Matematikai analízis 1

Szász Róbert

1. fejezet

1.1. Topológikus terek

1.1.1. Értelmezés. *Adott egy X halmaz. A $d : X \times X \to [0, +\infty)$ függvényt metrikának nevezzük, ha teljesülnek a következő feltételek:*

1. *$d(x, y) > 0$, ha $x \neq y$ és $d(x, x) = 0$, $(\forall)$, $x, y \in X$.*
2. *$d(x, y) = d(y, x)$, $(\forall)$ $x, y \in X$.*
3. *$d(x, y) \leq d(x, z) + d(zz, y)$, $(\forall)$ $x, y, z \in X$.*

Az (X, d) struktúrát metrikus térnek nevezzük.

1.1.2. Értelmezés. *Legyen (X, d) egy metrikus téren $r > 0$. Az $U(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$ halmazt x_0 középpontú r sugarú nyílt gömbnek nevezzük. A $v \subset X$ halmaz környezete az x_0 pontnak, ha létezik $r > 0$ úgy, hogy $U(x_0, r) \subset V$.*

Egy olyan halmazt, amely minden elemének környezete nyílt halmaznak nevezünk. Az x_0 pont környezeteinek a halmazát $v_{(x_0)}$-val jelöljük.

1.1.3. Példa. *Az $\mathbb{R}$ valós számok halmazán a $d(x, y) = |x - y|$ képlettel értelmezett $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, +, \infty)$ függvény metrika. A valós számhalmaz nyíl intervallumai nyílt halmazok az $(\mathbb{R}, d)$ metrikus térben.*

1.1.4. Értelmezés.
1. *Az $x_0 \in X$ pont az A halmaz torlódási pontja, ha bármely $v \in V(x_0)$ esetén $(V \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$. Az A halmaz torlódási pontjainak halmazát jelölje A' és legyen $\tilde{A} = A \cup A'$ az A halmaz lezártja.*

2. *Az $A \subset X$ halmaz korlátos, ha létezik $a \in A$ és $r > 0$ úgy, hogy $A \subset U(a,r)$.*

3. *Az A halmaz sűrű az metrikus térben, ha bármely vagy eleme A-nak vagy torlódási pontja A-nak.*

4. *Egy halmaz zárt, ha a komplementuma nyílt.*

5. *Az A halmaz perfekt, ha zárt és minden pontja torlódási pontja A-nak.*

A $\{G_i\}_{i\in I}$ nyílt halmazrendszer lefedése A-nak, ha $A \subset \bigcup\limits_{i\in I} G_i$.

1.1.5. Értelmezés. *Az A halmaz akkor kompakt, ha bármely nyílt lefedéséből kiválasztható egy véges lefedés.*

1.1.6. Tétel. *1. Ha az A halmaz kompakt, akkor zárt.*

2. Ha az A halmaz kompakt és $B \subset A$, B zárt, akkor B is kompakt.

1.1.7. Tétel. *Az (X,d) metrikus térben $\{K_\alpha\}_{\alpha\in I}$ legyen kompakt halmazok rendszere. Ha a $\{K_\alpha\}_{\alpha\in I}$ halmazrendszer bármely véges sok halamzból álló részrendszerének metszete nem üres, akkor $\bigcap\limits_{\alpha\in I} K_\alpha \neq \emptyset$.*

1. a) Igaz-e, hogy $\mathbb{R}^2$ bármely nyílt G részhalmazának minden pontja torlódási pontja G-nek?

   b) Válaszoljukn erre a kérdésre, ha G zárt halmaz.

2. Legyen Y egy tetszőleges végtelen halmaz. Tetszőleges $x, y \in Y$ esetén
   $$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y. \end{cases}$$
   Igazoljuk, hogy d metrika.

   Mik lesznek a nyílt halmazok a metrika által generált topológia esetén?

   Melyek lesznek a zárt halmazok?

3. Tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$
\begin{aligned}
&d_i : \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty), \quad i = \overline{1,4} \\
&d_1(x, y) = (x - y)^2 \\
&d_2(x, y) = \sqrt{|x - y|} \\
&d_3(x, y) = |x^2 - y^2| \\
&d_4(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}
\end{aligned}
$$

Döntsük el, hogy melyik metrika és melyik nem.

4. Adjuk meg $\mathbb{R}$-nek egy olyan kompakt részhalmazát, amelynek torlódási pontjai megszámlálható halmazt képeznek.

5. Adjuk meg a $(0, 1)$ intervallumon egy nyílt lelefedését, amiből nem választható ki véges lefedés.

6. A racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza a $d(p, q) = |p - q|$ távolságfüggvénnyel metrikus tér. Legyen $A = \{p \in \mathbb{Q} : 2 < p^2 < 3\}$. Igazoljuk, hogy a d által generált topológiában A zárt és korlátos. Igazoljuk, hogy A-nak van olyan nyílt lefedése, ami nem tartalmaz véges lefedést.

7. Legyen X egy normált vektortér a valós számtest felett. Ha $x, y \in X$ és $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, igazoljuk, hogy $\|ax + by\| = a\|x\| + b\|y\|$ bármely $a, b \in [0, +\infty)$.

8. Ha X egy normált vektortér a valós számtest felett $x, y \in X$ és $a \in \mathbb{R}$, akkor
$$\lim_{n\to\infty} (\|(n + a)x + y\| - \|nx + y\|) = a\|x\|.$$

9. Legyen X egy normált vektortér a valós számtest felett. Ha bármely $x, y \in X$ esetén a
$$|\|x\| - \|y\|| \le \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$$
egyenlőtlenségekben legalább egy egyenlőség fennáll, akkor $\dim(X) = 1$.

10. Ha $x_1, x_2, \ldots, x_p \in \mathbb{R}^n$, $\|x_p\| = 1$, $k = \overline{1,p}$ és létezik $\lambda_k \in [0,1]$ úgy, hogy $\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k = 1$, $\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k x_k = 0$, akkor

$$\sum_{1 \le i < j \le p} \|x_i - x_j\| \ge 2(p-1).$$

11. Ha $x_k \in \mathbb{R}^n$, $k = \overline{1,p}$ olyan vektorok, hogy $\|x_k\| = 1$, $k = \overline{1,p}$ és $\sum\limits_{k=1}^{p} x_k = 0$, akkor $\sum\limits_{k=1}^{p} \|x - x_k\| \ge p$ bármely $x \in \mathbb{R}^n$.

1.2. Sorozatok a valós számrendszerben

1.2.1. Értelmezés. *Az $(a_n)_{n\ge1}$ számsorozatnak a határértéke a, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik egy $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ (küszöbszám) úgy, hogy minden $n \ge n(\varepsilon)$ esetén*

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Ha az $(a_n)_{n\ge1}$ sorozatnak van egy véges határértéke, akkor azt mondjuk, hogy az $(a_n)_{n\ge1}$ sorozat konvergens.

1.2.2. Értelmezés. *Ha az $(a_n)_{n\ge1}$ sorozat azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik egy $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ (küszöbszám) úgy, hogy minden $m > n \ge n(\varepsilon)$ indexre igaz az*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség, akkor az $(a_n)_{n\ge1}$ sorozatot Cauchy, típusúnak nevezzük.

1.2.3. Tétel. *Minden Cauchy típusú sorozat konvergens.*

1.2.4. Értelmezés. *1. Az $(a_n)_{n\ge1}$ sorozat növekvő, ha $a_{n+1} \ge a_n$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$ és csökkenő, ha $a_{n+1} \le a_n$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$. Ha egy sorozat növekvő vagy csökkenő akkor azt mondjuk, hogy monoton.*

2. Az $(a_n)_{n\ge1}$ sorozat korlátos, ha létezik olyan $M > 0$ valós szám, hogy

$$|a_n| \le M.\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*.$$

1.2.5. Tétel. *(majorálás) Ha* $|a_n - a| \leq \alpha_n$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ *és* $\lim_{n\to\infty} \alpha_m = 0$, *akkor az* $(a_n)_{n\geq 1}$ *sorozat konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

1.2.6. Tétel. *(fogó kritérium)*

Ha $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$ *olyan sorozatok, hogy*

$$a_n \leq b_n \leq c_n,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$$

és $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$, *akkor* $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$.

A valós számrendszert úgy értelmezzük, hogy $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ egy olyan teljesen rendezett kommutatív test, amelyben minden Cauchy típusú sorozatnak van határértéke.

1. Igazoljuk, hogy a valós számrendszerben minden monoton és korlátos sorozatnak van határértéke.

2. (Bolzano-Weierstrass tétel) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}$-ben minden korlátos és végtelen halmaznak van legalább egy torlódási pontja.

3. Igazoljuk, hogy minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata

4. (Cezaro-Stolz tétel)

   Igazoljuk, hogy ha

   a) $b_{n+1} > b_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$

   b) $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

   c) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = x$,

   akkor $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = x$ is teljesül.

5. A 4. feladat segítségével igazoljuk, hogy ha $\lim_{n\to\infty} a_n = x$, akkor

   a) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = x$.

Ha még azt is feltételezzük, hogy $a_n > 0$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, akkor

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = x$.

6. Az 5. feladat b) pontjának a felhasználásával igazoljuk, hogy ha $(a_n)_{n\geq 1}$ egy olyan valós számsorozat, hogy $a_n > 0$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = x,$$

akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = x$.

7. Igazoljuk a Cezaro-Stolz tétel következő változatát:

   a) $(b_n)_{n\geq 1}$ szigorúan csökkenő

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = x$

   akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = x$.

8. Igazoljuk, hogy ha $p \in \mathbb{N}$, akkor

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} - \dfrac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{2}$

   Számítsuk ki a határértékeket:

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln\frac{l}{n} - c\right)^{\frac{1}{n}}$

   d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(e^{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}} - e^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}\right)$

   e) Ha $x_0 = a > 0$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^2 + x_n + 1}$ határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt[3]{n}}$ határértéket.

   f) Ha $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1 + a_n^2}{n}$, számítsuk ki a a_n, $\dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{\ln n}$ határértékeket.

g) Ha $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$ számítsuk ki $\dfrac{a_n}{\sqrt{2n}}$, $\dfrac{\sqrt{n}}{\ln n}(a_{n+1} - \sqrt{2n+1})$.

i) Számítsuk ki $\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{\ln^2 n}$ a határértékeket.

9. Ha $x_k > -1$, $k = \overline{1,n}$ bizonyítsuk be, hogy

$$\left(1+\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^n \geq 1+x_1+x_2+\ldots+x_n.$$

10. Legyen $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

a) Esetleg felhasználva a 9.-es feladatot igazoljuk, hogy az $(y_n)_{n\geq 1}$ sorozat szigorúan növekvő és a $(z_n)_{n\geq 1}$ sorozat szigorúan csökkenő.

b) Ebbből bizonyítsuk be, hogy:

$$1-\frac{1}{n+1}+\ln(n+1) > 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} > \ln(n+1).$$

11. Határozzuk meg a $\left\{\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^m} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$ halmaz torlódási pontjait.

12. Ha $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $\emptyset \neq B \subset \mathbb{R}$, akkor

$$\sup\{x+y\in\mathbb{R} : x\in A, y\in B\} = \sup A + \sup B$$
$$\inf\{x+y\in\mathbb{R} : x\in A, y\in B\} = \inf A + \inf B$$

Ha $(a_n)_{n\geq 1}$ és $(b_n)_{n\geq 1}$ két valós számsorozat, akkor

$$\sup\{a_n+b_n : n\in\mathbb{N}^*\} \leq \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}^*\} + \sup\{b_n : n\in\mathbb{N}^*\}$$
$$\inf\{a_n+b_n : n\in\mathbb{N}^*\} \geq \inf\{a_n : n\in\mathbb{N}^*\} + \inf\{b_n : n\in\mathbb{N}^*\}$$

1.3. Valós számsorok konvergenciája

1.3.1. Értelmezés. *A* $\sum -n = 1^\infty a_n$ *sor akkor és csak akkor konvergens, ha az* $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *egyenlőséggel értelmezett* $(A_n)_{n\geq 1}$ *részletösszegek sorozata konvergens*

1.3.2. Tétel. *A* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor akkor és csak akkor konvergens, ha bármely* $\varepsilon > 0$ *esetén létezik egy* $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *(küszöbszám) úgy, hogy ha* $m > n \geq n(\varepsilon)$*, akkor*

$$|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m| < \varepsilon.$$

1.3.3. Következmények. *1. Ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor konvergens, akkor* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. A $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *feltétel nem elegendő a konvergenciához. Példa erre* $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ *és* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

1.3.4. Tétel. *(Cauchy)*

Ha az $(a_n)_{n\geq 1}$ *sorozat esetén* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l < 1$*, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor konvergens,* $l > 1$ *esetén divergens.*

1.3.5. Tétel. *(D'Alembert)*

Ha az $(a_n)_{n\geq 1}$ *sorozat esetén* $\lim_{n\to infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l < 1$*, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor konvergens,* $l > 1$ *esetén divergens.*

1.3.6. Tétel. *(Raabe)*

Ha a $\lim_{n\to\infty} u \left(\frac{a_{n=1}}{a_n} - 1\right) = 1$ *határérték létezik, akkor* $l < -1$ *esetén a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor konvergens* $l > -1$ *esetben divergens.*

1.3.7. Tétel. *Legyen az* $(a_n)_{n\geq 1}$ *egy pozitív tagú, csökkenő sorozat.*

Akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *és a* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ *ugyanolyan típusú konvergencia szempontjából.*

1.3.8. Tétel. *Ha az* $(a_n)_{n\geq 1}$ *és* $(b_n)_{n\geq 1}$ *pozitív tagú sorozatok és*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \alpha \in (0, +\infty),$$

akkor a $\lim_{n\to\infty} a_n$ *és* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *ugyanolyan típusú.*

1.3.9. Tétel. *(Dirichlet) Ha az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat pozitív tagú, csökkenő és*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

továbbá a $c_n = \sum_{k=1}^{n} b_n$ sorozat korlátos, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ sor konvergens.

1.3.10. Következmények. *(Leinbnitz)*

Ha az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat pozitív tagú csökkenő és $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergens.

1. Tanulmányozzuk a következő valós számsorok konvergenciáját:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

   b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$

   c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

   d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

   e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1}{n^{\alpha}}, \alpha \in \mathbb{R}$

   f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n+1)}$

   g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^n}$

2. Ha az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat csökkenő és a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens igazoljuk, hogy

$$na_n = 0.$$

3. Egy ellenpélda segítségével bizonyítsuk be, hogy ha az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat csökkenp és $na_n = 0$ akkor még nem következik a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciája.

4. Igazoljuk, hogy ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ pozítiv tagú sor divergens és $a_n = 0$, akkor ahol $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{s_k}}}{2\sqrt{s_n}} = 1$, ahol $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

5. Legyen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ egy pozítiv tagú konvergens sor.

   Igazoljuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$ sor is konvergens.

6. Legyen a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ egy divergens sor és $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Igazoljuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+a_n}$ sor is divergens.

   b) Jelölje $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

   Mutassuk meg, hogy

$$\frac{a_{n+1}}{s_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{s_{n+2}} + \ldots + \frac{a_{n+p}}{s_{n+p}} \geq 1 - \frac{s_n}{s_{n+p}}$$

   és ebből vezessük le, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{s_n}$ sor is divergens.

   c) A b) pontot felhasználva továbbá az előző fejezet 10. b) és 13. e) eredményét tetintetbe véve igazoljuk, hogy a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$ sor divergens.

   d) Igazoljuk, hogy $\dfrac{1}{s_{n-1}} - \dfrac{1}{s_n} \geq \dfrac{a_n}{s_n^2}$ és ebből vezessük le, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{s_n^2}$ sor konvergens.

   e) Mit mondhatunk a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+na_n}$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+n^2a_n}$ sorokról.

7. Tegyük fel, hogy $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ és a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens. Legyen $r_n = \sum\limits_{p=n}^{\infty} a_p$.

a) Igazoljuk, hogy ha $n > m$, akkor

$$\frac{a_m}{r_m} + \frac{a_{m+1}}{r_{m+1}} + \ldots + \frac{a_n}{r_n} > 1 - \frac{r_n}{r_m},$$

ebből pedig következtessünk a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n}$ sor divergenciájára.

b) Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$$

és igazoljuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ sor konvergens.

8. Legyen $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, igazoljuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{1-\frac{1}{n}}$ sor is konvergens.

9. Igazoljuk, hogy ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergál és a $(b_n)_{n\geq 1}$ sorozat monoton és korlátos, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ sor is konvergál.

10. A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ sorok Cauchy szorzatának nevezzük a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ sort, ahol $A_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0$. Igazoljuk, hogy ha az eredeti két sor abszolút konvergens, akkor a Cauchy szorzat is abszolút konvergens és

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n.$$

11. Tegyük fel, hogy $P_n > 0$, $P_1 \geq P_2 \geq \cdots \geq P_n \geq \ldots$ és a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n P_n$ sor konvergens, ahol $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Igazoljuk, hogy $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n) P_n = 0$.

12. Adott az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat $a_n > 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

a) Ha létezik $n_0 \in \mathbb{N}^*$ és $\alpha \in (0, +\infty)$ úgy, hogy $n \geq n_0$ esetén

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq 1 + \alpha,$$

akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens.

b) Ha létezik $n_0 \in \mathbb{N}^*$ és $\alpha \in (0, +\infty)$ úgy, hogy $n \geq n_0$ esetben

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leq 1,$$

akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens.

13. Tanulmányozzuk a $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln(\ln n))^{\ln n}}$ és $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n))^{\ln(\ln n)}}$ sorok konvergenciáját a 12. tétellel.

14. Milyen $\alpha \in (0, +\infty)$ értékek esetén konvergens a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^{\alpha}}$ sor.

15. Adott az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat úgy, hogy $a_n > 0$ $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

    Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, igazoljuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{a_n}} \cdot a_n$ sor is konvergens.

16. Legyen $(a_n)_{n\geq 1}$ egy csökkenő pozitív tagú sorozat és $p, q \in (0, +\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

    a) Igazoljuk, hogy ha a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\frac{1}{p}} (\ln n)^{\frac{1}{q}}}$ sor konvergens, akkor a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{a_n^p}{n}$ sor is konvergens.

    b) Igaz-e a fordított állítás?

1.4. Hatványsorok

1.4.1. Tétel. *Adott a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *hatványsor. Ha*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|,$$

akkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *hatványsor* $|x - x_0| < R$ *esetén konvergens és* $|x - x_0| > R$ *esetén divergens.*

1.4.2. Tétel. *Az* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *egyenlőséggel értelmezett függvény az* $|x-x_0| < R$ *egyenlőtlenséggel meghatározott tartományon deriválható és az* $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} aa_n(x-x_0)^{n-1}$ *hatvénysornak ugyanaz a konvergencia tartománya.*

Határozzuk meg a következő sorok konvergencia intervallumát és vizsgáljuk meg a konvergenciát a konvergencia tartomány határpontjaiban.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}$, $a, b \in (0, +\infty)$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!} x^n$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} x^n$

Határozzuk meg a következő függvénysorok konvergenciatartományát:

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^n$
6. $\sum\limits_{n=+\infty}^{\infty} \frac{e^{nx}}{3^{n^2}}$
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!} \cos^n x$
8. Adottak a következő hatványsorok

$$\begin{aligned}
A(x) &= 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \ldots \\
B(x) &= \frac{x}{1!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!} + \ldots \\
C(x) &= \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots + \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!} + \ldots
\end{aligned}$$

Igazoljuk, hogy az

$$F(x) = e^{\frac{x}{2}} \max\left\{A(x) - \frac{e^x}{3}, B(x) - \frac{e^x}{3}, C(x) - \frac{e^x}{3}\right\}$$

függvény periodikus és $F(x) > 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

9. Igazoljuk, hogy

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1) \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - 1$

   b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} = \dfrac{1}{2}$

   c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} = \sqrt{2} - \dfrac{3}{2}$.

10. Az $(a_n)_{n \geq 0}$ sorozat az $a_0 = 1$ $a_{n+1} \dfrac{1}{n+1} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(n-k)a_k}{k+1} \right)$, $n \in \mathbb{N}$ rekurzióval értelmezzük. Igazoljuk, hogy a $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{2^k}$ határérték létezik és számítsuk ki azt.

11. a) Határozzuk meg a konvergencia intervallumát az $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{2n}^{n} x^n$ hatványsornak.

    b) Számítsuk ki a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{2n}^{n} x^n$ összeget, ha x a konvergencia-intervallumban van.

    c) Írjuk fel zárt alakban a

    $$\sum_{k=0}^{n} C_{2k}^{k} C_{2(n-k)}^{n-k}$$

    összeget.

12. Számítsuk ki a következő hatványsorok összegét.

    a) $f(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dots$

    b) $f(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dots$

    c) $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}x^3 + \dots$

13. Adott az $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)C_{2n}^n} x^n$ hatványsor.

a) Igazoljuk, hogy a konvergenciasugara $R = 4$.

b) Igazoljuk, hogy

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{x(4-x)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{x}{4-x}}, & x \in (0,4) \\[2em] \dfrac{-1}{\sqrt{x(x-4)}} \ln \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{x}}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{x}}}, & x \in (-4,0) \end{cases}$$

1.5. Egyenletes konvergencia

1.5.1. Értelmezés. *Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$ és X egy halmaz. Adott az $f : X \times A \to \mathbb{R}^n$ függvény. Legyen $F(x) = \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y)$ minden $x \in X$. Azt mondjuk, hogy az $f(x,y)$ függvény egyenletesen tart az $F(x)$ függvényhez az X halmazon, amikor $y \to y_0$, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $v \in V(y_0)$ úgy, hogy $\|F(x) - f(x,y)\| < \varepsilon$, $(\forall)$ $x \in X$ és $(\forall)$ $y \in V \cap A$.*

1.5.2. Értelmezés. *Legyen X egy halmaz $f_n : X \to \mathbb{R}^m$ $n \in \mathbb{N}^*$ egy függvénysorozat és $F : X \to \mathbb{R}^m$ egy függvény.*

Az $(f_n)_{n \geq 1}$ függvénysorozat egyenletesen tart az F függvényhez amikor $n \to \infty$, ha $(\forall)$ $\varepsilon > 0$ esetén $(\exists)$ $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ (küszöbszám) úgy, hogy ha $n \geq n(\varepsilon)$, akkor

$$\|f_n(x) - F(x)\| < \varepsilon, \ (\forall) \ x \in X.$$

Egy függvénysor akkor egyenletesen konvergens egy X halmazon, ha a részletösszegek sorozata egyenletesen konvergens az X halmazon.

1.5.3. Tétel.

1. *Ha az X metrikus téren folytonos függvények sorozata egyenletesen konvergens, akkor a határértékfüggvény is folytonos az X metrikus téren.*

2. *Ha egy függvénysor olyan függvényekből áll, amelyek folytonosak egy X metrikus téren és a függvénysor egyenletesen konvergens az X metrikus téren, akkor az összegföggvény is folytonos.*

1. Adott az $f_0(x) = x$, $x \in [0, \pi]$, $f_{n+1}(x) = \sin f_n(x)$, $n \geq 0$ függvénysorozat.

   Igazoljuk, hogy az $(f_n)_{n\geq 0}$ függvénysorozat nem egyenletesen konvergens a $[0\pi]$ intervallumon.

   Az $(f_n)_{n\geq 1}$ függvénysorozatot a következőképpen értelmezzük:

2. $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Igazoljuk, hogy az $(f_n)_{n\geq 1}$ függvénysorozat nem egyenletesen konvergens a $[0, 1]$ intervallumon.

3. Igazoljuk, hogy az $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$, $n \geq 1$ függvényekből álló $(f_n)_{n\geq 1}$ függvénysorozat konvergens, de nem egyenletesen konvergens.

4. Igazoljuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2})$ függvénysor konvergál a $[0, 1]$ intervallumon, de nem egyenletesen.

5. Adott az $(a_n)_{n\geq 1}$ csökkenő valós számsorozat. Igazoljuk, hogy a következő állítások ekvivalensek:

   a) A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha$ egyenletesen konvergál $\mathbb{R}$-en.

   b) $na_n = 0$

6. Igazoljuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n^4 + x^2}}$ függvénysor egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényhez konvergál a valós számok halmazán.

7. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt az $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{2^n}$ egyenlőséggel értelmezzük. Igazoljuk, hogy f folytonos.

8. Egyenletesen konvergens-e a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^2 + 2^n}$ függvénysor a valós számok halmazán?

9. Határozzuk meg a konvergencia halmazukat a következő függvénysoroknak:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{n}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}$

10. Legyen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, ekkor

$$\frac{(2_{n+1})!!}{(2n)!!} \int_0^1 f(t)[1-(x-t)^2]^n dt = f(x)$$

és rögzített $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ esetén a konvergencia egyenletes az $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ intervallumon.

11. Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény és $\int_a^b x^n f(x)dx = 0$, bármely $n \in \mathbb{N}$, akkor $f(x) = 0$ bármely $x \in [a,b]$.

12. Adott $a > 0$. Legyen $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény. Ha létezik $M > 0$ úgy, hogy $\left|\int_0^a e^{nx} f(x)dx\right| \leq M$ bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor $f(x) = 0$ bármely $x \in [0,a]$.

13. Adott $b > 1$. Ha az $f : [1,b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és létezik $M > 0$ úgy, hogy

$$\left|\int_1^b x^n f(x)dx\right| \leq M$$

bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor $f(x) = 0$, bármely $x \in [1,b]$.

14. Ha az $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvénysorozat pontonként konvergál az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényhez és az $(f_n)_{n\geq 1}$ függvénysorozat minden tagja monoton, akkor a konvergencia egyenletes az $[a,b]$ intervallumon.

15. Ha az $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvénysorozat pontonként konvergál az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényhez és $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén és bármely $x \in [a,b]$, akkor a konvergencia egyenletes.

16. Az $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ függvénysorozatot az

$$f_1(x) = 0,\ f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}[x - f_n^2(x)], n \geq 2$$

$x \in [0,1]$ rekurziós képlettel értelmezzük. Igazoljuk, hogy az $(f_n)_{n\geq 1}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ függvényhez a $[0,1]$ intervallumon.

17. A Banach féle fixponttétellel igazoljuk, hogy az $x^3+10x-2=0$ egyenletnek van egy valós gyöke a $[0,1]$ intervallumban. Számítsuk ki a gyököt három tízedesnyi pontossággal.

18. Igazoljuk, hogy ha (X,d) egy kompakt metrikus tér, és az $f : X \to X$ függvényre $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$, bármely $x \neq y$, $x, y \in X$, akkor az f függvénynek pontosan egy fixpontja van X-ben.

Függvények határértéke és folytonossága

1.5.4. Értelmezés. *Legyen (X,d) és (Y,ρ) két metrikus tér, $A \subset X$, $B \subset Y$ és $x_0 \in A'$.*

Az $f : A \to B$függvénynek l a határértéke az x_0 pontban, ha bármely $\rho > 0$ esetén, létezik $\delta > 0$ úgy, hogy azon $x \in A$ pontok esetén, amelyekre $0 < d(x_0, x) < \delta$, következik, hogy $\rho(f(x), l) < \varepsilon$.

1.5.5. Tétel. *Legyen $f : A \to B$ a 1.5.4 Értelmezésben szereplő függvény és $x_0 \in A'$. Az f függvénynek akkor és csak akkor a határértéke az x_0 pontban, ha bármely $(x_n)_{n\geq 1} \subset A$ sorozat esetén, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ és $x_n \neq x_0$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.*

1.5.6. Értelmezés. *Legyen A és B a 1.5.4 Értelmezésben szereplő halmaz. Az $f : A \to B$ függvény akkor folytonos az $x_0 \in A$ pontban, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$ úgy, hogy minden olyan $x \in A$-ra, amelyre igaz, hogy $d(x_0, x) < \delta$ következik, hogy $\rho(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$. Egy függvény folytonos egy halmazon, ha folytonos a halmaz minden pontjában.*

1.5.7. Tétel. *Ha az $f : X \to Y$ folytonos függvény és $A \subset X$ egy kompakt halmaz, akkor $f(A)$ is kompakt az (Y,ρ) metrikus térben.*

1.5.8. Értelmezés. *Az $f : X \to Y$ függvény egyenletesen folytonos, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$ úgy, hogy ha $d(x.x') < \delta$, akkor $\rho(f(x), f(x')) < \varepsilon$.*

1.5.9. Tétel. *Ha az $f : X \to Y$ függvény folytonos és (X,d) kompakt, akkor f egyenletesen folytonos.*

1.5.10. Értelmezés. *Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$ és $x_0 \in A'$. Az $f : A \to \mathbb{R}^m$ függvénynek l a határértéke az x_0 pontban, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén, létezik $\delta > 0$ úgy, hogy bármely olyan $x \in A$ pontra amelyre $\|x - x_0\| < \delta$ következik, hogy*

$$\|f(x) - l\| < \varepsilon.$$

Annak jelölésére, hogy az x_0 pontban f-nek l a határértéke a

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

szimbólumot használjuk.

1.5.11. Értelmezés. *Az $f : A \to \mathbb{R}^m$ függvény az $x_0 \in A'$ pontban folytonos, ha*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

1.5.12. Értelmezés. *Legyen (X, d) egy metrikus tér. Az $f : X \to \mathbb{R}^m$ függvény egyenletesen folytonos X-en, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$ úgy, hogy*

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

1.5.13. Tétel. *Ha az (X, d) metrikus tér kompakt és az $f : X \to \mathbb{R}^m$ egy folytonos függvény, akkor f egyenletesen folytonos.*

1. Határozzuk meg a következő függvények értelmezési tartományát

   a) $u = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$

   b) $u = \arcsin \frac{y}{x}$

   c) $u = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$

   d) $u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$

2. Határozzuk meg az $f(x, y)$ függvényt, ha

$$f\left(x + y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$$

3. Igazoljuk, hogy az

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$$

függvény esetében

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0 \text{ és } \lim_{y\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0$$

és a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ határérték mégsem létezik.

4. Az $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ függvény esetében az iterált határértékek nem léteznek. Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = 0$.

5. Igazoljuk, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{ha} \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{ha} \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

függvény nem folytonos az $(0,0)$ pontban.

6. Igazoljuk, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha} \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{ha} \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

függvény folytonos $\mathbb{R}^2$ minden pontjában.

7. Adott $G \subset \mathbb{R}^2$, G tartomány és az $f : G \to \mathbb{R}$ egy függvény. Igazoljuk, hogy ha az f függvény folytonos az x változó szerint a G tartományon, az y változó szerint Lipschitz tualjdonságú, akkor f folytonos a G tartományon.

8. Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$ egy nemüres, konvex zárt halmaz és $x \in \mathbb{R}^n$. Igazoljuk, hogy A-ban létezik egy és csak egy olyan y elem, amelyre igaz, hogy $\|x-y\| = \inf\{\|x-z\|, z \in A\}$. Igazoljuk, hogy az $f(x) = y$, $f : \mathbb{R}^n \to A$ képlettel értelmezett függvény folytonos.

9. Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ olyan folytonos függvény, amely rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy $f \circ f = f$. Igazoljuk, hogy $f(\mathbb{R}^n)$ zárt halmaz.

10. Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény esetén a $G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : f(x) = y\}$ halmazt az f függvény grafikonjának nevezzük. Igazoljuk, hogy ha f folytonos, akkor $G(f)$ az $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ halmaznak egy zárt részhalmaza.

A parciális derivált és a differenciál

1.5.14. Értelmezés. *Adott $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$. Legyen $x_0 \in A \cap A'$. Az $f : A \to B$ függvény akkor differenciálható az x_0 pontban, ha létezik egy $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris függvény úgy, hogy*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - \varphi(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

A $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvényt $\varphi = D(x_0)$-val jelöljük.

1.5.15. Értelmezés. *Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in Int(A)$.*

Ha létezik

$$\lim_{x_i \to x_{i0}} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}}{x_i - x_{i0}} = l$$

határérték, akkor ezt a határértéket az f függvény x_i változó szerinti parciális deriváltnak nevezzük az x_i változó szerint az $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ pontban és $l = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ kifejezéssel jelöljük.

1.5.16. Tétel. *Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, $x_0 \in Int(A)$. Ha az $f : A \to B$ függvény differenciálható az x_0 pontban, akkor a $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\varphi = Df(x_0)$ differenciál mátrixa:*

$$J_f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}$$

Ezt a mátrixot az f függvény Jacobi mátrixának nevezzük az x_0 pontban. Az $f : A \to \mathbb{R}$ vektor változós, valós függvény esetén a jelölés:

$$grad\, f(x_0) = Vf(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \ \ldots \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right).$$

Ebben az esetben azt a sormátrixot az f függvény gradiensének nevezzük az x_0 pontban.

1.5.17. Tétel. *Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, $x_0 \in Int(A)$.*

Ha az $f : A \to B$ függvény differenciálható az x_0 pontban, akkor f folytonos is x_0-ban.

A tétel fordítottja nem igaz.

1. Adott az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ Vizsgáljuk meg, hogy az f függvény differenciálható-e az $O(0,0)$ pontban.

2. Differenciálható-e az $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ függvény az origóban

3. Határozzuk meg a következő függvények I. és II. rendű parciális deriváltjait.

   a) $u(x,y) = xy + \frac{x}{y}$
   b) $u(x,y) = \frac{\cos x^2}{y}$
   c) $u(x,y) = x^y$
   d) $u(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$
   e) $u(x,y) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.
   f) $u(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}$.

4. Ha az $u = f(x,y,z)$ függvény kielégíti az $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = nu$ differenciálegyenletet, akkor f n-ed fokú homogén függvény.

5. Legyen $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ Igazoljuk, hogy
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

6. Adott $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Igazoljuk, hogy $\frac{\partial f}{\partial x}$ és $\frac{\partial f}{\partial y}$ az $\mathbb{R}^2$ halmaz minden pontjában létezik, annak ellenére, hogy f nem folytonos a $(0,0)$ pontban.

7. Legyen $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   a) Igazoljuk, hogy $\frac{\partial f}{\partial x}$ és $\frac{\partial f}{\partial y}$ korlátos függvények.

   b) Legyen $\vec{u}$ egy $\mathbb{R}^2$-beli egységvektor. Igazoljuk, hogy a $D_{\vec{u}}\, f$ iránymenti derivált létezik és normája legfeljebb egy.

8. Állítsuk elő a megjelölt parciális deriváltakat:

   a) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}, \qquad u = x \ln(x,y)$

   b) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}, \qquad u = e^{xyz}$

   c) $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial \xi \partial \eta}, \quad u = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$

   d) $\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}, \qquad u = \frac{x+y}{x-y}$

   e) $\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}, \qquad u = (x^2+y^2)e^{x+y}$

   f) $\dfrac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}, \quad u = xyze^{x+y+z}$

9. Határozzuk meg a kijelölt differenciálokat

   a) $d^3u, \quad u = x^3 + y^3 - 3xy(x-y)$
   b) $d^n u, \quad u = \ln(x+y)$
   c) $d^3u, \quad u = xyz$
   d) $d^n u, \quad u = e^{x+y}$

10. Igazoljuk, hogy a megadott függvény teljesíti a kijelölt differenciálegyenletet:

a) $u = \frac{1}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}}$, $\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

b) $u = \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, $\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

c) $u = \frac{c_1 e^{-ar} + c_2 e^{ar}}{r}$, $\qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a^2 u$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

d) $z = x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)$, $\qquad x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = uz$

e) $z = yf(x^2 - y^2)$ $\qquad y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xz$

Implicit függvények

1. Határozzuk meg a $\frac{dy}{dx}$ és $\frac{d^2y}{dx^2}$ deriváltakat ha az $y(x)$ függvényt a következő egyenlőség értelmezi:

   a) $y = x + \ln y$

   b) $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$

   c) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \text{ arctg } \frac{y}{x}$

   d) $12 + xy = \ln(e^{xy} - e^{-xy}) = 0$

2. A $z(x, y)$ függvényt a következő egyenlőséggel értelmezzük:

   a) $x^2 + 2y^2 + z^2 - 3xyz - 2y + 3 = 0$

   b) $x\cos y + y\cos z + z\cos x = 1$.

   Az egyes esetekben határozzuk meg a $\frac{\alpha z}{\alpha x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ parciális deriváltakat.

3. A $z(x, y)$ függvényt az $x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0$ egyenlőség értelmezi.

   Határozzuk meg a $\frac{]paz}{\partial x}$ és $\frac{\partial z}{\partial y}$ parciális deriváltakat az $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$ esetben.

4. Ha a $z(x, y)$ függvényt a

$$2x^2 + y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$$

egyenlőség értelmezi határozzuk meg dz és d^2z differenciálokat az $x = 2$, $y = 0$, $z = 1$ esetben.

5. Igazoljuk, hogy az $x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(ax + by + cz)$ egyenlőséggel értelmezett $z(x, y)$ függvény teljesíti a
$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay$$
differenciálegyenletet.

6. Ha $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$, ahol F egy kétváltozós differenciálható függvény, akkor az adott egyenlőséggel értelmezett $z(x, y)$ implicit függvény teljesíti a
$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$
differenciálegyenletet.

7. Az y és z függvények az x változótól függnek és az $x^2+y^2-z^2 = 0$ valamint az $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$ egyenlőségekkel értelmezettek. Határozzuk meg $\frac{dy}{dx}, \frac{dx}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{\partial x^2}$ deriváltakat az $x = 1, y = 0, z = 1$ esetben.

8. Az u és v függvények az x és y változóktól függnek és az
$$x = \varphi(u, v) \quad \text{és} \quad y = \psi(u, v)$$
egyenlőségekkel értelmezettek.

   Határozzuk meg a $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ parciális deriváltakat.

9. A z függvény az x és y változóktól függ. Határozzuk meg a dz differenciált, ha $x = e^{u+v}$, $y = e^{u-v}$, $z = uv$.

10. Ha $z = F(r, \varphi)$ és $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ határozzuk meg a $\frac{\partial z}{\partial x}$ parciális deriváltakat.

A változócsere módszere

1. $(2x - 1)^2y'' + (2x - 1)y' + y = 0$ differenciaegyenlet esetén végezzük el a $2x - 1 = e^t$ változócserét.

2. Írjuk át az $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ differenciálegyenletet az u és v változókra ha $u = x$ és $v = x^2 + y^2$.

3. Írjuk fel a

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{(Cauchy-Riemann)}\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

differenciálegyenleteket polárkoordináták esetén.

4. Írjuk fel a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{(Laplace egyenletet)}$$

polárkoordináták esetén.

5. Írjuk fel az $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ egyenletet az u és v változókkal, ha $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$.

6. Végezzük el az egyenletekbe a megadott változócserét.

   a) $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z$
   $u = x^2 + y^2$, $v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $w = \ln z - (x + y)$

   b) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$
   $u = x + y$, $v = \frac{y}{x}$, $w = \frac{z}{x}$

   c) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$
   $\xi = x + y$
   $\eta = y - 3x$

A helyettesítés módszere

a) Egyváltozós eset:

Ha y egy adott függvény x-ben és $x = \varphi(t)$, akkor:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\varphi'(t)}\frac{dy}{dt}\\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{1}{(\varphi'(t))^3}\left[\varphi'(t)\frac{d^2y}{dt^2} - \varphi''(t)\frac{dy}{dt}\right]\end{aligned}$$

b) A kétváltozós eset

Legyen $G, D \subset \mathbb{R}^2$ két nyílt halmaz.

$$
\begin{aligned}
&f : D \to \mathbb{R}, \quad && z = f(x,y) \\
&\phi : G \to D, \quad && \phi = (\varphi, \psi) \\
&x = \varphi(u.v) && \\
&Y = \psi(u,v), && (u,v) \in G.
\end{aligned}
$$

Feltételezzük, hogy az f, φ, ψ függvényeknek léteznek a megfelelő rendű parciális deriváltjaik.

A feladat z, hogy fejezzük ki

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \text{stb.}$$

parciális deriváltakat a

$$\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}, \quad \text{stb.}$$

parciális deriváltak segítségével.

Erre a problémára a következő két képlet vezethető le:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} \right) \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} \right),
\end{aligned}
$$

ahol $\dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} = J_\phi$ a ϕ leképezés Jacobi mátrixa.

c) Független változók és függvények hlyettesítése

$$x = f(u,v,w), \; y = g(u,v,w), \; z = h(u,v,w)$$

u és v új független változók és $w = w(u,v)$ ezeknek a változóknak egy függvénye.

A $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \ldots$ stb- parciális deriváltakra a

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial u} \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial u} \right) &= \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial u} \\
\frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial v} \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial v} \right) &= \frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial v}.
\end{aligned}
$$

1.5.18. Példa. *Az*

$$x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

egyenletbe végezzük el az $x = u$, $y = uv$ változócserét.

Megoldás

$$u = x,\ v = \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{v}{u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{v}{u}\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{v}{u}\frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{v}{u^2}\frac{\partial z}{\partial v} - 2\frac{v}{u}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{v^2}{u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

Az előbbi egyenlőségeket alkalmazva a differenciálegyenlet így alakul át:

$$u^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{v}{u}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{v^2}{u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{2v}{u^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right) + 2u^2 v\left(\frac{1}{u}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{v}{u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$

$$+ u^2 v^2\left(\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) = 0 \Leftrightarrow u^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2uv\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + v^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$+ 2v\frac{\partial z}{\partial v} + 2uv\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - 2v\frac{\partial z}{\partial v} - 2v^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + v^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$u^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 0 \Leftrightarrow z(u,v) = u\varphi(v) + \psi(v)$$

$$z(x,y) = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

1. Új változók bevezetésével alakítsuk át a következő közönséges differenciál-egyenleteket:

   a) $(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$ ha $x = \cos t$

   b) $y'' + y'\,\mathrm{th}x + \frac{m^2}{\mathrm{ch}^2 x}y = 0$, $x = \ln\left(\frac{t}{2}\right)$

   c) $y'' + y' \cdot p(x) + q(x)y = 0$, $y = u \cdot e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} P(t)dt}$

   d) $x''y'' + xyy' - 2y^2 = 0$, $x = e^t$, $y = u(t)e^{2t}$

   e) $(1+x^2)y'' = y$, $x = \mathrm{tg}\,t$, $y = \frac{u}{\cos t}$

f) $y'' + (x+y)(1+y')^3 = 0$ $x = u+t$, $y = u-t$

ahol minden pontnál $u = u(t)$.

2. Legyen ϕ háromváltozós homogén függvény. A $\phi(y, y', y'') = 0$ egyenletbe vezessük be az $y = e^{\int_{x_0}^{x} u(t)dt}$ helyettesítést.

   Alakítsuk át az
$$(x-z)\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$
   egyenletet úgy, hogy x-et függvénynek tekintjük mégpedig $x = x(u, v)$, ahol $u = y - z$, $v = y + z$ az új független változók.

Geometriai alkalmazások

1. Az $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ $t \in I$ egyenletekkel adott görbe érintője az $M(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ pontban:
$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$
   A normálsík egyenlete ugyanebben a pontban:
$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0.$$

2. Az $\begin{matrix} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{matrix}$ $(u, v) \in D$ egyenletekkel adott felület érintősíkja az $M(x_0, y_0, z_0)$ pontban ahol $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z = z(u_0, v_0)$:
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Az $M(x_0, y_0, z_0)$ pontban a normális egyenlete:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}.$$

Ha a felület egyenlete $F(x, y, z) = 0$ implicit egyenlettel, adott, akkor az érintősík egyenlete:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot (z - z_0) = 0$$

és a normális egyenlete:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

3. Ha a $\Gamma(\alpha)$ síkgörbesereg az

$$f(x, y, \alpha) = 0, \;\; \alpha \in I$$

egyenlettel adott, akkor a $\Gamma(x)$, $\alpha \in I$ burkológörbéjének egyenlete:

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x, y, \alpha) = 0. \end{cases}$$

4. Ha az $S(\alpha)$, $\alpha \in I$ felületsereg az $F(x, y, z, \alpha) = 0$, $\alpha \in I$ egyenlettel adott, akkor a burkolófelület egyenlete:

$$\begin{cases} F(x, y, z, \alpha) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x, y, z, \alpha) = 0. \end{cases}$$

5. Ha a Γ görbe egyenlete $\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$, akkor Γ a görbe görbülete az $M(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ pontban:

$$k = \frac{|\vec{r}\,'(t_0) \times \vec{r}\,''(t_0)|}{|\vec{r}\,'(t_0)|^3}.$$

6. Írjuk fel az alábbi görbék érintőegyenesének és normálissíkjának egyenletét a megadott pontokban

a) $y = x$, $z = x^2$ $M(1,1,1)$

b) $x^2 + z^2 = 10$, $y^2 + z^2 = 10$ $M(1,1,3)$

c) $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $x + y + z = 0$ $M(1,-2,1)$

d) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ görbén melyik az a pont amelybe húzott érintő párhuzamos az $x + 2y + z = 4$ síkkal.

7. Bizonyítsuk be, hogy az

$$x = ae^t \cos t, \quad y = ae^t \sin t, \quad z = ae^t$$

görbe az $x^2 + y^2 = z^2$ kúp minden alkotóját ugyanakkora szög alatt metszi.

Írjuk fel az alábbi felületek megadott pontjában az érintősík és a normális egyenletét:

a) $z = x^2 + y^2$, $M(1,2,5)$

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$, $M(3,4,12)$

c) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $M\left(1,1,\frac{\pi}{4}\right)$

d) $z = y + \ln \frac{x}{z}$, $M(1,1,1)$

e) $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$, $M(2,2,1)$

f) $x = 2\cos\psi\cos\varphi$, $y = 2\cos\psi\sin\varphi$, $z = \sin\psi$, $M(\varphi_0, \psi_0)$.

görbén melyik az a pont amelybe húzott érintő párhuzamos az $x+2y+z = 4$ síkkal.

Differenciál, gradiens, rotáció, divergencia

1. Legyen $D \subset \mathbb{R}^3$, $f : D \to \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^3$, $\|h\| = 1$.

Az f függvény differenciálja az (x_0, y_0, z_0) pontban egy $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés, amely teljesíti

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} \frac{|f(x,y,z) - f(x_0,y_0,z_0) - \varphi(x-x_0, y-y_0, z-z_0)|}{\|(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\|} = 0$$

egyenlőséget.

A (φ) lineáris leképezés mátrixa:

$$A(\varphi) = \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

2. Az f függvény $h = (h_1, h_2, h_3)$ irány menti deriváltja az (x_0, y_0, z_0) pontban:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \cdot h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \cdot h_3.$$

3. Egy adott $V : D \to \mathbb{R}^3$, $V = (P, Q, R)$ függvény divergenciája:

$$\operatorname{div} V = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

4. A V függvény rotorja:

$$\operatorname{rot} V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Megjegyzés: $\operatorname{div}(\operatorname{rot} V) = 0$.

5. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, az

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

egyenlőtlenséggel értelmezzük.

Igazoljuk, hogy $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

6. Legyen $z = f(u, v)$, $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$. Ha $g, h \in C^1(D)$ és $f \in C^1(\Delta)$, akkor

$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \,, \operatorname{grad} v.$$

7. Igazoljuk, hogy az $u(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$, $x^2+y^2+z^2 \neq 0$ függvény teljesíti az
$$u = 2\ln 2 - \ln(\operatorname{grad} u)^2$$
összefüggést.

8. Határozzuk meg az $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $x^2+y^2+z^2 \neq 0$ függvény deriváltját a gradiensének az irányában.

9. Adott az $u(x,y,z) = \frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ függvény. Határozzuk meg a $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$ kifejezést.

10. Adott a $w(x,y,z) = f(x-y, x+z)$, $f \in C^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$. Határozzuk meg a $\operatorname{div}(\operatorname{grad} w)$ kifejezést.

11. Igazoljuk, hogy az $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pont az $x^2+y^2-2x = 0$ körön van.

    Határozzuk meg a $z(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ függvény iránymenti deriváltját az M_0 pontban az érintő irányaiban.

12. Határozzunk meg egy $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy $|f(x)| \leq \|x\|$, bármely $x \in \mathbb{R}^3$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ és $\|\operatorname{grad} f(0)\| = \sqrt{3}$.

13. Adott az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény. Ha $|f(x)| \leq \|x\|^2$ igazoljuk, hogy f-nek léteznek a parciális deriváltjai az origóban.

14. Adott az $u : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$, $u(x,y,z) = \ln(x^x y^y z^z)$ függvény.

    Határozzuk meg a $d^n u$ differenciált.

A Taylor képlet

Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, egy $n+1$-szer differenciálható függvény. Az x_0 pont környezetében létezik $\theta \in (0,1)$ úgy, hogy:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{1}{1!} Df(x_0)\cdot(x-x_0) + \ldots + \frac{1}{n!} D^n f(x_0)(x-x_0)^n + \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1} f(x_0) + \theta(x-x_0))(x-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

Az
$$R = \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1} f(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^{n+1}$$
kifejezést maradék tagnak nevezzük.

A Taylor képlet formálisan így írható:
$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} \Delta x_n \right)^k f(x) + R.$$

1. Állítsuk elő a Taylor-formula szerint az $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ függvényt az $A(1, -2)$ pont környezetében.

2. Írjuk fel az $f(x, y) = x^y$ függvényre a Taylor-képletet az $A(1, 1)$ pont körül a másodrendű tagokig.

3. Írjuk fel az $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ függvény Mac-Laurin-sorát a harmadfokú tagig.

4. Fejtsük Mac-Laurin-sorba a következő függvényeket

   a) $f(x, y) = (1 = x)^n (1 + y)^n$
   b) $f(x, y) = e^x \sin y$
   c) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$
   d) $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$
   e) $f(x, y) = \ln(1 + x) \ln(1 + y)$.

5. Írjuk fel a következő függvény Mac-Laurin sorának első három tagját:
$$f(x, y) = \int_0^1 (1 + x)^{t^2 y} dt.$$

6. A $z = z)x, y)$ függvényt a $z^3 - 2xz + y = 0$ egyenlőséggel (impliciten) értelmezzük.

   Ha $x = y = 1$, akkor $z = 1$.

   Írjuk fel a z függvény $A(1, 1)$ pont körüli kifejtésének első három tagját.

7. Az $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{1+x+y}{1-x+y}$ függvényt fejtsük Mac-Laurin sorba a másodrendű tagokig

8. Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény első és másodrendű deriváltjai legyenek folytonosak $\mathbb{R}$-en.

   Ha f, f', f'' korlátos is $\mathbb{R}$-en, akkor
   $$M_1^2 \le 4M_0\cdot M_2, \quad \text{ahol} \quad M_k = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f^{(k)}(x)|, \quad k\in\{0,1,2\}.$$

9. Az $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ függvény akárhányszor deriválható.

   Ha $(-1)^k f^{(k)}(x)\ge 0$, $(\forall)\, x\in[0,+\infty)$, $k\in\mathbb{N}$, akkor a $g(x)=\frac{1+f(x)}{x}$ függvény esetén is igaz, hogy $(-1)^k g^{(k)}(x)\ge 0$, $(\forall)\, x\in[0,+\infty)$, $k\in\mathbb{N}$.

10. Adottt az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ k-szor deriválható függvény. Ha tetszőleges adott r valós szám esetén $\lim\limits_{x\to\infty} x^r f(x)=0$ és $\lim\limits_{x\to\infty} x^r f^{(k)}(x)=0$, akkor $\lim\limits_{x\to\infty} x^r f^{(p)}(x)=0$, bármely $p\in\{0,1,2,\dots,k\}$.

Többváltozós függvények szélsőértékei

Az $f:D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}^n$ függvénynek helyi maximuma van az $x_0=(x_{10}x_{20}\dots x_{n0})$ pontban, ha létezik egy $v\in\mathcal{V}(x_0)$ környezet úgy, hogy
$$f(x)\le f(x_0),\ (\forall)\ x\in V.$$
f-nek helyi minimuma van az x_0 pontban, ha $f(x)\ge f(x_0)$, $(\forall)\ x\in V$.

1.5.19. Tétel. *Az $f:D\to\mathbb{R}$ függvénynek helyi maximuma van az (x_0) pontban, ha*
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)=0,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)=0,\ \dots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)=0 \tag{1.1}$$
és az f függvény Hesse mátrixa
$$H_f=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}(x_0)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial\partial x_2^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}(x_0)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{bmatrix}$$

negatív definit kvadratikus alakot származtat és minimuma van, ha H_f pozitív definit kvadratikus alakot származtat.

Azokat az x_0 pontokat ahol a (1.1) egyenlőségek teljesülnek stacionárius pontoknak nevezzük.

A kétváltozós eset:

Ha az (x_0, y_0) pont az $f(x, y)$ kétváltozós függvénynek egy stacionárius pontja, akkor f-nek

a) minimuma van, ha $D > 0$, $A > 0$;

b) maximuma van, ha $D.0$, $A < 0$;

c) nincs szélsőértéke, ha $D < 0$, ahol $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$, $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$ és $D = AC - B^2$.

Az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvény $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ $k = \overline{1, m}$, $m < n$ feltételek melletti szélsőértékét meghatározhatjuk úgy, hogy meghatározzuk az

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(x_1, \ldots, x_n)$$

függvény szélsőértékét.

A H_L Hesse mátrix által generált kvadratikus alak elpjelét úgy vizsgáljuk, hogy figyelembe vesszük, hogy $dx_1, \ldots, dx_n$ változók eleget tesznek a $\sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} dx_j = 0$ feltételeknek.

Weierstrass.

Egy korlátos és zárt tartományon differenciálható függvény felveszi a legnagyobb és legkisebb értékét, vagy valamelyik stacionárius pontban vagy a tartomány határán.

1. Határozzuk meg a következő függvények szélsőértékeit:

   a) $z(x, y) = x^2 y^3 (6 - x - y)$

b) $z(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

c) $z(x,y) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

d) $z(x,y) = e^{x^2-y}(5 - 2x + y)$

e) $z(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$

f) $z(x,y) = x^2 - 2y + \ln\sqrt{x^2 + y^2} + 3\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$

g) $u(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

h) $u(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$; $x,y,z \in (0,+\infty)$

i) $u(x,y,z) = xy^2z^3(10 - x - 2y - 3z)$

j) $u(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$ $x,y,z \in [0,\pi]$

k) $u(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \ldots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{2}{x_n}$ $x_i \in (0,+\infty)$, $i = \overline{1,n}$.

2. Keressük meg a $z = z(x,y)$ implicit függvények szélsőértékeit:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0$

c) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$

3. Határozzuk meg a következő függvények szélsőértékeit a megadott feltételek mellett:

a) $z(x,y) = x + y$, $x^2 + y^2 = 1$

b) $u(x,y,z) = x + y + z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

c) $z(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2$, $4x^2 + y^2 = 25$

d) $z(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, $x - y = \frac{\pi}{4}$

e) $u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

f) $u(x,y,z) = xyz$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$

g) $u(x,y,z) = xy + yz$, $x^2 + y^2 = 2$, $y + z = 2$ $x,y,z \in (0,+\infty)$

h) $u(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$

i) $u(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{x_n}$, $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n = 1$ $\alpha_i, \beta_i, x_i \in (0,+\infty)$, $i = \overline{1,n}$.

4. Határozzuk meg a következő függvényeknek a megadott tartományokon felvett legnagyobb és legkisebb értékét:

   a) $z(x,y) = x^2 + y^2 = 12x + 16y$, $x^2 + y^2 \leq 25$

   b) $z(x,y) = x^2 - xy + y^2$, $|x| + |y| \leq 1$

   c) $u(x,y,z) = x + y + z$, $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$

   d) $z(x,y) = x^2 - 2xy + 6y + 4x$, $-1 \leq x \leq 6$, $1 \leq y \leq 7$

5. Igazoljuk, hogy ha $x, y, z \in [1,2]$, akkor

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+z^2}} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

6. Bizonyítsuk be, hogy ha $x, y, z \in \mathbb{R}_+$, akkor

$$x^2y^2z^2\left(\frac{1}{x^6+z^3y^3} + \frac{1}{y^6+x^3z^3} + \frac{1}{z^6+x^3y^3}\right) \leq \frac{3}{2}.$$

7. Igazoljuk, hogy ha $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, akkor $a + b + c \leq 2abc + \sqrt{2}$.

8. Ha $x, y, z \in (0, +\infty)$ és $x^3 + y^3 + z^3 = 3$, akkor $x^4y^4 + x^4z^4 + y^4z^4 \leq 3$.

9. Legyenek az $a_{i,j}$, $i, j = \overline{1,n}$ adott valós számok. Igazoljuk, hogy az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

függvénynek a $G = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ gömbre való leszűkítésének a maximuma és minimuma az $A = [a_{ij}]_{i=\overline{1,n}}$ mátrix legnagyobb illetve legkisebb sajátértéke. ($\|x\|$ az x euklideszi normája)

10. Határozzuk meg az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ függvény minimumát, ha $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $1 \leq i \leq m$ és rang $[a_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} = m \leq n$.