frac{p}{\rho^\kappa}\right) = d(p \cdot \rho^{-\kappa}) = 0. \quad (4.112)$$

A differenciál kifejtésével, az egyenletből megállapítható, hogy:

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{\kappa \cdot p}{\rho} = c^2. \quad (4.113)$$

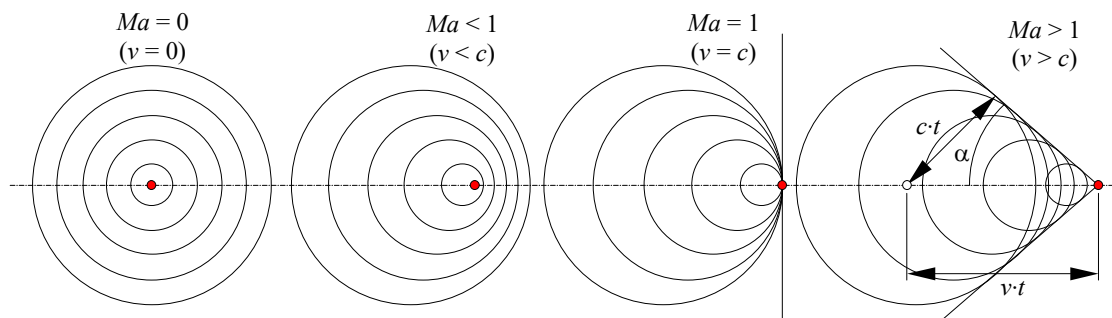
E hányadossal a 4.110. relációból az derül ki, hogy a gyenge szakadási felület a hang sebességével terjed. A hangjelenség nem más, mint a közegben előálló kis amplitúdójú zavarnak gyenge szakadási felületek formájában történő tovaterjedése.

Homogén és izotróp közegekben a pontszerű forrásból kiinduló gyenge szakadási felületek (hanghullámok) minden irányban azonos sebességgel terjednek, így gömb alakúak lesznek (4.20. ábra). Ha a zavarforrás a közeghez viszonyítva áll, akkor ezek a felületek olyan koncentrikus gömbök, melyek egybeeső középpontja a zavar forrásával azonos.

Amennyiben a pontszerű zavarforrás a homogén és izotróp közeg belsejében halad, a szakadási felületek továbbra is megőrzik gömb alakjukat és a zavar keltésének helyétől sugárirányban egyenletes sebességgel terjednek. E gömbök viszont most már nem koncentrikusak, hiszen a zavarkeltés helye nem állandó. Ha a zavarforrás sebessége a hang terjedési sebességénél kisebb ($v < c$), akkor a szakadási felületek a zavarforrás haladási irányában sűrűsödnek.

Amikor a zavarkeltő pont a hang terjedési sebességével halad ($v = c$), a gömb alakú szakadási felületek (a hanghullámok) e zavaró pontban érintik egymást és egy síkhoz illeszkednek. A felületek közös érintőjén erőteljes energiafelhalmozódás jön létre: ez az oka a *hangrobbanás* jelenségének (amikor a repülőgép átlépi a hangsebességet).

Ha a zavarforrás a hang sebességénél gyorsabban halad ($v > c$), akkor a keltett hullámok lemaradnak a zavarforrás mögött. Ilyenkor a szakadási felületek egy kúp palástjához illeszkednek, mely kúpot *zavarási kúp* vagy *Mach-féle kúp*nak neveznek.



4.20. ábra. A hanghullám terjedése

Az illeszkedő felületek hullámként jelentkeznek, ezeket *fejhullámnak* is nevezik. A fejhullámot lehatároló, igen közeli felületek már erős szakadási felületek. Keresztmetszetén a nyomás, a hőmérséklet és a sűrűség hirtelen megváltozását tapasztaljuk.

A zavarási kúp fél nyílásszögét az ábra szerint a

$$\sin \alpha = \frac{c \cdot t}{v \cdot t} = \frac{1}{Ma} \quad (4.114)$$

egyenletből határozhatjuk meg. Ha $v = c$, akkor a nyílásszög fele a derékszög lesz, a Mach-féle kúp ilyenkor egy sík felületté terül szét.

Az erős szakadási felületek két oldalán a közeg jellemzői ugrásszerűen változnak. E változás tanulmányozásának egyszerű modellje az adiabatikus egydimenziós áramlás esete, a Rankine-Hugoniot modell. Ekkor a szakadási felület két oldalára a kontinuitási tételt ($\rho \cdot v = \text{konst.}$), az energiamegmaradás tételét a 4.98. alakjában ($v^2/2 + (p/\rho) \cdot \kappa/(\kappa-1) = \text{konst.}$) és az impulzusmegmaradás tételét a már ismertetett formában ($p + \rho \cdot v^2 = \text{konst.}$) felírva, feltételezve az izobár fajhő állandóságát az így alkotott egyenletrendszerből a nyomás és a sűrűség viszonyára vonatkozó következtetést vonhatunk le:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{(\kappa+1) - (\kappa-1) \cdot \rho_2 / \rho_1}{(\kappa+1) \cdot \rho_2 / \rho_1 - (\kappa-1)}, \quad (4.115)$$

mely egyenlőség a Rankine-Hugoniot egyenlet. Levezetése eléggé hosszadalmas, melynek során a három felsorolt tételt a szakadási felület két oldalára írjuk fel. A kontinuitás tételéből a v_1 sebességet kifejezzük v_2 függvényeként, majd azt behelyettesítjük az impulzusmegmaradás tételébe. Innen v_2^2 -re kapunk egy relációt. A v_1 -re kapott összefüggést négyzetre emeljük, majd behelyettesítjük a v_2^2 mennyiséget, így a sebességek négyzeteit megadhatjuk csupán a nyomásokkal és a sűrűségekkel. Ezeket behelyettesítve az energiamegmaradás említett formájába, az egyenletet rendezve kapjuk a Rankine-Hugoniot egyenletet. Ebben, mivel a hányados pozitív kell legyen (a bal oldalon szereplő nyomás nem lehet negatív), a sűrűségek aránya sohasem lehet $(\kappa+1)/(\kappa-1)$ -nél nagyobb, tehát levegő esetén a ρ_2 sűrűség leg több mintegy hatszorosa ρ_1 -nek (e határérték végtelen nagy p_2 nyomást eredményezne).

4.7. Hugoniot tételei

Tegyük fel, hogy a közeg súrlódásmentesen, egy vízszintes adiabatikus áramcsőben stacionáriusan halad. Ekkor a folytonossági egyenletet az ismert $Q_m = \rho \cdot v \cdot S = \text{konst.}$ formában írhatjuk fel, ahol S az áramcső keresztmetszete. A tömeghozam differenciálját képezve, annak állandósága miatt

$$d\rho \cdot v \cdot S + \rho \cdot dv \cdot S + \rho \cdot v \cdot dS = 0, \quad (4.116)$$

vagy, $\rho \cdot v \cdot S$ -sel beosztva:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dS}{S} = 0. \quad (4.117)$$

Euler 4.46. egyenletét egy egyenes áramvonalra (amely az x tengellyel párhuzamos) felírva:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (4.118)$$

ahonnan az áramlás stacionaritása miatt a

$$v \cdot dv = -\frac{dp}{\rho} \quad (4.119)$$

egyenlethez jutunk (a sebesség az időben állandó). dp -t a hangsebesség 4.116. képletéből kifejezve és behelyettesítve:

$$v \cdot dv + c^2 \cdot \frac{d\rho}{\rho} = 0, \quad (4.120)$$

ahonnan

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{v \cdot dv}{c^2} = -Ma^2 \cdot \frac{dv}{v}. \quad (4.121)$$

Ezt a hányadost a folytonossági tételből levezetett 4.117. egyenletbe behelyettesítve a következő összefüggéshez jutunk:

$$\frac{dS}{S} = (Ma^2 - 1) \cdot \frac{dv}{v}. \quad (4.122)$$

Ezt a relációt megvizsgálván három fontos következtetést vonhatunk le, melyeket *Hugoniot tételeinek* is neveznek:

- a). Szubszonikus áramlásokra ($Ma < 1$) a sebesség változása és a keresztmetszet változásával fordított irányú (szűkülő vezetékben az áramlás gyorsul, táguló vezetékben pedig lassul).
- b). Szuperszonikus áramlásokra ($Ma > 1$) a sebesség és a keresztmetszet változása azonos irányú: szűkülő vezetékben az áramlás lassul, táguló vezetékben pedig nő.
- c). Az áramlás sebessége a hang terjedési sebességét ($Ma = 1$) csak ott a érheti el, ahol az áramlási keresztmetszetnek minimuma van.

Szubszonikus áramlásokra az első észrevétel szerint a fluidum az inkompresszibilis folyadékokhoz hasonlóan viselkedik. A gyakorlatban az áramló gázokat összenyomhatatlannak tekinthetjük mindaddig, amíg az áramlási sebesség nem túl magas ($Ma < 0.7$).

Szuperszonikus áramlások esetében azonban már más a helyzet, a gáz az összenyomhatatlan folyadékkal ellentétes viselkedést mutat.

A harmadik észrevétel szerint a szűkülő vezetékben szubszonikusan áramló (gyorsuló) gáz csak a keresztmetszet minimumán érheti el a hangsebességet. Ettől a ponttól kezdve a táguló szakaszon az áramlási sebesség tovább növekszik.

Ugyancsak a harmadik észrevétel szerint a szűkülő vezetékben szuperszonikusan áramló (lassuló) gáz sebessége szintén csak a keresztmetszet minimumán érheti el a hangsebességet, innen kezdve a táguló szakaszon az áramlási sebesség tovább csökken.

A táguló vezetékben a szubszonikus áramlás lassul, a szuperszonikus áramlás pedig gyorsul, tehát a keresztmetszet esetleges maximumán sem érhetné el a hang terjedési sebességét. E maximumon a szubszonikus áramlás sebességének minimuma, a szuperszonikusnak pedig maximuma lenne (ekkor a 4.122. relációban a dv mennyiség nulla).

A fent tárgyalt eseteket a következő (4.1.) táblázat foglalja magába.

A nyomás alakulásának tanulmányozásához a 4.119. egyenletet a sebesség négyzetével osztjuk:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{v^2} \cdot \frac{dp}{\rho} = -\frac{1}{Ma^2 \cdot c^2} \cdot \frac{dp}{\rho}, \quad (4.123)$$

ahonnan, a hang sebességének 4.100. kifejezésével

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{\kappa \cdot Ma^2} \cdot \frac{dp}{p}. \quad (4.124)$$

Ebből az összefüggésből is egy fontos következtetést vonhatunk le: bármilyen Mach-szám mellett a nyomás változási iránya a sebesség változási irányával ellentétes, az áramlás gyorsulása

nyomáscsökkenéshez, lassulása pedig nyomásnövekedéshez vezet, függetlenül attól, hogy az áramlás szubszonikus vagy szuperszonikus-e.

Áramlás a belépésnél	Táguló vezeték	Szűkülő vezeték	Táguló, majd szűkülő vezeték	Szűkülő, majd táguló vezeték
Szubszonikus ($Ma < 1$)	 $dS > 0, dv < 0$	 $dS < 0, dv > 0$	 $dS = 0, dv = 0$	 $dS = 0, dv \neq 0$
Szuperszonikus ($Ma > 1$)	 $dS > 0, dv > 0$	 $dS < 0, dv < 0$	 $dS = 0, dv = 0$	 $dS = 0, dv \neq 0$

4.1. táblázat. Hugoniot tételei

Amikor az áramlási sebesség eléri a hang terjedési sebességét azt mondjuk, hogy a közeg *kritikus* állapotba kerül, jellemzőit pedig a „kritikus” jelzővel illetjük (ezek nem azonosak a fázisátalakulásoknál definiált kritikus mennyiségekkel). E kritikus jellemzőket az energiaegyenletnek a 4.5. fejezetben megállapított formáiból számíthatjuk ki úgy, hogy előírjuk a $v = c$ feltételt. Így például a 4.101. energiaegyenletet a

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\kappa - 1} = \frac{c_0^2}{\kappa - 1} \quad (4.125)$$

formában felírva, ahol a jobb oldal a nyugalomban (*tartályállapotban*) levő közegre érvényes, a sebesség $v = v_{kr} = c$ előírásával a kritikus sebességet

$$v_{kr} = c_0 \cdot \sqrt{\frac{2}{\kappa + 1}} \quad (4.126)$$

gyanánt kapjuk. Az adiabatikus állapotváltozás 2.47. egyenletének és a hangsebesség 1.17. képletének felhasználásával a kritikus sűrűség

$$\rho_{kr} = \rho_0 \cdot \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad (4.127)$$

lesz. Ezzel, a 2.47. egyenlet újbóli felhasználásával a kritikus nyomás

$$p_{kr} = p_0 \cdot \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}, \quad (4.128)$$

az általános gáztörvényből pedig a kritikus hőmérséklet

$$T_{kr} = T_0 \cdot \frac{2}{\kappa + 1} \quad (4.129)$$

formában határozható meg, ahol a zérus indexű mennyiségek a tartályállapokra vonatkoznak. Mint látható T_{kr}/T_0 , p_{kr}/p_0 , ρ_{kr}/ρ_0 és v_{kr}/c_0 hányadosok csak a gáz adiabatikus kitevőjétől függenek.

Ha bevezetjük a

$$M_{kr} = \frac{v}{v_{kr}} \quad (4.130)$$

hányadossal definiált jellemzőt, egyfajta Mach-számot, akkor e dimenzió nélküli mennyiséggel az egydimenziós áramlás valamennyi fontos jellemzőjét meg tudjuk adni a tartályállapot paramétereinek függvényeként. Ha a kontinuitási egyenlet 4.117. kifejezését végigszorozzuk a $(\kappa - 1)/c_0^2$ kifejezéssel, akkor onnan a hangsebességek arányát

$$\frac{c}{c_0} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \cdot M_{kr}^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.131)$$

formában lehet kifejezni. Ezt az összefüggést az adiabatikus állapotváltozás

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} = \left(\frac{c}{c_0}\right)^{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1}} \quad (4.132)$$

egyenletének különböző formáiba behelyettesítve (az első két egyenlőség a Poisson-képletből, az utolsó pedig a hangsebesség kifejezéséből származik) a következő *gázdinamikai függvények*hez jutunk:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \cdot M_{kr}^2\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}, \quad (4.133)$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \cdot M_{kr}^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}, \quad (4.134)$$

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \cdot M_{kr}^2. \quad (4.135)$$

A folytonossági egyenletet a kritikus keresztmetszetre is felírhatjuk (stacionárius áramlást feltételezve):

$$\rho \cdot v \cdot A = \rho_{kr} \cdot v_{kr} \cdot A_{kr}, \quad (4.136)$$

ahonnan a kritikus áramlási keresztmetszetet a gázdinamikai függvények felhasználásával

$$A_{kr} = A \cdot M_{kr} \cdot \left(\frac{\kappa + 1}{2} - \frac{\kappa - 1}{2} \cdot M_{kr}^2\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad (4.137)$$

formában kapjuk. Az A/A_0 hányados felírásának nincs értelme, mert a tartályban a gáz nyugalomban van (A_0 végtelen nagyra tekinthető), de az A_{kr}/A kifejezést szintén gázdinamikai függvénynek tekintik.

A 4.125. egyenletből a lokális Mach-számot is meghatározhatjuk:

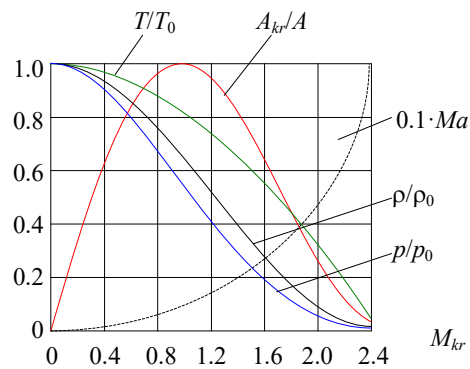
$$Ma = M_{kr} \cdot \left(\frac{\kappa+1}{2} - \frac{\kappa-1}{2} \cdot M_{kr}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.138)$$

mely kifejezés az ötödik gázdinamikai függvény. Ezt az öt függvényt egy adott gázra, az adiabatikus κ kitevő megfelelő értékére ábrázolván a 4.21. ábrán látható görbékhez jutunk (a bemutatott görbék egy kétatomos ideális gázra – pl. oxigén, nitrogén, levegő – érvényesek, ahol $\kappa = 1.4$).

Az M_{kr} hányados legnagyobb értéke a legnagyobb áramlási sebességnek felel meg. Ezt a sebességet a 4.99. egyenlet adja,

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0}} = c_0 \cdot \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}} \quad (4.139)$$

maximumát vákuumba való kiömléskor érhetné el a gáz, amikor $p = 0$. Egy állandó keresztmetszetű vezetékkel a valóságban a nyomás csökkentésével a kiömlési sebesség csak a lokális hangsebesség kritikus értékéig növelhető, ezt a határértéket pedig csak egy bővülő toldat segítségével lehet meghaladni (Hugoniot tételeinek értelmében).



4.21. ábra. Kétatomos ideális gáz dinamikai függvényei

A legnagyobb kiömlési sebesség kifejezésével

$$M_{kr,max} = \frac{v_{max}}{v_{kr}} = \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}, \quad (4.140)$$

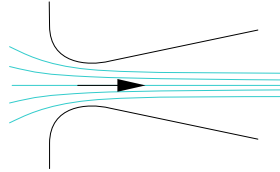
a kétatomos ideális gázra értéke kb. 2.45. Ennél az értéknél a Mach-szám végtelen nagyoknak adódik (görbéjének függőleges aszimptótája van), a 4.138. kifejezés zárójele ugyanis ekkor nulla.

A kritikus Mach-szám legnagyobb értéke fele tartva a lokális hangsebesség, a sűrűség, a nyomás és a hőmérséklet egyaránt a nulla felé közelít.

Az A_{kr}/A keresztmetszet-függvénynek a $M_{kr} = 1$ helyen maximuma van; ugyanitt $Ma = 1$, Hugoniot harmadik tételének megfelelően (a kritikus keresztmetszetben, ahol A -nak minimuma van, az áramlási sebesség eléri a lokális hangsebességet).

Hugoniot tételeinek fontos alkalmazása a konvergens-divergens fúvóka (4.22. ábra), melyet *Laval-fúvókának* is neveznek (e fúvókát már tulajdonképpen már Lavalt megelőzően ismerték és használták). Ilyen például a turbinás gőzgépek és a rakéták fúvókája. E fúvókába bejutó gőz vagy gáz áramlási sebessége a hang sebessége alatt van. A konvergens szakaszon a sebesség növekedését tapasztalhatjuk, mely – megfelelő méretezés esetén – a legkisebb keresztmetszeten elérheti a hang

sebességét. Ekkor a divergens szakaszon a sebesség tovább növekszik. Helyes méretezés esetében a Laval-fúvókát elhagyó gázsugár nyomása nagyobb kell legyen, mint a környezet nyomása, ugyanis ellenkező esetben a kilépésnél a gáz kompressziója lépne fel. E kompresszió egy visszafelé terjedő lökéshullámot – egy erős szakadási felületet – hoz létre, az áramló gáz kinetikus energiájának egy része pedig irreverzibilis folyamatokban vesztődik el.



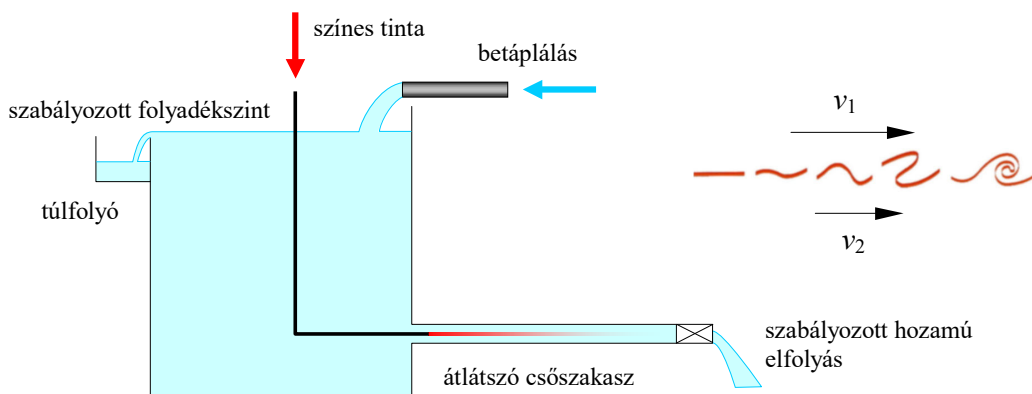
4.22. ábra. *Laval-fúvóka keresztmetszete*

5. A HIDRAULIKA ALAPJAI

5.1. Lamináris és turbulens áramlás

A 3.2.5. alfejezetben említettük az örvénytételeket, közöttük Lagrange tételét, mely szerint a barotróp fluidum konzervatív erőterben történő súrlódásmentes áramlása potenciális, örvénymentes marad. Ez a tétel és annak következményei csak a felsorolt feltételek mellett igazak. A valódi közegekben a belső súrlódás miatt mindig fellép az örvényesség, midőn a részecskék egymáson vagy a szilárd falak mentén elgördülnek. Ez az örvényesség gyakorlati szempontból csak egy adott áramlási sebesség felett lesz számottevő, ezt a tényt Reynolds kísérleti úton támasztotta alá.

A kísérleti berendezés az 5.1. ábrán látható. E berendezés egy átlátszó csőszakaszon egyenletes, szabályozható áramlási sebességet biztosít. A használt folyadék lehet víz, az áramlást ilyenkor színes tinta befecskendezése teszi láthatóvá.



5.1. ábra. Reynolds kísérlete és az örvények kialakulásának magyarázata

A sebesség növelésekor a színes folyadékszál időnkénti véletlenszerű megzavarását tapasztalhatjuk, helyenként örvények jelennek meg és tűnnek el. Az örvények megjelenése a sebesség növekedésével egyre gyakoribb lesz, míg végül az áramlás teljes egészére kiterjed és állandósul. Ez a tapasztalat azt bizonyítja, hogy az áramlásban ideiglenesen a cső tengelyére merőleges sebességkomponens is megjelenik, a sebességvektor időbeli állandósága tehát már nem áll fenn. Az örvények kialakulásának folyamatát az 5.1. ábra jobb oldalán látható sorozat magyarázza és az a folyadékrétegek eltérő sebességének következménye (az ábrázolt folyamat egyébként Helmholtz-Kelvin instabilitás néven ismert).

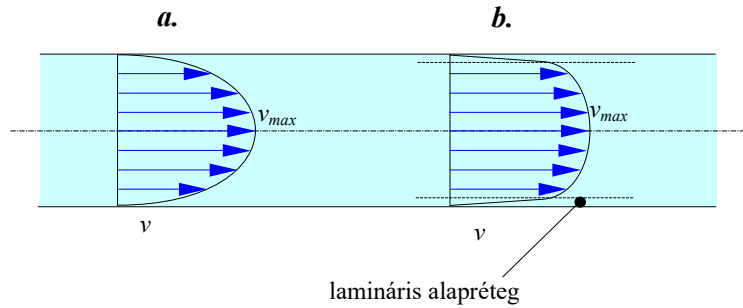
Még nagyobb sebességnél a csőben áramló folyadékok rövid távolságon belül egyenletesen elkeverednek. Ezt az örvényekre szétbomló, igen bonyolult áramlást *turbulens* (örvénylő) áramlásnak nevezzük. Ha a kiömlő folyadékmennyiség időben nem változik, az áramlási tér pontjaiban a sebességvektor iránya és nagysága egy középérték körül ingadozik, az áramlás tehát kvázistacionárius. Az átlagsebesség profilja ilyenkor jelentősen eltér a Hagen-Poiseuille féle parabolikus profiltól és általában empirikus képletekkel szokták leírni, vagy pedig jó közelítéssel egy állandó értékkel helyettesítik. A sebességprofil a turbulencia fokozódásával egyre inkább ellaposodik (5.2.b. ábra). Ez esetben is megfigyelhető egy lamináris alapréteg, ugyanis a cső fala bizonyos mértékben mérsékli a turbulenciát.

Az áramlás jellege a kísérlet szerint az áramlási sebességgel függ össze. Az alacsony sebességeknél stabil lamináris áramlás a sebesség növelésével fokozatosan válik turbulenssé, ez utóbbi állapot pedig egy bizonyos sebesség fölött állandósul. Az állapotokat elkülönítő határértékek

a folyadék tulajdonságaitól és a cső geometriájától is függenek. Reynolds kísérletei szerint az áramlási állapot egy dimenzió nélküli számmal jellemezhető:

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu_k}, \quad (5.1)$$

ez a Reynolds-féle szám.

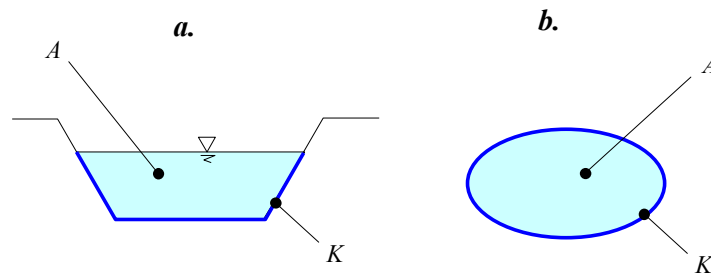


5.2. ábra. A sebességprofil lamináris (a.) és turbulens (b.) áramlás esetén

Az előbbi képletben v a cső keresztmetszetén mért átlagos áramlási sebesség, d a keresztmetszetet jellemző hosszúságjellegű mennyiség, ν_k pedig a kinematikai viszkozitás. Kör keresztmetszetű csövek esetén d a cső átmérője, egyéb esetekben pedig a *hidraulikus átmérő* (a d_e egyenértékű átmérő). A hidraulikus átmérő az A folyadék-keresztmetszet és a K nedvesített kerület hányadosának négyszerese:

$$d_e = \frac{4 \cdot A}{K}. \quad (5.2)$$

Ennek negyede, az A/K hányados a *hidraulikus sugár* (ez tehát nem a hidraulikus átmérő fele). A nedvesített kerület a folyadék-keresztmetszetnek az álló szilárd fallal érintkező része (5.3. ábra).



5.3. ábra. A nedvesített kerület csatornák (a.) és csővezetékek (b.) esetén

Megállapítást nyert, hogy ha a Reynolds-szám értéke 2320 alatt van, a fluidum (folyadék vagy gáz) áramlása stabilan lamináris. Ha kellően zavarmentessé tesszük az áramlást, ennél lényegesen nagyobb Reynolds-szám (50000) mellett is lamináris maradhat az áramlás, de ilyen esetben már egy kis zavarásra is hirtelen végbemegy az átalakulás. A gyakorlatban 2320 feletti Reynolds-számoknál turbulens áramlással számolunk.

5.2. A csősúrlódási veszteség

A hidraulikus és pneumatikus berendezések méretezésében fontos feladat a fellépő súrlódási veszteségek, az áramlással szembeni hidraulikus ellenállás kiszámítása. A Bernoulli-egyenlet ábrázolási módjaiból következik, hogy a csősúrlódási veszteség kifejezése célszerűen a létrejövő Δp (másképpen: p_r) nyomáskülönbség vagy a h_r hidrodinamikai szintkülönbség segítségével történik.

Hosszú vezetékekre (csövek, csatornák) a súrlódási veszteség a vezeték hosszán oszlik el. Ha szintkülönbségekkel dolgozunk, akkor az egységnyi hosszra eső veszteség a hidrodinamikai szintdőlése, a *hidraulikus gradiens* (esés) lesz:

$$J = \frac{h_r}{l}. \quad (5.3)$$

A Newton-féle viszkozitási törvény alapján a súrlódási ellenállás a fluidum dinamikai viszkozitásától függ és az áramlási sebességgel arányosan növekszik. A sebesség és a súrlódási erő egyenes arányossága csak a newtoni fluidumok lamináris áramlására érvényes. Nagyobb áramlási sebességeknél a turbulencia miatt a hidraulikus ellenállás a tapasztalat szerint a sebesség hatványával (körülbelül a négyzetével) növekszik.

A csősúrlódási veszteség a vezeték hosszától is függ: minél hosszabb a vezeték, annál nagyobb az áramlással szemben kifejtett ellenállása. A hidraulikus sugár csökkenése szintén az ellenállás növekedésével jár. Kísérletileg megállapították, hogy a vezeték falának érdessége is fontos szerepet játszik.

A súrlódási veszteséget egyezményesen a mozgó fluidum kinetikus energiájához viszonyítják, leggyakrabban a

$$h_r = \zeta_r \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} \quad (5.4)$$

szintkülönbséggel adják meg, de hasonló módon a súrlódás által előidézett nyomásvesztés is meg lehet határozni:

$$\Delta p = \zeta_r \cdot \rho \cdot \frac{v^2}{2}. \quad (5.5)$$

E képletekben ζ_r az *ellenállás-tényező*, ami egy dimenzió nélküli szám. A gyakorlatban a csövek többnyire kör keresztmetszetűek, a keresztmetszetet jellemző geometriai mennyiségeket (a nedvesített kerületet, a folyadék-keresztmetszetet és hidraulikus sugarat) pedig a d belső átmérő egyértelműen meghatározza. Egy egyenes, hosszú csőszakaszra a ζ_r tényezőt egységnyi átmérőre és egységnyi hosszra adják meg. Az ilyen módon fajlagosított a mennyiség a λ *csősúrlódási tényező*, ami szintén egy dimenzió nélküli szám. E mennyiség bevezetését az a már említett tapasztalati tény indokolta, ami szerint a csőellenállás egyenesen arányos a cső hosszával és fordítottan arányos a cső átmérőjével:

$$\zeta_r = \lambda \cdot \frac{l}{d}. \quad (5.6)$$

A csősúrlódási tényezővel kör keresztmetszetű vezetékekre az 5.4. reláció alapján a súrlódási veszteséget a Darcy-Weissbach képlet adja:

$$h_r = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}, \quad (5.7)$$

mely egy kísérleti úton meghatározott empirikus formula. E képletet kisebb módosítással egyéb keresztmetszetű vezetékekre is lehet alkalmazni, ilyenkor a cső d átmérője helyett az R hidraulikus sugár négyeszeresét, az egyenértékű átmérőt kell venni.

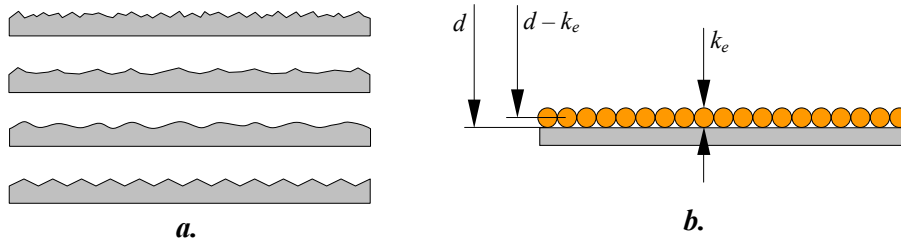
A csősúrlódási tényezőt newtoni fluidumok lamináris áramlásának esetében elméleti úton is ki lehet számítani. A Hagen-Poiseuille törvényből (4.64. egyenlet) értéke

$$\lambda = \frac{64}{Re}, \quad (5.8)$$

mely összefüggést Poiseuille-képletnek nevezik.

A fluidum turbulens áramlása mellett viszont már nem ennyire egyszerű a helyzet, a λ értékét adó összefüggéseket csak félig analitikus, félig empirikus módszerekkel, mérési eredmények alapján nyert adatok feldolgozásával lehetett megállapítani.

A mért adatok feldolgozásában a vezeték érdessége külön problémát jelentett, mivel a különböző anyagú és a különböző technológiai eljárásokkal gyártott csövek falérdessége más-más jellegzetességeket mutat. Nemcsak az egyenetlenségek átlagos magassága és szórása, hanem az egyenetlenségek geometriája is csőtípusonként változhat (5.4.a. ábra).



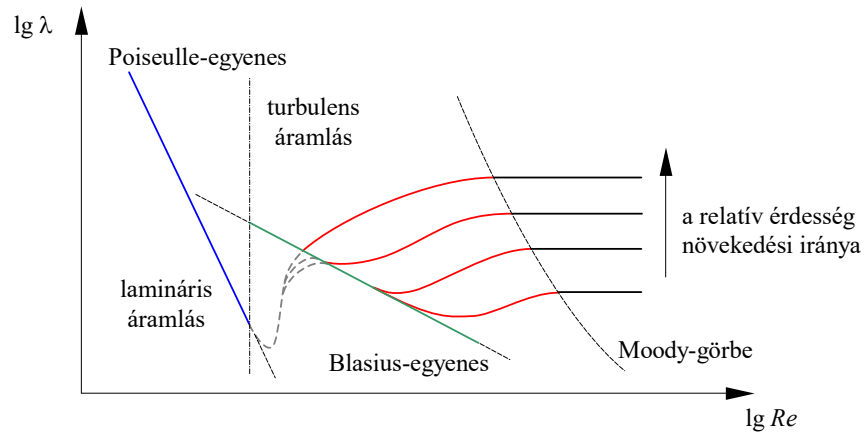
5.4. ábra. Különböző típusú természetes (a.) és a mesterséges falérdesség (b.)

E probléma megoldása az *egyenértékű* falérdesség bevezetése volt. Az egyenértékű falérdességet mesterségesen állítják elő olyan módon, hogy azonos k_e átmérőjű, gömb alakú szemcséket (például homokot) ragasztanak egy sima cső belső felületére. A szemcsék átmérőjét úgy kell megválasztani, hogy az így előállított mesterséges falérdességnek az áramlásra kifejtett hatása a tanulmányozott vezeték természetes érdességével azonos legyen. Megjegyzendő, hogy mivel szemcsék szorosan egymás mellé illeszkednek, a mesterséges falérdességgel rendelkező cső effektív belső keresztmetszete k_e -vel csökken. A szemcsék felragasztott fele az áramló fluidummal nem kerül kapcsolatba, ezért a szakirodalom néha az egyenértékű falérdességet a szemcséátmérő felének tekinti.

A mért adatok alapján egy logaritmikus skálájú $Re - \lambda$ grafikont lehet megrajzolni, a relatív falérdesség (a k_e / d) függvényében – ez a *Nikuradse-diagram*, mely minden newtoni fluidumra érvényes. E diagram vázlatát az 5.5. ábrán láthatjuk.

A Nikuradse-diagramon a λ csősúrlódási tényezőt kis Reynolds-számokra ábrázolva egy egyenes szakaszt kapunk, az elméleti 5.8. Poiseuille-képletnek megfelelően. Ez a szakasz a lamináris áramlást leíró Poiseuille-egyenest. Észrevehetjük, hogy a különböző relatív falérdességekre felrajzolt szakaszok fedik egymást, tehát lamináris áramlásnál λ független a cső érdességétől.

Nagyobb Reynolds-számoknál (2320 felett) az áramlás instabillá válik, véletlenszerűen turbulenssé, majd ismét laminárisra válhat. Nyugodt körülmények között (laboratóriumban) mérve λ görbéje egy hirtelen emelkedő szakaszt mutat. A gyakorlatban ilyenkor turbulens áramlással számítunk.



5.5. ábra. A Nikuradse-diagram vázlata

Turbulens áramlás esetében λ grafikonja több görbére szakad fel a relatív érdesség függvényében. E tény a lamináris alaprég és a csőérdesség kölcsönös viszonyával magyarázzák.

Amikor a csőfal egyenetlenségeit a lamináris alaprég takarja, a csövet hidraulikai (vagy hidrodinamikai) szempontból *simának* tekintik. A diagramon is látható, hogy a hidraulikailag sima csövek esetében λ nem függ a csőérdességtől. Ekkor λ ábrázolása egy újabb egyenes szakaszt eredményez, melyet Blasius-egyenesnek neveznek. Hidraulikailag sima csövek súrlódási tényezőjét adó Blasius-képlet a következő:

$$\lambda = \frac{0.3164}{\sqrt[4]{Re}}. \quad (5.9)$$

A simaság nyilván csak a Reynolds-szám egy bizonyos határértékéig tarthat, amikor az alaprég elvékonyodása miatt az egyenetlenségek csúcsai már a turbulens áramlás belsejébe kerülnek. A Blasius-egyenes tehát a relatív csőérdességnek megfelelően több görbére bomlik fel, λ grafikonja egy bizonyos

$$Re = 27 \cdot \left(\frac{d}{2 \cdot k_e} \right)^{8/7} \quad (5.10)$$

értéknél válik ismét görbévé.

A Blasius-egyenesen túl egy darabig a csősúrlódási tényező a Reynolds-számtól is függ, mivel a sebesség növekedésével egyre több érdességcsúcs kerül ki a turbulens áramlásba a fal mellett kialakuló viszkózus alaprétegből, befolyásolva a csősúrlódási tényező értékét. Ezt a tartományt *átmenetinek* nevezik (a cső *félérdes*) és felülről a Moody-görbe határolja le. A Moody-görbét az empirikus

$$Re = \frac{191.2}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{d}{2 \cdot k_e} \quad (5.11)$$

egyenlettel adhatjuk meg.

A Moody-görbén túl már minden érdességcsúcs a turbulens áramlás belsejében van, ekkor λ értéke gyakorlatilag állandó, a Reynolds-számtól független marad. Ekkor a csövet hidraulikai szempontból *éridesnek* nevezik.

A tapasztalat szerint tehát egy cső viselkedési tartományait a Reynolds-számnak az 5.6. ábrán látható értékei határolják le, melyeknek megfelelően λ -ra különböző összefüggéseket állapítottak meg.

Az áramlás állapota	turbulens			
Határértékek	0	2320	$27 \cdot \left(\frac{d}{2 \cdot k_e}\right)^{8/7}$	$\frac{191.2}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{d}{2 \cdot k_e}$
λ kiszámítására ajánlott összefüggések	Poiseuille	Prandtl-Kármán, Blasius	Colebrook-White, Altschul (Colebrook-White, Altschul)	Prandtl-Nikuradse, Schifrinson

5.6. ábra. A csősúrlódási tényező kiszámítására használt képletek

Lamináris áramlás esetében kör keresztmetszetű csövekre a Poiseuille-képletet használjuk. Más alakú keresztmetszetekre először meg kell határoznunk az elméleti sebességeloszlást, majd abból a hozamot, onnan pedig λ -t, a Poiseuille képlet levezetésének menetét követvén.

Turbulens áramlás esetében az általános érvényű összefüggések között a leggyakrabban használatosak egyike a Colebrook-White összefüggés, mely tulajdonképpen egy λ -ban megoldandó transzcendens egyenlet:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \lg \left(\frac{k_e}{3.71 \cdot d} + \frac{2.51}{Re} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right). \quad (5.12)$$

Ezt az összefüggést ilyen formában az átmeneti örvényesség tartományán (hidraulikailag félerdes csövekre) ajánlják. Hidraulikailag sima csövekre a

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \lg (Re \cdot \sqrt{\lambda}) - 0.80 \quad (5.13)$$

Prandtl-Kármán formula használatos, hidraulikailag érides csövekre pedig a Prandtl-Nikuradse képletet ajánlják, amely már egy explicit kifejezés:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \lg \frac{d}{k_e} + 1.74. \quad (5.14)$$

A Colebrook-White egyenlet az utóbbi két, levezetett összefüggést interpolálja: észrevehetjük, hogy a hidraulikailag sima csövekre a zárójelben levő első hányadost elhanyagolhatjuk – így a Prandtl-Kármán formulát kapjuk vissza, érides csövekre pedig a második hányados lesz elhanyagolható és így a Prandtl-Nikuradse képlethez jutunk. A Colebrook-White egyenletet a turbulens áramlás teljes tartományán használhatjuk, hiszen a zárójelben szereplő összeg két tagja közül, a Reynolds-szám függvényében, mindig csak a megfelelő tagok jutnak szerephez: kis Reynolds-számok esetében a második tag sokkal nagyobb lesz, mint az első, míg nagy Reynolds-számok esetében az első tag lesz a fontosabb.

A Colebrook-White összefüggésből λ -t csak a transzcendens egyenlet iteratív megoldásával lehet meghatározni. Ezt a feladatot kiküszöbölhetjük egy másik gyakrabban használt formula, az Altschul-képlet használatával, amely a csősúrlódási tényezőt explicit módon

$$\lambda = 0.11 \cdot \sqrt[4]{\frac{k_e}{d} + \frac{68}{Re}} \quad (5.15)$$

formában adja meg. Az így kapott érték és a Colebrook-White egyenlet megoldásával kapott eredmény közötti különbség általában nem jelentős, 2–3% alatt van.

A hidraulikailag sima és érdes csövekre az Altschul-képlet is egyszerűbb formákra hozható: sima csövekre az 5.9. Blasius képlethez jutunk, míg érdes csövekre a

$$\lambda = 0.11 \cdot \sqrt[4]{\frac{k_e}{d}} \quad (5.16)$$

Schiffrinson-képletet kapjuk.

A felsoroltakon kívül még számos más egyéb képlet és összefüggés létezik. Az 5.6. ábrán is feltüntetett határértékekhez még egy annyit illik hozzáfűzni, hogy a kézikönyvek egy része a formulák használhatósági tartományát a gyakoribb relatív érdességnek megfelelő Reynolds-számmal adják meg.

Megjegyzendő, hogy a gyakorlatban inkább az adott csőtípusnak és fluidumnak megfelelő, mérések alapján megállapított diagramokat használják, melyeket a gyártott átmérőkre rajzolnak meg. E diagramokon nem a csősúrlódási tényezőt ábrázolják, hanem az adott hozamnak megfelelő hidraulikus gradienst (J). E mennyiség a Reynolds-kísérletben használt berendezéshez hasonló eszközzel határozható meg, ahol a vízszintes csőszakasz két pontjához egy-egy piezométert csatlakoztatunk.

5.3. Helyi veszteségforrások

A hidraulikus berendezések különböző szerelvényekből, idomokból és az azokat összekötő egyenes csőszakaszokból állanak. Az áramlással szembeni súrlódási veszteségek a szakaszok hosszan eloszló (lineáris) veszteségek mellett ezeken a szerelvényeken és idomokon fellépő helyi (lokális) veszteségekből tevődnek össze.

A lokális veszteségek is az 5.4. képlettel számíthatók, ahol ezúttal a ζ tényező az adott szerelvényt jellemzi. E veszteségeket úgy tekintjük, mintha egy adott pontban lépnének fel.

Egy egyszerűsítő elv alapján a veszteségforrások nem befolyásolják egymást (ez egyébként csak egymástól eléggé távoli szerelvényekre igaz, amikor a közöttük levő távolság az átmérő harmincszorosánál nagyobb), tehát a ζ tényező csak az áramlási sebességtől függ. Ekképpen a vezetéken fellépő veszteséget a csőszakaszokon és a szerelvényeken fellépő veszteségek algebrai összegeként számíthatjuk:

$$h_r = \sum_i \frac{\zeta_i \cdot v_i^2}{2 \cdot g}, \quad (5.17)$$

ahol az i indexű tagok a két kontrollkeresztmetszet közötti egyenes szakaszokra és a lokális veszteségeket okozó szerelvényekre vonatkoznak.

Az egyenes szakaszokra vonatkozó tagokat az előbbi fejezetben felsoroltak alapján számíthatjuk. A lokális veszteségforrásoknál néhány egyszerűbb esetben a ζ tényező elméleti megfontolások alapján levezethető, egyébként azt csak kísérleti úton lehet meghatározni. A mérési eredmények feldolgozásának eredményei az empirikus képletek és a tényező értékének megállapítására használható diagramok.

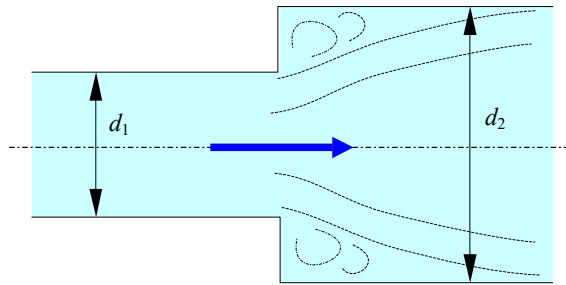
A továbbiakban tekintsünk néhány fontosabb esetet.

A hirtelen keresztmetszet növekedéssel jellemzett Borda-Carnot átmenet (5.7. ábra) esetén néhány egyszerűsítő hipotézis alkalmazásával az elméletileg levezetett veszteségi tényező

$$\zeta = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2, \quad (5.18)$$

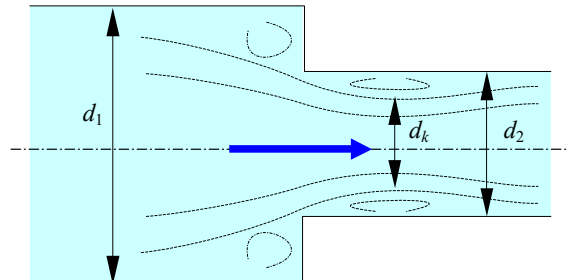
ahol A_1 és A_2 az átmenet előtti, illetve utáni keresztmetszet.

A Borda-Carnot veszteség egyik speciális formája a kilépési veszteség, amikor az állandó keresztmetszetű cső egy nagy térbe, például tartályba torkollik. Ilyenkor az A_2 keresztmetszet az A_1 -hez viszonyítva nagyon nagy, ζ értékére tehát 1-et kapunk.



5.7. ábra. Hirtelen keresztmetszet-növekedés (a Borda-Carnot átmenet)

Ha az előbbiekkal ellentétben a fluidum a fordított irányban áramlik, akkor hirtelen keresztmetszet-csökkenésről beszélünk (5.8. ábra).



5.8. ábra. Hirtelen keresztmetszet-csökkenés

A lezajló folyamat nem pontosan az előbbi fordítottja: most az áramlás a keresztmetszet csökkenése miatt felgyorsul, de amint az ábrázolt áramvonalakból is látszik, az áramlás keresztmetszetének tényleges beszűkülése nagyobb, mint a csőátmérőből számolható geometriai keresztmetszet-csökkenés. Ez a beszűkülés a Borda-Carnot átmenetnél hiányzik. Ezt a jelenséget az elméleti úton levezetett képlet az áramlás összehúzódását adó ε kontrakciós tényező bevezetésével veszi figyelembe:

$$\zeta = \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2, \quad (5.19)$$

ahol a kontrakciós tényező

$$\varepsilon = \frac{A_k}{A_2}, \quad (5.20)$$

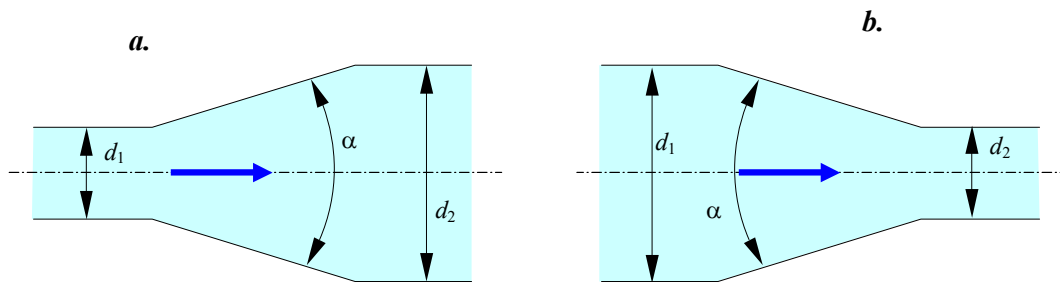
amelynek kiszámítására a szakirodalom néhány elméletileg megalapozott képletet is ajánl. A gyakorlatban elterjedtebb a

$$\zeta = 0.5 \cdot \left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right) \quad (5.21)$$

közelítő összefüggés.

A hirtelen keresztmetszet-csökkenés egy sajátágos esete a vezetékbe való belépés, például amikor a cső egy tartályhoz csatlakozik. Ebben az esetben A_1 az előbbi képletben nagyon nagy, a ζ veszteségi tényező értéke pedig 0.5 lesz.

A keresztmetszet változásának további esetei a fokozatos átmérőnövekedésű diffúzor és a fokozatos átmérőcsökkenést biztosító konfúzor (5.9. ábra). Esetükben a veszteségi tényezőt empirikus képletekkel számítják vagy diagramokból olvassák le az átmérők és a kúpos illesztés α szögének függvényében.



5.9. ábra. Diffúzor (a.) és konfúzor (b.)

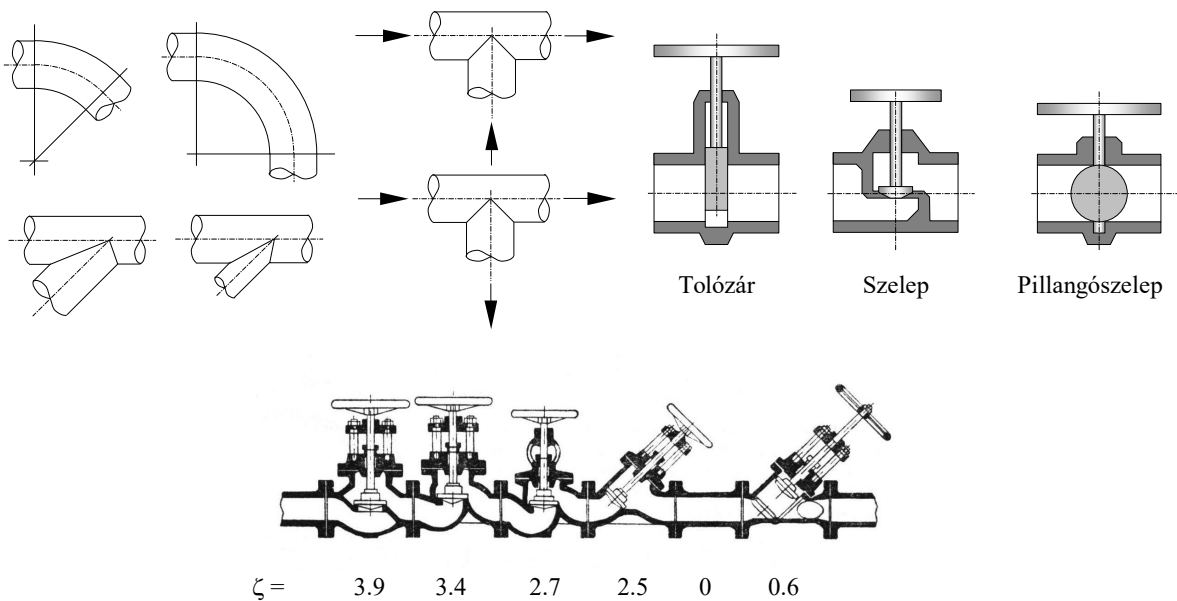
A felsorolt esetekben a vezeték átmérője – és ezzel együtt az áramlás sebessége – megváltozott. Ekkor az 5.4. képletben szereplő v sebesség egyezményesen a veszteséget okozó szerelvényből kilépő fluidum sebessége.

Az áramlás irányát megváltoztató idomok (csőívek, könyökök), a hozamot szabályozó eszközök (szelepek, csapok, tolózárak), az áramlásba helyezett rácsok és sziták, a csőtoldatok, diafragmák stb. veszteségi tényezőjét laboratóriumi körülmények között mérésrel határozzák meg (5.11. ábra).

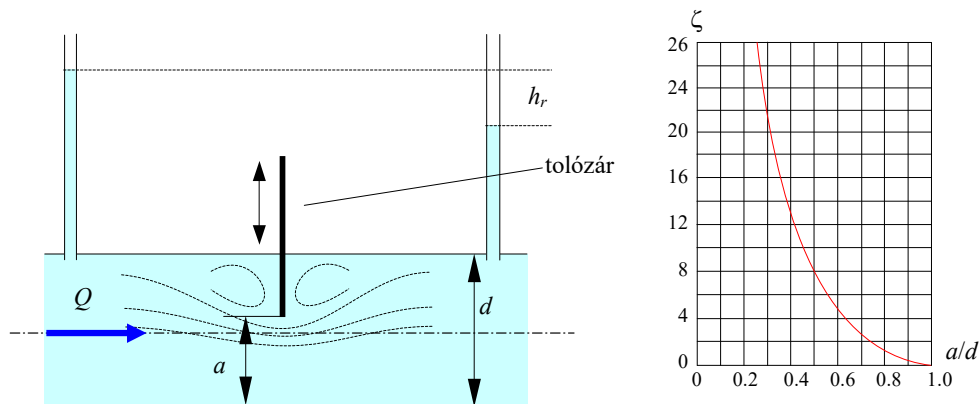
ζ -t a hozamnak (vagy az áramlási sebességnek), az adott idom átmérőjének és egyéb geometriai jellemzőinek (például az irányváltás szöge, az átmérőcsökkenés mértéke, hozamszabályzó berendezéseknél az keresztmetszet-beszűkítés foka), a hozamelosztó berendezéseknél a hozamok arányának függvényében táblázatba foglalják vagy grafikusán ábrázolják. A hozam elosztását vagy hozamok egyesítését létrehozó elágazások veszteségi tényezőjét az ágakra külön állapítják meg.

A hozam és az áramlási sebesség e diagramokon nem mindig szerepel. A sebesség figyelembe vétele azért esetleges, mert a hidraulikus berendezéseket rendszerint az érdes turbulencia tartományában méretezik, ahol ζ független a sebességtől. Az említett méretezési módszert gazdasági szempontok indokolják: a kisebb átmérők esetében a veszteségek ugyan növekednek, de

a beruházás költsége csökken. A gazdaságos átmérőt a berendezés tervezett élettartamára számított összköltség (ez a beruházás költségének és a működtetés költségének összege) minimuma adja.



5.10. ábra. Különböző idomok és szerelvények



5.11. ábra. Súrlódási veszteség meghatározása méréssel (tolózár)

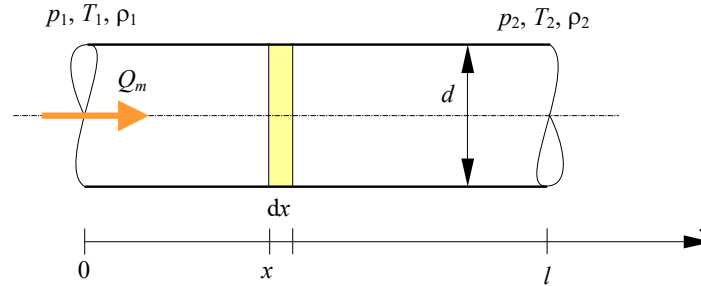
5.4. Gázvezetékek

Az előbbieken feltételeztük, hogy a vezetékben áramló közeg tulajdonságai állandóak, azaz nem változnak a vezeték mentén. E hipotézisnek a helyessége folyadékok esetén könnyen belátható, hiszen a folyadékok gyakorlatilag összenyomhatatlanok és a gyakorlati esetek többségében a hőmérsékletük sem változik az áramlás során (a hőmérséklet növekedése a sűrűség és a viszkozitás csökkenését eredményezi, mindkét mennyiség szerepel a veszteségek kiszámításában).

A közeg tulajdonságainak állandóságát az egyébként összenyomható gázok esetében is elfogadják amennyiben a vezetékben a nyomás, illetve a sűrűség változása nem túl jelentős: a szakirodalom a megengedhető változás felső határértékét 2...10 %-ban állapítja meg; minél nagyobb e változás, annál nagyobbak lesznek a számítási hibák is.

A közeg (gáz) jelentősebb állapotváltozását már nem lehet figyelmen kívül hagyni, szükségessé válik tehát a kompresszibilis fluidum áramlására vonatkozó összefüggések felírása. Tekintsünk egy állandó keresztmetszetű vezetékot, amelyben egy gáz áramlik stacionárius körülmények között (5.12. ábra). Az átáramló gáz mennyiségét a térfogat megváltozása miatt a Q_m tömeghozammal célszerű megadni. Az áramlás során a gáz nyomása megváltozik és ennek a változásnak a következő okai lehetnek:

- a szintkülönbség (a helyzeti energia megváltozása), melynek hatása elhanyagolható a gáz alacsony sűrűsége miatt;
- a gáz hőmérsékletének megváltozása;
- a viszkozitás miatti nyomásesés (ennek során az áramló gáz energiájának egy része hővé alakul át, tehát a gáz hőmérséklete megváltozhat).



5.12. ábra. Gázvezeték

Amennyiben felírjuk a vezeték dx hosszúságú szakaszában levő gázmennyiség egyensúlyát, akkor a következő egyenlethez jutunk:

$$-dp = \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot \frac{\lambda \cdot dx}{d} + \frac{dm \cdot a}{A}, \quad (5.22)$$

ahol a jobb oldalon az első tag a csősúrlódási miatti veszteség (amelyet a folyadékokra megállapított képlettel adunk meg), a második tag pedig a $dm = \rho \cdot Q_m \cdot dx / v$ tömegű gáz gyorsításához szükséges erőből származó nyomásváltozást jelenti; $A = \pi \cdot d^2 / 4$ a vezeték belső keresztmetszete. Mivel a gáz sűrűsége alacsony, a második tagot el lehet hanyagolni és így a nyomásváltozást teljes egészében a súrlódási veszteségeknek tulajdoníthatjuk. A mínusz előjel azért szükséges, mert a veszteségek a gáz nyomását csökkentik.

A fenti képletben az áramlási sebességet (tulajdonképpen annak a cső keresztmetszetén számított átlagát) megadhatjuk a tömeghozam segítségével:

$$v = \frac{Q_m}{\rho \cdot A}, \quad (5.23)$$

a gázt pedig ideálisnak tekintve sűrűségét a Clapeyron-Mendeleejev egyenletből a nyomás függvényében fejezzük ki:

$$\rho = p \cdot \frac{\mu}{R \cdot T}, \quad (5.24)$$

ahol T a gáz abszolút hőmérséklete, μ a móltömege és R az egyetemes gázállandó. Ezen észrevételekkel és kifejezésekkel a nyomásváltozást adó reláció a következőképpen alakítható tovább:

$$-dp = \frac{Q_m^2 \cdot R \cdot T}{2 \cdot p \cdot \mu \cdot A^2} \cdot \frac{\lambda}{d} \cdot dx. \quad (5.25)$$

Ez a képlet a dx hosszúságú szakaszon érvényes. A tagok átrendezése után a vezeték teljes hosszára vonatkozó képletet az előbbi integrálásával kapjuk:

$$-\int_{p_1}^{p_2} p \, dp = \int_0^l \frac{Q_m^2 \cdot R \cdot T}{2 \cdot \mu \cdot A^2} \cdot \frac{\lambda}{d} \, dx, \quad (5.26)$$

ahol p_1 a vezeték kezdetén, p_2 pedig annak végén mérhető nyomás. Beláthatjuk, hogy ebben az integrál-kifejezésben nemcsak a nyomás, hanem a hőmérséklet és a λ csőszűrlődési tényező is változó mennyiség lehet. λ az eddigiek alapján a Reynolds-féle szám és a relatív falérdesség függvénye, a Reynolds-számot pedig a tömeghozam felhasználásával

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{Q_m \cdot d}{\rho \cdot A \cdot \nu_k} = \frac{Q_m \cdot d}{A \cdot \eta} \quad (5.27)$$

formában is kifejezhetjük. Az 1. fejezetben leírtak szerint az η dinamikai viszkozitás a hőmérséklet függvénye, a nyomás változása csak elhanyagolható módon befolyásolja annak nagyságát, tehát az 5.26. egyenlőség jobb oldali integrálja alatti kifejezés csak a hőmérséklet szerint változik. Ezen integrál kiszámításával egy

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = \frac{Q_m^2 \cdot R \cdot l}{2 \cdot \mu \cdot A^2 \cdot d} \cdot \int_{T_1}^{T_2} T \cdot \lambda(T) \, dT \quad (5.28)$$

kifejezéshez jutunk. Ha azonban elfogadjuk azt a hipotézist, mi szerint az állandó átmérőjű vezeték mentén a hőmérséklet lineárisan változik és λ egy átlagokkal számolt értékével helyettesíthető, akkor egy egyszerűbb egyenlethez jutunk:

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = \frac{Q_m^2 \cdot R \cdot l}{2 \cdot \mu \cdot A^2 \cdot d} \cdot \bar{\lambda} \cdot \frac{T_1 + T_2}{2} \quad (5.29)$$

($\bar{\lambda}$ -t, jobban mondva a hozzá vezető 5.27. Reynolds-számot a hőmérséklet $(T_1 + T_2)/2$ átlagával számoljuk). A jobb oldalon a számlálót és a nevezőt egyaránt ρ_1^2 -tel beszorozva:

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = \frac{Q_m^2 \cdot R \cdot l}{2 \cdot \mu \cdot A^2 \cdot d} \cdot \bar{\lambda} \cdot \frac{T_1 + T_2}{2} \cdot \frac{\rho_1^2}{\rho_1^2}, \quad (5.30)$$

az 5.23. és az 5.24. relációk felhasználásával pedig:

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2 \cdot p_1} = \bar{\lambda} \cdot \frac{l}{d} \cdot \rho_1 \cdot \frac{v_1^2}{2} \cdot \frac{T_1 + T_2}{2 \cdot T_1}, \quad (5.31)$$

mely összefüggéssel tehát a nyomásesés meghatározható.

A gyakorlatban a hőmérsékletet jó közelítéssel állandónak tekintik, hiszen a csőfalán keresztül történő hőátadással az áramló gáz leadja a szűrlődés miatt termelődő hőt. Ekkor a Reynolds-szám és λ is a vezeték mentén gyakorlatilag állandó értékkel szerepel, az előbbi egyenlet pedig tovább egyszerűsödik:

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2 \cdot p_1} = \bar{\lambda} \cdot \frac{l}{d} \cdot \rho_1 \cdot \frac{v_1^2}{2}. \quad (5.32)$$

Ezen elméletileg levezetett képlethez hasonló a gázvezetékek méretezésére javasolt fél-empirikus Renouard-képlet:

$$p_1^2 - p_2^2 = k \cdot \delta \cdot l \cdot Q_V^{1.82} \cdot d^{-4.82}, \quad (5.33)$$

ahol $\delta = \rho_{\text{gáz}} / \rho_{\text{levegő}}$ a gáznak a standardállapotú levegőhöz viszonyított relatív sűrűsége, Q_V a gáz standardállapotra átszámított térfogathozama, k pedig a használt mértékegységektől (valamint a gáz és a vezeték minőségétől és a hőmérséklettől) függő együttható.

Ugyancsak az elméleti képlethez hasonló a hazai gyakorlatban használt formula:

$$Q_V = 4.191 \cdot \sqrt{\frac{(p_1^2 - p_2^2) \cdot d^5}{T \cdot l \cdot \delta \cdot \lambda}}, \quad (5.34)$$

ahol a standardállapoton a nyomás $p = 1 \text{ atm} = 0.1013 \text{ MPa}$ és a hőmérséklet $t = 15 \text{ }^\circ\text{C}$ ($T = 288.15 \text{ K}$) értékét értjük. A hozamot m^3/h -ban, a nyomást bárban, az átmérőt centiméterben, a hőmérsékletet Kelvinben, a vezeték hosszát pedig kilométerben kell megadnunk. λ -t a Colebrook-White összefüggéssel számoljuk.

5.5. Csatornák

A csatornában a folyadék áramlása nyílt, szabad felszínű, a felszín felett rendszerint levegő van. A csatornák lehetnek nyitottak vagy zártak. Csatornának tekintjük azokat a csöveket is, amelyeket az áramló folyadék ugyan teljesen kitölt, de a keresztmetszet legmagasabb pontjában a relatív hidrosztatikai nyomás zéró (amikor a keresztmetszet éppen megtelik, tehát az áramlás nem a nyomáskülönbség következménye).

A csatornában a nedvesített kerület a fent említett kivételtől eltekintve kisebb, mint a nedvesített keresztmetszet kerülete (5.3. ábra).

Az áramló folyadék nemcsak a csatorna falaival, hanem a felszín feletti levegővel (vagy egyéb gázzal) is érintkezik: nyugvó légkörben az áramló folyadék a felszín feletti levegőt is magával ragadja, áramlási sebességük a folyadék felszínén azonos lesz. A jelenség kölcsönös: a szabad felszín feletti áramló levegő befolyásolhatja a folyadékáramot, így az nyugvó folyadékban is áramlatot gerjeszthet. A lejátszódo folyamat tehát meglehetősen bonyolult, de a számításokban a felszín feletti gáz hatásától rendszerint eltekintünk.

A csatornák méretezésének esetében nem a hidraulikai veszteség meghatározása, hanem az adott dőlésű és keresztmetszetű csatornában áramló hozam vagy az áramlási sebesség kiszámítása az elsődleges cél. E feladatokban a zárt vezetékekkel szemben a nedvesített keresztmetszet a hozam függvénye.

A legegyszerűbb stacionárius áramlás esetében egy állandó dőlésű és keresztmetszetű a csatorna hossza mentén a folyadék mélysége is állandó lesz, tehát a szabad felszín dőlése a csatorna dőlésével azonos. Ez esetben az áramlás sebessége a csatorna hosszában nem változik, ezt a típusú áramlást *egyenletesnek* mondják (ellentétes esetben a *mozgás változó*).

A szintkülönbséget és az átlagos áramlási sebességet most is a Darcy-Weissbach képlet köti össze, ahol a d átmérőt a hidraulikus sugár négyzerezésével kell helyettesítenünk. A gyakorlatban azonban egy másikfajta képlet használata terjedt el, ez pedig a Chézy-formula:

$$v = C \cdot \sqrt{R \cdot J}, \quad (5.35)$$

ahol az R hidraulikus sugár az 5.2. hidraulikus átmérő negyede (definíció szerint a folyadék-keresztmetszet és a nedvesített kerület hányadosa: $R = A/K$), C pedig a Chézy-együttható. A

képletet szemrevéve azonnal megállapíthatjuk, hogy C , λ -tól eltérően, nem egy dimenzió nélküli szám.

Ismervén a J hidraulikus gradiens és a h_r szintkülönbség közötti

$$h_r = J \cdot l \quad (5.36)$$

összefüggést, a Chézy-képletből a

$$h_r = \frac{1}{C^2} \cdot \frac{l}{R} \cdot v^2 \quad (5.37)$$

relációhoz jutunk, amelyet a Darcy-Weissbach képlettel egybevetve (ahol $d = 4 \cdot R$) megállapítható a C és a λ mennyiségek közötti kapcsolat:

$$C = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g}{\lambda}}. \quad (5.38)$$

A Chézy-együttható meghatározására több képlet is létezik, a legelterjedtebb a Manning-formula:

$$C = \frac{1}{n} \cdot R^y, \quad (5.39)$$

ahol a hatványkitevő $y = 1/6$. A képletben szereplő n a csatorna *érdességi együtthatója*, amely egy kísérletileg meghatározott érték, nagysága a használt mértékegységektől is függ.

A Manning-képlet és annak korrigált formái csak a turbulens áramlásokra igazak. Kevésbé ismert, de általánosabb és pontosabb a Powell-formula, mely a Colebrook-White formulához hasonlóan szintén egy implicit egyenlet:

$$C = -23 \cdot \lg \left(\frac{\Delta}{R} + \frac{C}{3.3 \cdot Re} \right). \quad (5.40)$$

Itt Δ a csatorna falának érdessége (az egyenetlenségek átlagos magassága). Ez a képlet ebben a formában általános érvényű, de tulajdonképpen csak félerdes csatornákra javasolják. Hidraulikailag sima falak esetében az összeg első tagját, míg hidraulikailag érdes falak esetében a második tagját hagyhatjuk el.

Létezik egy C -t közvetlenül megadó, általános érvényű White-Colebrook képlet is:

$$C = 18 \cdot \lg \frac{6 \cdot R}{\delta + \frac{\Delta}{7}}, \quad (5.41)$$

ahol δ a lamináris alapréteg vastagsága:

$$\delta = \frac{12 \cdot v_k}{\sqrt{g \cdot R \cdot J}}. \quad (5.42)$$

Lamináris áramlás esetében λ -t ugyanúgy állapíthatnánk meg, mint a csövek esetében, majd a 5.38. képlettel C -t is megkaphatnánk. A gyakorlatban viszont csatornában lamináris áramlással csak ritkán találkozunk, a lassú áramlás miatt pedig a szabad felszín ilyenkor közel vízszintes lesz.

A csatorna irányváltásai, keresztmetszet változása, a csatornán elhelyezett műtárgyak (sziták, rácsok, szabályzó-szerkezetek) helyi szintkülönbség-eséseket okoznak, melyet – akárcsak a nyomás alatt működő vezetékek esetében – empirikus képletekkel vagy mért adatok alapján összeállított

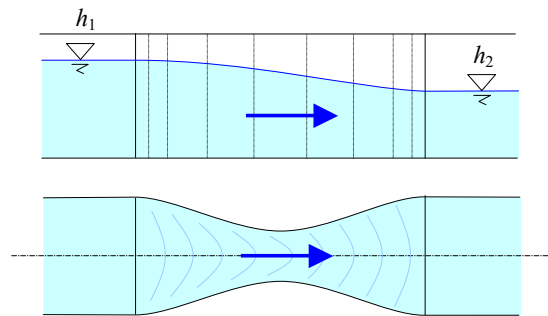
táblázatokkal vagy grafikonokkal lehet megállapítani. A szintkülönbséget a lokális ζ ellenállási tényezővel is meg lehet adni.

E helyi ellenállások közül különösebb fontossággal bírnak a különböző mérőbukók és a Venturi-csatorna, ugyanis a mérhető szintkülönbségből az áramló folyadék hozama közvetlenül megállapítható.

A Venturi-csatorna (5.13. ábra) egy olyan vízszintes, téglalap keresztmetszetű csatorna-szakasz, melynek keresztmetszete egy adott helyen beszűkül. A szűkületben az áramlási sebesség megnő és pont úgy, mint a Venturi-cső esetében, a hidrosztatikai nyomás csökkenését tapasztaljuk. Mivel ez esetben az áramlás szabad felszínű, a nyomáscsökkenést szintváltozásként észleljük. A Δh szintkülönbséggel a csatorna hozamát egy

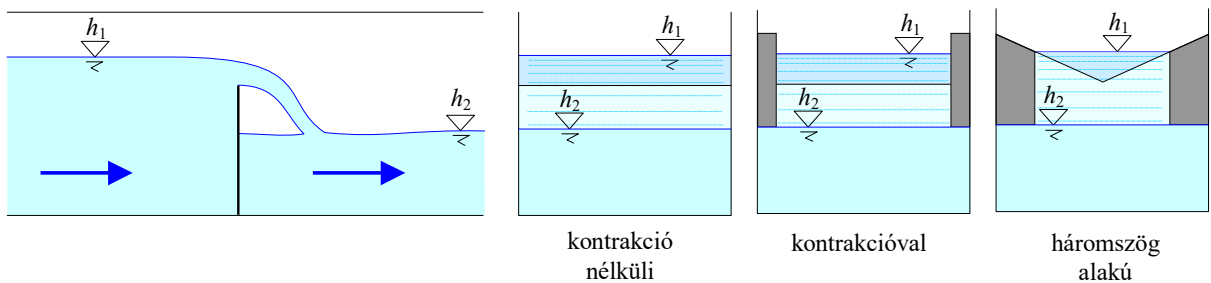
$$Q = \mu \cdot A \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h} \quad (5.43)$$

formájú képlet adja, ahol A a duzzasztott oldal felőli nedvesített keresztmetszet, μ pedig a Venturi-csatorna hozamállandója. Levezetésében a hozamot a keresztmetszet és az átlagos áramlási sebesség szorzataként számítjuk, mint a szifonok esetében (4.79. összefüggés), mely mennyiséget a μ tényezővel korrigálunk.



5.13. ábra. Venturi-csatorna

A bukók az áramlás útjába tett különböző akadályok, mely felett az áramló folyadék átbukik. Az akadály formájától függően több típusukat különböztetjük meg, a mérőbukók azonban az áramlás útjára merőlegesen elhelyezett vékony lapokból állanak (5.14. ábra) – az ilyen típust *élesszélűnek* nevezik.



5.14. ábra. Különböző típusú élesszélű bukók

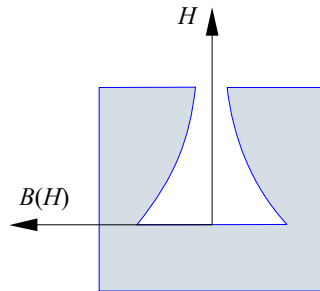
A bukó pereme (a *bukóél*) lehet a bukó alatti folyadékszint (*alvízszint*) felett vagy alatt, ez utóbbi esetben a bukó *fojtott*.

A nem fojtott bukó hozama a bukó feletti folyadékszint (*felvízszint*) és a bukóél peremének szintje közötti különbségtől (H) és az átömlés keresztmetszetétől (A) függ. A hozamot adó képlet a Venturi-csatorna képletével azonos alakú:

$$Q = \mu \cdot A \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H}, \quad (5.44)$$

ahol μ a bukó hozamállandója. E formulát gyakran Poleni - Du Buat képletnek nevezik. A μ hozamállandót különböző empirikus összefüggések adják.

Fojtott bukók esetében az alvízszintet is számításba kell venni, éppen ezért hozammérésre a nem fojtott bukót részesítik előnyben.



5.15. ábra. Proporciónális bukó nyílása

A hozam képletében az A felületet a H magasság segítségével is kifejezhetjük. Egy téglalap nyílású bukó esetében így egy olyan összefüggéshez jutunk, mely szerint a hozam $H^{3/2}$ hatványával arányos. Ez az arányosság a hozam mérésének szempontjából előnytelen, előnyösebb lenne, ha a hozam a H magassággal egyenes arányban állna, hiszen a hozam nagyságát e magasság mérésével tudjuk megállapítani:

$$Q = c \cdot H = \mu \cdot A \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \quad (5.45)$$

(itt c egy arányossági tényező).

E feltételből következik, hogy az A felület \sqrt{H} -val kell arányos legyen, innen megállapíthatjuk, hogy a folyadék felszínén a bukó nyílásának $B(H)$ szélessége $1/\sqrt{H}$ -val arányos. Így egy parabolaívvel lehatárolt felülethez jutunk. A parabolaívet szimmetrikusan megosztjuk, az így kapott bukót pedig proporciónálisnak vagy lineárisnak nevezzük (5.15. ábra).

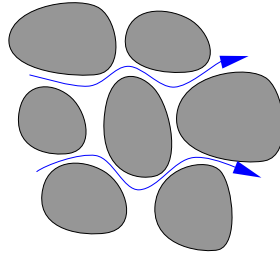
5.6. Szivárgás porózus közegekben

A műszaki gyakorlatban és a természetben gyakran találkozhatunk olyan jelenségekkel, amidőn a folyadékok és gázok egy porózus (szemesés, likacsos) közegeken hatolnak át (5.16. ábra). Ilyen jelenség játszódik le például a gázok szűrésének folyamatában, amikor port, nedvességet vagy bizonyos komponenseket kötünk meg egy szűrő segítségével. Hasonló folyamat a víz és a hidraulikai munkafolyadékok szűréssel történő tisztítása vagy a talajvíz szivárgása.

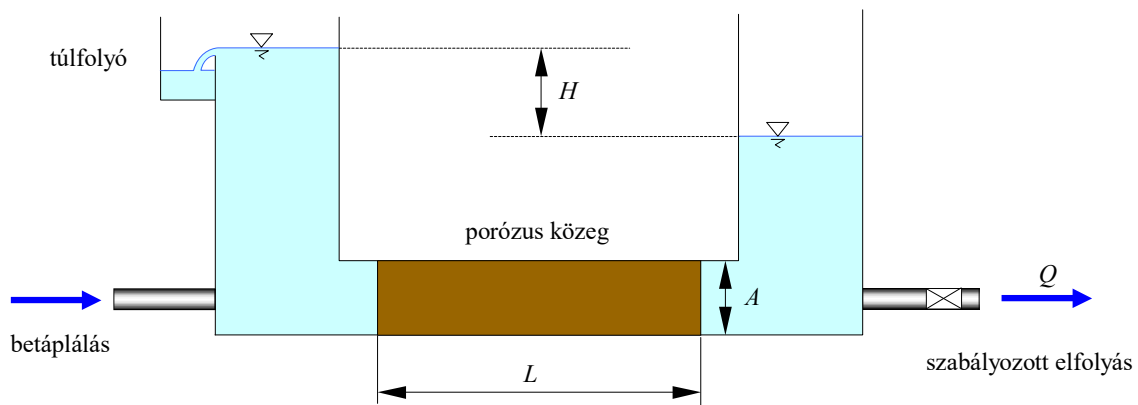
A pórússal közegen az illető fluidum át tud hatolni (szivárog), de az egy bizonyos ellenállást fejt ki az áramlással szemben. Ennek az ellenállásnak, az általa okozott veszteségnek mérésére a 5.17. ábrán látható berendezés szolgál.

A berendezés egy vízszintes csőszakaszból áll, amelyet a tanulmányozott pórússal anyag tölt ki. A cső két tartály között van, amelyek közül a bal oldaliban a folyadékszint állandó. A pórússal közegen egy állandó Q hozam szivárog keresztül, amelyet az elfolyócsőre szerelt csap szabályoz.

A kísérlet célja a két tartály közötti H nyomásszint-különbség és a Q hozam közötti összefüggés tanulmányozása.



5.16. ábra. Fluidum szivárgása egy közeg pórusaiban



5.17. ábra. Darcy kísérlete

A kísérlet eredményei szerint kis szivárgási sebességeknél a

$$J = \frac{H}{L} \quad (5.46)$$

hidraulikus gradiens és a

$$v_s = \frac{Q}{A} \quad (5.47)$$

szivárgási sebesség egymással egyenes arányban állanak:

$$v_s = k \cdot J. \quad (5.48)$$

A k arányossági tényező a közeg és az áramló folyadék fizikai tulajdonságaitól egyaránt függő permeabilitási (vagy szivárgási) együttható, az 5.48. összefüggés pedig Darcy törvénye, egydimenziós áramlásra megállapított formájában.

A v_{sz} szivárgási sebesség nem a fluidum áramlási sebessége, ugyanis a térfogathozamot az anyag által részben kitöltött felülettel osztottuk el.

A likacsos közeget jellemző *porozitás* (vagy pórusosság) a pórusok térfogatának az anyag térfogatához viszonyított aránya:

$$n = \frac{V_p}{V_t}, \quad (5.49)$$

amely egy kísérletileg megállapított mennyiség.

A szilárd szemcsék felületén stabilan megkötődő fluidum miatt a szivárgásban a pórusok térfogatának csak egy része vesz részt, melyet az effektív porozitás jellemez:

$$n_e = \frac{V_{pe}}{V_t} \leq n. \quad (5.50)$$

Az effektív porozitás ismeretében a fluidum áramlásának valódi sebessége megközelítőleg

$$v \approx \frac{v_{sz}}{n_e} \quad (5.51)$$

és mivel $n_e < 1$, a v áramlási sebesség mindig nagyobb a v_{sz} szivárgási sebességnél. Az áramlási sebesség az esetek túlnyomó részében igen-igen alacsony, tehát ha a szivárgó fluidum egy áramvonalára felírnánk a Bernoulli-egyenletet, akkor a kinetikus energiának megfelelő tagot nyugodtan mellőzhetnénk.

Az általánosított Darcy-törvény a fenti hidraulikus gradiens térbeli kifejezéséből származik:

$$v_{sz} = k \cdot \left(-\frac{\partial H}{\partial s} \right), \quad (5.52)$$

ahol a ds infinitezimális hosszúságú szakasz a szivárgási vonalhoz tartozik. A mínusz előjel azt veszi figyelembe, hogy a sebesség a csökkenő gradiens irányába mutat. Mivel a sebességvektor a szivárgási vonalhoz érintőlegesen, a fenti összefüggés alapján az általánosított Darcy-törvény

$$\mathbf{v}_{sz} = [\mathbf{k}] \cdot \text{grad}(-H) \quad (5.53)$$

lesz, ahol $[\mathbf{k}]$ az arányossági tényezőket magába foglaló permeabilitási mátrix. Darcy törvényének érvényessége mellett a szivárgás tehát potenciális.

Ha a porózus közeg permeabilitása irányfüggő (nem izotróp), akkor e mátrixnak hat egymástól független eleme van (a kettős indexű tagok páronként egyenlők):

$$\begin{aligned} v_x &= -k_x \cdot \frac{\partial H}{\partial x} - k_{xy} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} - k_{xz} \cdot \frac{\partial H}{\partial z}, \\ v_y &= -k_{yx} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} - k_y \cdot \frac{\partial H}{\partial y} - k_{yz} \cdot \frac{\partial H}{\partial z}, \\ v_z &= -k_{zx} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} - k_{zy} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} - k_z \cdot \frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

A Darcy-törvény csak a szivárgó newtoni fluidum lamináris áramlásának esetén érvényes, amelyet a v effektív sebességgel kiszámított Reynolds-szám határoz meg. Turbulens szivárgás esetén a 5.48. összefüggés helyett a

$$v_{sz} = k \cdot \sqrt{J} \quad (5.55)$$

képlet bizonyult helytállónak, tehát a veszteség a sebesség négyzetével arányos – akárcsak a csővezetékek esetében.

5.7. A közegellenállás és a határréteg

Az áramló fluidumba helyezett vagy a nyugvó fluidumban mozgó testre a közeg kétféleképpen hat. A test felületén fellép a fluidum viszkozitásából eredő súrlódási erő (ezt *súrlódási ellenállásnak* mondják), de ugyanakkor a közeg nyomásából származó erő is fog hatni rá. Ez utóbbi inkább a test alakjával áll szorosabb összefüggésben, s ezért *alakellenállásnak* nevezik.

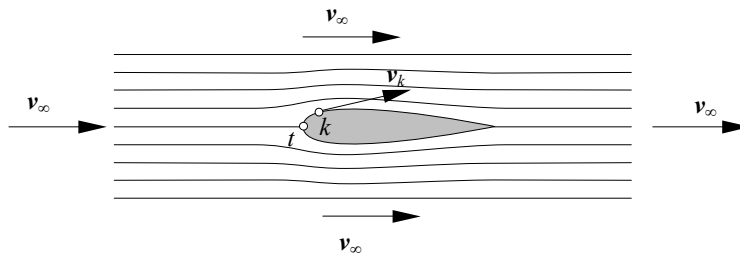
A test és az áramló fluidum kölcsönhatásából származó erőnek két komponensét szokták megkülönböztetni: a sebességvektorral ellentétes irányba mutató ellenálló erőt és az arra merőleges irányú komponensét.

A közegnek azt a hatását, amely a test hozzá viszonyított sebességét csökkenteni igyekszik, *közegellenállásnak* nevezzük. Amikor a közegellenállást túlnyomó részben a súrlódási ellenállás teszi ki, akkor az illető testet *áramvonalasnak* nevezik.

A sebességvektorra merőleges, felfele irányuló komponens (*hidro- vagy aero-*) *dinamikai felhajtóerő* vagy emelőerő néven ismeretes (ez nem azonos az Archimédész-féle hidrosztatikai felhajtóerővel), illetve, ha az lefele mutat, akkor *leszorító erőnek* nevezik.

Ha néhány hétköznapi példával szeretnénk mindezt szemléltetni, akkor elmondhatjuk, hogy a közegellenállást bárki észlelheti, ha egy vízzel teli medencében próbál gyalogolni; a szárnyakra ható felhajtóerőt a repülőgépek, a légtelőrre ható leszorítóerőt pedig a versenyautók hasznosítják.

A jelenség tanulmányozásához tekintsük az 5.18. ábrán látható inkompresszibilis és súrlódásmentes könnyű fluidum zavartalan párhuzamos áramlásába helyezett testet.



5.18. ábra. Körüláramlott test

A zavartalan áramlásban, tehát a testtől nagyon távol, a közeg áramlási sebessége v_∞ , nyomása pedig p_∞ . A test felületének valamely k pontjában a sebességvektor e felülethez érintőlegesen lesz, nagyságát pedig jelöljük v_k -val. E pontban a nyomás p_k .

A Bernoulli-egyenletet a k ponton átmenő áramvonalra felírva a felsorolt feltételek mellett a következő relációhoz jutunk:

$$\frac{p_\infty}{\gamma} + \frac{v_\infty^2}{2 \cdot g} = \frac{p_k}{\gamma} + \frac{v_k^2}{2 \cdot g}. \quad (5.56)$$

A t torlópontban a sebesség zéró, a hidrosztatikai nyomás itt éri el legnagyobb értékét. Az általános helyzetű k pontban csupán a Bernoulli-egyenletből v_k és p_k nem határozható meg, azt viszont már most megállapíthatjuk, hogy a test felületén a hidrosztatikai nyomás az áramlási sebesség függvénye lesz.

A testre ható erőt egy áramcsőre felírt impulzustétellel határozzuk meg. Az áramcső felületét párhuzamos áramvonalak alkotják. A tanulmányozott test az áramcső belsejében van, felülete része az áramcső határfelületének. Mivel az áramcső két végén a sebesség egyaránt v_∞ és a nyomás p_∞ ,

az impulzustételből az fog következni, hogy az inkompresszibilis közeg súrlódásmentes áramlásába helyezett testre nem hat semmiféle erő – ez a megállapítás a d'Alambert-féle paradoxon.

A valóságos áramlások esetében a viszkozitás miatt a test közelében levő áramvonalak mentén az 5.56. Bernoulli-összeg csökken, minek következtében a tekintett áramcső kijáratánál a sebesség és elvileg a nyomás is különbözni fog a v_∞ , illetve a p_∞ értékektől, más szavakkal egy *áramlási nyom* keletkezik. A nyomás változása azonban elegendően nagy szabad áramlási keresztmetszet mellett elhanyagolható, így a test hatása csak az áramlási sebesség megváltozásában fog megnyilvánulni. Az impulzustételből következően ekkor a test egységnyi vastagságú keresztmetszetére a

$$F_k = \rho \cdot v_\infty \cdot \Gamma \quad (5.57)$$

nagyságú erő fog hatni, ahol Γ a sebességvektornak a keresztmetszet körvonalán számított cirkulációja. Ez a reláció a Zsukovszkij-féle tétel. E számítási eljárás feltételezi, hogy a test körüli áramlás lamináris. A valóságban ez a feltétel csak igen kicsi áramlási sebességek esetében teljesül. Nagyobb sebességeknél az áramlás turbulenssé válik, az áramlási nyomot jól elkülönülő örvények alkotják és a közegellenállás erőteljes növekedését tapasztaljuk.

A jelenséget a test körül kialakuló határréteg viselkedésével magyarázzuk. E határréteg, amint már említettük, a szilárd felszín közelében mindig lamináris. Közvetlenül a szilárd felszín felett az áramlási sebesség zéró (a fluidum hozzátapad a felszínhez), az áramlás belseje fele pedig fokozatosan növekszik. A test áramlásra kifejtett hatása elméletileg csak végtelen nagy távolságban szűnne meg, gyakorlatilag azonban az a távolság növekedésével rohamosan csökken. Ezért a határréteg vastagságának azt a δ távolságot értjük, amelyen az áramlási sebesség lényegesen különbözik a v_∞ értéktől (egyezményesen a határréteg felületén az eltérés 1%).

Nagyobb áramlási sebességek esetében a lamináris határréteg elvékonyodik és felette egy örvénylő réteg jelenik meg. A végtelen nagy áramlási keresztmetszet esetén az örvénylő réteg szintén a v_∞ sebesség fele vezető átmenetet alkotja, tehát az szintén a határréteghez tartozik; a lamináris réteget ekkor *viszkózus alapréteg*nek nevezik.

A határrétegben áramló fluidum mennyisége az áramlás irányában folyamatosan nő, hiszen a viszkozitás miatt egyre nagyobb mennyiségű fluidumra hat a szilárd fal fékező hatása. E jelenség következményeként a határréteg az áramlás irányában, a torlópontról kezdve megvastagodik.

A sebesség és a nyomás határrétegbeni változásának elméleti meghatározásakor a 4.44. Navier-Stokes egyenletekből indulunk ki. Két dimenzióra felírva azok:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} &= f_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_k}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + v_k \cdot \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} &= f_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{v_k}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + v_k \cdot \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (5.58)$$

ahol a következő egyszerűsítéseket vezethetjük be:

- az áramlást stacionáriusnak tekintjük, ezért az idő szerinti deriváltak eltűnnek;
- eltekintünk a térfogati erőktől;
- a sűrűséget állandónak tekintjük, emiatt a jobb oldalon a harmadik tag nulla;
- ha az x irány a zavaratlan áramlás irányának felel meg, akkor lamináris áramlást feltételezve v_y deriváltjai elhanyagolhatók;
- a v_x sebesség y szerinti változása sokkal erőteljesebb, mint annak x szerinti változása.

Ezekkel az egyszerűsítésekkel a lamináris határrétegre felírt egyenletek a következők lesznek:

$$v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + v_k \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (5.59)$$

A második egyenletből levonható az a következtetés, amely szerint a lamináris határreteg belsejében bármely keresztmetszeten a nyomás a határreteken kívüli nyomással azonos.

A határreteken kívül az áramlás sűrűlédmentes, tehát ott a Navier-Stokes egyenletek egyszerűsített formáját, a 4.46. Euler-egyenleteket lehet alkalmazni. Mivel ott az áramvonalak párhuzamosak, a sebesség v_y összetevője zérus, tehát elegendő csak az egy dimenziós formát, az x irányú vetületre vonatkozó egyenletet felírni (a második egyenletből megint csak az következne, hogy a nyomás y irányában nem változik):

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} = f_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (5.60)$$

A v_x komponens most v_∞ -nel azonos, az előbbi feltételezésekkel pedig

$$v_\infty \cdot \frac{\partial v_\infty}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (5.61)$$

Az 5.61. egyenletet (a nyomás deriváltját tartalmazó tagot) az első 5.59. egyenletbe behelyettesítve egy újabb összefüggéshez jutunk:

$$v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} = v_\infty \cdot \frac{\partial v_\infty}{\partial x} + v_k \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad (5.62)$$

amely a *határreteg-egyenlet* (a jobb oldal első tagját, ha v_∞ állandó, elhagyhatjuk). Mivel az két ismeretlent tartalmaz (v_x és v_y), megoldásához az összenyomhatatlan fluidumra érvényes kontinuitási-tételt is fel kell írunk:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (5.63)$$

Az 5.62. és az 5.63. differenciálegyenletekből álló rendszert numerikus eljárásokkal megoldva a lamináris határreteg áramképét kapjuk (állandó v_∞ -re létezik egy analitikus megoldási eljárás is, amely Blasius nevéhez fűződik). Amennyiben elfogadjuk, hogy a határreteg felületén a sebesség 1% eltéréssel közelíti meg a v_∞ értéket, akkor az áramképből a lamináris határreteg δ vastagságát a $v_x(x, \delta) = 0.99 \cdot v_\infty$ feltételből határozhatjuk meg. Az 5.19. ábrán látható síklap esetében ezt a mennyiséget a

$$\delta(x) = 5 \cdot x \cdot \sqrt{\frac{v_k}{v_\infty \cdot x}} \quad (5.64)$$

függvény formájában kapjuk.

Örvénylő áramlások esetében a Navier-Stokes egyenletek felírásánál már kevesebb egyszerűsítés vezethető be. Az egyenletrendszer numerikus megoldása ekkor az időben változó, instacionárius áramlási képet fogja kirajzolni. Ez a megoldási módszer azonban nehézkes és pontatlan lehet. Ehelyett egy közelítő eljárás szerint az áramlást inkább kvázistacionáriusnak

tekintjük, az időbeni átlagokra felírt határréteg-egyenlet jobb oldalát pedig a látszólagos csúsztatófeszültségeknek megfelelő taggal bővítjük:

$$v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} = v_\infty \cdot \frac{\partial v_\infty}{\partial x} + v_k \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}. \quad (5.65)$$

E látszólagos csúsztatófeszültség a lokális sebességek időbeni ingadozásának hatását veszi figyelembe, meghatározására több modellt is kidolgoztak. Ezek közül ismertebb a klasszikus Prandtl-modell, mely a gázok viszkozitását okozó molekuláris impulzuscseré analógiáját alkalmazta. E modell szerint a turbulens határréteget alkotó fluidumrészek egymással ütköznek és az ütközések alatti impulzuscseré okozza a látszólagos viszkozitást, az abból fakadó csúsztatófeszültséget pedig

$$\tau_{xy} = \eta_t \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (5.66)$$

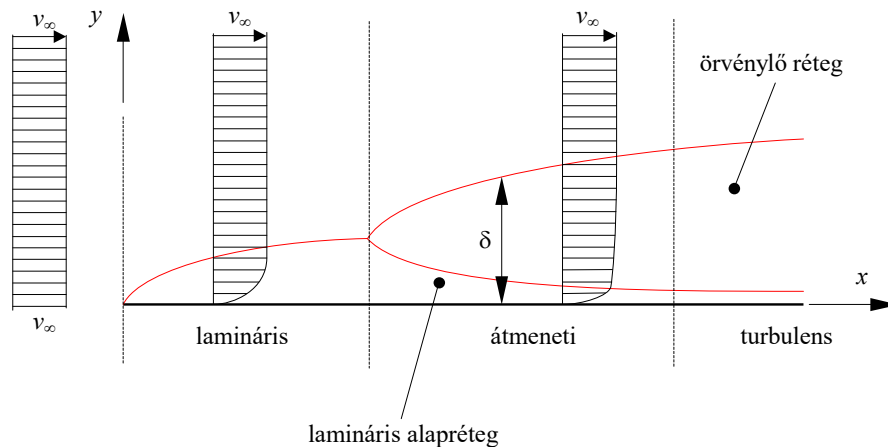
formában állapítja meg, ahol η_t a *turbulens viszkozitás*. A turbulens viszkozitás nem annyira a fluidum anyagi minőségétől, mint az áramlási jellemzőitől függ, meghatározása pedig kísérletezéssel történik. A tapasztalat szerint a turbulens viszkozitás nagyobb, mint a lamináris.

A turbulens határréteg vastagsága az örvénylő határréteg sebességprofiljából számítható, a már példaként felhozott síklapra azt a következő képlettel írhatjuk le:

$$\delta(x) = 0.37 \cdot x \cdot \sqrt{\frac{v_k}{v_\infty \cdot x}}. \quad (5.67)$$

A határréteg-egyenletek görbült felületek esetében is mindaddig érvényesek maradnak, míg a határréteg vastagsága a görbületi sugárhoz viszonyítva megfelelően kicsiny.

Az eddig elmondottak szemléltetéséhez tekintsük azt az egyszerű esetet, amikor az áramlásba helyezett test egy elhanyagolható vastagságú lemez, mely élével irányul az áramlattal szembe. A tapasztalat szerint a síklap felszínén az 5.19. ábrán látható áramlási kép alakul ki, melyet az előbbi egyenletek kielégítő pontossággal írhatnak le.



5.19. ábra. Síklap felületén kialakuló határréteg

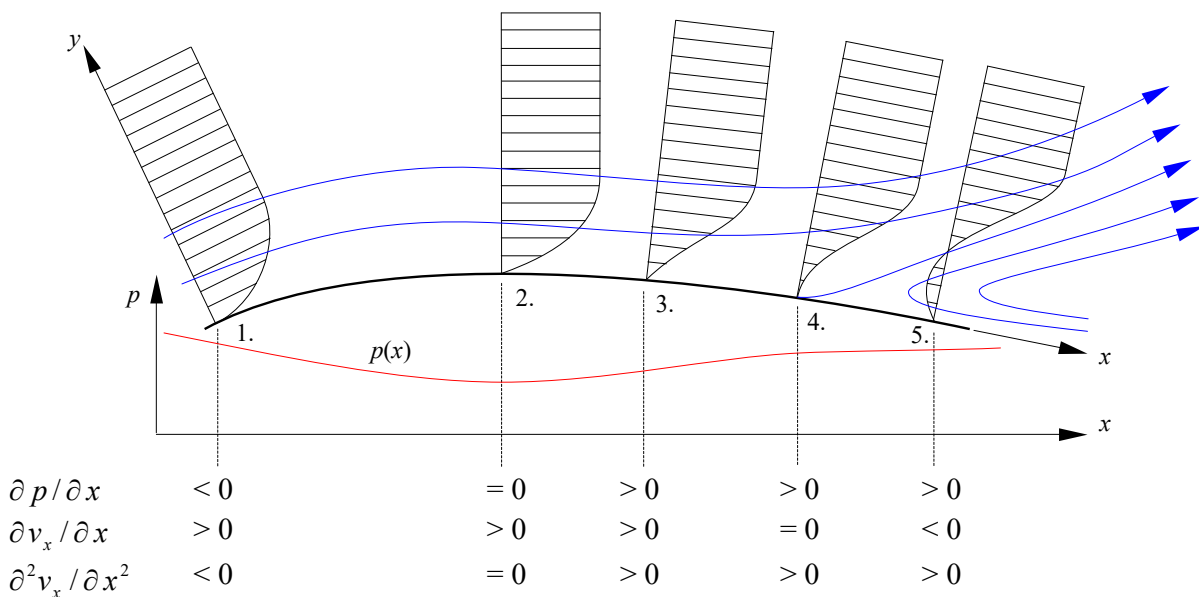
A fal felületén az áramlási sebesség nulla ($v_x = 0$, $v_y = 0$), az 5.59. rendszer első egyenletéből pedig egy érdekes következtetést szűrhetünk le: e felületen a sebesség y szerinti változását a második derivált

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\nu_k \cdot \rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.68)$$

értéke is jellemzi, tehát amikor a nyomás az áramlás irányában csökken ($\partial p / \partial x < 0$), akkor a sebességprofil a fal közelében az y tengely felől nézve konvex (domború), ellentétes esetben, ha a nyomás növekedik, akkor konkáv azaz homorú. Ez utóbbi esetben, mivel az $y = 0$ koordinátájú pontokban a sebesség zéró, az következik, hogy a sebesség a felület közelében negatív is lehet, tehát a fluidum a fal mentén visszafelé áramlik. Ezt a valóságban is megfigyelt jelenséget a határréteg leválásának nevezik és ez felelős az áramlási nyom erős turbulenciájáért.

Legyen az 5.20. ábrán látható görbült felület, mely fölött egy fluidum áramlik. A fal felülete mentén kialakuló határréteg-áramlás v_x sebességprofilját és nyomáseloszlását tanulmányozva a következőket tapasztaljuk:

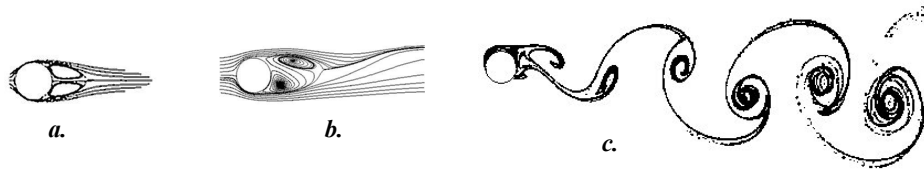
- az 1–2 szakaszon az áramlás irányában a nyomás csökken, a sebességprofil domború, a felület fölött a lokális átlagsebességek x irányú vetülete mindenütt pozitív;
- a 2. ponthoz tartozó keresztmetszeten a nyomásnak minimuma van. A sebességprofil itt még mindig domború és v_x mindenütt pozitív, de a fal felületén egy inflexiós pontja van (a második derivált itt nulla);
- a 2–4 szakaszon a nyomás növekedik, a sebességprofil a fal közelében homorú, inflexiós pontja eltávolodik a faltól;
- a 4. pontban a falon a sebességprofilnak normális irányú érintője van (az első derivált nulla), itt van a leválás kezdete;
- a 4–5 szakaszon a nyomás tovább növekedik, a sebességprofil a fal közelében negatív értékeket mutat. Itt tehát a fluidum visszafelé áramlik és egy nagyobb örvény alakul ki.



5.20. ábra. A határréteg leválása

A határréteg leválása tehát akkor történik meg, amikor a fal mentén a nyomás növekedik, a sebesség pedig csökken. A levált határrétegre az 5.62. és az 5.65. egyenletek már nem érvényesek, mivel a megállapításukkor tett feltételezések már nem helytállóak.

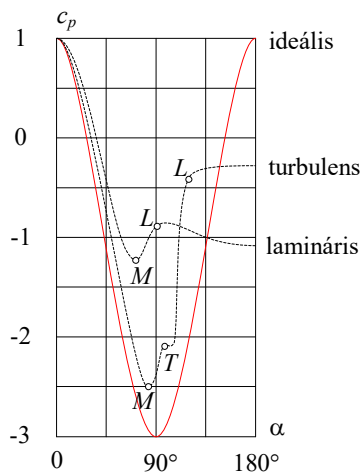
Az áramlásba helyezett test mögött a határréteg leválásakor egy nagy kiterjedésű örvényszórona keletkezik, amelyet empirikus relációkkal lehet leírni. Kezdetben, v_∞ kisebb értékeinél az áramlási nyom örvényei stabilak, nem változtatják helyzetüket (az 5.21.a. ábrán ezt a jelenséget látjuk egy, az ábra síkjára merőleges henger körüli áramlás esetében). Nagyobb sebességeknél a test mögötti örvények periodikusan változtatják a helyüket, a testtől távolabb az áramlási nyom vonalai csapkodó mozgást mutatnak (az 5.21.b. ábrán e periodikus változás egy pillanatát látjuk). Még nagyobb sebességeknél az áramlás a keletkező örvényeket magával sodorja, ekkor az áramlási nyomot a leszakadt örvények sorozata fogja alkotni. Ezt a sorozatot Kármán-féle örvényszóronának nevezik (5.21.c. ábra).



5.21. ábra. A Kármán-féle örvényszórona kialakulása

A körüláramlott testre a fluidum által kifejtett erő a test felületére gyakorolt hidrosztatikai nyomás és a súrlódás eredője. Ennek az erőnek a kiszámításához tehát a nyomáseloszlás ismerete szükséges. A nyomáseloszlás tanulmányozásához egy dimenziótlan nyomástényezőt vezettek be, amelyet az 5.56. Bernoulli-egyenlet alapján a következőképpen írhatunk fel:

$$c_p = \frac{p_k - p_\infty}{0.5 \cdot \rho \cdot v_\infty^2} = 1 - \left(\frac{v_k}{v_\infty} \right)^2. \quad (5.69)$$



5.22. ábra. A nyomástényező egy henger félkerületén

Ez az egyenlet csak az ideális folyadék áramlásakor érvényes. Az áramlásba helyezett hengerre például az 5.22. ábrán látható eloszlásokat tapasztaljuk (α a kerületi pont központi szöge, zérus értéke a torlópontra felel meg). Mint a grafikonokból is kitűnik, a valódi nyomáseloszlás erősen különbözik az ideálistól. A legfontosabb észrevétel az, hogy a valódi nyomáseloszlás nem szimmetrikus, tehát a hengerre egy erő fog hatni (az ideális eloszlás szimmetrikus, tehát a nyomásból származó erők eredője zérus).

A görbék minimumpontja (M) a felületen mérhető nyomás legkisebb értékének felel meg. A növekvő ágak görbülete egy bizonyos L pontban megváltozik, ott következik be a határreteg leválása. A leválási pont előtt a valódi görbe alakja követi az ideálisét, a kettő közötti különbséget a súrlódási erők okozzák. A leválási pont előtti szakaszon a határreteg a Reynolds-szám egy bizonyos kritikus értéke felett válik turbulenssé (ez a T pontban következik be).

Következtetésként kijelenthetjük, hogy a nyomáseloszlás az áramlás jellegétől (a Reynolds-számtól, amelyet a határreteg δ vastagságával számolunk) függ, a lamináris határreteg pedig hamarabb válik le (korábban tér el az ideális görbe alakjától), mint a turbulens.

Azt a tényt, hogy a turbulens határreteg később válik le annak tulajdonítják, hogy annak vastagsága jóval kisebb a lamináris határretegénél (a sebességprofil sokkal meredekebben növekszik, ahogyan azt a vezetékek esetében is tapasztaltuk).

Mivel a turbulens viszkozitás nagyobb, mint a lamináris, az átmenet (a T pont) helyének a közegellenállás csökkentésének szempontjából döntő szerepe van, így a repülőgép-szárnyak keresztmetszetét igyekeznek úgy megválasztani, hogy ez a pont minél hátrébb legyen.

A közegellenállást (az áramló fluidum által a testre gyakorolt erőt) a tapasztalati

$$F_e = c_e \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_\infty^2 \cdot A \quad (5.70)$$

képlettel lehet meghatározni, ahol ρ a fluidum sűrűsége, A a test homlokfelülete (az áramlás irányára merőleges keresztmetszete), c_e pedig a test ellenállástényezője. Ezt a képletet egyébként néhány igen egyszerű esetben elméleti úton is le lehet vezetni, egyébként c_e értékét csak mérésrel lehet meghatározni. Mivel a viszkozitás és a nyomástényező az áramlás jellegétől is függ, végső soron az ellenállástényező is a Reynolds-szám függvénye lesz.

Az 5.23. ábra ezt a függőséget egy sima felületű, nagyon hosszú henger esetében mutatja be. Az ábrázolt görbe első szakasza, ahol $Re < 1$, lineáris változást mutat, mely jelenséget elméletileg a lamináris áramlásra érvényes Navier-Stokes egyenletből következtethetünk ki. A görbe e szakaszán tehát az ellenállástényező a sebességgel fordítottan arányos, az 5.70. egyenletből pedig az következik hogy a közegellenállás ebben az esetben a v_∞ sebességgel egyenes arányban áll. Éppen ezért lamináris áramlás esetén az 5.70. egyenlet helyett gyakran egy

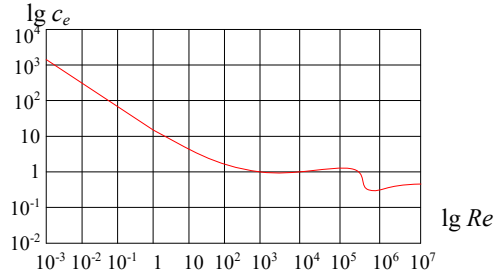
$$F_e = k_e \cdot \eta \cdot v_\infty \cdot A \quad (5.71)$$

alakú egyenletet használnak, ahol η a fluidum dinamikai viszkozitása, k_e pedig a test alakjától függő *alaktényező* (c_e -t az 5.70. képletben Reynolds-szám és egy konstans segítségével fejezzük ki, innen kapjuk az 5.71. formát).

Nagyobb Reynolds-számoknál egy átmeneti szakaszon a grafikon görbültté, majd közel vízszintesé válik. E megközelítőleg vízszintes szakaszon az ellenállástényező inkább csak a test felületének minőségétől függ, a közegellenállás pedig az 5.70. képlet szerint a sebesség négyzetével fog növekedni.

A Reynolds-szám 10^5 értéke felett a grafikon lépcsőszerű csökkenést mutat. Ennek magyarázata az, hogy abban a pontban a határreteg hirtelen turbulenssé válik és annak jobb tapadása miatt a leválási pont hátrébb csúszik.

Szögletes, éllel-sarkokkal rendelkező testek esetében a határréteg leválása intenzívebbé válik. Az ilyen testek közegellenállásában a viszkozus erők elhanyagolható részesedésűek, az ellenállástényező pedig nem függ a Reynolds-számtól. Az 5.1. táblázat az ellenállástényező néhány jellemző értékét mutatja be, az áramlás iránya felülről lefele mutat.



5.23. ábra. Az ellenállástényező egy sima henger esetében

A gömb alakú test egyszerű geometriája miatt az elméleti tanulmányok egyik legfontosabb tárgya, de emellett gyakorlati fontossággal is bír, mivel például a különféle közegekben lebegő apró szemcséket is gömb alakúnak tekintjük. Lamináris áramlaskor ($Re < 1$) a gömbre ható közegellenállásra levezetett Stokes-képlet a következő:

$$F_e = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v_\infty, \quad (5.72)$$

ahol r a gömb sugara (ekkor $c_e = 24 / Re$). Nagyobb Reynolds-számok esetében empirikus képleteket használnak, így például, ha $Re \leq 500$, akkor a gömb ellenállástényezőre például a

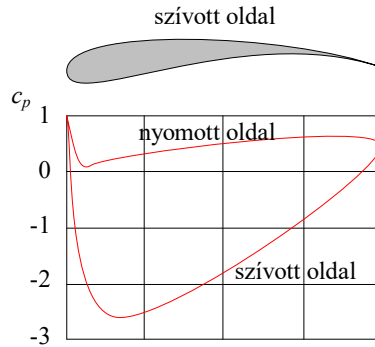
$$c_e = \frac{24}{Re} \cdot (1 + 0.15 \cdot Re^{0.687}) \quad (5.73)$$

képletet használhatjuk, e tartomány fölött pedig a táblázatban szereplő 0.44-es érték érvényes. A Reynolds-szám 10^5 értéke fölött c_e újból módosul, hirtelen 0.1 körüli értékre csökken, majd lassan emelkedni kezd.

	sík téglalap	sík körlap	kúp	gömb	konvex félgömb	konkáv félgömb	áramvonalas test
$a/b = 1$	1.10	1	0.4	0.44	0.3	1.2	0.04
$a/b = 2$	1.15						
$a/b = 4$	1.19						
$a/b = 10$	1.29						
$a/b = 18$	1.40						
$a/b = \infty$	2.01						

5.1. táblázat. Az ellenállástényező néhány jellemző értéke

Amennyiben a test az áramlás irányához viszonyítva aszimmetrikus (amilyen például egy repülőgépszárny), akkor a nyomáseloszlást is aszimmetrikusnak találjuk. Az 5.24. ábra a nyomáseloszlást jellemző tényezőt egy szárnyprofil két oldalán ábrázolja. Mint látható, a szárny domború oldalán a nyomás lecsökken (ott az áramlási sebesség megnövekedik), a homorú oldalán pedig megnövekszik (ott az áramlási sebesség lecsökken), rezultánsának pedig egy felfele irányuló vetülete is van.

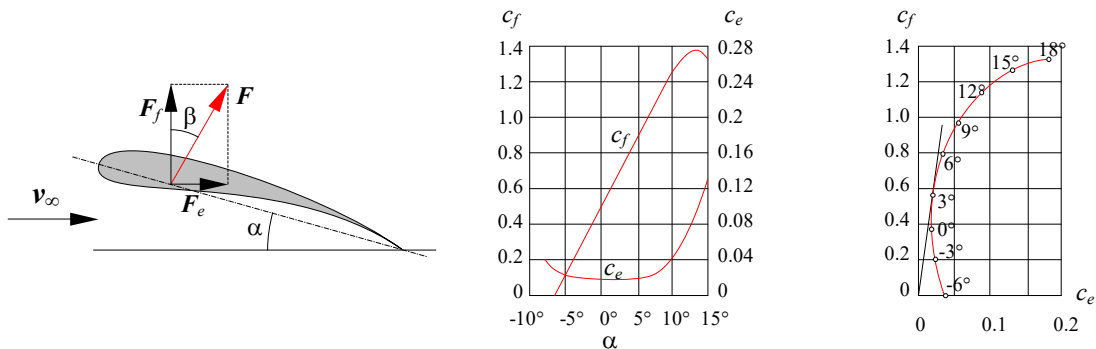


5.24. ábra. A nyomástényező egy szárnyprofil keresztmetszetén

A test körül kialakuló áramlás aszimmetriája miatt az áramló fluidum által a testre gyakorolt erőnek egy, az áramlásra merőleges F_f komponense is megjelenik. Ezt a komponenst, akárcsak az ellenállóerőt, egy 5.70. alakú egyenlettel fejezzük ki:

$$F_f = c_f \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_\infty^2 \cdot A, \quad (5.74)$$

ahol a c_f felhajtóerő-tényezőt kísérletezéssel lehet megállapítani. Megjegyzendő, hogy egy ugyanilyen összefüggés adja a közegellenállási erő nyomatékát is (egy újabb c_m nyomatéki tényező felhasználásával), melyet általában a belépési torlópontra vonatkoztatnak. E nyomaték segítségével meghatározhatjuk az említett erő támadásvonalának helyzetét is.



5.25. ábra. A felhajtóerő és az ellenállóerő függése az állásszögtől

Az ellenállóerő és a felhajtóerő a test helyzetétől, például a szárny síknak az áramlásirányával bezárt α állásszögétől is függenek. Nemcsak a felsorolt tényezők, hanem a képletekben használt A homlokfelület nagysága is változik α -val. Ezen okok miatt a homlokfelületet gyakran valamilyen jellemző keresztmetszettel helyettesítik (például a szárny szélességének és hosszúságának

szorzatával), a dőlésszög hatását pedig a c_e , c_f és a c_m tényezőkbe foglalják bele (azokat α függvényeként adják meg). Az 5.25. ábrán e függőséget láthatjuk, kétfajta ábrázolási módban megjelenítve.

Észrevehetjük, hogy c_e és c_f görbéi nem egyszerre változnak, arányuk α -tól függ:

$$\varepsilon(\alpha) = \frac{F_e}{F_f} = \frac{c_e}{c_f} = \operatorname{tg} \beta. \quad (5.75)$$

Ezt az arányt *siklószám*nak nevezik, ugyanis a lesikló vitorlázó repülőgép vízszintessel bezárt szöge az előbbi képletben szereplő β -val azonos. A jobboldali „polárdiagram” haszna az optimális α szög meghatározásában jut szerephez: ezt a szöget a diagramnak koordinátarendszereiből húzott érintője adja, ugyanis ott kapjuk a legkisebb ε arányt.

5.8. Nem permanens áramlások

A gyakorlatban számos olyan esettel találkozhatunk, amikor az áramlás időben változó képet mutat: bizonyos folyamatok, mint például egy szivattyú megindítása vagy leállása a vezetékben nyomás- és hozamingadozást idéz elő, egy zsilip megnyitása egy hullámot indít el a csatornán, a folyadék felszíne felett áramló levegő hullámokat gerjeszt és így tovább.

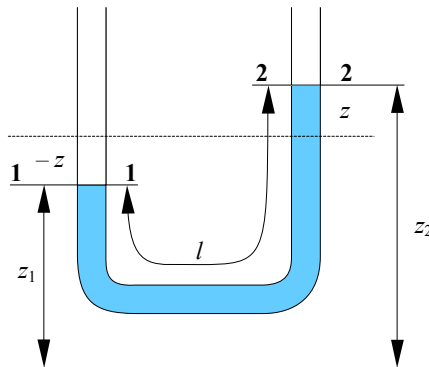
A lejátszódó jelenségek gyakran igen bonyolultak, ezért számszerű kifejezésük sokszor csak modell-kísérletek vagy mérések alapján megállapított empirikus képletekkel, közelítő eljárásokkal történhet. A továbbiakban példaként két egyszerű esetet ismerhetünk meg és egy egyszerű modellezési lehetőséggel (analógiával) foglalkozunk.

5.8.1. Folyadékklengés egy U-csőben

Tekintsük az 5.26. ábrán látható, állandó keresztmetszetű, mindkét végén nyitott U alakú csövet, amelyben egy bizonyos γ sűrűségű folyadék van. Kezdetben a folyadékszint a két ágban nem azonos, de a folyadék nyugalomban van. E szintkülönbség hatására a magára hagyott folyadék oszcillálni kezd. A folyadékfelszínnek az egyensúlyi szinthez viszonyított eltérését z -vel jelöljük.

A jelenség tanulmányozása végett, feltételezvé, hogy a folyadék áramlása súrlódásmentes, Bernoulli képletét a folyadék két ágban levő felszínére a következőképpen írjuk fel:

$$\frac{v_1^2}{2 \cdot g} + \frac{p_a}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + \frac{p_a}{\gamma} + z_2 + \frac{l}{g} \cdot \frac{dv}{dt}. \quad (5.76)$$



5.26. ábra. Folyadékklengés

A fenti egyenletben az utolsó tag a folyadék tehetetlenségének felel meg, mely az általános Bernoulli-egyenlet első integráljának g -vel való elosztásából ered. l a folyadékoszlop hossza (a meghajlított csőben).

A folyadék sebessége a két szárban azonos ($v_1 = v_2 = v$), a szintek különbsége pedig

$$z_2 - z_1 = 2 \cdot z. \quad (5.77)$$

A folyadék áramlási sebességét a szintkülönbség időbeli változásaként adhatjuk meg:

$$v = \frac{dz}{dt}. \quad (5.78)$$

Ezekkel az észrevételekkel az 5.76. reláció a következőképpen egyszerűsödik:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{2 \cdot g}{l} \cdot z = 0 \quad (5.79)$$

mely a folyadék lengésének mozgásegyenlete, egy lineáris másodrendű differenciálegyenlet.

E differenciálegyenlet megoldásakor $e^{k \cdot t}$ formájú gyököket keresünk, amellyel az egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$k^2 + \frac{2 \cdot g}{l} = 0 \quad (5.80)$$

lesz. A karakterisztikus egyenlet két gyöke

$$k_{1,2} = \pm i \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g}{l}}, \quad (5.81)$$

amelyekkel a mozgásegyenlet megoldása

$$z = C_1 \cdot \cos\left(t \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g}{l}}\right) + C_2 \cdot \sin\left(t \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g}{l}}\right) \quad (5.82)$$

lesz.

A két konstans (C_1 és C_2) meghatározása a

$$z_{t=0} = Z, \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=0} = 0 \quad (5.83)$$

kezdeti feltételek alapján történik, ahol Z a kezdeti kitérés (a folyadék kezdetben nyugalomban volt, de az egyik szárban a folyadékszint $2 \cdot Z$ -vel volt magasabban a másik ágban levő szint felett).

A meghatározott konstansokkal a mozgásegyenlet végleges formája

$$z = Z \cdot \cos\left(t \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g}{l}}\right) \quad (5.84)$$

lesz. Eszerint az ideális folyadék mozgása egy harmonikus rezgőmozgás lesz, melynek amplitúdója Z , kezdeti fázisa zéró és körfrekvenciája (más néven szögsebessége vagy pulzációja)

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot g}{l}}. \quad (5.85)$$

Innen a rezgés egyéb karakterisztikus mennyiségei is meghatározhatók, frekvenciája:

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g}{l}}, \quad (5.86)$$

periódusa pedig az utóbbi mennyiség reciproka:

$$T = \frac{1}{f}. \quad (5.87)$$

A valódi folyadék lengésének tanulmányozásakor figyelembe kell vennünk a viszkozitás hatását is. Ekkor az 5.76. egyenlet jobb oldalához hozzá kell adnunk a hidraulikai veszteséget jelentő tagot:

$$\frac{v_1^2}{2 \cdot g} + \frac{p_a}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + \frac{p_a}{\gamma} + z_2 + \frac{l}{g} \cdot \frac{dv}{dt} + \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}, \quad (5.88)$$

ahol d az U alakú cső átmérője. Feltételezvé, hogy lengés közben az áramlás lamináris, a csősúrlódási tényezőt a Poiseuille-képlettel lehet számítani:

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64 \cdot v_k}{v \cdot d}, \quad (5.89)$$

ahol $v = v_1 = v_2$.

Egyszerűsítés után Bernoulli egyenlete a

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{32 \cdot v_k}{d^2} + \frac{2 \cdot g}{l} \cdot z = 0 \quad (5.90)$$

mozgásegyenlethez vezet, amelyet az előbbiekhöz hasonló módon oldunk meg. A differenciálegyenlet megoldása

$$z = Z \cdot \exp(-16 \cdot v_k \cdot t / d^2) \cdot \cos \left[t \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g}{l} - \left(\frac{16 \cdot v_k}{d^2} \right)^2} \right] \quad (5.91)$$

lesz, mely egy csillapított harmonikus rezgőmozgást ír le. A rezgés frekvenciája most is állandó, de amplitúdója exponenciálisan csökken a zéró fele. A csillapított rezgés ω körfrekvenciáját most az

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot g}{l} - \left(\frac{16 \cdot v_k}{d^2} \right)^2} \quad (5.92)$$

mennyiség adja, mely kisebb, mint a csillapítatlan rezgés körfrekvenciája. Megjegyzendő, hogy ha a csillapítást okozó tag elég nagy (szűk cső, viszkózus folyadék), akkor a mozgás aperiodikus lesz.

5.8.2. Hidraulikus vezetékben fellépő átmeneti jelenségek

A hidraulikus berendezések számításánál az állandósult üzemiállapot mellett figyelembe kell venni az átmeneti jelenségek hatását is: ilyen gyorsan lezajló jelenségek lépnek fel az indításnál, leállásnál, ugrásszerű terhelésváltozásnál és így tovább. Elméletileg az átmeneti jelenségek hatása csak végtelen hosszú idő után, aszimptotikusan tűnne el, gyakorlatilag azonban az állandósult állapot rövid idő alatt beáll. E jelenségek alatt megjelenő nyomáscsúcsok többszörösen meghaladhatják az állandósult állapot alatt mérhető üzemi nyomást. Éppen ezért a méretezésnél az

átmeneti jelenségek alatt fellépő maximális nyomás értékét is szem előtt kell tartani, illetve olyan műszaki megoldásokat kell alkalmazni, melyek ezeket a nyomáscsúcsokat hatásosan csillapítják.

Az átmeneti jelenségek közül legkorábban a vezetékben fellépő *vízütés* (vízkalapács) jelenségét tanulmányozták. E jelenség egy olyan vezetékben lép fel, amelyben víz vagy bármilyen fluidum áramlik egy bizonyos v sebességgel. Tegyük fel, hogy a vezetéket egy olyan tartályból tápláljuk, amelyben a vízszint állandó. Ha az áramlás útjába hirtelen valamilyen akadály kerül (például elzárunk egy szelepet), akkor az akadály két oldalán jelentős nyomásingadozást észlelhetünk. Az akadály az áramló víz mozgását lefékezi, ezáltal kinetikus energiája potenciális energiává alakul át. Az akadály előtti a folyadékmennyiség mint egy rugó összenyomódik, nyomása pedig megnövekszik. A mozgás csak akkor áll meg, amikor a mozgási energia teljes egészében potenciális energiává alakul át – ekkor lép fel a nyomás maximuma. Ezután a jelenségek fordított irányban zajlanak le: az akadály felett az összenyomott folyadék, mint a szabadon hagyott rugó kiterjeszkedik, így potenciális energiája ismét kinetikus energiává alakul vissza. A távolodó folyadék nyomán az akadály felett a nyomás fokozatosan csökken, akár vákuum is létrejöhet. A nyomáscsökkenés a fordított irányú áramlást fékezi, majd egy idő után meg is állítja, ekkorra a kinetikus energia ismét potenciális energiává alakul át. Amikor a folyadék távolodása megáll, az akadály felett a nyomás eléri a legkisebb értékét, a lecsökkent nyomás miatt pedig a víz áramlási iránya megfordul, az ismét az akadály fele kezd mozogni. A jelenség tehát periodikusan ismétlődik, a csősúrlódás miatt azonban a mechanikai összenergia fokozatosan csökkenni fog (5.27. ábra). Az akadály után levő csőszakaszon ugyanezek a jelenségek lépnek fel, fél periódusnyi eltolódással.

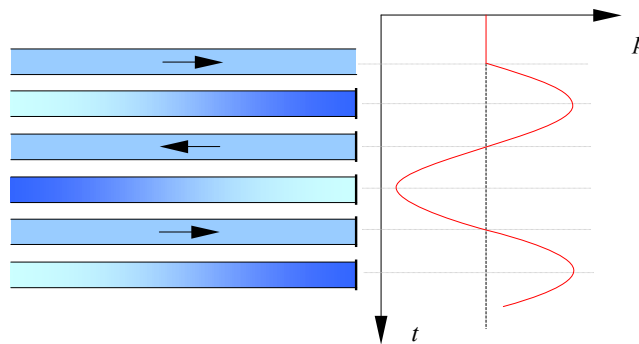
A jelenség analitikus tárgyalásához egy folyadékrész mozgásegyenletét kell felírnunk. Ezt az egyenletet az adott részre ható erők dinamikus egyensúlyának felírásával kapjuk (5.28. ábra):

$$m \cdot a = \sum F. \quad (5.93)$$

Mivel a mozgás egy egyenes csőszakaszon történik, a folyadékrész gyorsulását az

$$a_x = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \approx \frac{\partial v}{\partial t} \quad (5.94)$$

vetülettel is megadhatjuk, az pedig jó közelítéssel a lokális gyorsulással egyenlő, mivel a sebesség térbeli változását az időbeli változása mellett elhanyagolhatjuk.



5.27. ábra. *Vízütés*

A folyadékrészre ható külső erők a folyadékrész saját súlya (ennek nincs vízszintes vetülete), a viszkozitásból származó súrlódási erők (ezeket most elhanyagolunk) és a cső keresztmetszetén ható hidrosztatikai erő. Tegyük fel, hogy az akadály felőli oldalon a nyomás

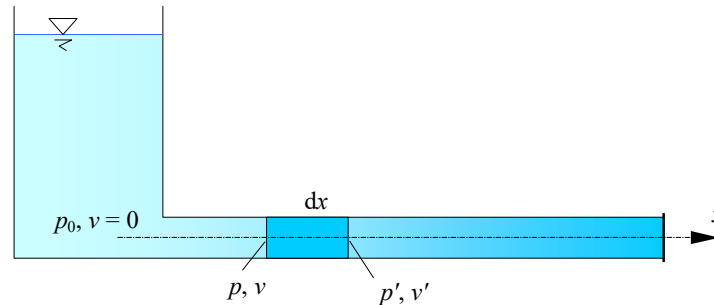
$$p' = p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx, \quad (5.95)$$

ahol p a térfogatelem tartály felőli oldalán levő nyomás.

Ekkor a folyadékrészre ható x irányú erő a hidrosztatikai erők eredője lesz:

$$F_x = A \cdot \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \right) - A \cdot p = A \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx, \quad (5.96)$$

ahol A -val a cső keresztmetszetét jelöltük.



5.28. ábra. A folyadékrész mozgása

A tekintett folyadékrész tömege:

$$m = \rho \cdot A \cdot dx. \quad (5.97)$$

Az így megállapított mennyiségekkel a mozgásegyenletet

$$\rho \cdot A \cdot dx \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = A \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \quad (5.98)$$

formában írhatjuk fel, ahonnan egyszerűsítés után a következő egyenlethez jutunk:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (5.99)$$

A mozgásegyenletben tehát két ismeretlen függvény is szerepel, a v lokális sebesség és a p hidrosztatikai nyomás. A megoldhatóság érdekében e két mennyiség között egy újabb összefüggést is meg kell állapítani, ezt pedig a folytonossági tétel alkalmazásával kapjuk.

A folytonossági egyenletet egy dx hosszúságú vezetékszakra írjuk fel. E szakaszon a tömeg változását tulajdonképpen két jelenségnek tulajdoníthatjuk: a nyomás növekedése a folyadék sűrűségét megnövelve fajlagos térfogatának csökkenést idézi elő, ugyanakkor a nyomás növekedése cső tágulásához vezet s emiatt a dx hosszú vezeték belső térfogata is megnő. Egyszerűsítésként tegyük fel, hogy a cső merev, tehát átmérője nem változik, és ekkor a térfogatváltozást egyedül a sűrűség megváltozása okozza. E mennyiséget a tekintett csőszakaszba be- és kilépő tömeghozamok különbsége adja. Ez a mennyiség egy plusz

$$dV = (Q_{be} - Q_{ki}) \cdot dt \quad (5.100)$$

térfogatú kezdeti állapotú folyadék elraktározását jelenti. E térfogathozamokat a sebességekkel kifejezvé:

$$dV = A \cdot (v' - v) \cdot dt = A \cdot \left[\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx \right) - v \right] \cdot dt = A \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx \cdot dt. \quad (5.101)$$

E térfogatkülönbség a folyadék összenyomásának következtében létrejött

$$dV = -\frac{1}{\varepsilon} \cdot V \cdot dp = -\frac{1}{\varepsilon} \cdot A \cdot dx \cdot dp \quad (5.102)$$

hiányt pótolja, ahol ε -t jó közelítéssel az adiabatikus térfogati rugalmassági modulusznak vehetjük. A két utolsó egyenletet egybevetve a folytonossági egyenlet

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{dp}{dt}, \quad (5.103)$$

lesz, mely egy újabb összefüggés v és p között.

Az 5.99. és az 5.103. differenciálegyenletekből álló rendszer megoldásához kezdeti- és peremfeltételeket kell előírunk. A kezdetben a folyadék egyenletes v_0 sebességgel áramolt, a nyomás pedig a cső hosszán mindenütt p_0 volt (a súrlódási veszteségeket elhanyagoltuk):

$$t = 0: \quad v = v_0, \quad p = p_0. \quad (5.104)$$

Peremfeltételként megállapíthatjuk, hogy a vezeték elzárása után az akadály keresztmetszetében a sebesség mindig zéró, a tartály felőli végen pedig a nyomás mindig p_0 :

$$\begin{aligned} x = 0: \quad p &= p_0, \\ x = l: \quad v &= 0. \end{aligned} \quad (5.105)$$

A két differenciálegyenlet továbbderiválva két különálló egyenlethez jutunk:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (5.106)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (5.107)$$

amelyek a lökéshullám terjedésének egyenletei (a síkhullám egyenletéről van szó) és amelyeket a szokásos eljárással lehet megoldani. A jobb oldal együtthatója $\rho/\varepsilon = 1/c^2$.

E problémának van egy egyszerűbb megoldása is, amely a folyamatban résztvevő folyadékmennyiség impulzusának változásából írja fel a nyomás változását; az így kapott reláció a Zsukovszkij-formula:

$$\Delta p = \rho \cdot c \cdot \Delta v. \quad (5.108)$$

Az így bemutatott számítások több egyszerűsítést is tartalmaznak. A gyakorlatban a keresztmetszet elzárása egy időben lezajló folyamat, tehát az nem hirtelen megy végbe és időben változó peremfeltételekhez vezet. A jelenség pontosabb vizsgálata e nehézségek miatt közelítő eljárások, numerikus módszerek bevezetését igényli.

5.8.3. Az elektromos analógia

Tekintsünk egy egyenes csőszakaszt: a Colebrook-White képlet alapján megállapíthatjuk, hogy a rajta átfolyó hozam és a két végpontja közötti nyomáskülönbség között a következő összefüggés áll fenn:

$$\Delta p = \frac{\lambda \cdot l \cdot \gamma}{2 \cdot g \cdot d \cdot S^2} \cdot Q^2 = R_h \cdot Q^2, \quad (5.109)$$

ahol R_h a csőszakasz *hidraulikus ellenállása*. Lamináris áramláskor ez az összefüggés lineáris lesz ($\Delta p = R_h \cdot Q$).

Ha e csőszakaszban a nyomás dp -vel nő, akkor e nyomásnövekedés miatt a csőben levő folyadék mennyisége is megnövekedik. E növekedésnek két oka van: a folyadék összenyomása és a cső keresztmetszetének megnövekedése. A folyadék összenyomhatóságából eredő térfogat-többlet:

$$dV' = \frac{1}{\varepsilon} \cdot V_0 \cdot dp, \quad (5.110)$$

ahol V_0 a csőszakasz belsejében található folyadék kezdeti térfogata volt.

Tegyük fel, hogy a cső kör keresztmetszetű: ekkor az átmérő növekedését a kazán-képlettel számíthatjuk és a megfelelő térfogat-növekedés

$$dV'' = \frac{d}{\delta \cdot E} \cdot V_0 \cdot dp \quad (5.111)$$

lesz, ahol d a cső belső átmérője, δ a csőfal vastagsága, E pedig a csőfal anyagának rugalmassági modulusza (a Young-modulusz).

A térfogat növekedése két összetevőjével

$$dV = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{d}{\delta \cdot E} \right) \cdot V_0 \cdot dp = \frac{1}{E_r} \cdot V_0 \cdot dp = C_h \cdot dp \quad (5.112)$$

lesz, ahol az E_r a redukált rugalmassági tényező a csövet és az azt kitöltő fluidumot együttesen jellemzi:

$$\frac{1}{E_r} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{d}{\delta \cdot E}}. \quad (5.113)$$

A csőszakasz e folyadékmennyiséget átmenetileg tárolja, a C_h együttható pedig ezt a tárolóképességet jellemzi és *hidraulikus kapacitás* nevet viseli. Mivel $dV = Q \cdot dt$, az előbbi egyenlettel:

$$\Delta p = \frac{1}{C_h} \cdot \int_0^t Q dt. \quad (5.114)$$

A tanulmányozott szakaszon a változó sebességgel áramló fluidum gyorsításához egy bizonyos nyomás-többlet szükséges:

$$A \cdot \Delta p = m \cdot \frac{dv}{dt}, \quad (5.115)$$

ahol A a vezeték keresztmetszete, m pedig a csőben levő fluidum tömege. A sebesség változását a hozam változásával is megadhatjuk ($dv = dQ / A$), ezért

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{A} \cdot \frac{dQ}{dt}. \quad (5.116)$$

A két utóbbi relációból:

$$\Delta p = \frac{m}{A^2} \cdot \frac{dQ}{dt} = L_h \cdot \frac{dQ}{dt}, \quad (5.117)$$

ahol L_h a vezetékben levő folyadék tehetetlenségét jellemző *hidraulikus induktivitás*.

Az elektromos áramkörökkel való analógia nyilvánvaló: az elektromos áram analóg párja a folyadékáram (a Q térfogathozam) az elektromos feszültség pedig a nyomáskülönbség (Δp). A hidraulikus vezetékek bizonyos R_h ellenállást fejtenek ki az áramlással szemben, amelyet lamináris esetben az $u = R \cdot i$ Ohm-törvényhez hasonló összefüggés ír le. A gyakrabban előforduló esetben ez az összefüggés nemlineáris lesz (5.109). Ugyanakkor a vezetékek bizonyos kapacitással és induktivitással is rendelkeznek, tranziens körülmények között viselkedésüket pedig ugyanolyan egyenletek írják le (5.114. és 5.117), mint amilyenekkel az elektromos áramköröknél találkozhatunk.

Az elektromos áramkörök esetében az ellenállás, a kapacitás és az induktivitás rendszerint önálló, koncentrált paraméterű áramköri elemekként jelentkeznek. Hidraulikus körök esetében ez általában nem így van, hiszen az ellenállás, a kapacitás és az induktivitás egyaránt a vezetékek hossza mentén oszlik el és a kétfajta kör analógiájának alkalmazhatóságáért szükségessé válik a csőszakasz diszkrét elemekkel való helyettesítése.

Egy egyszerűsítő hipotézis szerint a vezeték kapacitását a vezeték közepére koncentráljuk, ellenállását és induktivitását pedig szimmetrikusan osztjuk el. Így egy T alakú négypólust nyerünk (5.29. ábra).

E helyettesítő kapcsolás csak akkor használható, ha az adott szakasz l hossza a vezetékben terjedő nyomáshullám λ hullámhosszához viszonyítva megfelelően kicsi:

$$l < \frac{\lambda}{16}. \quad (5.118)$$

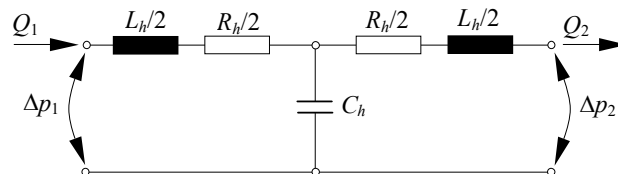
A hullámhossz a hang c terjedési sebességének és a gerjesztés f frekvenciájának ismeretében:

$$\lambda = \frac{c}{f}, \quad (5.119)$$

ahol a hang sebességét, figyelembe véve a cső rugalmasságát, az 1.11. képletből származtatott

$$c = \sqrt{\frac{E_r}{\rho}} \quad (5.120)$$

összefüggéssel számoljuk.



5.29. ábra. Csőszakasz elektromos analógiája

Amennyiben az 5.118. feltétel nem teljesül, bonyolultabb helyettesítő áramköröket kell alkalmaznunk (II modell, multi-T modell.)

A hidraulikus hálózat csomópontjaira és a hurkaira Kirchhoff törvényeivel analóg összefüggéseket állapíthatunk meg: a csomóponttörvény szerint bármely csomópontra a be- és a kifolyó hozamok algebrai összege zéró, a huroktörvény szerint bármely hurkon körbejárva a nyomáskülönbség zéró (ha a hurok egy szivattyút is tartalmaz, a nyomásesés egyenlő a beiktatott nyomásnöveléssel).

Ilyen módon a vezetékekből és a különböző szerelvényekből álló hidraulikus kört analóg módon egy elektromos áramkörrel helyettesíthetjük és azt az elektromosságban módszereivel elemezhetjük.

6. DIMENZIÓANALÍZIS ÉS HIDRAULIKAI MODELLEZÉS

6.1. A dimenzióanalízis és a modellezés szükségessége

A valódi fluidumok áramlása, mint láttuk, bonyolult jelenségeket eredményez, amelyeket képletekbe foglalni csak egyszerűsítő feltételezések elfogadása mellett lehetséges. Az ilyen egyszerűsítések miatt azonban a számított eredmények a valóságtól jelentősen eltérhetnek.

Számos olyan, első ránézésre egyszerű folyamat létezik – mint például a folyadék bukók feletti áramlása –, melyeket ha részleteiben kezdünk vizsgálni kiderül, hogy nagyon sok paraméter befolyásol. E paraméterek hatását elméleti úton nem mindig tudjuk meghatározni, éppen ezért a folyamat kvantitatív leírását – példánkban az átbukó folyadék hozamának meghatározását – csak kísérletek útján, mérések feldolgozásának alapján felállított empirikus vagy félempirikus képletekkel tudjuk megoldani. Az ilyen összefüggések felírásában a dimenzióanalízis nélkülözhetetlen segédeszköz.

Elméleti (egzakt) és empirikus összefüggéseinkkel az áramlástan feladatát megoldhatjuk: megtervezhetünk egy hidraulikus berendezést, egy áramvonalas repülőgép-testet vagy akár egy völgyzáró-gátat. Számításaink már eleve számos egyszerűsítést tartalmazhatnak és a használt összefüggéseink helyességében vagy érvényességében sem lehetünk mindig 100% -ig bizonyosak, éppen ezért tervünk kivitelezése előtt jó lenne számításainkat a valóságban is, mérésekkel leellenőrizni. Kisebb szerkezetek esetében elkészíthetünk egy 1:1 léptékű modellt vagy prototípust, de nagyobb struktúrák esetében ez igen költséges lenne (gondoljunk például az említett repülőgépre és gátra). Emiatt az elkészített modell méretei szükség esetén kisebbek a valóságosaknál. A különböző fizikai mennyiségek a modell méreteivel arányosan változnak, azonban ez az arányosság nem mindig lineáris. Annak céljából, hogy a modellen mért mennyiségekkel a valódi szerkezeten fellépő mennyiségeket felbecsülhessük, ismernünk kell a különböző mennyiségek között létező arányosságot, léptékeket is.

6.2. A dimenzióanalízis elemei

6.2.1. Dimenziók, mértékegységek

Egy fizikai mennyiség *dimenziója* az illető mennyiség minőségéről, fizikai jelentéséről ad felvilágosítást. Például egy görbe l hossza, egy kör R sugara és K kerülete, két pont d távolsága mind hosszúság jellegű mennyiségek és azt mondjuk, hogy azoknak hosszúság-dimenziójuk van. Ezt a következő módon jelöljük:

$$[l] = L; [R] = L; [K] = L; [d] = L. \quad (6.1)$$

Bármely fizikai mennyiséghez hozzárendelhetünk egy dimenziót. A fizikai mennyiségek között kapcsolat áll fenn s ebből következik, hogy az adott mennyiségek dimenziói között is valamilyen kapcsolatnak kell lennie, így az egyes dimenziók megadhatók más dimenziók segítségével. Például a téglalap területe két hosszúság (az alap és a magasság) szorzata, a terület S dimenziója tehát L^2 -tel azonos. Felvetődik tehát annak a lehetősége, hogy a számításokban csak korlátozott számú, egymástól független dimenzióval dolgozzunk.

A fizikai mennyiségek, így azok dimenziói között meg lehet állapítani egy tetszőleges készletet, melynek tagjai egymással nem fejezhető ki, de segítségével bármilyen más fizikai mennyiség, illetve annak dimenziója előállítható. E készlet tagjai az *alapvető* mennyiségek (illetve dimenziók), amelyek az összes többi belőlük átalakítási tényezők nélkül *származtatott* mennyiséggel (dimenzióval) egy *koherensnek* nevezett rendszert alkotnak.

A nem koherens mértékegységrendszerekben e származtatásnál átalakítási tényezőket használnak, így például az MKfS rendszerben a tömeg az erőből származtatott mennyiség, az átalakítási tényező pedig a gravitációs gyorsulás reciproka.

Bár az alapvető mennyiségek és dimenziók megválasztásában tetszőlegesen járhatnánk el, a Nemzetközi Mértékegységrendszerben (SI) egyezményesen a következőket tekintjük alapvetőnek:

- hosszúság: [L], SI mértékegysége: m (méter);
- tömeg: [M], SI mértékegysége: kg (kilogramm);
- idő: [T], SI mértékegysége: s (másodperc, szekundum);
- az elektromos áram erőssége: [I], SI mértékegysége: A (amper);
- termodinamikai hőmérséklet: [θ], SI mértékegysége: K (kelvin);
- anyagmennyiség: [M'], SI mértékegysége: mol (mól);
- fényerősség: [I'], SI mértékegysége: cd (candela.)

Az alapvető dimenziók megválasztása és mértékegységrendszer felépítése szorosan összefügg: az alapvető dimenziók mértékegysége alapvető mértékegység.

Az alapvető dimenziók és mértékegységek ezen megválasztása és száma egyezményes és nem valami általános érvényű természetes törvényszerűség következménye. Az így megválasztott alaplammennyiségeket megfelelően megválasztott eljárásokkal kapcsolatba lehet hozni egymással például a tömeg mértékének eredeti definíciója szerint is az az 1 dm³ térfogatú víz tömegével azonos, bizonyos előírt körülmények betartása mellett. Ezek szerint a víz adott körülmények között érvényes sűrűsége mint átalakítási konstans szerepelhet a tömeg és a térfogat, s ez utóbbin keresztül a tömeg és a hosszúság dimenziója és mértékegysége között. Végletekben beszélve alkothatnánk egyetlen alapvető mértékegységgel és dimenzióval rendelkező rendszert, de alkothatnánk olyant is, amelyben minden fizikai mennyiség dimenziója alapvető lenne. Az előbbit monodimenzionális, az utóbbit omnidimenzionális rendszernek nevezik. Mindkettő használata kényelmetlen lenne, ezért lett a SI egy multidimenzionális rendszer

A SI-ben bármilyen más fizikai mennyiség dimenziója és mértékegysége az előbb felsoroltak segítségével egyértelműen megadható. A származtatott dimenziójú mennyiségek SI mértékegységei származtatott mértékegységek, melyeknek esetleg önálló, *speciális* nevük van. E mértékegységek szintén koherens rendszert alkotnak.

Például a súly, melynek erő dimenziója van:

$$[G] = F, \quad (6.2)$$

a tömeg és a gravitációs gyorsulás szorzataként számítható:

$$G = m \cdot g. \quad (6.3)$$

Az erő dimenziója tehát a tömeg és a gyorsulás dimenzióinak szorzata:

$$[G] = [m] \cdot [a] \Rightarrow F = M \cdot A. \quad (6.4)$$

Ugyanakkor a gyorsulás is származtatott dimenziójú mennyiség, definíciójából eredendően

$$[a] = \frac{[s]}{[t^2]} \Rightarrow A = L \cdot T^{-2}. \quad (6.5)$$

Végső soron a súly vagy bármely más természetű erő dimenziója

$$[G] = F = M \cdot L \cdot T^{-2} \quad (6.6)$$

lesz. SI mértékegysége ennek megfelelően

$$\langle G \rangle = \langle m \rangle \cdot \langle a \rangle = \langle m \rangle \cdot \frac{\langle s \rangle}{\langle t \rangle^2} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad (6.7)$$

melyet *newtonnak* neveztek el és „N”-nel jelölnek.

Megjegyzendő, hogy a szögek és a térszögek fizikai szempontból dimenzió nélküli mennyiségek, ugyanis definíció szerint egy szög mértéke a szöghöz tartozó körív hosszának és a sugár hosszának hányadosa. Egységnyinek tekintjük annak a körívnek a középponti szögét, amelynek hossza egyenlő a körív sugarával. Hasonló módon a térszög is két felület hányadosa; egységnyi annak a gömbsüvegnek a középponti szöge, amelynek felülete egyenlő a gömbsüveg sugarának négyzetével. A szög és a térszög azonban önálló SI mértékegységgel rendelkezik, (rad - radián, illetve sr -steradián), melyek származtatott mértékegységek (régibben *szupplementárisnak* tekintették őket).

A fizikai mennyiségek közötti összefüggések alapján a bármely származtatott mennyiség dimenzióját egy

$$[x] = L^\alpha \cdot M^\beta \cdot T^\gamma \cdot I^\delta \cdot \theta^\epsilon \cdot M^\eta \cdot I^\phi \quad (6.8)$$

formájú reláció (dimenzióformula) fogja adni, ahol a görög betűkkel jelölt kitevők egész (pozitív, negatív vagy nulla) számok. A képletekben szereplő konstansok dimenzió nélküli mennyiségek kell legyenek (ellenben azok valamilyen változó rögzített értékét jelenthetik). A hatványkitevők és a transzcendens függvények argumentumai is csak dimenzió nélküli számok lehetnek. A zérus értékű mennyiségek is rendelkezhetnek dimenzióval.

A fizikai relációkban csak azonos természetű mennyiségeket lehet összeadni, kivonni, egyenlővé tenni vagy összehasonlítani. Ennek az észrevételnek az alapján mondható ki a dimenzionális homogenitás (egyneműség) elve, mely a dimenzióanalízis alapját képezi: egy fizikai mennyiségek közötti összefüggésnek csak akkor van értelme, ha minden tagjának dimenziója azonos. Példaként megállapíthatjuk, hogy a különböző formájú Bernoulli-egyenletekben szereplő összeg tag mind azonos dimenzióval rendelkezik. Ennek az elvnek a teljesítése önmagában nem feltétlenül jelenti azt, hogy az összefüggés helyes is.

6.2.2. A Rayleigh-módszer

A Rayleigh-módszert egy ismeretlen fizikai törvényszerűség (képlet) megállapítására használhatjuk feltéve, hogy ismerjük az adott jelenséget meghatározó paramétereket, mennyiségeket. A dimenzionális egyneműség elve alapján tudjuk, hogy a meghatározandó képlet mindkét oldalán azonos, egy 6.8. formájú egyenlettel megadott dimenziójú mennyiség kell álljon – e feltételből annak kitevői meghatározhatók vagy legalábbis bizonyos összefüggéseket lehet megállapítani közöttük.

Például tudjuk, hogy egy vékony tartályfal kör alakú nyílásán átömlő folyadék Q térfogathozama függ a nyílás d átmérőjétől, a nyílás két oldalán levő Δp nyomáskülönbségtől, a folyadék ρ sűrűségétől és annak v_k kinematikus viszkozitásától:

$$Q = Q(d, \Delta p, \rho, v_k) = k \cdot d^\alpha \cdot \Delta p^\beta \cdot \rho^\gamma \cdot v_k^\delta, \quad (6.9)$$

ahol k egy dimenzió nélküli arányossági tényező. Ezt az egyenletet dimenzionálisan is felírhatjuk, a benne szereplő mennyiségek dimenziójának kifejezésével:

$$L^3 \cdot T^{-1} = L^\alpha \cdot (L^{-1} \cdot M \cdot T^{-2})^\beta \cdot (L^{-3} \cdot M)^\gamma \cdot (L^2 \cdot T^{-1})^\delta, \quad (6.10)$$

vagy a tagokat összevonva

$$L^3 \cdot T^{-1} = L^{\alpha-\beta-3\gamma+2\delta} \cdot M^{\beta+\gamma} \cdot T^{-2\beta-\delta}. \quad (6.11)$$

A két oldal dimenziója ugyanaz kell legyen, tehát az alapvető dimenziók kitevői a két oldalon azonosak kell legyenek:

$$\begin{cases} \alpha - \beta - 3 \cdot \gamma + 2 \cdot \delta = 3 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -2 \cdot \beta - \delta = -1 \end{cases} \quad (6.12)$$

Négy ismeretlenünk, de csak három egyenletünk van. E három egyenletből tehát nem határozható meg mind a négy kitevő, az egyenletrendszert megoldva hármát a negyedik függvényében fejezünk ki:

$$\begin{cases} \alpha = 2 - \delta \\ \beta = \frac{1 - \delta}{2} \\ \gamma = \frac{\delta - 1}{2} \end{cases} \quad (6.13)$$

A hozam képlete a meghatározott kitevők behelyettesítésével

$$Q = k \cdot d^{2-\delta} \cdot \Delta p^{\frac{1-\delta}{2}} \cdot \rho^{\frac{\delta-1}{2}} \cdot v_k^\delta \quad (6.14)$$

lesz, amelyet

$$Q = k \cdot d^2 \cdot \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}} \cdot \left(\frac{d}{v_k} \cdot \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}} \right)^{-\delta} = d^2 \cdot \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}} \cdot \varphi \left(\frac{d}{v_k} \cdot \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}} \right) \quad (6.15)$$

formára hozhatunk. Észrevehetjük, hogy a zárójelben levő tagnak, így a φ mennyiségnek nincs dimenziója. A φ tényező mibenléte kísérletek útján dönthető el. A kapott képletben a hidraulikában tárgyalt kiömlő és átbukó hozamokra megállapított

$$Q = \mu \cdot A \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta H} \quad (6.16)$$

formát ismerhetjük fel (felhasználjuk, hogy a nyílás keresztmetszete $A = \pi \cdot d^2 / 4$ és hogy $\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta H$). E képlet egyébként fél-empirikus: az elméleti hozamot egy kísérletileg megállapított μ tényező korrigálja. μ -re a szakirodalom számos képletet ajánl.

A két utóbbi reláció egybevetésével a μ hozamtényező és az ismeretlen φ függvény között a

$$\varphi \left(\frac{d}{v_k} \cdot \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}} \right) = \mu \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \pi}{4} \quad (6.17)$$

kapcsolatot állapíthatjuk meg.

6.2.3. A Buckingham-módszer

Amikor a paraméterek száma jóval nagyobb a független dimenziók számánál a Rayleigh-módszer alkalmazása nehézkessé válik, s ekkor inkább a Buckingham-módszer alkalmazását javasolják.

A Buckingham-módszert szintén egy ismeretlen fizikai törvényszerűség megállapítására használhatjuk a meghatározó paraméterek ismeretében. Feltételezzük, hogy az a fizikai mennyiséget n egymástól független a_i mennyiség határozza meg. Ugyancsak feltételezzük, hogy e mennyiségek kapcsolatát leíró függvény egy olyan fizikai törvény, mely nem függ a választott mértékegységrendszertől:

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n). \quad (6.18)$$

Tegyük fel, hogy az első $k \leq n$ mennyiség dimenziója egymástól független, melyeket alapvető mennyiségeknek tekinthetünk. Ekkor az a és az a_{k+1}, \dots, a_n származtatott mennyiségek lesznek, melyek dimenzióját az a_1, \dots, a_k mennyiségek dimenzióival adhatunk meg:

$$\begin{aligned} A &= A_1^{m_1} \cdot A_2^{m_2} \cdot \dots \cdot A_k^{m_k}, \\ A_{k+1} &= A_1^{p_1} \cdot A_2^{p_2} \cdot \dots \cdot A_k^{p_k}, \dots, A_n = A_1^{q_1} \cdot A_2^{q_2} \cdot \dots \cdot A_k^{q_k}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

E mennyiségek mértékegységeit az alapvető mennyiségek mértékegységeivel fejezhetjük ki. Legyenek az alapvető mértékegységek:

$$\langle a_1 \rangle = \alpha_1, \langle a_2 \rangle = \alpha_2, \dots, \langle a_k \rangle = \alpha_k, \quad (6.20)$$

a származtatott mértékegységeket ekkor $\langle a_{k+1} \rangle = \alpha_1^{p_1} \cdot \alpha_2^{p_2} \cdot \dots \cdot \alpha_k^{p_k}$ formájú kifejezések fogják adni.

Tegyük fel, hogy az alapvető mértékegységeinket megváltoztatjuk, a megfelelő alammennyiségek mértékegységei ekkor:

$$\langle a'_1 \rangle = \alpha'_1 = k_1 \cdot \alpha_1, \langle a'_2 \rangle = \alpha'_2 = k_2 \cdot \alpha_2, \dots, \langle a'_k \rangle = \alpha'_k = k_k \cdot \alpha_k, \quad (6.21)$$

ahol k_1, k_2, \dots, k_k konstans szorzók. Származtatott mértékegységeink az új alammértékegységekkel most $\langle a'_{k+1} \rangle = \alpha'^{p_1}_1 \cdot \alpha'^{p_2}_2 \cdot \dots \cdot \alpha'^{p_k}_k = k_1^{p_1} \cdot k_2^{p_2} \cdot \dots \cdot k_k^{p_k} \cdot \alpha_1^{p_1} \cdot \alpha_2^{p_2} \cdot \dots \cdot \alpha_k^{p_k}$ formájúak lesznek. Új mértékegységeinkkel a 6.18. reláció az

$$a' = f(a'_1, a'_2, \dots, a'_k, a_{k+1}, \dots, a_n). \quad (6.22)$$

alakot ölti (de matematikai formája nem változik), amelyet a 6.21. mértékegység-átalakításokkal

$$\begin{aligned} k_1^{m_1} \cdot k_2^{m_2} \cdot \dots \cdot k_k^{m_k} \cdot a &= \\ = f(k_1 \cdot a_1, k_2 \cdot a_2, \dots, k_k \cdot a_k, k_1^{p_1} \cdot k_2^{p_2} \cdot \dots \cdot k_k^{p_k} \cdot a_{k+1}, \dots, k_1^{q_1} \cdot k_2^{q_2} \cdot \dots \cdot k_k^{q_k} \cdot a_n) \end{aligned} \quad (6.23)$$

formában is felírhatunk.

Buckingham módszerében a k_i szorzókat úgy választhatjuk meg, hogy az alapvető mennyiségek értéke az új mértékegység-rendszerünkben egységnyi legyen:

$$k_1 = \frac{1}{a_1}, k_2 = \frac{1}{a_2}, \dots, k_k = \frac{1}{a_k}. \quad (6.24)$$

Az így megválasztott szorzókkal a 6.23. függvény a következőképpen módosul:

$$\frac{a}{a_1^{m_1} \cdot a_2^{m_2} \cdot \dots \cdot a_k^{m_k}} = f\left(1, 1, \dots, 1, \frac{a_{k+1}}{a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \cdot \dots \cdot a_k^{p_k}}, \dots, \frac{a_n}{a_1^{q_1} \cdot a_2^{q_2} \cdot \dots \cdot a_k^{q_k}}\right), \quad (6.25)$$

amelyet

$$\pi = f(1, 1, \dots, 1, \pi_1, \dots, \pi_{n-k}) = f'(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-k}) \quad (6.26)$$

alakban is felírhatunk. Az alapvető és a származtatott mennyiségek dimenziói közötti 6.19. összefüggésekből következik, hogy az utóbbi kifejezésben szereplő π hányadosok dimenzió nélküli számok. Ilyen módon az $n+1$ dimenzióval rendelkező fizikai mennyiség közötti összefüggés $n+1-k$ dimenzió nélküli

$$\pi = \frac{a}{a_1^{m_1} \cdot a_2^{m_2} \cdot \dots \cdot a_k^{m_k}}, \pi_1 = \frac{a_{k+1}}{a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \cdot \dots \cdot a_k^{p_k}}, \dots, \pi_{n-k} = \frac{a_n}{a_1^{q_1} \cdot a_2^{q_2} \cdot \dots \cdot a_k^{q_k}}, \quad (6.27)$$

mennyiség között fennálló relációra vezethető vissza, mely eredmény Buckingham π -tétele.

Az ismeretlen m_i kitevők, amelyek az a mennyiség és az alapvetőnek tekintett a_1, \dots, a_k mennyiségek közötti kapcsolatot fogják megadni, az első 6.19. egyenlet alapján a π hányados dimenzió nélkülségéből állapíthatók meg. Hasonlóképpen kapjuk a függő mennyiségeket adó p_i, q_i stb. kitevőket is.

Tekintsünk egy példát: kísérletek alapján megállapítást nyert az a tény, hogy egy egyenes, kör keresztmetszetű csőszakaszon fellépő nyomásvesztés az áramló közeg ρ sűrűségétől és η dinamikai viszkozitásától, az áramlás v sebességétől, a cső belső d átmérőjétől, l hosszától és a csőfal k érdességétől függ:

$$\Delta p = f(\rho, \eta, v, d, l, k). \quad (6.28)$$

E mennyiségek dimenziói a következők:

$$\begin{aligned} [\Delta p] &= L^{-1} \cdot M \cdot T^{-2}, \\ [\rho] &= L^{-3} \cdot M, & [\eta] &= L^{-1} \cdot M \cdot T^{-1}, \\ [v] &= L \cdot T^{-1}, & [d] &= L, \\ [l] &= L, & [k] &= L. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Ezek alapján alapvető mennyiségnek például ρ, v és d választható (a többi dimenziója kifejezhető e három mennyiség dimenziójának segítségével). Segítségükkel a származtatott mennyiségekre felírhatjuk a következő, dimenzió nélküli π hányadosokat. Kezdjük a Δp függő mennyiséggel:

$$\pi = \frac{\Delta p}{\rho^{m_1} \cdot v^{m_2} \cdot d^{m_3}}. \quad (6.30)$$

Ennek dimenziója:

$$[\pi] = \frac{L^{-1} \cdot M \cdot T^{-2}}{(L^{-3} \cdot M)^{m_1} \cdot (L \cdot T^{-1})^{m_2} \cdot (L)^{m_3}} = L^{(-1+3 \cdot m_1 - m_2 - m_3)} \cdot M^{(1-m_1)} \cdot T^{(-2+m_2)}. \quad (6.31)$$

π dimenzió nélküli mennyiség kell legyen (másként: $[\pi] = 1$), tehát L, M és T kitevője egyaránt zéró kell legyen. E feltétel a következő egyenletrendszerhez vezet:

$$\begin{cases} -1 + 3 \cdot m_1 - m_2 - m_3 = 0 \\ 1 - m_1 = 0 \\ -2 + m_2 = 0 \end{cases}, \quad (6.32)$$

amelynek megoldása:

$$m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 0. \quad (6.33)$$

Az így meghatározott kitevőkkel:

$$\pi = \frac{\Delta p}{\rho \cdot v^2}, \quad (6.34)$$

mivel d kitevője nulla.

Hasonló módon járunk el a

$$\pi_1 = \frac{\eta}{\rho^{p_1} \cdot v^{p_2} \cdot d^{p_3}}, \pi_2 = \frac{l}{\rho^{q_1} \cdot v^{q_2} \cdot d^{q_3}}, \pi_3 = \frac{k}{\rho^{r_1} \cdot v^{r_2} \cdot d^{r_3}} \quad (6.35)$$

hányadosok esetében is, a számláló és a nevező dimenziójának azonosságából a kitevőket meghatározván a

$$\pi_1 = \frac{\eta}{\rho \cdot v \cdot d} = \frac{v_k}{v \cdot d} = \frac{1}{Re}, \pi_2 = \frac{l}{d}, \pi_3 = \frac{k}{d} \quad (6.36)$$

kifejezésekhez jutunk.

A nyomásesést tehát végső soron egy

$$\Delta p = \rho \cdot v^2 \cdot f\left(\frac{1}{Re}, \frac{l}{d}, \frac{k}{d}\right) \quad (6.37)$$

függvény adja, ahol a zárójelben levő paraméterek hatását további kísérletezéssel lehet eldönteni. Kísérletek alapján megállapítható, hogy a nyomásesés az l/d hányadossal egyenesen arányos, a másik két mennyiséget pedig a csősúrlódási tényező különböző körülmények között érvényes képleteiben láthatjuk viszont (a kapott összefüggést szintkülönbségekre átírva a Colebrook-White képlethez jutunk).

6.3. Áramlások hasonlósága

A hidraulikai modellezés során egy bizonyos geometriai léptékű modell áramlástani viselkedése a prototípus viselkedéséhez hasonló kell legyen. A hasonlóság legegyszerűbb formája a mértani (geometriai) hasonlóság. A modell és a prototípus geometriai szempontból akkor hasonlóak egymással, hogy ha a megfelelő hosszúságok között ugyanaz az arány áll fenn és a megfelelő szögek egyenlők. Ekkor a modell és a prototípus pontjai között bijektív leképezés van: a modell bármely pontjának a prototípus egyetlen pontja, és fordítva, a prototípus bármely pontjának a modell egyetlen pontja felel meg. E pont-párost *homológ pontoknak* nevezik.

A homológ pontok homológ görbéket, felületeket és térfogatokat határoznak meg. Megállapítható, hogy ha a homológ szakaszok és görbék hossza között egy k_l arányosság létezik, akkor a felületek és a térfogatok közötti arányosság mértéke e mennyiség négyzetével, illetve köbével egyenlő (a felületet két, a térfogatot pedig három hosszúság szorzata adja).

Ahhoz, hogy a modellen lezajló folyamatok a valóságos folyamatot reprodukálják, a modellen mérhető skálázott fizikai mennyiségek között ugyanolyan matematikai formájú összefüggéseknek kell érvényben lenniük, mint amilyenek a prototípuson mérhető mennyiségek között léteznek. Ez az észrevétel nemcsak a geometriai mennyiségekre vonatkozik.

A modellen és a prototípuson érvényes relációk között tehát arányosság kell létezzen. Ennek az arányosságnak a tanulmányozásával a hasonlóság elmélete foglalkozik, mely tulajdonképpen a geometriai hasonlóság fogalmának a fizikai mennyiségekre való kiterjesztéséből áll.

Az előbbieket szerint az időben változó jelenségek modellezéséhez a geometriai hasonlóság biztosítása nem elegendő, be kell vezetni a homológ idő fogalmát is. Ha egy folyamat egészét alkotó részfolyamatok lezajlásának a modellen és a prototípuson mért időtartama között bármely részfolyamat esetében ugyanaz az arányosság áll fenn, akkor ezek lezajlásának idejét homológoknak mondjuk.

Ha a geometria és az idő hasonlósága biztosított, akkor a modell és a prototípus kinematikai hasonlóságáról beszélhetünk: így a megtett utak, az eltelt idők, a sebességek és a gyorsulások között minden esetben arányosság van, a pályák, az áramvonalak és a nyomvonalak homológ görbék lesznek és így tovább.

A dinamikai hasonlóság a homológ pontokban további mennyiségek (tömeg, tehetetlenségi nyomaték, impulzus, impulzusnyomaték, erő, erőnyomaték, energia, mechanikai munka stb.) arányosságát is feltételezi.

Kényelmetlen lenne annyi léptéktényezővel dolgozni, ahány fajta mennyiség szerepel a tanulmányozott folyamatokat leíró összefüggésekben, ezért csak bizonyos, egymástól független mennyiségek léptékét írjuk elő, a függő mennyiségek léptéktényezőjét pedig ezekből származtatjuk. Független mennyiségeknek tekinthetjük például az alapvető mennyiségeket, ekkor az alapvető léptéktényezők a

$$k_l = \frac{l'}{l}, k_m = \frac{m'}{m}, k_t = \frac{t'}{t}, \text{ stb.} \quad (6.38)$$

arányok lesznek, ahol a számlálóban a modellen, a nevezőben pedig a prototípuson mért homológ mennyiségek szerepelnek. A származtatott mennyiségek léptéktényezőit e mennyiségekkel határozhatjuk meg, például a sebesség, a gyorsulás és az erő léptéke rendre

$$\begin{aligned} k_v &= \frac{v'}{v} = \frac{l'/t'}{l/t} = \frac{l'/l}{t'/t} = \frac{k_l}{k_t} = k_l \cdot k_t^{-1}, \\ k_a &= \frac{a'}{a} = \frac{l'/t'^2}{l/t^2} = \frac{l'/l}{(t'/t)^2} = \frac{k_l}{k_t^2} = k_l \cdot k_t^{-2}, \\ k_f &= \frac{F'}{F} = \frac{m' \cdot l'/t'^2}{m \cdot l/t^2} = \frac{(m'/m) \cdot (l'/l)}{(t'/t)^2} = \frac{k_m \cdot k_l}{k_t^2} = k_l \cdot k_m \cdot k_t^{-2}. \end{aligned} \quad (6.39)$$

A modell viselkedését ugyanolyan formájú egyenletek kell leírják, mint a prototípus viselkedését. A fluidumok mozgását például a 4.44. Navier-Stokes egyenletek írják le. Ha a prototípusra felírjuk az x tengelyre vonatkozó egyenletet:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} = \\ &= f_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu_k}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \nu_k \cdot \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (6.40)$$

akkor a fluidum mozgását a modell esetében is egy ezzel azonos formájú egyenletnek kell leírnia:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v'_x}{\partial t'} + v'_x \cdot \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \cdot \frac{\partial v'_x}{\partial y'} + v'_z \cdot \frac{\partial v'_x}{\partial z'} = \\ &= f'_x - \frac{1}{\rho'} \cdot \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\nu'_k}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x'} \cdot \left(\frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{\partial v'_y}{\partial y'} + \frac{\partial v'_z}{\partial z'} \right) + \nu'_k \cdot \left(\frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial z'^2} \right). \end{aligned} \quad (6.41)$$

A megfelelő léptéktényezőkkal a modellen érvényes egyenletet a következőképpen hozzuk kapcsolatba a prototípusra vonatkozó egyenlettel:

$$\begin{aligned} &\frac{k_v}{k_t} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{k_v}{k_l} \cdot \left(v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = k_{f_m} \cdot f_x - \frac{k_p}{k_\rho \cdot k_l} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \\ &+ \frac{k_{\nu_k} \cdot k_v}{k_t^2} \cdot \left[\frac{\nu_k}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \nu_k \cdot \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.42)$$

A dinamikai hasonlóság feltétele az, hogy a modellre és a prototípusra vonatkozó differenciálegyenletek ne legyenek lineárisan függetlenek. Azok tehát csak egy konstans

szorzótényezőben különbözhetnek egymástól. Ebből következik, hogy a 6.40. és 6.42. egyenlet megfelelő tagjai előtt álló együtthatók meg kell, hogy egyezzenek:

$$\frac{k_v}{k_t} = \frac{k_v^2}{k_l} = k_{f_m} = \frac{k_p}{k_p \cdot k_l} = \frac{k_{v_k} \cdot k_v}{k_l^2}, \quad (6.43)$$

mely arányosság bizonyos hasonlósági kritériumokhoz vezet. Összesen tíz ilyen kritériumot írhatunk elő, amelyek közül csak négy lehet független egymástól.

Így a második és az ötödik tag egyenlőségéből

$$\frac{k_v^2}{k_l} = \frac{k_{v_k} \cdot k_v}{k_l^2} \Rightarrow \frac{k_v \cdot k_l}{k_{v_k}} = 1, \quad (6.44)$$

a Reynolds-kritériumhoz jutunk:

$$Re = \frac{v \cdot l}{\nu_k} = \frac{v' \cdot l'}{\nu_k'} = Re', \quad (6.45)$$

mely szerint a modellezett áramlás ugyanazzal a Reynolds-számmal kell rendelkezzen, mint amely a modellen érvényes. Mivel a Reynolds-szám az áramlás aspektusával szorosan összefügg, ez az azonosság az áramlás jellegének azonosságát is jelenti (például ha a prototípuson az áramlás lamináris, akkor az a modellen is lamináris kell legyen).

Az első és a harmadik tag egyenlőségéből

$$\frac{k_v^2}{k_l} = k_{f_m} \Rightarrow \frac{k_v^2}{k_{f_m} \cdot k_l} = 1, \quad (6.46)$$

vagy

$$Fr = \frac{v^2}{g \cdot l} = \frac{v'^2}{g' \cdot l'} = Fr'. \quad (6.47)$$

E kritériumot Froude-ról nevezték el (a hányados a Froude-féle szám). A Froude-szám például a keverékáramlásokban mérvadó kritérium (a szemcsék vagy a buborékok átmérőjére, süllyedési vagy emelkedési sebességére vonatkozik), de a közegegyenállás és a szabad felszínű áramlások tanulmányozásában is fontos.

A gravitációs gyorsulás rendszerint a modell esetében ugyanaz, mint a prototípus esetében (de például a centrifugális gyorsulás segítségével, megfelelő laboratóriumi eszközökkel g megnövelhető). Ekkor a Froude-kritériumból következik, hogy a modellen mért sebesség k_l négyzetgyökével arányos ($v' = v \cdot \sqrt{k_l}$). A Reynolds-kritérium szerint viszont e két mennyiség között fordított arányosság kell legyen ($v' \sim v/k_l$), következésképpen ugyanazzal a fluidummal mindkét kritériumot egyszerre megvalósítani nem lehet.

A második és a negyedik tag egyenlőségéből

$$\frac{k_v^2}{k_l} = \frac{k_p}{k_p \cdot k_l} \Rightarrow \frac{k_p}{k_p \cdot k_v^2} = 1, \quad (6.48)$$

mely a Mach-kritériumot adja:

$$Ma = \frac{v}{c} = \frac{v'}{c'} = Ma' \quad (6.49)$$

(e megfeleltetés a hangsebesség 4.100. képletéből ered, a hányados pedig a Mach-szám). E kritérium a fluidum összenyomhatósága miatt fellépő jelenségek hasonlóságát írja elő.

Ugyancsak a második és a negyedik tag egyenlőségéből állapíthatjuk meg az előbbivel egyenértékű *Euler-kritériumot* is:

$$Eu = \frac{P}{\rho \cdot v^2} = \frac{P'}{\rho' \cdot v'^2} = Eu', \quad (6.50)$$

mely a nyomásváltozásnak a kinetikus energiával összevetett értéke. Nyomás alatti áramlások, például a kavitáció jelenségének tanulmányozásában használják.

Az első két tag egyenlőségéből egy újabb kritérium írható fel:

$$\frac{k_v}{k_t} = \frac{k_v^2}{k_t} \Rightarrow \frac{k_v \cdot k_t}{k_t} = 1, \quad (6.51)$$

ahonnan

$$Sh = \frac{v \cdot t}{l} = \frac{v' \cdot t'}{l'} = Sh'. \quad (6.52)$$

Ez a *Strouhal-kritérium*, a hányados pedig a Strouhal-szám. E kritérium az időben lejátszódó folyamatok hasonlóságát biztosítja (számlálójában megjelenik az idő).

Az előbbiekhöz hasonlóan más törvényszerűségek felhasználásával más kritériumokat is elő lehet állítani, így Newton-kritérium (*Ne*) az erők, a Weber-kritérium (*Wb*) pedig a felületi feszültségek között állapít meg arányosságot.

A legáltalánosabb esetben a modellezés során minden kritériumot teljesíteni kellene, de bizonyos, sajátosságos esetekben azonban elegendő egy csökkentett készlettel dolgoznunk.

E kritériumok alapján, miután megválasztottuk a modell geometriai léptékét, ki kell számítsuk a különböző fizikai mennyiségek léptékét. Például, ha a geometriai lépték $k_l = 1/25$, akkor a felületek léptéktényezője $k_l^2 = 1/625$, a térfogatok léptéktényezője $k_l^3 = 1/15625$ lesz. Ha a gravitációs gyorsulást nem változtatjuk (az a modell esetében is g marad), akkor a Froude-kritériumból:

$$v'^2 = v^2 \cdot \frac{l'}{l}, \quad (6.53)$$

tehát az áramlási sebesség skálatényezője $k_v = \sqrt{k_l} = 1/5$ kell legyen. A modellen tehát a folyadék gyorsabban teszi meg két homológ pont közötti távolságot, mint a valóságban. A Strouhal-kritériumból meghatározhatjuk az idő léptéktényezőjét is: $k_t = k_l / k_v = 1/5$.

A Reynolds-kritériumból a modellező fluidum kinematikai viszkozitása

$$v_k' = v_k \cdot \frac{v' \cdot l'}{v \cdot l} \quad (6.54)$$

kell legyen, tehát a viszkozitási együttható skálatényezője $k_{v_k} = k_v \cdot k_t = 1/125$. Ha a prototípuson áramló folyadék víz, akkor e kritérium teljesítése nehéz feladat elé állít. Kiválasztván a megfelelő viszkozitású modellező fluidumot annak sűrűségével és az Euler-kritériummal meghatározhatjuk a nyomások léptékét, melyből meghatározhatjuk a az erők léptéktényezőjét is. Hasonló módon számítjuk ki minden minket érdeklő mennyiség léptékét.

E léptékek segítségével kell meghatározni a modell kezdeti és peremfeltételeit is. Ez utóbbiak lehetnek időben változó mennyiségek, ekkor gondoskodni kell arról, hogy ezek saját időléptékükben hasonlóan változzanak.

A kezdeti és a peremfeltételek biztosítása után a modellen lezajló folyamat során megmérhetjük a minket érdeklő mennyiségeket, majd léptéktényezőjünkkel kiszámíthatjuk a prototípuson várható értékeket.

F. SKALÁR- ÉS VEKTORTEREKKEL LEÍRHATÓ MENNYISÉGEK

Az alábbiakban a három tér- és az idő-koordinátával leírható skaláris és vektoriális mennyiségekre szorítkozunk.

A kinematika Euler-módszere az áramló fluidum különböző jellemzőit a tér rögzített pontjaihoz köti. E jellemzők egy része skaláris, másik része pedig vektoriális mennyiség. E mennyiségeket matematikailag skalár-, illetve vektorterekként (vagy mezőkként) kezelhetjük.

► A *skalártér* tulajdonképpen egy négyváltozós skaláris függvény, melynek értelmezési tartományát a tanulmányozott térrész (melyet általában három Descartes-koordinátával írunk le), valamint az idő alkotja. Skalárteret alkot például a sűrűség: $\rho = \rho(x, y, z, t)$, a nyomás és a hőmérséklet. Bizonyos feladatok esetében elegendő két, vagy akár csak egy tér-koordinátával dolgoznunk.

Az áramlástanban a jelenségeknél e tér lehet *stacionárius* – ekkor az illető skaláris mennyiség időben nem változik, illetve, ellenkező esetben a tér *instacionárius*.

A skalárterek elméletében az f skalárfüggvény állandó értéke „szintfelületeket”, kétdimenziós esetben görbét határoz meg. E felületeket és görbéket instacionárius esetben egy rögzített t értékre is megadhatjuk. Az áramlástanban ezeket általában valamilyen „izo-” felületnek (görbének) nevezzük (izoterma, izobár felület), de ilyenek az ekvipotenciális felületek is. Ez utóbbi megnevezést például az áramlást leíró potenciál-függvény esetében használjuk. A szintvonalakat és a szintfelületeket az $f = \text{konst.}$ egyenlet adja meg.

A tanulmányozott f skaláris mennyiség legnagyobb hely szerinti változása e felületekre merőleges irányban mérhető. f irány szerinti deriváltja

$$\frac{df}{dr} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot l + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot m + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot n, \quad (\text{F.1})$$

ahol l, m, n az adott r irány iránytényezői. E deriválnak a szintfelület \mathbf{n} normálisának irányában van a legnagyobb értéke. f hely szerinti változásának mértéke a

$$\text{grad } f = \frac{df}{dn} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{F.2})$$

gradiens-vektor, mely értelmezése szerint a skalártér leggyorsabb változásának irányával megegyező irányú, a skalártér növekedésének irányába mutat és hossza arányos a hely szerinti változás sebességével (e „sebesség” értelmezésekor természetesen nem az időbeni, hanem térbeli változásról van szó).

Ha a tér két egymáshoz közeli A és B pontját a $d\mathbf{r}$ vektor köti össze, akkor a skalártér változását a tekintett két pont között a

$$df = f_B - f_A = d\mathbf{r} \cdot \text{grad } f \quad (\text{F.3})$$

skaláris szorzat fogja adni. f -nek a két pont által adott irány szerinti deriváltja:

$$\frac{df}{dr} = \mathbf{r} \cdot \text{grad } f, \quad (\text{F.4})$$

ahol \mathbf{r} az adott irány egységvektora.

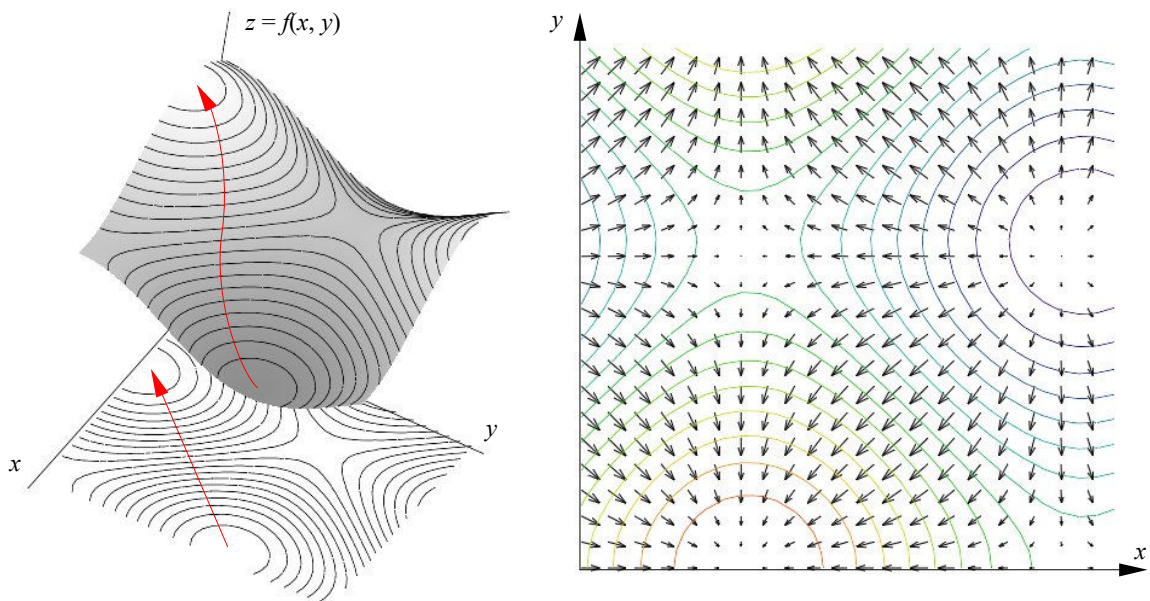
A gradienst a nabla-operátorral (másképpen: Hamilton-operátor), a következő szimbolikus vektorral lehet definiálni:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \mathbf{k} . \quad (\text{F.5})$$

Felhasználásával a skaláris f mennyiség gradiensét a

$$\text{grad } f = \nabla \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \mathbf{k} \quad (\text{F.6})$$

összefüggés adja.



F.1. ábra. Kétváltozós függvénnyel leírt skalárteret

Az F.1. ábra egy kétváltozós függvénnyel leírt skalárteret szemléltet. Ha a látottakat konkrét értelemmel akarjuk ellátni, akkor tekinthetjük azt például egy vékony fémlemez hőmérsékletét megadó függvény grafikus ábrázolásának.

A térbeli ábra a függvény értékét mint geometriai koordinátát értelmezi: a sík fémlemez pontjait megadó x abszcissza és y ordináta tényleges méterben mért geometriai koordináták, a z kóta pedig a lemezre merőleges irányban felmért, a hőmérséklettel arányos mennyiség, amelyet például Celsius-fokban adunk meg. E módon a hőmérsékleti mezőt egy három dimenziós felületként ábrázoljuk, e felületet pedig akár domborzati formaként is értelmezhetjük. A felület legmagasabban fekvő pontjai (a csúcsok) a lemez legmelegebb, a legalacsonyabban fekvők (a gödrök) pedig a leghidegebb pontjainak felelnek meg. Az állandó hőmérsékletű pontokat izotermák (szintvonalak) kötik össze, amelyek az xy koordinátáikkal párhuzamos (vízszintes) síkokban fekvő görbék. Az izotermákat egy állandó hőmérséklet-különbségnek megfelelő lépéssel rajzolják meg, két szomszédos izoterma közötti z (függőleges) irányú távolsága állandó. A hőmérséklet valamely irányban mért változását az izotermák távolsága (a felület meredeksége) mutatja: minél közelebb vannak egymáshoz az izotermák, annál gyorsabban változik a hőmérséklet. A leggyorsabb változás irányát a legmeredekebb vonal mutatja, amelyet az ábrán egy nyíl jelöl. E nyíl a gradiensvektorhoz minden pontban érintőleges.

A sík ábra az izotermákkal (szintvonalakkal) segít képet alkotni a tanulmányozott mennyiségéről. A jobb oldalon a szintvonalakra merőleges gradiens-vektorokat is láthatjuk.

► A *vektortér* szintén egy négyváltozós függvény, mely az előbbi esettel ellentétben egy vektoriális mennyiséget ad vissza (tehát vektorfüggvény). Vektorteret alkot például a sebesség: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$, a gyorsulás, a feszültség, ilyenek a különböző erők és így tovább.

Akárcsak a skalárterek esetében, most is definiálhatunk olyan görbéket és felületeket, ahol a vektoriális mennyiség modulusának állandó értéke van.

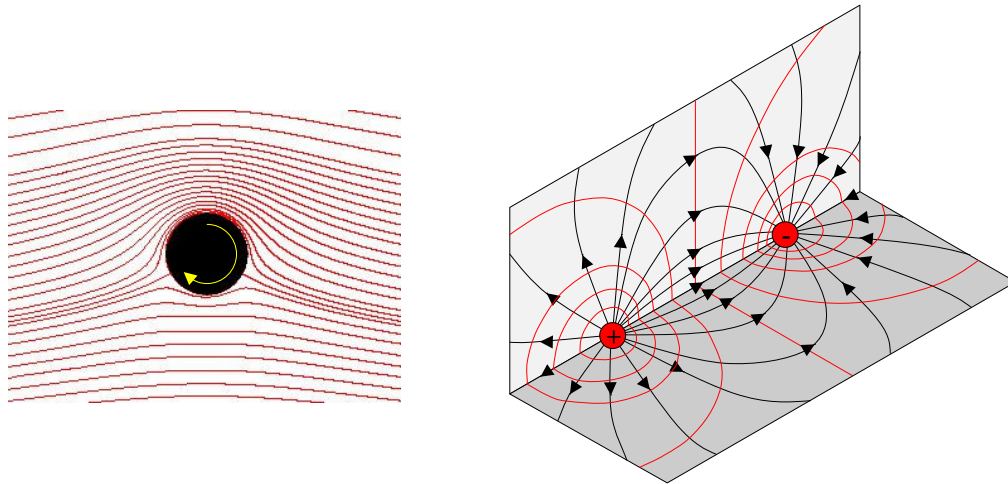
A vektorteret az F.1. ábra jobb oldalán látható módon ábrázolhatjuk (ahol a gradiens-vektor szemléltetését oldottuk meg). Ez az ábrázolási mód egy négyzögháló metszéspontjaiban rajzolja meg a vektorokat, melyek hossza a vektoriális mennyiség nagyságával arányos.

A vektortér egy „vektorvonala” vagy „erővonala” az a görbe, amelyhez az \mathbf{f} vektor minden pontban érintőleges. Egyenletét, értelmezése alapján az $\mathbf{f} \times d\mathbf{r} = 0$ vagy a $d\mathbf{r} = \lambda \cdot \mathbf{f}$ összefüggések adják ($d\mathbf{r}$ érintőleges a görbéhez, λ pedig egy konstans), melyek a következőképpen fejthetők ki skaláris egyenlet formájában:

$$\frac{dx}{f_x} = \frac{dy}{f_y} = \frac{dz}{f_z}. \quad (\text{F.7})$$

Ilyen vektorvonal az áramló fluidum lokális sebesség-terének egy áramvonala.

A vektorvonalakat a vektorterek szemléltetéséhez használhatjuk. Az F.2. ábra bal oldalán ideális fluidum lamináris áramlásába helyezett forgó henger körül kialakuló áramlási képet láthatjuk, az ábrázolás az áramvonalak segítségével történt. Ugyanennek az ábrának a jobb oldalán két egyenlő nagyságú, de ellentétes előjelű ponttöltés között kialakuló elektrosztatikus tér erővonalait (és az ekvipotenciális felületek metszéséből származó görbéket) láthatjuk. A megrajzolt vektorvonalak száma tetszőleges, sűrűségük a tanulmányozott jelenség minél szemléletesebb ábrázolását szolgálja.



F.2. ábra. Vektorvonalakkal ábrázolt vektorterek

Az vektorvonalakhoz hasonló módon definiálhatunk olyan felületeket is, amelyekhez az \mathbf{f} vektor minden pontban érintőleges, ilyen például az áramfelület. E felület zárt is lehet, ilyen például az áramcső.

Mivel bármely vektort megadhatunk a tengelyekre eső vetületeivel, mint $\mathbf{f} = \mathbf{f}(f_x, f_y, f_z)$, bármely vektortér helyettesíthető három megfelelően megválasztott skalártérrel. Emiatt az \mathbf{f} vektor hely szerinti változását e vektor egymástól független f_x , f_y és f_z skaláris vetületeinek hely

szerinti változásával, vagyis a $\text{grad } f_x$, $\text{grad } f_y$ és $\text{grad } f_z$ gradiens-vektorokkal jellemezhetjük. Az adott tér két, egymáshoz közeli pontja között a vektortér változása matrixos formában

$$d\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} & \frac{\partial f_x}{\partial y} & \frac{\partial f_x}{\partial z} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial y} & \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_z}{\partial x} & \frac{\partial f_z}{\partial y} & \frac{\partial f_z}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}] \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{F.8})$$

lesz, ahol $[\mathbf{D}]$ a vetületek elsőrendű parciális deriváltjait foglalja magába.

Az \mathbf{f} vektor legnagyobb hely szerinti változása megint csak a szintfelületekre merőleges irányban mérhető. \mathbf{f} irány szerinti deriváltja:

$$\frac{d\mathbf{f}}{dr} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \cdot l + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} \cdot m + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} \cdot n, \quad (\text{F.9})$$

melyet tömörebben a

$$\frac{d\mathbf{f}}{dr} = (\nabla \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{f} \quad (\text{F.10})$$

formában lehet felírni.

A vektorteret a $[\mathbf{D}]$ matrix invariánsaival szokták jellemezni: a vektortér *divergenciájával* és *rotorjával*.

Az \mathbf{f} vektortér divergenciáját az előbbi nabla-operátorral számítjuk:

$$\text{div } \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}, \quad (\text{F.11})$$

mely skaláris szorzat egy számot ad vissza. Egy vektor divergenciája tehát skaláris mennyiség.

Fizikai értelmezését tekintve egy vektortér divergenciája egy adott ponton át (az pont körül felvett infinitezimális felületen) egységnyi idő alatt ki- és belépő mennyiségek (a lokális sebességek esetében a hozamok) különbségét adja.

Az \mathbf{f} vektortér rotorját szintén a nabla-operátor adja:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{f} &= \nabla \times \mathbf{f} = \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) \cdot \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \cdot \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

mely vektoriális szorzat egy vektort eredményez. A vektortér rotorja tehát szintén vektoriális mennyiség.

Fizikai értelmezését tekintve a rotációvektor a vektortér örvényességét jellemzi, a lokális sebességvektorok esetében az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességgel van szoros összefüggésben (annak kétszerese).

A vektorterek leírásához az elmondottak szerint három darab négyváltozós függvényre van szükség. Lényeges egyszerűsítés lenne, ha a vektorteret egyetlen (skaláris) függvénnyel is le tudnánk írni. Ez a feladat a skalárterek gradiensével oldható meg (ha megoldható): amennyiben létezik egy olyan f skalártér, melynek gradiense éppen a tanulmányozott \mathbf{f} vektorteret adja, akkor azt a vektorteret *potenciálosnak* mondjuk melynek potenciálfüggvénye f .

Bebizonyítható, hogy a potenciálos \mathbf{f} vektortér örvénymentes ($\text{rot } \mathbf{f} = 0$) és cirkulációja bármely zárt görbén nulla ($\oint_C \mathbf{f} \, d\mathbf{r} = 0$).

► A skalár- és a vektortereknek nemcsak deriváltjai, hanem különböző integráljai is megjelennek a fizikai egyenletekben.

A görbe vonalú integrálok a gyakorlatban következő a formákban fordulhatnak elő:

$$\text{a).} \quad \int_C \mathbf{f} \, d\mathbf{r} = \mathbf{i} \cdot \int_C f \, dx + \mathbf{j} \cdot \int_C f \, dy + \mathbf{k} \cdot \int_C f \, dz; \quad (\text{F.13})$$

$$\text{b).} \quad \int_C \mathbf{f} \, d\mathbf{r} = \int_C f_x \, dx + f_y \, dy + f_z \, dz; \quad (\text{F.14})$$

$$\text{c).} \quad \int_C \mathbf{f} \times d\mathbf{r} = \mathbf{i} \cdot \int_C f_y \, dz - f_z \, dy + \mathbf{j} \cdot \int_C f_z \, dx - f_x \, dz + \mathbf{k} \cdot \int_C f_x \, dy - f_y \, dx, \quad (\text{F.15})$$

ahol $d\mathbf{r} = dx \cdot \mathbf{i} + dy \cdot \mathbf{j} + dz \cdot \mathbf{k}$.

C lehet nyitott vagy zárt görbe, ez utóbbi esetben az integrál jelre egy kis kört is rajzolnak ($\oint \dots$). A felsorolt lehetőségek közül a második (b.) kiemelt fontossággal bír, például, ha \mathbf{f} valamilyen erő, akkor az integrál alatti kifejezés elemi mechanikai munka jellegű. Ezt a második integrált az \mathbf{f} vektor C görbe menti *cirkulációjának* (örvénylésének) nevezik és általában Γ -val jelölik. Ha a zárt C görbét egy adott pontra zsugorítjuk, úgy a második integrál \mathbf{f} rotorját adja az adott pontban.

Felületi integrálok a következő formákban adódhatnak elő:

$$\text{a).} \quad \int_S \mathbf{f} \, d\mathbf{s} = \mathbf{i} \cdot \int_S f \, dy \, dz + \mathbf{j} \cdot \int_S f \, dx \, dz + \mathbf{k} \cdot \int_S f \, dx \, dy; \quad (\text{F.16})$$

$$\text{b).} \quad \int_S \mathbf{f} \, d\mathbf{s} = \iint_S f_x \, dy \, dz + f_y \, dx \, dz + f_z \, dx \, dy; \quad (\text{F.17})$$

$$\text{c).} \quad \int_S \mathbf{f} \times d\mathbf{s} = \mathbf{i} \cdot \iint_S f_y \, dx \, dy - f_z \, dx \, dz + \mathbf{j} \cdot \iint_S f_z \, dy \, dz - f_x \, dy \, dx + \mathbf{k} \cdot \iint_S f_x \, dz \, dx - f_y \, dz \, dy, \quad (\text{F.18})$$

ahol $d\mathbf{s} = \mathbf{n} \cdot ds = \mathbf{i} \cdot dx \cdot ds + \mathbf{j} \cdot dy \cdot ds + \mathbf{k} \cdot dz \cdot ds = dy \cdot dz \cdot \mathbf{i} + dx \cdot dz \cdot \mathbf{j} + dx \cdot dy \cdot \mathbf{k}$, az S felület normálisa pedig $\mathbf{n} = l \cdot \mathbf{i} + m \cdot \mathbf{j} + n \cdot \mathbf{k}$.

A felületi integrált kettős integrál-jellel is szokták jelölni ($\iint \dots$), ha pedig az S felület zárt, akkor egy kis kört is rárajzolnak az integrál-jelre.

A fenti képletek a felületi integrált egyszerű kettős-integrálökká alakították.

E három típus közül a második bír különösebb fontossággal, ugyanis az \mathbf{f} mennyiség fluxusát (egységnyi idő alatt átáramló mennyiségét) adja az S felületen keresztül (ezt általában Φ -vel jelölik); ilyen mennyiség például a térfogathozam, mely a lokális sebességek fluxusa.

Amennyiben az S felület zárt, akkor a második típusú integrál a zárt felület által lehatárolt térfogatban elnyelt vagy keletkező mennyiséget adja. Ha e felületet egy pontra zsugorítjuk, úgy az f mennyiség divergenciáját kapjuk az adott pontban.

A *térfogati integrálok* tulajdonképpen egyszerű hármas integrálok:

$$\text{a).} \quad \int_V f \, dV = \iiint_V f \, dx \, dy \, dz; \quad (\text{F.19})$$

$$\text{b).} \quad \int_V \mathbf{f} \, dV = \mathbf{i} \cdot \iiint_V f_x \, dx \, dy \, dz + \mathbf{j} \cdot \iiint_V f_y \, dx \, dy \, dz + \mathbf{k} \cdot \iiint_V f_z \, dx \, dy \, dz. \quad (\text{F.20})$$

A felületi és a térfogati integrálok között nevezetes a Gauss-Ostrogradsky szabállyal leírt kapcsolat: ha S egy V térfogat határfelülete, akkor egy deriválható \mathbf{f} vektorra:

$$\oint_S (l \cdot f_x + m \cdot f_y + n \cdot f_z) \, ds = \int_V \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) dV. \quad (\text{F.21})$$

Figyelembe véve a tagok jelentését e képletet vektoriális formában is felírhatjuk:

$$\oint_S \mathbf{f} \, ds = \int_V \text{div } \mathbf{f} \, dV, \quad (\text{F.22})$$

mely összefüggés a fluxus (a bal oldalon levő integrál) és a divergencia kapcsolatát adja.

A görbevonalú és a felületi integrálok kapcsolatára is van egy nevezetes Stokes-képlet, mely szerint ha C egy S felület határgörbéje, akkor egy deriválható \mathbf{f} vektorra:

$$\begin{aligned} & \oint_C f_x \, dx + f_y \, dy + f_z \, dz = \\ & = \int_S \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) dy \, dz + \int_S \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) dx \, dz + \int_S \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) dx \, dy, \end{aligned} \quad (\text{F.23})$$

melynek vektoriális formája:

$$\oint_C \mathbf{f} \, d\mathbf{r} = \int_S \text{rot } \mathbf{f} \, ds, \quad (\text{F.24})$$

a cirkuláció (a bal oldali integrál) és a rotor között teremt kapcsolatot.

A Stokes-képletet két dimenzióra átírva a görbevonalú és a kettős integrál kapcsolatát adó Green-képletet kapjuk:

$$\oint_C f_x \, dx + f_y \, dy = \int_S \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) dx \, dy \quad (\text{F.25})$$

(ekkor C a sík S tartomány pereme).

Könyvészet

1. CIOC, D.
1983 *Hidraulică*. Bukarest, Editura Didactică și Pedagogică
2. CZIBERE Tibor
1998 *Áramlástan*. Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó
3. FLOREA, J., PANAITESCU, V.
1979 *Mecanica fluidelor*. Bukarest, Editura Didactică și Pedagogică
4. FLOREA, J. et al.
1982 *Mecanica fluidelor și mașini hidropneumatice. Probleme*. Bukarest, Editura Didactică și Pedagogică
5. HASZPRA Ottó
1993 *Hidraulika*. Budapest, Műegyetemi Kiadó
6. IONESCU, D. Gh. et al.
1980 *Mecanica fluidelor și mașini hidraulice*. Bukarest, Editura Didactică și Pedagogică
7. KISELEV, P. G.
1988 *Îndreptar pentru calcule hidraulice*. Bukarest, Editura Tehnică
8. LÁTRÁNYI J., ZALKA A.
1982 *Válogatott fejezetek hidraulikus körfolyamatok tervezéséből*. Budapest, Műszaki Egyetem
9. PAVEL, D.
1969 *Mașini și instalații hidropneumatice*. Bukarest, Editura Didactică și Pedagogică
10. TODICESCU, A.
1974 *Mecanica fluidelor și mașini hidropneumatice*. Bukarest, Editura Didactică și Pedagogică
11. TROFIN, E.
1974 *Hidraulică și hidrologie*. Bukarest, Editura Didactică și Pedagogică
12. VLADIMIRESCU, I.
1974 *Mașini hidraulice și stații de pompare*. Bukarest, Didaktikai és Pedagógiai Könyvkiadó