Algebra és geometria

1. fejezet

Vektorterek

1.1. Vektorterek

1.1.1. Értelmezés. *Adott a* $(V, +)$ *kommutatív csoport és egy* K *kommutatív test.*

A V *halmazt* K *kommutatív test feletti vektorterének nevezzük, ha létezik egy* $f : K \times V \to V$, $f(k, v) = kv$ *leképezés, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:*

1. $k(v + w) = kv + kw$, $(\forall)\ k, l \in K$, $(\forall)\ v, w \in V$
2. $(k + l)v = kv + lv$, $(\forall)\ k, l \in K$, $(\forall)\ v \in V$
3. $k(lv) = (kl) \cdot v$, $(\forall)\ k, l \in K$, $(\forall)\ v \in V$
4. $1 \cdot v = v$, $(\forall)\ v \in V$

A vektortér jelölésére a $(V, +, K)$ *szimbólumot használjuk, vagy egyszerűen* V*-t ha nem áll fenn a félreértés veszélye.*

1.1.2. Tétel. *A* $(V, +, K)$ *vektortérben fennállnak a*

1. $0 \cdot v = 0$,
2. $k \cdot 0 = 0$, $(-1)v = -v$

összefüggések.

1.1.3. Értelmezés. *Adott a* $(V, +, K)$ *vektortér. Legyen* $W \subset V$.

Ha $(W, +, K)$ *szintén vektortér, akkor ezt a vektorteret a* $(V, +, K)$ *vektortér alterének nevezzük.*

1.1.4. Tétel. *A* $(V, +, K)$ *vektortérnek a* $W \subset V$ *halmaz akkor és csak akkor altere, ha*

1. $(\forall)\ u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$

2. $(\forall)\ v \in W$, $(\forall)\ \lambda \in K \Rightarrow \lambda v \in W$

1.1.5. Tétel. *Ha* W_1 *és* W_2 *két altere a* V *vektortérnek, akkor:*

1. $W_1 \cap W_2$ *altere* V*-nek.*

2. $W_1 + W_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in W_1, v_2 \in W_2\}$ *szintén altere a* V *vektortérnek.*

3. $W_1 \cup W_2$ *általában nem altere* V*-nek.*

1.1.6. Tétel. *Legyen* W_1 *és* W_2 *két altere a* $(V, +, K)$ *vektortérnek és* $v \in W_1 + W_2$.

A $v = w_1 + w_2$, $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$ *összegként való felírás akkor és csak akkor egyértelmű, ha* $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

1.1.7. Értelmezés. *Adott a* $(V, +, K)$ *vektortér. Legyen* $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$. *A* $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$ *vektort a* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *vektorok lineáris kombinációjának nevezzük.*

1.1.8. Értelmezés. *Legyen* $(V, +, K)$ *egy vektortér és* $S \subset V$, $S \neq \emptyset$. *Az* S *vektorrendszert lineárisan függőnek nevezzük, ha létezik* $v_1, v_2, \ldots, v_n \in S$, $v_i \neq v_j$, *ha* $i \neq j$ *és* $k_1, k_2, \ldots, k_n \in K$ *nem mind zérók úgy, hogy* $k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n = 0$. *Egy* S *vektorrendszer akkor lineárisan független, ha bármely* $v_1, \ldots, v_n \in S$ *páronként különböző vektorok esetén a* $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ *egyenlőségből következik, hogy:* $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

1.1.9. Példa. $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (2, 0, -1)$, $v_3 = (-1, 1, 3)$ *lineárisan független vektorrendszert alkotnak az* $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R})$ *vektortérben.*

Valóban ha feltételezzük, hogy $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$, akkor ez az egyenlőség a következő egyenletrendszerrel ekvivalens:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

Mivel a homogén rendszernek a determinánsa nem zéró, következik, hogy csak a triviális megoldása van, azaz $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

1.1.10. Megjegyzés. *Ha $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ egy vektorrendszer V-ben és $L(S)$ jelöli a $v_1, \ldots, v_n$ vektorokból képezhető összes lineáris kombinációk halmazát, akkor $L(S)$ bármely $n+1$ vektora lineárisan függő. Az $L(S)$ összes lineáris kombinációk halmaza altere V-nek.*

1.1.11. Értelmezés. *Legyen $(V, +, K)$ egy vektortér és $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$.*

Ha $L(S) = V$,, akkor az S vektorrendszert a V vektortér generálórendszerének nevezzük.

1.1.12. Értelmezés. *Ha $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ egy lineárisan független vektorrendszer és ugyanakkor generálórendszere is V-nek, akkor a B halmazt a V vektortér bázisának nevezzük.*

Ha B véges halmaz, akkor a B elemszámát a V vektortér dimenziójának nevezzük. Ha B végtelen, akkor a V vektortér végtelen dimenziós.

1.1.13. Példa.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_n \in \mathbb{R},\ n = \overline{1, n}\}$$

$(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R})$ egy n dimenziós vektortér.

$$B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}\ e_k = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k})$$

$k = \overline{1, n}$ *egy bázisa az* $\mathbb{R}^n$ *vektortérnek.*

Ezt a bázist kanonikus bázisnak is nevezzük.

1.1.14. Megjegyzés. *Legyen* V_n *n-dimenziós vektortér esetén. Ha* $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V_n$, *lineárisan független, akkor* B *bázisa a* V_n *vektortérnek.*

Ha $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ *bázisa a* V_n *vektortérnek, akkor bármely* $v \in V_n$ *vektor pontosan egyféleképpen írható fel a* B *bázis vektorainak lineáris kombinációjaként.*

Másképp fogalmazva egyetlen $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in K^n$ *szám n-es létezik úgy, hogy* $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$.

A $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *számokat a* v *vektor koordinátáinak nevezzük a* $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *bázisban.*

1.1.15. Értelmezés. *A* V_n *vektortérben adott két bázis* $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ *és* $B' = \{e'_1, e'_2, + \dots, e'_n\}$.

Ha az

$$\begin{aligned}
e'_1 &= \sum_{i=1}^{n} a_{i_1} e_i = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n \\
e'_2 &= \sum_{i=1}^{n} a_{i_2} e_i = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
e'_n &= \sum_{i=1}^{n} a_{i_n} e_i = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n
\end{aligned}$$

egyenlőségekkel értelmezzük az

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrixot, akkor az A *mátrixot áttérési mátrixnak nevezzük a* B *bázisról a* B' *bázisra.*

1.1.16. Példa. *a) Legyen az* $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R})$ *vektortér kanonikus bázisa* $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, *ahol* $e_1 = (1, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1)$, *továbbá legyen*

$$B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}, \quad e'_1 = (1, 0, 1),\ e'_2 = (-1, 2, 0),\ e'_3 = (3, 1, 1)$$

egy másik bázis.

A bázisok vektorai között a következő összefüggések állnak fenn:

$$\begin{aligned} e_1' &= e_1 + \quad e_3 \\ e_2' &= -e_1 + 2e_2 \\ e_3' &= 3e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned} \qquad {}^{T}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát az áttérési mátrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

b) Jelölje $\mathbb{R}_2[x]$ a valós együtthatós, legfennebb másodfokú polinomok halmazát. Egyszerű belátni, hogy $(\mathbb{R}_2[x], +, \mathbb{R})$ vektortér.

Az $\mathbb{R}_2[x]$ vektortér bázisa $B = \{1, x, x^2\}$, egy másik bázis $B' = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$. Az áttérési mátrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.1.17. Tétel. *Egy V_n vektortérnek legyen $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ és $B' = \{e_1', e_2', \ldots, e_n'\}$ két bázisa.*

Jelölje A az áttérési mátrixot a B bázisról a B' bázisra.

Ha egy $v \in V_n$ vektort felírunk a két bázis segítségével

$$\begin{aligned} v &= x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n \\ v &= x_1'e_1' + x_2'e_2' + \ldots + x_n'e_n', \end{aligned}$$

akkor x_i, $i = \overline{1,n}$ és x_i' $i = \overline{1,n}$ számokat a v vektor koordinátáinak nevezzük a B és B' bázisban.

A koordináták közötti összefüggés így írható fel:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}, \text{ ahol } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

az áttérési mátrix.

Egy báziscsere esetén egy vektor koordinátáinak változását a következő tétel írja le:

1.1.18. Tétel. *(kicserélési lemma) Legyen $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ egy bázisa a $(V_n, +, K)$ vektortérnek és legyen $v \in V_n$, $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$. A*

$$B^* = \{e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, v, e_{i+1}, \ldots, e_n\}$$

vektorrendszer akkor és csak akkor bázisa a vektortérnek, ha $\alpha_i \neq 0$.

Ha B^* bázis a V_n vektortérnek, akkor egy $v \in V_n$ vektornak a B^* bázisra vonatkozó koordinátái $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_n^*)$ és ugyanakkor a v vektornak a B bázisra vonatkozó koordinátái $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ között a következő összefüggés áll fenn:

$$\lambda_i^* = \frac{\lambda_i}{\alpha_i},\ \lambda_j^* = \lambda_j - \frac{\alpha_j \lambda_i}{\alpha_i},\ i \neq j.$$

Ezeket az összefüggéseket egy táblázatba foglalhatjuk a következőképpen:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & \ldots & v & \ldots & x \\
\hline
e_1 & & \alpha_1 & & \lambda_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
e_i & & \alpha_i & & \lambda_i \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
e_j & & \alpha_j & & \lambda_j \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
e_n & & \alpha_n & & \lambda_n
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{c|ccccc}
 & \ldots & v & \ldots & x \\
\hline
e_1 & & 0 & & \frac{\lambda_1\alpha_i - \alpha_1\lambda_i}{\alpha_i} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
v & & 1 & & \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
e_j & & 0 & & \frac{\lambda_j\alpha_i - \alpha_j\lambda_i}{\alpha_i} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
e_n & & 0 & & \frac{\lambda_n\alpha_i - x_n\lambda_i}{\alpha_i}
\end{array}$$

A B bázisban a koordináták — *A B^* bázisban a koordináták*

Ha a B bázisból az e_i vektort cseréljük ki v-vel, akkor α_i-t nevezzük generáló elemnek.

A B bázisra vonatkozó koordináta táblázatból úgy kapjuk a B^*-ra vonatkozó koordináták táblázatát, hogy a generáló elem oszlopában minden elem helyére zérót írunk kivéve α_i helyét, ahová egy kerül.

Az α_i sorában szereplő többi elemet elosztjuk α_i-vel.

A táblázat többi elemét egy úgynevezett téglalapszabállyal határozzuk meg:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
\alpha_i \arrow[r] \arrow[d] & \lambda_i \arrow[d] & & 1 \arrow[r] \arrow[d] & \dfrac{\lambda_i}{\alpha_i} \arrow[d] \\
\alpha_j \arrow[r] & \lambda_j & \longrightarrow & 0 \arrow[r] & \dfrac{\alpha_i\lambda_j-\lambda_i\alpha_j}{\alpha_i}
\end{tikzcd}$$

1.1.19. Alkalmazások. *a) Igazoljuk, hogy a* $v_1=(2,1,1)$, $v_2=(3,2,1)$, $v_3=(-1,-1,-2)$ *vektorok egy bázisát képezik az* $\mathbb{R}^3$ *vektortérnek és írjuk fel a* $v=(1,-1,-2)$ *vektort ebben a bázisban.*

Megoldás

$\{e_1,e_2,e_3\}$ legyen a kanonikus bázisa $\mathbb{R}^3$-nek

	v_1	v_2	v_3	v
e_1	**2**	3	-1	1
e_2	1	2	-1	-1
e_3	1	1	-2	-2

$\longrightarrow$

	v_1	v_2	v_3	v
v_1	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
e_2	0	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
e_3	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$

	v_1	v_2	v_3	v
v_1	1	0	1	5
v_2	0	1	-1	-3
e_3	0	0	**-2**	-4

$\longrightarrow$

	v_1	v_2	v_3	v
v_1	1	0	0	3
v_2	0	1	0	-1
v_3	0	0	1	2

b) Oldjuk meg a

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=1 \\ x_1+2x_2+x_3=-1 \\ x_1+x_2-2x_3=-2 \end{cases}$$

egyenletrendszert a kicserélési lemmával.

Megoldás

A rendszer mátrixa $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Ha x_1, x_2, x_3 megoldása a rendszernek, akkor $v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2 + v_3 \cdot x_3 = v$, ahol $v_1 = (2,1,1)$, $v_2 = (3,2,1)$, $v_3 = (1,1,-2)$ és $v = (1,-1,-2)$.

Legyen megint $\mathbb{R}^3$ kanonikus bázisa $\{e_1, e_2, e_3\}$.

A következő táblázatot készíthetjük el:

	v_1	v_2	v_3	v
e_1	**2**	3	1	1
e_2	1	2	1	-1
e_3	1	1	-2	-2

$\longrightarrow$

	v_1	v_2	v_3	v
v_1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
e_1	0	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
2_2	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$

	v_1	v_2	v_3	v
v_1	1	0	-1	5
v_2	0	1	1	-3
e_3	0	0	**-2**	-4

$\longrightarrow$

	v_1	v_2	v_3	v
v_1	1	0	0	7
v_2	0	1	0	-5
v_3	0	0	1	2

Tehát a megoldás $x_1 = 7$, $x_2 = -5$, $x_3 = 2$.

c) Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét.

Azt az $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & x' \\ y & y' \end{bmatrix}$ mátrixot kell meghatározni, amely esetén teljesül, hogy

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 7x + 5y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x' + 3y' = 0 \\ 7x' + 3y' = 1 \end{cases}$$

Vektoriálisan ez így írható: $\begin{matrix} xv_1 + yv_2 = e_1 \\ x'v_1 + y'v_2 = e_2 \end{matrix}$ ahol $v_1 = (4,7)$, $v_2 = (3,5)$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & v_1 & v_2 & e_1 & e_2 \\
\hline
e_1 & \mathbf{1} & 3 & 1 & 0 \\
e_2 & 7 & 5 & 0 & 1
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{c|cccc}
 & v_1 & v_2 & v_3 & v \\
\hline
v_1 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\
e_2 & 0 & -\mathbf{\frac{1}{4}} & -\frac{7}{4} & 1
\end{array}
$$

$$
\longrightarrow
\begin{array}{c|cccc}
 & v_1 & v_2 & e_1 & e_2 \\
\hline
v_1 & 1 & 0 & \text{-5} & 3 \\
v_2 & 0 & 1 & 7 & \text{-4}
\end{array}
$$

Tehát: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$.

Kitűzött feladatok

1. Adott az $[a, b]$ intervallum.

   Igazoljuk, hogy az $\{f \mid f\ [a, b] \to \mathbb{R},\ f$ folytonos$\}$ függvényhalmaz a függvények összeadásával és valós számmal való szorzással, $\mathbb{R}$ feletti vektorteret képez.

2. $C^{(n)}([a, b]) = \{f \mid f : [a, b] \to \mathbb{R},\ f$ n-szer deriválható és $f^{(n)} : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos$\}$. Igazoljuk, hogy a $C^{(n)}([a, b])$ halmaz a függvények összeadásával és valós számmal való szorzással, $\mathbb{R}$ feletti vektorteret képez.

3. Legyen $\mathcal{A} = \{f \in C^{(n)}([a, b]) :$

   $$f^{(n)}(x) + a_1(x) f^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot f(x) = 0\},$$

   ahol $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ adott folytonos függvények a függvények összeadásával és valós számmal való szorzással, $\mathbb{R}$ feletti vektortér.

4. Jelölje $\mathbb{C}_n[x]$ a legfennebb n-ed fokú komplex együtthatós polinomok halmazát.

   $$
   \begin{aligned}
   A &= \{P \in \mathbb{C}_n[x] \mid P(0) = h,\ h \neq 0\} \\
   B &= \{P \in \mathbb{C}_n[x] \mid P(0) - 3P(1) = 0\} \\
   C &= \{P \in \mathbb{C}_n[x] \mid P(1) + \cdots + P(k) = 0\}
   \end{aligned}
   $$

   $(k, h$ adott$)$

Döntsük el, hogy A, B, C közül melyik altere a $(\mathbb{C}_n[x], +, \mathbb{C})$ vektortérnek.

Feladatok (kicserélési lemma)

1. $\mathbb{R}_3[x]$ jelölje a legfennebb harmadfokú valós együtthatós polinomok halmazát

   Igazoljuk, hogy:

$$\begin{aligned} B_1 &= \{1, x, x^2, x^3\} \\ B_2 &= \{1 + x^2, x + x^2, x^3 + x^2\} \\ B_3 &= \left\{1, x-1, \frac{1}{2!}(x-1)^1, \frac{1}{3!}(x-1)^3\right\} \end{aligned}$$

   vektorrendszerek bázisát képezik az $(\mathbb{R}_3[x], +, \mathbb{R})$ vektortérnek.

2. Az $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R})$ vektortérben adott a $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (1, -2, 1)$, $v_3 = (1, 1, -1)$, $v = (4, 9, -6)$, $w = (1, 8, 5)$ vektor.

   Igazoljuk, hogy $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ bázisát képezi az $\mathbb{R}^3$ vektortérnek. Fejezzük ki a v és w vektorokat ebben a bázisban.

3. Adott a $(\mathbb{Z}_5^3, +, \mathbb{Z}_5)$ vektortér és a $v_1 = (\hat{2}, \hat{3}, \hat{1})$, $v_2 = (\hat{1}, \hat{2}, \hat{4})$, $v_3 = (\hat{0}, \hat{1}, \hat{1})$, $v = (\hat{4}, \hat{2}, \hat{1})$ vektorok. Igazoljuk, hogy $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ bázisa a $(\mathbb{Z}_5^3, +, \mathbb{Z}_5)$ vektortérnek és fejezzük ki a v vektort ebben a bázisban.

4. Oldjuk meg az egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases}$$

5. Határozzuk meg a következő mátrixok inverzeit:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix},$$

6. Az $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R})$ vektortérben adott $v_1 = (1, -2, 3)$, $v_2 = (2, -1, 2)$, $v_3 = (1, 1, -1)$, $v_4 = (4, -2, 4)$. A $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ vektorrendszernek határozzuk meg egy lineárisan független, maximális részrendszerét.

7. Az $(\mathbb{R}_3[x], +, \mathbb{R})$ vektortérben a $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 10$ polinomot fejezzük ki a $B = \{1, x-2, (x-2)^2, (x-2)^3\}$ bázis vektorainak lineáris kombinációjaként.

2. fejezet

Skaláris szorzat, Euklideszi terek

2.1. Skaláris szorzat, Euklideszi terek

2.1.1. Értelmezés. *Adott a* $(V, +, \mathbb{R})$ *vektortér.*

Az $f : V \times V \to \mathbb{R}$, $f(x, y) =< x, y >$ *függvényt, amely teljesíti az*

1. $< x, y >=< y, x >$, $(\forall)\ x, y \in V$
2. $< x, y + z >=< x, y > + < x, z >$, $(\forall)\ x, y, z \in V$
3. $< k, x, y >= k < x, y >$, $(\forall)\ x, y \in V$, $(\forall)\ k \in \mathbb{R}$
4. $< x, x >\geq 0$, $(\forall)\ x \in V$ *és ha* $< x, x >= 0$, *akkor* $x = 0$,

skaláris szorzatnak nevezzük. Az 1. ...4. feltételeket a skaláris szorzat axi-ómáinak nevezzük.

2.1.2. Megjegyzés. *Ha* V *egy* $\mathbb{C}$ *feletti vektortér, akkor* $f : V \times V \to \mathbb{C}$, $f(x, y) =< x, y >$ *és a skaláris szorzat értelmezésében szereplő feltételek közül az 1. feltételt ki kell cserélni az 1'.* $< x, y >= \overline{< y, x >}$ *feltétellel.*

2.1.3. Példa. *a) Adott* $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R})$ *a vektortér. Legyen* $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Az $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ *egyenlőséggel értelmezett művelet teljesíti a skaláris szorzat axiómáit.*

Bizonyítás. 1. $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i =< y, x >$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}^n$

2. $< x, y + z >= \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i + z_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i z_i =< x, y > + < x, z >_n$, $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{R}^n$

3. $< \lambda x, y >= \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i y_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \lambda < x, y >$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}^n\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$.

4. $< x, x >= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}^n$ $< x, x >= 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 \Rightarrow x = 0$.

$\square$

b) Legyen $(\mathbb{R}_2[x], +, \mathbb{R})$ *a valós együtthatós legfennebb másodfokú polinomok (vektortere) lineáris tere és.*

$$< P, Q >= \int_0^1 P(x)Q(x)dx.$$

Igazoljuk, hogy az így értelmezett kétváltozós művelet is teljesíti a skaláris szorzat axiómáit.

Bizonyítás. 1. $< P, Q >= \int_0^1 p(x)Q(x)dx = \int_0^1 Q(x)p(x)dx =< Q, P >$, $(\forall)\ P, Q \in \mathbb{R}_2[x]$.

2. $< P, Q + R >= \int_0^1 p(x)(Q(x) + R(x))dx = \int_0^1 P(x)Q(x)dx + \int_0^1 P(x)R(x)dx =< P, Q > + < P, R >$, $(\forall)\ P, Q, R \in \mathbb{R}_2[x]$.

3. $< \lambda P, q >= \int_0^1 \lambda P(x)Q(x)dx = \lambda \int_0^1 P(x)Q(x)dx = \lambda < P, Q >$.

4. $< P, P >= \int_0^1 P^2(x)dx \geq 0$, $(\forall)\ P \in \mathbb{R}_2[x]$, $\int_0^1 P^2(x)dx = 0 \Rightarrow P^2(x) = 0$, $(\forall)\ x \in [0, 1] \Rightarrow P(x) = 0$, $(\forall)\ x \in [0, 1]$ $P(x) = ax^2 + b + c \Rightarrow a = b = c = 0 \Rightarrow P = 0$.

$\square$

2.1.4. Tétel. *(Cauchy-Schwarz)*

Ha a V vektortéren egy skaláris szorzatot értelmezünk, akkor fennáll a $| < x, y > |^2 \leq < x, x > \cdot < y, y >$ egyenlőtlenség.

2.1.5. Értelmezés. *Ha egy V vektortéren értelmezett egy skaláris szorzat, akkor a vektorteret Euklidészi térnek nevezzük.*

Bevezetjük a $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ jelölést, amit az x vektor normájának nevezünk.

Egy V Euklidészi térben bármely $x, y \in V$ esetén teljesül, hogy

$$-1 \leq \frac{< x, y >}{\|x\|\|y\|} \leq 1.$$

Azt a $\theta \in [0, \pi]$ valós szálot, amelyre igaz, hogy

$$\cos\theta = \frac{< x, y >}{\|x\| \, \|y\|}$$

az x és y vektorok hajlásszöge mértékének nevezzük.

A norma tulajdonságai:

1. $\|x\| \geq 0$, $(\forall)\ x \in V$, $\|x\| = 0$, akkor $x = 0$;

2.
   $kx\| = |k|\ \|x\|, \forall\ x \in V,\ k \in K;$

3. $\|x + \| \leq \|x\| + \|y\|$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

A $d(x, y) = \|x - y\|$ egyenlőséggel értelmezett függvényt távolságnak (metrikának) nevezzük.

A metrika tulajdonságai:

1. $d(x, y) > 0$, $(\forall)\ x, y \in V$; $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$;

2. $d(x, y) = d(y, x)$, $(\forall)\ x, y \in V$;

3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $(\forall)\ x, y, z \in V$.

2.1.6. Értelmezés. *A V Euklideszi térben az $x \neq 0$ és $y \neq 0$ vektorokat ortogonálisnak nevezzük, ha $< x, y >= 0$.*

Egy vektorrendszer akkor ortogonális, ha bármely két vektor a rendszerből ortogonális.

2.1.7. Tétel. *Egy euklidészi térben, ha egy vektorrendszer nem tartalmazza a null vektort és ortogonális, akkor lineárisan független.*

2.1.8. Példa. *a) Igazoljuk, hogy az $(\mathbb{R}_2[x], +, \mathbb{R})$ vektortérben $< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx$ skaláris szorzat.*

b) Ortogonalizáljuk a Gram-Schmidt módszerrel a $B = \{1, x, x^2\}$ bázist.

Megoldás

a) Az integrál tulajdonságaiból következik, hogy $< f, g >=< g, f >$, $< f + g, h >=< f, h > + < g, h >$, $< \lambda f, g >= \lambda < f, g >$.

Az is nyilvánvaló, hogy $< f, f >= \int_0^1 f^2(x)dx \geq 0$.

Bizonyítsuk be, hogy ha $< f, f >= 0$, akkor $f = 0$.

Tegyük fel, hogy létezik $x_0 \in [0, 1]$ úgy hogy $f(x_0) \neq 0$. Az f függvény folytonosságából következik, hogy létezik $\varepsilon > 0$ úgy, hogy $|f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{2}$, $(\forall)$ $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Innen az következik, hogy

$$< f, f >= \int_0^1 f^2(x)dx > \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f^2(x)dx > \frac{f^2(x_0)}{4} \cdot 2\varepsilon > 0,$$

de ez ellentmond az $< f, f >= 0$ feltevésnek. Tehát $f(x) = 0$ $(\forall)$ $x = [0, 1]$, vagyis f csak a zéró polinom lehet, mert ellenkező esetben végtelen sok gyöke lenne.

b)

$w_1 = 1$
$w_2 = x + \lambda_{21} w_1$
$w_3 = x^2 + \lambda_{31} w_1 + \lambda_{32} w_2$

$$< w_1, w_2 >= 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (x + \lambda_{21})dx = 0 \Rightarrow \lambda_{21} = -\frac{1}{2} \Rightarrow w_2 = x - \frac{1}{2}$$
$$< w_1, w_3 >= 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (x^2 + \lambda_{31})dx = 0 \Rightarrow \lambda_{31} = -\frac{1}{3}$$
$$< w_2, w_3 >= 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[x^2 \left(x - \frac{1}{2} \right) + \lambda_{32} \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 \right] dx = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_{32} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow \lambda_{32} = -2$$
$$w_3 = x^2 - \frac{1}{3} - 2\left(x - \frac{1}{2} \right) = x^2 - 2x + \frac{2}{3}$$

Kitűzött feladatok

1. Felírható-e a $w = (1, -2, 0, 3)$ vektor a $v_1 = (3, 9, -4, -2)$, $v_2 = (2, 3, 0, -1)$ és $v_3 = (2, -1, 2, 1)$ vektorok lineáris kombinációjaként?

2. A $C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ folytonos}\}$.

   a) Igazoljuk, hogy $(C(\mathbb{R}), +, \mathbb{R})$ lineáris tár.

   b) Vizsgáljuk meg, hogy a $C(\mathbb{R})$ térben a $B_1 = \{1, \cos 2x, \sin^2 x\}$, $B_2 = \{e^x, e^{-x}, \text{ch } x\}$ és $B_3 = \{e\text{'}xe^x, \ldots, x^n, e^x\}$ függvényrendszerek lineárisan függőek-e vagy lineárisan függetlenek.

3. $\mathcal{A} = \left\{ A \mid A = \begin{bmatrix} x & 0 & y \\ u & v & 0 \end{bmatrix} \; y = u - 3v;\; x, y, u \in \mathbb{R} \right\}$

   a) Igazoljuk, hogy $\mathcal{A}$ altere az $(\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}), +, \mathbb{R})$ vektortérnek.

   b) Határozzuk meg az $\mathcal{A}$ altér egy bázisát.

4. Legyen V a $B = \{1, \cos x, \cos^2 x, \cos^3 x\}$ vektorrendszer által generált, $\mathbb{R}$ feletti vektortér. Igazoljuk, hogy a V vektortérnek $B' = \{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x\}$ bázisa és írjuk fel az áttérési mátrixot B-ről B'-re.

5. Igazoljuk, hogy az $(\mathbb{R}_n[x], +, \mathbb{R})$ vektortérben a $< p, q >= \sum_{i=0}^{n} (i!)^2 a_i b_i$

skaláris szorzat, ahol

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \\ q(x) &= b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n \end{aligned}$$

Számítsuk ki ebben a vektortérben $p(x) = 4 + x^2$ és $q(x) = 2 - 3x - 2x^2$ vektorok hajlásszögét.

6. A $(C^0([0,1]), +, \mathbb{R})$ vektortérben a skaláris szorzatot az $(f, g) = \int_0^f (x)g(x)fx$ egyenlőséggel értelmezzük.
Határozzuk meg $d(f,g)$-t és $\|g\|$-t ha $f(x) = x$, $g(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 - x, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$

7. Az $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R})$ vektortérben adott az $S = \{v_1, v_2, v_3\}$, $v_1 = (-3, 0, 7)$, $v_2 = (1, 4, 3)$, $v_3 = (2, 2, -2)$ vektorrendszer. Határozzuk meg a merőleges vetületét a $w = (14, -3, -6)$ vektornak az S rendszer által generált altérre.

8. Az $(\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R})$ vektortérnek a $v_1 = (1, 1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 4, 0, 1)$, $v + 3 = (1, -1, 1, 0)$, $v_4 = (1, 3, 0, 1)$ vektorokból álló rendszer egy alterét generálja. Határozzuk meg ennek az altérnek egy ortonormált bázisát.

9. Az $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R})$ vektortér esetén adott az $<\ ,\ >: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i y_i$ leképezés, ahol $\alpha_i, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ adott valós számok. Igazoljuk, hogy $< x, y >$ akkor és csak akkor skaláris szorzat, ha $\alpha_i > 0$.

10. Igazoljuk, hogy az $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R})$ vektortérben fennáll az

$$< x, y >= \frac{\|x + \|^2 - \|x - y\|^2}{4}$$

egyenlőség, ahol $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ és $< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots x_ny_n$.

3. fejezet

Lineáris transzformációk

3.1. Értelmezés és tulajdonságok

3.1.1. Értelmezés. *Legyen V és W két $\mathbb{R}$ feletti vektortér.*

Az $f : V \to W$ lineáris leképezésnek nevezzük, ha

a) f additív: $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $(\forall)\ x, y \in V$

b) f homogén: $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, $(\forall)\ x \in V$, $(\forall)\ \lambda \in \mathbb{R}$.

3.1.2. Megjegyzés. *Az előző értelmezés két feltételét összevont alakban így írhatjuk:*

$$f(\lambda x + \omega y) = \lambda f(x) + \omega f(y),\ (\forall)\ x, y \in V,\ (\forall)\ \lambda, \omega \in \mathbb{R}.$$

3.1.3. Tulajdonság. *Ha $f : V \to W$ egy lineáris leképezés, akkor:*

a) $f(0) = 0$;

b) ha H egy altere V-nek, akkor $f(H)$ altere lesz W-nek;

c) ha $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ bázisa a V vektortérnek, akkor az $f(e_i) = w_i$, $i = \overline{1, n}$ vektorok egyértelműen meghatározzák az f leképezést.

3.2. A magtér és a képtér

3.2.1. Értelmezés. *Adott az $f : V \to W$ lineáris leképezés. A* $\mathrm{Ker}\,(f) = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$ *halmazt az f lineáris transzformáció magterének nevez-*

zük.

A $\operatorname{Ker}(f)$ *halmaz altere a* V *vektorterének.*

Az $\operatorname{Im}(f) = \{y \in W \mid \exists\, x \in V : f(x) = y\}$ *halmazt az* f *lineáris transzformáció képterének nevezzük.*

Az $\operatorname{Im}(f)$ *halmaz altere a* W *vektorterének.*

3.2.2. Megjegyzések. *1. Az* f *lineáris leképezés akkor és csak akkor injektív, ha* $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$.

2. Bármely $f : V \to W$ *lineáris leképezés esetén igaz a következő összefüggés*

$$\dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f) = \dim V.$$

3. Ha az $f : V \to W$ *lineáris transzformáció injektív és* $\dim V = \dim W = n$, *akkor* f *bijektív.*

3.2.3. Példa. *Adott az* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x_1 + x_3, x_1 - 2x_2 - x_3)$ *lineáris leképezés.*

1. Igazoljuk, hogy f *lineáris.*

2. Határozzuk meg a $\operatorname{Ker}(f)$ *és* $\operatorname{Im}(f)$ *vektorterek egy-egy bázisát.*

Megoldás

1. $f(x) + f(y) = (x_1 + x_3, x_1 - 2x_2 - x_3) + (y_1 + y_3, y_1 - 2y_2 - y_3) =$

   $(x_1 + y_1 + x_3 + y_3, x_1 + y_1 - 2(x_2 + y_2)) = f(x + y)$

   $f(\lambda x) = (\lambda x_1 + \lambda x_3, \lambda x_1 - 2\lambda x_2 - \lambda x_3) = \lambda f(x).$

2. $x \in \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

   $x_2 = \lambda \Rightarrow x_1 = \lambda \Rightarrow x_3 = -\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$

   $x = (x_1, x_2, x_3) = (\lambda, \lambda, -\lambda) = \lambda(1, 1, -1).$

Tehát bármely $x \in \operatorname{Ker}(f)$ vektor esetén létezik $\lambda \in \mathbb{R}$, hogy $\operatorname{Ker}(f) = \{\lambda(1,1,-1)\} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. $y \in \operatorname{Im}(f) \Leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{R}^3 : f(x) = y$.

Ez az ekvivalencia azt jelenti, hogy azok az $y \in \mathbb{R}^2$ vektorok tartalmaznak a képtérhez, amelyek esetén $f(x) = y$ egyenletnek van x-ben megoldása. Legyen $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2)$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = y_1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = y_2 \end{cases} \tag{3.1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & y_1 \\ 1 & -2 & -1 & y_2 \end{bmatrix}$$

Mivel $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A}$ következik, hogy a rendszernek bármely y_1, y_2 esetén van megoldása, tehát minden $y = (y_1, y_2)$ vektor az $\operatorname{Im}(f)$ képtérhez tartozik, azaz $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

$\dim \operatorname{Ker}(f) = 1$, $\dim \operatorname{Im}(f) = 2$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, következik, hogy:

$$\dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^3.$$

Feladatok

1. Legyen $\mathcal{A} = \{f \mid f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f \text{ folytonos}\}$ és $T(f) = g$, ahol $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

   Határozzuk meg a $\operatorname{Ker} T$ magteret!

2. A $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformációt $T(e_1) = (2,1)$, $T(e_2) = (0,1)$, $T(e_3) = (1,1)$ egyenlőséggel határozzák meg $(e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1))$.

   a) Számítsuk ki $T(x_0)$ ahol $x_0 = (2,3,-1)$.

   b) határozzuk meg a $\operatorname{Ker} T$ magteret!

3. Az $(\mathbb{R}_n[x], +, \mathbb{R})$ vektortérben értelmezzük a $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_1[x]$, $T(P)(x) = x \displaystyle\int_0^1 tP(t)dt$ leképezést.

   a) Igazoljuk, hogy T lineáris;

   b) Határozzuk meg a $\operatorname{Ker}(T)$ és $\operatorname{Im}(T)$ tereket.

4. Legyen V egy vektortér és $f : V \to V$ egy olyan endomorfizmus, amely teljesíti az $f(f(x)) - f(x) + x = 0$, $(\forall)\ x \in V$. Igazoljuk, hogy f bijektív.

3.3. Lineáris leképezés mátrixa

3.3.1. Értelmezés. *Legyen $f : V_n \to W_n$ egy lineáris leképezés, $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ egy bázisa a V_n vektortérnek és $B' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ egy bázisa a W_m vektortérnek. Azt az $A_f = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_m \times n(\mathbb{R})$ mátrixot, amelynek az a_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ komponensei teljesítik az*

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i,\ j = \overline{1,n}$$

egyenlőségeket az f lineáris transzformáció mátrixának nevezzük.

3.3.2. Megjegyzés. *Ha $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ és $y = f(x) = \sum_{i=1}^{m} y_i w_i$ akkor az $X = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és $Y = {}^t(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ oszlopmátrixok teljesítik az $Y = A_f \cdot X$ összefüggést.*

3.3.3. Tétel. *Adott az $f : V_n \to V_n$ lineáris leképezés. Ha a B bázisban az f leképezés mátrixa A_f és egy B bázisban az f mátrixa B_f, akkor*

$$B_f = C^{-1} A_f C,$$

ahol C az áttérési mátrix a B bázisról a B' bázisra.

3.3.4. Megjegyzés. *Az $f : V_n \to V_n$ lineáris leképezés (endomorfizmus), akkor is csak akkor bijektív, ha a leképezés mátrixának determinánsa nem zéró. Egy bijektív lineáris leképezést izomorfizmusnak nevezzük.*

Feladatok

1. Döntsük el, a következő leképezés közül melyek lineárisak:

$$f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ i = \overline{1,3}$$
$$f_1(x) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_3)$$
$$f_2(x) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_3)$$
$$f_3(x) = (x_1, x_2, x_3^2).$$

A lineáris leképezés esetén határozzuk meg a $\mathrm{Ker}\,(f_i)$ nullteret és az $\mathrm{Im}\,(f_i)$ képteret.

2. Az $\mathbb{R}_n[x]$ legfennebb n-ed fokú polinomok halmazában értelmezzük a $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$, $T(P)(x) = P(x+2) - P(x)$ leképezést. Igazoljuk, hogy T lineáris leképezés és határozzuk meg $\mathrm{Ker}\,(T)$ nullteret és az $\mathrm{Im}\,(T)$ képteret.

   Írjuk fel a T leképezés mátrixát a $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ bázisban.

3. Adott az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3)$ leképezés.

   Igazoljuk, hogy f lineáris.

   Határozzuk meg a $\mathrm{Ker}\,(T)$ nullteret és az $\mathrm{Im}\,(T)$ képteret.

   Íirjuk fel a T leképezés mátrixát, ha B az $\mathbb{R}^3$ tér kanonikus bázisa és $B' = \{(1,1), (1,-1)\}$ az $\mathbb{R}^2$ tér bázisa.

4. Legyen $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n+1}[x]$, $T(P)(x) = \displaystyle\int_0^x P(t)dt$, $(\forall)\ P \in \mathbb{R}_n[x]$.

   Mutassuk meg, hogy T lineáris.

   Határozzuk meg a $\mathrm{Ker}\,(T)$ és $\mathrm{Im}\,(T)$ tereket.

   Írjuk fel T mátrixát, ha a két vektortérben a kanonikus bázisokat tekintjük.

5. Mutassuk ki, hogy az $\mathbb{R}_n[x]$ és $\mathbb{R}^{n+1}$ terek izomorfak.

6. Igazoljuk, hogy ha két véges dimenziós tér között létezik egy izomorfizmus, akkor a két térnek ugyanannyi a domenziója.

7. Legyen V egy $\mathbb{R}$ feletti vektortér, $\dim(V) = n$. Legyen $V^* = \{T : V \to \mathbb{R} \mid T \text{ lineáris leképezés}\}$.

   Igazoljuk, hogy V^* a

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x),\ x \in V$$
$$(\alpha T)(x) = \alpha T(x),\ x \in V, \alpha \in \mathbb{R}$$

   műveletekkel $\mathbb{R}$ feletti vektortér és $\dim(V^*) = n$.

8. A $T : C([0,1]) = C([0,1])$ lineáris leképezést a $T(f)(x) = xf(x)$ egyenlőséggel értelmezzük. Mutassuk meg, hogy T egy lineáris injektív leképezés!

9. Legyen V egy euklideszi tér.

   $T : V \to V$ leképezést normális operátornak nevezzük, ha $TT^* = T^*T$. Mutassuk meg, hogy T akkor és csak akkor normális, ha $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$, $x \in V$.

4. fejezet

Sajátterek, sajátvektorok, mátrixok diagonizálása

4.1. Sajátérték sajátvektor

4.1.1. Értelmezés. *Adott a* $(V, +, \mathbb{R})$ *vektortér és a* $T : V \to V$ *endomorfizmus.*

A $\lambda \in \mathbb{R}$ *számot sajátértéknek nevezzük, ha létezik egy* $x \in V \setminus \{0\}$ *vektor úgy, hogy* $T(x) = \lambda x$. *Az* x *vektor a* λ *sajátértéknek megfelelő sajátvektornak nevezzük.*

4.1.2. Megjegyzés.

1. *Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.*
2. *Egy sajátértékhez tartozó vektorok halmaza a nullvektorral a* V *vektortér egy alterét képezik.*
3. *Két különböző sajátértékhez tartozü két altér metszete a nullvektorból álló halmaz.*

4.2. Sajátérték és sajátvektorok meghatározása

Legyen $(V_n, +, \mathbb{R})$ egy n dimenziós vektortér és $T : V_n \to V_n$ egy endomorfizmus.

Az értelmezés szerint $\lambda \in \mathbb{R}$ sajátértéke T-nek, ha van olyan $x \in V_n \setminus \{0\}$ vektor, hogy $T(x) = \lambda x$.

Ha $A_t - (a_{ij})_{\substack{i=1,n \\ j=1,n}}$ a T endomorfizmus mátrixa és $x =^t (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a λ sajátértéknek megfelelő sajátvektor, akkor a $T(x) = \lambda x$ egyenlet az

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszerrel ekvivalens.

Ennek a homogén rendszernek, csak akkor van zérótól különböző megoldása, ha

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

4.2.1. Értelmezés. *Legyen A_T a $T : V_n \to V_n$ endomorfizmus mátrixa. A $P(\lambda) = \det(A_T - \lambda I_n) = 0$ egyenlet az A_T mátrix és a T endomorfizmus karakterisztikus egyenletének nevezzük. A karakterisztikus egyenlet gyökei a T endomorfizmus sajátértékei.*

Egy $T : V_n \to V_n$ endomorfizmus mátrixának alakja függ a V_n vektortér bázisától.

A cél olyan bázis meghatározása, amely esetén az A^T mátrix minél egyszerűbb. A következő tétel erre a kérdésre ad választ.

4.2.2. Tétel. *Ha a V_n vektortérnek van egy olyan bázisa, amelynek vektorai a $T : V_n \to V_n$ endomorfizmus sajátvektorai, akkor az T endomorfizmus mátrixa*

$$A_T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

alakú lesz, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ a leképzés sajátértékeit jelöli:

4.2.3. Tétel. *Adott a $(V_n, +\mathbb{R})$ vektortér és a $T : V_n \to V_n$ endomorfizmus.*

A T endomorfizmus A_T mátrixa akkor és csak akkor diagonizálható, ha a $P(\lambda) = \det(A_T - \lambda I_n) = 0$ karakterisztikus egyenletnek a gyöke valósak és minden λ_i sajátértékhez tartozó altere V_n-nek annyi dimenziós ahányszoros gyökei λ_i a $P(\lambda) = 0$ egyenletnek.

4.2.4. Példa. *1. A $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban*

$$A_T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Diagonizálható-e a mátrix?

Megoldás

Az endomorfizmus karakterisztikus polinomja:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1).$$

Tehát a sajátértékek: $\lambda_1 = 4$ és $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Jelölje a $S(\lambda_i)$ a λ_i sajátértéknek megfelelő alterét az $\mathbb{R}^3$ vektortérnek.

$$\begin{aligned} x \in S(\lambda_1) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_2 = x_3 = 0 \\ &\qquad x = (x_1, 0, 0) = x_1(1, 00). \end{aligned}$$

Tehát $S(\lambda_1)$ altérnek egy bázisa $B = \{(1, 0, 0)\}$.

Legyen $x = (x_1x_2x_3)$ a $\lambda_2 = 1$-nek megfelelő sajátvektor.

$$x \in S(\lambda_2) = S(\lambda_3) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x_1 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 = x - 3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{matrix}$$

Tehát

$$S(\lambda_2) = \{x_2(0,1,1) \mid x_2 \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim S(\lambda_2) = 1.$$

Mivel dupla λ_2 gyök következik, hogy a mátrix nem diagonizálható.

2. *A $T \cdot \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés mátrixa* $A_T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Diagonizálható-e a mátrix?

Megoldás

A karakterisztikus polinom

$$(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda+2)^2(-\lambda+1)$$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -2.$

$$x \in S(\lambda_1) = S(1) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_2 = x_1 \end{cases}$$

$x = x_1(1,1,1)$

$S(\lambda_1) = \{x_1(1,1,1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}.$

$x \in S(\lambda_2) \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$\Leftrightarrow x = (x_1, x_2, -x_1 - x_2) = x_1(1,0,-1) + x_2(0,1,-1)$

$\dim S(\lambda_1) = 1$

$\dim S(\lambda_2) = 2$

A mátrix diagonizálható.

A bázis, amelyben diagonális lesz az A_T mátrixnak: $\mathcal{B} = \{(1,1,1); (1,0,-1); (0,1,-1)\}$.

Az áttérési mátrix:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

A_T mátrix diagonizált alakja:

$$D = C^{-1} A_T \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Feladatok

Vizsgáljuk meg, hogy a következő mátrixok diagonizálhatók-e és ha igen, akkor írjuk fel a diagonizált alakját:

1. $A = \begin{bmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

4.3. Jordán alak

$$[\lambda], \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \dots$$

mátrixokat Jordan celláknak nevezzük. Adott a $(V_n, +, \mathbb{R})$ vektortér. Ha a $T : V_n \to V_n$ endomorfizmusnak minden sajátértéke valós, akkor a V_n vektortérnek van egy olyan bázisa, amely esetén a T endomorfizmus A_T mátrixa

$$A_T = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_n \end{bmatrix}$$

alakú, ahol $J_1, J_2, \dots, J_n$ Jordán cellák.

Egy p-ed rendű Jordán cella egy λ_i q-szoros sajátértéknek felel meg $q \geq p$, ha a bázisban szerepelnek az $e_1, e_2, \dots, e_p$ vektorok úgy, hogy $T(e_1) = \lambda_i e_1$, $T(e_2) = \lambda_1 e_2 + e_1, \dots,$ $T(e_p) = \lambda_i e_p + e_{p-1}$. Az e_1 vektor sajátvektor, az $e_2, e_3, \dots, e_p$ vektorokat fővektoroknak nevezzük.

Feladatok

Hozzuk Jordan alakra a következő mátrixokat és határozzuk meg a megfelelő bázisokat:

1. $A = \begin{bmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. fejezet

Bilineáris és kvadratikus alakok

5.1. Bilineáris alakok

5.1.1. Értelmezés. *Adott a* $(V_n, +, \mathbb{R})$ *n dimenziós vektortér.*

Az $F : V_n \times V_n \to \mathbb{R}$ *leképezést bilineáris alaknak nevezzük, ha:*

1. $F(kx + ly, z) = kF(x, z) + lF(y, z)$
2. $F(x, ky + lz) = kF(x, y) + lF(x, z)$

$(\forall)\ k, l \in \mathbb{R}$, $(\forall)\ x, y, z \in V_n$.

Legyen $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ a bázisa a V_n vektortérnek.

Ha $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$ és $y = y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n$, akkor

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j F(e_i, e_j).$$

Az $A_F = (F(e_i, e_j))_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}}$ mátrixot az F bilineáris alak mátrixának nevezzük.

Jelölje $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, ezt a jelölést használva az F bilineáris alak a következő mátrix formába írható:

$$F(x, y) = XA_F \cdot {}^tY.$$

5.1.2. Megjegyzés. *Az* $F : V_n \times V_n \to \mathbb{R}$ *bilineáris alakot szimmetrikusnak (hermetikus) nevezzük, ha*

$$F(x, y) = F(y, x), (\forall)\ x, y \in V_n$$

és antiszimmetrikusnak nevezzük, ha

$$F(x,y) = -F(y,x), (\forall)\ x, y \in V_n.$$

Az F bilineáris alak akkor és csak akkor szimmetrikus (hermetikus) ha

$$A_F = {}^tA_F$$

és antiszimmetrikus, ha

$$A_F = -{}^tA_F.$$

Ha a $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ bázisban az F bilineáris alak mátrixa A, a $B' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ bázisban az F bilineáris alak mátrixa D, és az áttérési mátrix B-ről B'-re C, akkor $D =^t CAC$.

5.2. Kvadratikus alakok

5.2.1. Értelmezés. *Legyen $(V_n, +, \mathbb{R})$ egy n dimenziós vektortér.*

Adott az $F : V_n \times V_n \to \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris alak.

Az $F(x,x) = Q(x)$, $x \in V_n$ egyenlőséggel értelmezett $Q : V_n \to \mathbb{R}$ leképezést kvadratikus alaknak nevezzük.

5.2.2. Megjegyzés. *Az $F : V_n \times V_n \to \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris alakot a hozzárendelt Q kvadratikus alak egyértelműen meghatározza az*

$$zA^ty = \frac{1}{2}[(x+y)A^t(x+y) - xA^tx - yA]$$

egyenlőség alapján.

5.2.3. Értelmezés. *Adott az $F : V_n \times V_n \to \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris alak.*

A $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ vektorrendszert ortogonálisnak nevezzük F-re nézve, ha $F(e_i, e_j) = 0$ ha $i \neq j$.

Egy F-re nézve ortogonális bázis esetén a bilineáris alak mátrixa

$$A_F = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ alakú.}$$

A megfelelő kvadratikus alak az ortogonális bázisban

$$Q(x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2$$

alakú, Q-nak ezt az alakját kanonikus alaknak nevezzük.

Gauss-Lagrange módszer a kanonikus alakra hozásra

Legyen $Q_1(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, $(a_{ij} = a_{ji})$. Tegyük fel, hogy $a_{11} \neq 0$.

Az x_1 tényezőt tartalmazó tagok polinomja

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n.$$

Bevezetjük az x_1 tényezőt tartalmazó teljes négyzetet:

$$Q_1(x) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 + Q_2(x),$$

ahol az átalakítás után Q_2 már csak az $x_2, x_3, \ldots, x_n$ változóktól függ. Alkalmazzuk az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= x_1' \\ x_2 &= x_2' \\ &\vdots \\ x_n &= x_n' \end{aligned}$$

transzformációt.

Ezzel a transzformációval $Q_1 = \frac{1}{a_{11}}y_1^2 + Q_2$ egyenlőséghez jutunk, ahol Q_2 már nem tartalmazza az y_1 változót.

Most az előbbi módszert Q_2-re alkalmazzuk és leválasztjuk y_2-t. Ezt legfennebb n-szer megismételve a kanonikus alakhoz jutunk. Ha a Q_1 kvadratikus alakban egyetlen x_i változónak sem szerepel a négyzete, akkor kiválasztunk egy $a_{ij} \neq 0$ együtthatót és $x_i = x_i' + x_j'$, $x_j = x_i' - y_j'$, $x_k = x_k'$, $k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}$ transzformációt alkalmazzuk először.

5.2.4. Példa. $Q_1 = x_1x_2 + x_2x_3$. *Első lépésben az*

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' + x_2' \\ x_2 &= x_1' - x_2' \\ x_3 &= x_3' \end{aligned}$$

transzformációt alkalmazzuk:

$$Q_1 = x_1'^2 - x_2'^2 + x_1'x_3' - x_2'x_3' = \left(x_1' + \frac{1}{2}x_3'\right)^2 - x_2'^2 - \frac{1}{3}x_3'^2 - x_2'x_3'$$

Most legyen:

$$\begin{aligned} x_1'' &= x_1' + \frac{1}{2}x_3' \\ x_2'' &= x_2' \\ x_3''' &= x_3' \end{aligned}$$

és a következő alakhoz jutunk:

$$Q_1 = x_1''^2 - \left(x_2'' + \frac{1}{2}x_3''\right)^2.$$

Bevezetve az $x_1''' = x_1''$ *és* $x_2''' = x_2'' + \dfrac{1}{2}x_3''$ *jelöléseket, a* $Q = x_1'''^2 - x_2'''^2$ *kanonikus alakhoz jutunk*

5.2.5. Tétel. *(Jacobi módszer a kanonikus alakra hozásra)*

Legyen $Q : V_n \to \mathbb{R}$ *kvadratikus alak és* $A_Q = [a_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}}$ *a kvadratikus alak mátrixa.* $\Delta_0 = 1$.

Ha $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \det A_Q$ *nemzéró valós számok, akkor a Q kvadratikus alak kanonikus alakja*

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} x_1'^2.$$

A megfelelő bázis f_i *vektorait az*

$$\begin{aligned} f_1 &= c_{11}e_1 \\ f_2 &= c_{21}e_1 + c_{22}e_2 \\ f_3 &= c_{31}e_1 + c_{32}e_2 + c_{33}e_3 \\ &\vdots \\ f_n &= c_{n1}e_1 + c_{n2}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n \end{aligned}$$

egyenlőségek segítségével az

$$F(f_i, e_j) = 0,\ j \neq i$$
$$F(f_i, e_i) = 1,\ i = \overline{1,n}$$

egyenlőségekből határozzuk meg.

5.2.6. Értelmezés. *A kvadratikus alakot pozitív definitnek nevezzük, ha* $Q(x) > 0$, $(\forall)\ x \in V_n \setminus \{0\}$ *és negatív definitnek nevezzük, ha*

$$Q(x) < 0,\ (\forall)\ x \in V_n \setminus \{0\}.$$

5.2.7. Példa. *Adott* $Q(x) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ *kvadratikus alak a kanonikus bázisban. Hozzuk kanonikus alakra!*

$$A_Q = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}\ \Delta_1 = 5,\ \Delta_2 = 26,\ \Delta_3 = 80.$$

A kanonikus alak:

$$Q(x) = \frac{1}{5}x_1'^2 + \frac{5}{26}x_2'^2 + \frac{13}{40}x_3'^2.$$

A megfelelő bázis:

$$f_1 = \frac{1}{5}e_1,\ f_2 = \frac{1}{13}e_1 + \frac{5}{26}e_2,\ f_3 = \frac{3}{20}e_1 + \frac{1}{20}e_2 + \frac{13}{40}e_3.$$

5.2.8. Tétel. *Legyen a* $Q : V_n \to \mathbb{R}$ *kvadratikus alak mátrixa* A_Q.

Ha az A_Q *mátrix szimmetrikus, iagazolható, hogy a sajátértékei mind valósak. Ha a sajátvktorok a* V_n *vektortér egy bázisát képezik, akkor ebben a bázisban* $A'_Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \end{bmatrix}$ *és* $Q = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \ldots + \lambda_n x_n'^2$, *ahol:* λ_i, $i = \overline{1,n}$ *az* A_Q *mátrix sajátértékei.*

5.2.9. Példa. *Legyen* $Q(x) = x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$, $A_Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \lambda(-\lambda^2 + \lambda + 2).$$

A megfelelő sajátvektorok: $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (1, -1, 1)$, $v_3 = (1, 2, 1)$.

A $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ *bázisban a* Q *kvadratikus alak kanonikus alakja:*

$$Q = -x_2'^2 + 2x_3'^2.$$

Egy tetszőleges $Q = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^2$ kvadratikus alak kanonikus alakjában p együttható pozitív, q együttható és negatív és $s = n - (p + q)$ együttható zéró.

A (P, q, s) hármast Q szignaturájának nevezzük.

5.2.10. Tétel. *(Sylvester) Egy kvadratikus alak esetén a szignatura invariáns az olyan báziscserék esetén amelynek megtartják a kanonikus alakot.*

Feladatok

1. Adott az $A_Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix.

   a) Írjuk fel azt a Q kvadratikus alakot, amelynek A_Q a mátrixa;

   b) Hozzuk kanonikus alakra a Q kvaratikus alakot.

2. Adjuk meg a következő kvadratikus alakok mátrixát:

   a) $Q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2$

   b) $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$

   c) $Q(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$

3. Hozzuk kanonikus alakra a Gauss, a Jacobi és a sajátérték – sajátvektor módszerrel:

$$Q(x) = 5x_1 2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

   Ellenőrizzük a Sylvester tehetetlenségi tételt.

4. Hozzuk kanonikus alakra és határozzuk meg a megfelelő bázist.

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4 \\ Q(x) &= 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3 \\ Q(x) &= -x_1^2 + x_1^2 - 5x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3 \end{aligned}$$

5. Igazoljuk, hogy a következő kvadratikus alakok pozitív definitek:

   a) $Q(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{x_i x_j}{i+j+\alpha}$, $\alpha > 0$

   b) $Q(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{x_i x_j}{1+|i-j|}$

   c) $Q(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_1^2 + \sum_{1\le i<j\le m} x_i x_j$

6. Ha a $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_{i+j}x_i x_j$ és $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} b_{i+j}x_i x_j$ kvadratikus alakok pozitívak, akkor a $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} c_{i+j}x_i x_j$ is pozitív, ahol

$$c_k = a_0 b_k + c_k^1 a_1 b_{k-1} + c_k^2 a_2 b_{k-2} + \ldots + a_k b_0,\ \ k = \overline{0,n}.$$

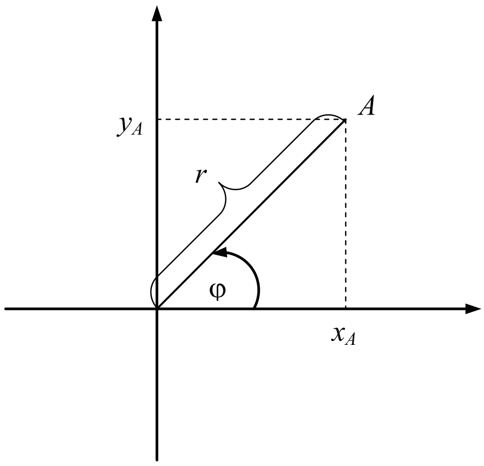
   Ha az első két kvadratikus alak közül az egyik definit és a másik nem azonos zéró, akkor a harmadik is definit.

6. fejezet

Geometria

6.1. Koordinátarendszerek a síkban

Az A pont Descartes féle koordinátái (x_A, y_A), az A pont polárkoordinátái (S, φ).

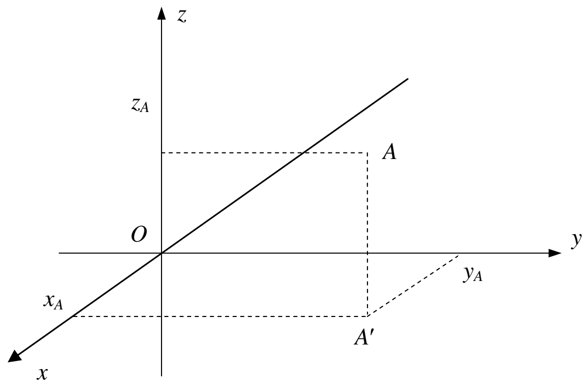


Összefüggés a polárkoordináták és a Descartes koordináták között:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

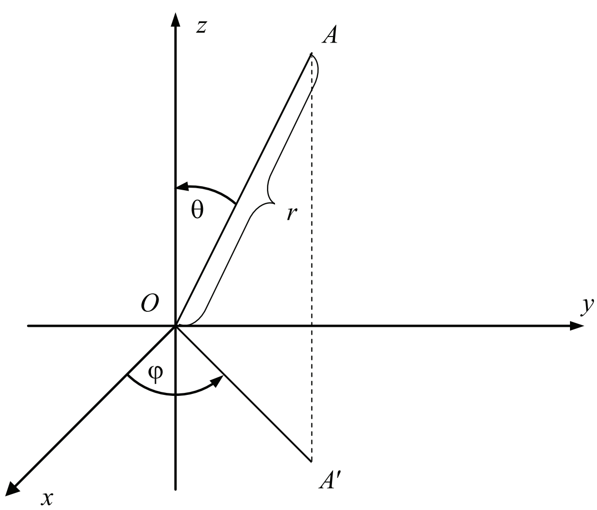
6.2. Koordinátarendszerek a háromdimenziós térben

6.2.1. Descartes koordináták



Az A pont Descartes féle koordinátái a térben: (x, y, z)

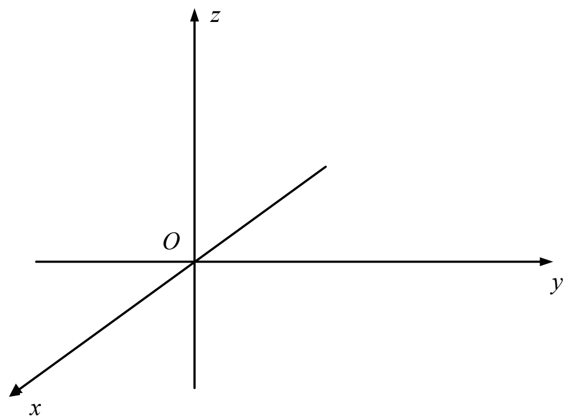
6.2.2. Gömbi koordináták



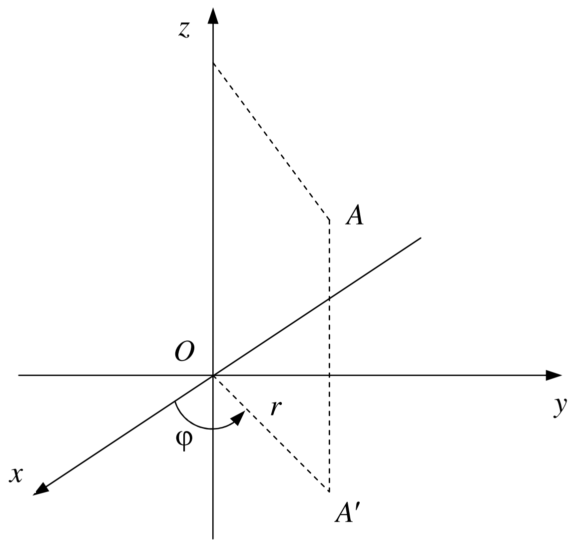
Az A pont gömbi koordinátái (r, φ, θ)

Összefüggés a polárkoordináták és a Descartes koordináták között.

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\theta$$



6.2.3. Henger koordináták



Az A pont hengerkoordinátái: (r, φ, z).

Összefüggés a Descartes koordináták és a hengerkoordináták között:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z$$

6.3. Vektorok

Legyen

$$\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$
$$\vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

6.3.1. Tétel. *$\vec{v}_1$ és $\vec{v}_2$ akkor és csak akkor lineárisan függő, ha*

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

6.3.2. Tétel. *Legyen $\vec{v}_l = x_l\vec{i} + y_l\vec{j} + z_l\vec{k}, \quad l = \overline{1,3}$.*

A v_1, v_2, v_3 vektorok akkor és csak akkor lineárisan függőek, ha a komponenseikből alkotott determináns zéró, azaz

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

6.3.3. Értelmezés. *Adott $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ két vektor.*

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot \cos\alpha,$$

ahol α a $\vec{v}_1$ és $\vec{v}_2$ vektorok által bezárt szöget jelöli

Tulajdonságok

1. $\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$;

2. $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$;

3. $\vec{v}_1(\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1\vec{v}_2 + \vec{v}_1\vec{v}_3$

6.3.4. Tétel. *Ha a $\vec{v}_1$ és $\vec{v}_2$ vektorokat kifejezzük az $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ egységvektorokkal*

$$\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$
$$\vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

akkor

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

6.3.5. Értelmezés. *A $\vec{v}_1$ és $\vec{v}_2$ vektorok vektoriális szorzata $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ egy olyan vektor, amely merőleges $\vec{v}_1$ és v_2-re, a normáját a következő képlet adja meg:* $\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\| = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \sin\alpha$

és $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ jobb-rendszert alkot.

Tulajdonságok

1. $\vec{v} \times \vec{v} = 0$

2. $\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_3$

3. $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \times \vec{v}_1$

4. $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$

6.3.6. Értelmezés. *(vegyesszorzat)*

Adott a $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ és $\vec{v}_3$ vektor.

A $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3$ egyenlőséggel értelmezett kifejezést a v_1, v_2, v_3 vektorok vegyesszorzatának nevezzük.

Tulajdonságok

1. $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)$

2. $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$

6.4. A síkok és egyenesek

Képletek

1. Az $A(x_A, y_A, z_A)$ ponton áthaladó $\vec{d} = p \cdot \vec{i} + q \cdot \vec{j} + r \cdot \vec{k}$ irányvektorú egyenes egyenlete:

$$\frac{x - x_A}{p} = \frac{y - y_A}{q} = \frac{z - z_A}{r}.$$

2. Az $A(x_A, y_A, z_A)$ és $B(x_B, y_B, z_B)$ pontok által meghatározott egyenes egyenlete

$$AB \cdot \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}.$$

3. A

$$\begin{aligned} D_1 : \frac{x - x_1}{p} &= \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r} \quad \text{és} \\ D_2 : \frac{x - x_2}{l} &= \frac{y - y_2}{m} = \frac{z - z_2}{n} \end{aligned}$$

egyenesek hajlásszöge:

$$\cos\alpha = \frac{pl + qm + rn}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

4. A D_1 és D_2 egyenesek akkor és csak akkor merőlegesek ha:

$$pl + qm + rn = 0$$

és akkor és csak akkor párhuzamosak ha:

$$\frac{p}{l} = \frac{q}{m} = \frac{r}{n}.$$

5. Az $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ normálvektorú és $M(x_M, y_M, z_M)$ ponton áthaladó sík egyenlete:

$$A(x - x_M) + B(y - y_M) + C(z - z_M) = 0.$$

6. Az A, B, C pontok által meghatározott sík egyenlete:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Az $M(x_M, y_M, z_M)$ pont távolsága az $Ax + By + Cz + D = 0$ síktól:

$$d = \frac{|Ax_M + By_M + Cz_M + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

8. Pont távolsága egy egyenestől:

$$M \notin D,\ P \in D, \quad d(M, D) = \frac{\|\vec{MP} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$$

9. Két kitérő egyenes közötti távolság

$$M \in D_1,\ N \in D_2, \quad d(D_1, D_2) = \frac{|(\vec{MN}, \vec{d_1}, \vec{d_2})|}{\|\vec{d_1} \times \vec{d_2}\|}.$$

10. Az A_1A_2 szakaszt k arányban osztó pont koordinátái:

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k},\ y = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k},\ z = \frac{z_1 - kz_2}{1 - k}.$$

Feladatok

1. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely párhuzamos az $\alpha : x + 2y + 2z + 5 = 0$ síkkal és átmegy az $M(1, -2, 2)$ ponton.

2. Adott a következő két sík

$$\alpha_1 : 2x - y + z = 0$$
$$\alpha_2 : x + y = 0$$

Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges α_1 és α_2-re és átmegy az $M(1, -1, 1)$ ponton.

3. Írjuk fel a sík egyenletét, amely párhuzamos a
$$D: \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-1}{-1}$$
egyenessel, átmegy az $M(-1,1,-3)$ ponton és merőleges az $x+y-z=0$ síkra.

4. Adott az $\alpha_1 : 4x-3y+z+1=0$ és $\alpha_2 : 4x-3y-2z+4=0$ sík. Írjuk fel azon sík egyenletét, amely merőleges α_1 és α_2 metszésvonalára és átmegy az $M(1,2,3)$ ponton.

5. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az $A(1,-2,3)$ ponton és párhuzamos a
$$D_1 : x+y-z+1,\ x-y=0$$
$$D_2 : 2x-y=0,\ y-z=0$$
egyenesekkel.

6. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely tartalmazza a $D : x-y-1=0,\ x-z+1=0$ egyenest és merőleges az (M,N,P) síkra, ahol $M(2,0,0)$, $N(0,-1,0)$, $P(0,o,-1)$.

7. Írjuk fel annak a D egyenesnek az egyenletét amely metszi a
$$D_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$$
és a
$$D_2 : x=y,\ z=1$$
egyenest és merőleges az
$$\alpha : 2x+y-z-7=0 \quad \text{síkra.}$$

8. Számítsuk ki a
$$D_1 : y=2x+3,\ z=3x+5$$
és
$$D_2 : y=x+1,\ z=4x+8$$
egyenesek közötti távolságot.

9. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely metszi a

$$D_1 : y - x + 7 = 0,\ x + z - 3 = 0$$

egyeneseket és merőleges az $\alpha : 2x + y - z = 7$ síkra.

10. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely metszi a

$$D_1 : y - 2x - 3 = 0,\ z - 3x - 5 = 0$$
$$D_2 : y - x - 1 = 0,\ z - 4x - 8 = 0$$

egyeneseket és párhuzamos a

$$D : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2}$$

egyenessel.

11. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely benne van az $\alpha : x + 2y - z = 0$ síkban metszi a

$$D : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$$

egyenest és párhuzamos a $\beta : x = y$ síkkal.

12. Írjuk fel annak a D egyenesnek az egyenletét, amely metszi a

$$D_1 : x - y + 1 = 0,\ x - z - 1 = 0$$
$$D_2 : 8x - 5y + 1 = 0,\ x - 2z - 2 = 0$$
$$D_3 : x - y - 1 = 0,\ 2x - z - 1 = 0$$

egyeneseket és párhuzamos az

$$\alpha : x + y - z - 7 = 0$$

síkkal.

13. Az $A(8, 3, 4)$ pont vetületét az $\alpha : 4x + y + 2z - 1 = 0$ síkra jelölje I. Az I ponton át merőleges síkot bocsájtunk a

$$d : 2x - y - 1 = 0,\ 3x + z - 1 = 0$$

egyenesre, amely J-ben metszi a d egyenest. Igazoljuk, hogy $AJ \perp (d)$.

14. Legyen A, B, C, D négy pont a térben. Jelölje E és F az AC és BD szakasz felezőpontját.

    Igazoljuk, hogy $AC^2 + BD^2 + 4EF^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.

15. Adott az $ABCDA'B'C'D'$ kocka.

    Jelölje M, N, P az AA', BC és BB' felezőpontját. Számítsuk ki a kocka élének függvényében az MN és $D'P$ egyenesek közötti távolságot.

16. Írjuk fel a
$$D_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}$$
    és
$$D_2 : \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$$
    metsző egyenesek által meghatározott sík egyenletét.

17. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges a
$$D_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$$
    és
$$D_2 : \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{1}$$
    egyenesre és átmegy az $A(1, -2, 2)$ ponton.

6.5. Másodrendű görbék (Kúpszeletek)

A kúpszeletek általános alakja az xoy Descartes féle koordinátarendszerben:

$$\Gamma : f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (6.1)$$

A kúpszelet középpontjának (szimmetria) a koordinátái az

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} = a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases} \qquad (6.2)$$

egyenletrendszer megoldása.

Ha az (6.1) egyenletbe elvégezzük az $\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$ helyettesítést (egy eltolást alkalmazunk), ahol (x_0, y_0) a (6.2) egyenletrendszer megoldása, akkor az (6.1) egyenlet, az

$$\Gamma : a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + A_{22}y'^2 + f(x_0, y_0) = 0 \tag{6.3}$$

egyszerűbb alakra redukálódik.

A (6.2) rendszernek csak akkor van egyértelmű megoldása, ha

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ha bevezetjük a következő jelölést:

$$f(x_0, y_0) = \frac{\Delta}{\delta}, \ \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

akkor (7.1) így írható:

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{6.4}$$

Ha $\begin{cases} x' = x'' \cos\alpha - y'' \sin\alpha \\ y' = x'' \sin\alpha + y'' \cos\alpha \end{cases}$ forgatást alkalmazok, ahol az α értékét a $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$ egyenletből számítjuk ki, akkor a (6.4) egyenlet a következő kanonikus alakba transzformálódik

$$\begin{aligned} & s_1 \cdot x''^2 + s_2 \cdot y''^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \text{ ahol} \\ & s_1 + s_2 = a_{11} + a_{22} \\ & s_1 \cdot s_2 = \delta. \end{aligned}$$

Az előbbiek alapján az alábbi táblázatot készítjük el:

6.5.1. Példa. *Hozzuk kanonikus alakra*

$$f(x, y) = 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$$

egyenletű görbét.

Megoldás

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 9 \end{vmatrix} = -81$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \geq 0$$

A középpont koordinátái:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\,\frac{\partial f}{\partial x} = 5x + 4y - 9 = 0 \\ \frac{1}{2}\,\frac{\partial f}{\partial y} = 4x + 5y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array}$$

$\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' + 1 \end{cases}$ *transzlációt alkalmazunk.*

$$tg\, 2\theta = \frac{8}{5-5} = \infty \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$
$$x' = x'' \cos\frac{\pi}{4} - y'' \sin\frac{\pi}{4}$$
$$y' = x'' \sin\frac{\pi}{4} + y'' \cos\frac{\pi}{4}$$

forgatást alkalmazunk és $\frac{x''^2}{1} + \frac{y''^2}{9} = 1$ *kanonikus alakhoz jutunk.*

1. Ábrázoljuk az $x^2 - 4xy + 4y^2 - 26x - 38y + 25 = 0$ görbét.

2. Igazoljuk, hogy

$$x^2 - xy - 2y^2 + 4x + y + 3 = 0$$

két párhuzamos egyenesnek az egyenlete.

3. Határozzuk meg az

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - x + 2y + 1 = 0$$

egyenletű görbe természetét és hozzuk kanonikus alakra.

4. Adott a $\Gamma : 4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$ görbe és az $A(0, 2)$ pont.

   Határozzuk meg a görbe természetét és hozzuk kanonikus alakra.

   Írjuk fel az érintő egyénletét az A pontba.

5. Határozzuk meg a következő görbék természetét, hozzuk kanonikus alakra és ábrázoljuk

$$x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 6y + 4 = 0$$

6. Határozzuk meg a λ és μ paraméterekre vonatkozó feltételt, amelyek esetén a $2x^2 + \lambda xy + 2y^2 - 7x + \mu y + 3 = 0$ egyenletű görbének van szimmetria középppontja.

7. fejezet

Mősodrendű felületek

Legyen $g(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24} + 2a_{34}z + a_{44}$

7.0.2. Értelmezés. *Az* $F = \{M(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ g(x, y, z) = 0\}$ $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0$ *halmazt másodrendű felületnek nevezzük.*

Az F felülethez hozzárendeljük a következő kifejezéseket.

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

A másodrendű felület természetét meg lehet határozni ezeknek a jellemzőknek a segítségével: $\det A = \Delta \neq 0 \Rightarrow F$ *gömb, ellipszoid, hiperboloid, vagy paraboloid*

$\det A = \Delta = 0 \Rightarrow F$ *kúp, henger, vagy két sík.*

1. Ha $\Delta \neq 0$, akkor az

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial z} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0 \end{cases} \tag{7.1}$$

   egyenletrendszernek egy jól meghatározott megoldása van. Következik, hogy a felületnek van egy szimmetria középpontja. Ezek a felületek: a gömb, az ellipszoid, hiperboloid (egy vagy kétpalástú), és a kúp.

2. Ha $\Delta = 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ és a (7.1) rendszer összeférhetetlen. Ebben az esetben a felület elliptikus paraboloid vagy hiperbolikus paraboloid.

3. Ha $\Delta = 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ és a (7.1) rendszer összeférhető. A felületnek egy szimmetria tengelye van. Ez a körhenger, az elliptikus és hiperbolikus hengerfelület.

4. $\operatorname{rang} A = 1$ és a két karakterisztikus egyenlet nem zéró. Ez a parabolikus hengerfelület.

5. $\operatorname{rang} A = 1$ és (7.1) az rendszer összeférhető. A felület síkokból áll.

7.1. Kanonikus alakra hozás

A felület természetét az

$$T = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

kvadratikus alak határozza meg, amit az alábbi mátrix alakba lehet írni:

$$T = (x, y, z) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ha $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a kvadratikus alak sajátértékei és e_1, e_2, e_3 a megfeleelő sajátvektorok normált alakja, akkor a sajátvektorok normált alakja, akkor a sajátvektorokat megválaszthatjuk úgy, hogy e_1, e_2, e_3-ból mint oszlopokból alkotott R mátrixra igaz legyen, hogy $\det R = 1$.

Az

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

forgatás a T kvadratikus alakot a

$$T = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$$

kanonikus alakba transzformálja.

7.1.1. Példa. *Milyen felületet határoz meg a következő egyenlet:*

$$x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz - 4x + 8y - 12z + 14 = 0$$

Megoldás

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & -6 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\det A = -36 \neq 0 \qquad \det \overline{A} = -6^3 \neq 0 \Rightarrow$$

a felület ellipszoid, vagy hiperboloid.

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ -3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

A sajátértékek $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$. Ha (u, v, w) sajátvektor, akkor fennáll az egyenletrendszer:

$$\begin{cases} (1-\lambda)u - 3v + w = 0 \\ -3u + (1-\lambda)v - w = 0 \\ u - v + (5-\lambda)w = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = -2 \Rightarrow e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\lambda_2 = 3 \Rightarrow e_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\lambda_3 = 6 \Rightarrow e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Az áttérési mátrix:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{3}}y' + \dfrac{1}{\sqrt{6}}z' \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{3}}y' - \dfrac{1}{\sqrt{6}}z' \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{2}{\sqrt{6}}z' \end{cases}$$

A kanonikus alak:

$$-2x'^2 + 3y'^2 + 6z'^2 + 2\sqrt{2}x' - 6\sqrt{6}z' + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -2\left(x' - \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 3y'^2 + 6\left(z' - \tfrac{3}{\sqrt{6}}\right)^2 + 6 = 0$$

$$x'' = x' - \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z'' = z' - \tfrac{3}{\sqrt{6}}$$

A felület kétpalástú hiperboloid:

$$-\frac{x''^2}{3} + \frac{y'^2}{2} + \frac{z''^2}{1} + 1 = 0.$$

Feladatok

1. Írjuk fel annak a gömbnek az egyenletét, amely átmegy az

$$y^2 + z^2 = 9,\ x = 3 \text{ és } y^2 + z^2 = 49,\ x = 5$$

körökön.

2. Milyen felületet határoz meg az egyenlet:

$$x^2 + 2yz + 1 = 0$$

Hozzuk kanonikus alakra.

3. Hozzuk kanonikus alakra az

$$x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8 = 0$$

egyenletet és állapítsuk meg, hogy milyen felületet határoz meg.

4. Határozzuk meg, hogy az

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2pxz + 2qyz + 2x + 2y + 2z = 0$$

egyenlettel adott felület szimmetria középpontja hol mozog, ha p és q változik.

5. Írjuk fel a gömb egyenletét, amely az $A(5, 4, -2)$ és $B(7, 3, 7)$ pontokban érinti a

$$D_1 : \frac{x}{5} = \frac{y+1}{5} = \frac{z+9}{7} \text{ és } D_2 : \frac{x}{-1} = \frac{y-24}{3} = \frac{z}{-1}$$

egyenest.

6. Írjuk fel a $D : \begin{cases} x = 3 + 10 \\ y + 4z + 5 = 0 \end{cases}$ egyenes Oz tengely körüli forgatásakor keletkezett felület egyenletét.

7. Adott a $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$ egyenletű görbe a térben.

a) Írjuk fel annak a kúpnak az egyenletét, amelynek a palástján van a Γ görbe és amelynek a csúcsa az origóban van.

b) Írjuk fel annak a hengernek az egyenletét, amelynek a palástján van a Γ görbe és amelynek az alkotói párhuzamosak a D_1 : $\begin{cases} x = 2z \\ y = -z \end{cases}$ egyenessel.

c) Írjuk fel annak a felületnek az egyenletét, amelyet a Γ görbe D_2 : $\begin{cases} x = 0 \\ z = -1 \end{cases}$ egyenes körüli forgatásával kapunk.

8. fejezet

Görbék differenciálgeometriája

1. A $\Gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$ görbe $A(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ pontjába húzott érintő egyenlete:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

2. A normálsík egyenlete:

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0.$$

3. Ha a Γ görbét az $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ egyenletrendszerrel adjuk meg, akkor egy $A(x_0, y_0, z_0)$ pontjába húzott érintő egyenlete:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}$$

4. A normálsík egyenlete:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

5. Síkgörbe esetén, az érintő egyenlete:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}$$

- a normális $x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) = 0$.

6. A görbületet jelölje k, a görbületi sugár legyen R, akkor

$$k = \frac{1}{R} = \frac{|\vec{r}\,' x \vec{r}\,''|}{|r'|^3} = \frac{\sqrt{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}}{((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Síkgörbe esetén:

$$k = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ha a görbe egyenlete explicit $y = y(x)$, akkor:

$$k = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

7. A simulósík egyenlete:

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

8. Görbe ívhossza: $\gamma : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^3$,

$$L(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

9. Érintő egységvektora $\dfrac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}$

Főnormális:

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{1}{R} \cdot \vec{\nu}$$

Binormális: $\vec{\beta} = \vec{\tau} \times \vec{\nu}$

Frenet összefüggések:

	$\vec{\tau}$	$\vec{\nu}$	$\vec{\beta}$
$\frac{d\vec{\tau}}{ds}$	0	$\frac{1}{R}$	0
$\frac{d\vec{\nu}}{ds}$	$-\frac{1}{R}$	0	$\frac{1}{T}$
$\frac{d\vec{\beta}}{ds}$	0	$-\frac{1}{T}$	0

Torzió: $\dfrac{1}{T} = \dfrac{(\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,''')}{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'|^2}$

$$\frac{1}{T} = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(y'z''' - z'y')^2 + (z'x'' + x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}.$$

Az $F(x, y, \alpha) = 0$, $\alpha \in I$ egyenlettel adott síkgörbecsalád burkológörbéjének az egyenlete:

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha}(x, y, \alpha) = 0. \end{cases}$$

Feladatok

1. Határozzuk meg a következő görbecsaládok burkológörbéjét:

   a) $(x - a)^2 + y^2 - \dfrac{a^2}{2} = 0$

   b) $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0$, $\alpha^m + \beta^m = a^m$

2. Adott a $\Gamma : \begin{cases} x = \dfrac{2 + t^2}{1 + t^2} \\ y = \dfrac{t^3}{1 + t^2} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ görbe.

   Határozzuk meg a Γ görbe szinguláris pontjait és írjuk fel az érintő egyenletét ebbe a pontba.

3. Adott $\Gamma : \begin{cases} x = 4t - \sin 4t \\ y = 8 \sin^4 t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

   Számítsuk ki a $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ értékeknek megfelelő görbe ívhosszát.

4. Adott a $\Gamma : \begin{cases} x = \dfrac{t^3 + 2}{t^3 - 1} \\ y = \dfrac{3t}{t^3 - 1} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ görbe.

   Határozzuk meg a Γ görbe Ox tengellyel való metszéspontját.

   Írjuk fel ebbe a pontba húzott érintő és normális egyenletét.

5. Adott a $\Gamma : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ csavargörbe. Igazoljuk, hogy a normálsíkoknak az xOy síkkal alkotott hajlásszöge állandó.

6. Adott a $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 - ax = 0 \end{cases}$ görbe.

   A Γ görbe $x = \dfrac{a}{2}$ síkkal való metszéspontjai közül az első nyolcadban fekvő esetén írjuk fel a görbe érintőjének és normálsíkjánk az egyenletét.

7. Számítsuk ki a $\Gamma : \begin{cases} x^3 - a^2 y = 0 \\ 6xz - a^2 = 0 \end{cases}$ görbe $z = \dfrac{a}{6}$ és $z = \dfrac{a}{3}$ síkok közé eső ívének hosszát.

8. A csavarvonal a $\Gamma : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$ egyenletekkel értelmezett. Adjuk meg a csavarvonal természetes paraméterezését. (A paraméter az ívhossz).

9. Határozzuk meg az $y = ax^2 + bx + c$ parabola azon pontját, amelymek legnagyobb a görbülete.

10. Igazoljuk, hogy a $\Gamma : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$ csavarvonal minden pontjában ugyanannyi a görbület és a torzió

11. Igazoljuk, hogy az $y = (1 + e^x)^{\frac{1}{2}}$ görbe egy M pontjában a görbületi sugár akkora mint annak a szakasznak a hossza, amit az M pontba húzott érintő és normális az Ox tengelyből kivág.

12. Írjuk fel a

$$D_m : y = mx + \frac{p}{2m},\ m \in \mathbb{R}^*$$

egyenessereg burkológörbéjét (p állandó).

9. fejezet

Felületek differenciálgeometriája

1. Az $S : f(x, y, z) = 0$ felület érintősíkja a felület egy $A(x_0, y_0, z_0) \in S$ pontjában:

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y} + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Ha a felület $S : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$ paraméteres egyenletekkel adott akkor az érintősík egyenlete:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial v}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

2. A felület normálisának egyenlete az $A(x_0, y_0, z_0)$ pontban: $(x_0 = x(u_0, v_0), \ldots$ stb)

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}.$$

3. Az első alapforma: $E = \|\vec{r}_u'\|^2$, $F = (\vec{r}_u' \cdot \vec{r}_u'), G = \|\vec{r}_v'\|^2$,

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

4. Két felületi görbe hajlásszöge

$$\begin{cases} u = u_1(t) \\ v = v_1(t) \end{cases} \qquad C : \vec{r} = \vec{r}(a_1(t)v_1(t)),\ t \in I$$

$$\begin{cases} u = u_2(t) \\ v = v_2(t) \end{cases} \qquad \Gamma : \vec{r} = \vec{r}(a_2(t)v_2(t)),\ t \in I$$

$$\cos\alpha = \frac{Edu_1du_2 + F(du_1dv_2 + du_2dv_1) + Gdv_1dv_2}{\sqrt{Edu - 1^2 + 2Fdu_1dv_1 + Gdv_1^2}\sqrt{Edu_2^2 + 2Fdu_2dv_2 + Gdv_2^2}}$$

5. Felületdarab területe:

$$S : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \qquad (u,v) \in D \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

$$T(S) = \iint_D \sqrt{Eg - F^2} dudv.$$

Ha a felület egyenlete $S : z = z(x,y)$, $(x,y) \in D$

$$T(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

6. A második alapforma:

$$L = \frac{(\vec{r}_u', \vec{r}_v', \vec{r}_u u'')}{\sqrt{EG - F^2}},\ M = \frac{(\vec{r}_u', \vec{r}_v', \vec{r}_u v'')}{\sqrt{EG - F^2}},\ N = \frac{(\vec{r}_u', \vec{r}_v', \vec{r}_v v'')}{\sqrt{EG - F^2}},$$

A $\varphi = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ kvadratikus alakot az S felület második alapformájának nevezzük.

7. $\dfrac{1}{R_n}$ normálgörbület

8. $\dfrac{1}{R_n} = \dfrac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$

9. K Gauss görbület (teljesgörbület)

10. $K = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2}$

Feladatok

1. Adott az

$$S: \begin{cases} x = u^2 + v + 1 \\ y = u^2 - v + 1 \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ z = uv + 2 \end{cases}$$

felület Írjuk fel az érintőket és a normális síkokat a koordinátavonalakhoz az $M_0(1,3,1)$ pontban.

Számítsuk ki az M_0 ponton áthaladó két koordinátavonal hajlásszögét.

2. Adott az S felület

$$S: \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2. \\ z = bv \end{cases}$$

Az S felület C_1, C_2 és C_3 görbéjét a következőképpen értelmezzük:

$$c_1 : v = 1, \; c_2 : u = \frac{a}{2}v^2, \; C_3 : u = -\frac{a}{2}v^2.$$

Határozzuk meg az $M_1M_2M_3$ görbevonalú háromszög oldalhosszait és szögeit, ha

$$M_1 = C_2 \cap C_3, \; M_2 = C_1 \cap C_3, \; M_3 = C_1 \cap C_2.$$

3. a) Írjuk fel annak a kúpfelületnek az egyenletét, amelynek csúcsa $V(0,1,3)$ és a $C : x^2 + y^2 - 2x - 6y + 3 = 0$, $z = 0$ görbe a palástján van.

b) Írjuk fel annak a görbének az egyenletét, amely a kúpfelület $z = 2$ síkkal történő metszésekor keletkezik.

c) Írjuk fel a kúpfelület normálsíkját az $A\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}, \frac{5}{3}, 2\right)$ pontban.

3. Igazoljuk, hogy az $xy + xz + yz = 0$ egyenlő görbe egy forgáskúp.

Írjuk fel a tengelyének az egyenletét.

4. Írjuk fel annak a torusznak az egyenletét, amelyet az $A(3,0,0)$ középpontú, 1 sugarú xOz síkban lévő kör Oz tengely körüli forgatásakor keletkezik.

5. Adottak a felületek:

$$S_1:\begin{cases} x = u+v \\ y = u^2+v^2, \\ z = u^3+v^3 \end{cases} (u,v)\in\mathbb{R}^2 \quad S_2:\begin{cases} x = u^2 \\ y = uv, \\ z = au+v^2 \end{cases} (u,v)\in\mathbb{R}^2$$

$$S_3:\begin{cases} x = \dfrac{1+u^2}{u} \\ y = \frac{1+v^2}{v}, \\ z = \frac{u^2+v^2}{uv} \end{cases} (u,v)\in\mathbb{R}^2$$

a) Írjuk fel a Descartes implicit egyenletüket.

b) Számítsuk ki a Gauss görbületét a $P(u_0=1, v_0=2)$ pontban.

6. Írjuk fel a $2ux-(u^2-1)y-(u^2+1)z=1$ egyenletű síkok burkolófelületének egyenletét.

7. Számítsuk ki az első és a második alapformát és a Gauss görbületét az $x^2+y^2+x^2=R^2$ gömb esetében.

8. Igazoljuk, hogy az

$$S:\begin{cases} x = u(\sin v + v\cos v) - v^2\cos v \\ y = u(\cos v - v\sin v) + v^2\sin v \\ z = 2uv - v^2 \end{cases} 9u,v)\in\mathbb{R}^2$$

felületen vannak egyenesek.

Határozzuk meg ezeknek az egyeneseknek az irányvektorait.