Analízis

Szász Róbert

1. fejezet

Improprius integrálok

1.1. Improprius integrálok

1.1.1. Értelmezés. *Legyen* $a < b$. *Adott az* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ *függvény. Ha bármely* $u \in (a, b)$ *esetén létezik az* $\int_a^u f(x)dx$ *határozott integrál és létezik és véges a* $\lim_{u \to b} \int_a^u f(x)dx = l$ *határérték, akkor ezt a határértéket az* f *függvény improprius integráljának nevezzük az* $[a, b)$ *intervallumon és* $l = \int_a^b f(x)dx$ *kifejezéssel jelöljük. (A* $b = \infty$ *eset is elfogadott.)*

Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f(x)dx$ improprius integrál konvergens. Ha a $\lim_{u \nearrow b} \int_a^u f(x)dx$ határérték nem létezik, vagy létezik de végtelen, akkor az $\int_a^b f(x)dx$ improprius integrál divergens.

1.1.2. Példa. $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ $(\forall)\ u \in (0, 1)$.

$$\int_0^u \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = -2\sqrt{1-x}\,\Big|_0^u = 2 - 2\sqrt{1-u}$$
$$\lim_{u \nearrow 1} \int_0^u \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = \lim_{u \nearrow 1}(2 - 2\sqrt{1-u}) = 2.$$

Tehát $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = 2.$

1.1.3. Példa. $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $(\forall)$ $u \in (0, +\infty)$

$$\int_0^u \frac{1}{1+x^2}dx = arctgx\Big|_0^u = arctgu$$
$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{u\to\infty}\int_0^u \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{u\to\infty} arctgu = \frac{\pi}{2}.$$

Konvergenciakritérium

1.1.4. Tétel. *(Cauchy) Adott az $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ függvény. Legyen $F(u) = \int_a^u f(x)dx$. Az improprius integrál akkor és csak akkor konvergens, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik egy $c(\varepsilon) \in (a, b)$ úgy, hogy bármely $u', u'' \in (c(\varepsilon), b)$ esetén:*

$$|F(u') - F(u'')| < \varepsilon.$$

1.1.5. Tétel. *(Weierstrass) Ha az $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ függvénynek bármely $u \in (a, b)$ esetén integrálhatók az $[a, u]$ intervallumon, az $\int_a^b g(x)dx$ improprius integrál konvergens és $|f(x)| \leq g(x)$, $(\forall)$ $x \in [a, b)$, akkor az $\int_a^b f(x)dx$ integrál is konvergens.*

1.1.6. Tétel. *Adott az $f : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$ függvény. Ha van olyan α valós szám, hogy a $\lim_{x\to\infty} x^\alpha \cdot f(x) = l$ határérték véges, akkor $\alpha > 1$ esetén az $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ improprius integrál konvergens. Ha $\alpha < 1$ és $l \neq 0$ akkor az $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ improprius integrál divergens.*

1.1.7. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.*

Adott az $f : [a, b) \to [0, +\infty)$ függvény. Tegyük fel, hogy létezik $\alpha \in \mathbb{R}$ úgy, hogy a

$$\lim_{x\to b}(b - x)^\alpha f(x) = l$$

határérték létezik és véges.

Ha $\alpha < 1$, akkor az $\int_a^b f(x)dx$ improprius integál konvergens. Ha $\alpha > 1$ és $l \neq 0$, akkor az $\int_a^b f(x)dx$ improprius integrál divergens.

1.1.8. Tétel. *(Dirichlet) Legyen $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ két valós függvény.*

Ha $F(u) = \displaystyle\int_a^u f(t)dt$ függvény létezik, bármely $u \in (a, b)$ és korlátos, g monoton és $\lim\limits_{x \nearrow b} f(x) = 0$, akkor az $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx$ improprius integrál konvergens.

Megoldott feladatok

1. Igazoljuk, hogy az
$$\int_0^1 \frac{1}{(4+x)\sqrt{1-x^2}}dx$$
integrál konvergens.

   Megoldás
$$f(x) = \frac{1}{(4+x)\sqrt{1-x^2}}, \ f : [0,1) \to \mathbb{R}$$
függvény esetén
$$\lim_{x \nearrow 1} (1-x)^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

   Az 1.1.7 Tételt $\alpha = \dfrac{1}{2}$ megválasztással alkalmazzuk és következik a konvergencia.

2. Igazoljuk, hogy az $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ improprius integrál konvergens.

   Megoldás

   Ismert, hogy $e^t > 1 + t$, $(\forall)\ t \in \mathbb{R}$. A $t = x^2$ helyettesítéssel következik, hogy $\dfrac{1}{1+x^2} \geq e^{-x^2} > 0$.

   Az 1.1.5. Tételt alkalmazzuk $f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ függvények esetén $|f(x)| \leq g(x)$, $(\forall)\ x \in [0, +\infty)$. Mivel $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$ konvergens, következik, hogy $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty e^{-x^2}dx$ szintén konvergens.

3. Igazoljuk, hogy az $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ improprius integrál konvergens.

   Megoldás

$F(u) = \int_1^u \sin x dx$ függvény korlátos az $[1, +\infty)$ intervallumon.

A $g(x) = \dfrac{1}{x}$ függvény szigorúan csökkenő és $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Az 1.1.8. Tétel alapján az improprius integrál konvergens.

Kitűzött feladatok

Vizsgáljuk meg a következő integrálok konvergenciáját

1. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$

2. $\displaystyle\int_0^\infty x^{p-1}\cdot e^{-x}dx,\ p>0$

3. $\displaystyle\int_0^1 x^0 \ln^q \frac{1}{x} dx$

4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\text{arctg } ax}{x^n}\, dx,\ a \neq 0$

5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^n}\, dx$

6. $ds \int_0^\infty \dfrac{\sin^2 x}{x}\, dx$

7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\text{see?? } x) dx$

8. $\displaystyle\int_0^\infty \cos(e^x) dx$

9. Ha az $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ konvergens következik-e, hogy $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

   Igazoljuk, hogy a következő integrálok konvergensek és számítsuk ki azokat:

10. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}\, dx$

11. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^3}\, dx$

12. $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin\frac{1}{x}\, dx$

13. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx$

14. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x+1)\sqrt{4-x^2}}\, dx$

15. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1+x)\sqrt{1-x^4}}\, dx$

Tanulmányozzuk a konverginciáját a következő integráloknak:

16. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\frac{1}{x}\, dx$

17. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\, dx$

18. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x^2}\, dx$

19. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln|\sin^2 x - k^2|\, dx,\ k^2 < 1.$

Igazoljuk, hogy konvergens

20. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)}\, dx$

21. $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\sqrt[n]{x^n+1} - x\right) dx,\ n \geq 3.$

1.2. Paraméteres integrálok

1.2.1. Értelmezés. *Legyen $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ egy x-szerint integrálható függvény az $[a,b]$ intervallumon, bármely $y \in [c,d]$ esetén. Az $F(y) = \displaystyle\int_a^b f(x,y)dx$, $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ függvényt paraméteres integrálnak nevezzük.*

1.2.2. Tétel. *Ha az $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor az*

$$F; [c,d] \to \mathbb{R},\ F(y) = \int_a^b f(x,y)\, dx$$

paraméteres integrál minden $y \in [c,d]$ esetén létezik és az $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos.

1.2.3. Tétel. *Ha az $f, \dfrac{\partial f}{\partial y} : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak, akkor az $F : [c,d] \to \mathbb{R}$, $F(y) = \displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dx$ függvény deriválható és*

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx, \ \ (\forall)\ y \in [c,d].$$

1.2.4. Tétel. *Ha az $f, \dfrac{\partial f}{\partial y} : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak, az $u, v : [c,d] \to [a,b]$ deriválhatóak, akkor az $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ $F(y) = \displaystyle\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx$ függvény deriválható és*

$$F'(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + v'(y)f(v(y),y) - u'(y)f(u(u),y).$$

1.2.5. Tétel. *Ha az $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor az $F : [c,d] \to \mathbb{R}$, $F(y) = \displaystyle\int_a^b f(x,y)dx$ függvény integrálható és*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Megoldott feladatok

1. Számítsuk ki az integrált $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx.$

   Megoldás

   Legyen $F(y) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+yx)}{1+x^2}\,dx.$

$$
\begin{aligned}
F'(y) &= \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}\ dx = \\
&= \frac{-y}{1+y^2}\int_0^1 \frac{1}{1+xy}\ dx + \frac{1}{1+y^2}\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\ dx + \frac{y}{1+y^2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\ dx \\
&= \frac{-1}{1+y^2}\ln(1+xy)\Big|_0^1 + \frac{1}{1+y^2}\frac{1}{x}2\ln 2 + \frac{y}{1+y^2}\frac{\pi}{4} \Rightarrow \\
F(1) &= \int_0^1 F'(y) = -\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{1+y^2}dy + \\
&\quad + \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\ dy + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{y}{1+y^2}\ dy \\
&= -F(1) + \frac{\pi}{8}\ \ln 2 + \frac{\pi}{8}\ \ln 2 \Rightarrow F(1) = \frac{\pi}{8}\ \ln 2.
\end{aligned}
$$

2. Legyen $b > a > 0$. Számítsuk ki az $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\ dx$ integrált.

   Megoldás

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\ dx &= \int_0^1 \left(\int_a^b x^t dt\right)\ dx = \\
&= \int_a^b \left(\int_0^1 x^t dx\right) dt = \int_a^b \left(\frac{x^{t+1}}{t+1}\Big|_0^1\right) dt = \\
&= \int_a^b \frac{1}{1+t}\ dt = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right).
\end{aligned}
$$

3. Számítsuk ki a határértéket:

$$
\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\displaystyle\int_{x^2}^x \frac{\ln(1+xy)}{y}dy}{x^2} =
$$

$$
= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\displaystyle\int_{x^2}^x \frac{y}{y(1+xy)}dy + \frac{\ln(1+x^2)}{x} - 2x\frac{\ln(1+x^3)}{x^2}}{2x} =
$$

$$
= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\displaystyle\frac{1}{x}\ln(1+xy)\Big|_{x^2}^x + \frac{\ln(1+x^2)}{x} - 2\frac{\ln(1+x^3)}{x}}{2x} = 1
$$

1.2.6. Tétel. *Legyen $f : [a,b) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény.*

Ha az $\int_a^b f(x,y)dx$ improprius integrál konvergens, $(\forall)$ $y \in [c,d]$ és az $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ egyenletesen konvergens a $[c,d]$ intervallumon, akkor az $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ függvény deriválható és $F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$.

1.2.7. Tétel. *Legyen $f : [a,b) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény.*

Ha az $\int_a^b f(x,y)dx$ improprius integrál egyenletesen konvergens a $[c,d]$ intervallumon, akkor

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Megoldott feladatok

1. Az $F(\beta) = \int_0^\infty e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$, $F : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ függvény segítségével számítsuk ki az $\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$ integrált.

   Megoldás

$$F'(\beta) = \int_0^\infty e^{-\beta x} \sin \alpha x dx = \frac{-\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} F(\beta) = -\mathrm{arctg}\dfrac{\beta}{\alpha} + c \\ F(\infty) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + c = 0 \Rightarrow c = \frac{\pi}{2}$$

   Tehát $F(\beta) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\frac{\beta}{\alpha}$ és $\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = F(0) = \frac{\pi}{2}$

2. Számítsuk ki az integrált:

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2}\, dx.$$

Megoldás Az 1.2.5 Tételt alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \left(\int_a^b e^{-tx^2} dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_0^\infty e^{-tx^2} dx \right) dt = \\ &= \int_a^b \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}\, dt = \sqrt{\pi} \left(\sqrt{b} - \sqrt{a} \right). \end{aligned}$$

(Felhasználtuk az $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ képletet).

Kitűzött feladatok

Számítsuk ki az integrálokat:

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx$

2. $\displaystyle\int_0^\infty \ln\left(\frac{p + qe^{-ax}}{p + qe^{-bx}} \right)\, dx$

3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\, dx$

4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\, dx$

5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2}}{x}\, dx$

6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2}}{x^2}\, dx$

7. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, \sin mx\, dx$

8. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(a^2 + x^2)}{b^2 + x^2}\, dx$

9. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(1 - a^2x^2)}{x^2\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

10. $\displaystyle I_1(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x) dx$

11. $\displaystyle I_2(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1 + m\sin x}{1 - m\sin x} \right) \cdot \frac{1}{\sin x}\, dx,\ |m| < 1$

12. $I_3(m) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + m\cos x)}{\cos x}\, dx,\ |m| < 1$

13. $I_4(m) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(m\ \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\, dx$

14. $I_5(m) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a\sin x)}{\sin x}\, dx$

15. $I(a, b) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)^3}\, dx$

16. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

1.3. Dupla és tripla integrálok kiszámítása, terület és térfogatszámítás

1.3.1. Tétel. *Adott az $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ függvény. Ha f integrálható az $[a, b] \times [c, d]$ halmazon és bármely $x \in [a, b]$ esetén létezik az $\displaystyle\int_c^d f(x, y)dy = F(x)$ integrál, akkor F integrálható az $[a, b]$ intervallumon és*

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx.$$

1.3.2. Következmények. *Ha az $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor létezik az $\displaystyle\iint_D f(x, y)dxdy$ integrál, ahol $D = [a, b] \times [c, d]$ és*

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,)dx \right) dy.$$

1.3.3. Tétel. *Legyen $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ két folytonos függvény, $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$, $(\forall)\ x \in [a, b]$. A D tartomány a következőképpen adott:*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),\ x \in [a, b]\}.$$

Ha $f : D \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, akkor

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx.$$

1.3.4. Tétel. *Legyen* $D \subset \mathbb{R}^2$ *egy korlátos mérhető halmaz és* $\varphi_1, \varphi_2 : D \to \mathbb{R}$ *két folytonos függvény úgy, hogy* $\varphi_1(x, y) \leq \varphi_2(x, y)$, $(\forall)$ $(x, y) \in D$. *Legyen* $A = \{(x, y, z) \mid \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y),\ (x, y) \in D\}$.

Ha $f : A \to \mathbb{R}$ *egy integrálható függvény, akkor*

$$\iiint_A f(x, y, z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z) \right) dxdy.$$

1.3.5. Tétel. *(A helyettesítés módszere)*

Legyen $E \subset \mathbb{R}^n$ *egy nyílt halmaz és* $g : E \to \mathbb{R}^n$ *egy olyan folytonos differenciálható, injektív függvény, hogy*

$$\det(g'(x)) \neq 0, \text{ bármely } x \in E.$$

Ha $A \subset E$ *egy mérhető kompakt halmaz és* $f : g(A) \to \mathbb{R}$ *integrálható függvény, akkor* $f(g(x)) \mid \det g'(x)|$ *függvény is integrálható az* A *halmazon és*

$$\int_A f(g(x))| \det g'(x)|\, dx = \int_{g(A)} f(y)dy.$$

1.3.6. Példa. *Legyen* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq r^2\}$. *Számítsuk ki* $\iint_D (x + y)dxdy$.

I. Megoldás

$$\begin{aligned}
\iint_D (x+y)dxdy &= \int_0^r \left(\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} (x+y)dy \right) dx = \\
&= \int_0^r \left[x\sqrt{r^2-x^2} + \frac{1}{2}(r^2-x^2) \right] dx = \\
&= \left.\frac{(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{-3}\right|_0^r + \frac{1}{2}\left.\left(r^2x - \frac{x^3}{3} \right)\right|_0^r = \\
&= \frac{r^3}{3} + \frac{r^3}{3} = \frac{2r^3}{3}
\end{aligned}$$

II. Megoldás

Áttérünk polárkoordinátákra

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \end{aligned} \qquad (\rho, \theta) \in [0, r] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] = D^*$$

$$\begin{aligned}
\iint_D (xy)dxdy &= \iint_{D^*} (\rho\cos\theta + \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta = \\
&= \int_0^r \rho^2 d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \sin\theta) d\theta = \\
&= \frac{r^3}{3} \cdot (\sin\theta - \cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2r^3}{3}
\end{aligned}$$

Feladatok

1. A D_1tartományt az $y = x^2$ és $y = 2x + 3$ görbék zárják közre. Számítsuk ki az $\iint_A xydxdy$ integrált.
2. A D_2 tartományt az $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$, $y = x$ egyenesek zárják közre. Számítsuk ki:
$$\iint_{D_2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ dxdy.$$
Számítsuk ki az integrálokat a megadott tartományon.

3. $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 1)^2 \leq 1, y \leq x^2, x \geq 0\}$
$\iint_{D_3} (1 - y)dxdy.$
4. $D_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \geq x + y \geq 0, -1 \leq y \leq 1\}$
$\iint_{D_4} \arcsin\sqrt{x + y}dxdy.$
5. $D_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$,
$\iint_{D_5} x^{p-1}y^{q-1}dxdy.$
6. $D_6 = [0, \pi] \times [0, \pi]$,
$\iint_{D_6} |\sin(x + y)|dxdy$
7. $D_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0\}$,
$\iint_{D_7} \sqrt{(x^2 + y^2)^3}dxdy.$
8. $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2\}$,
$\iint_{D_8} \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}\ dxdy.$

9. $D_9 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi^2 \leq (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4\pi^2\}$
$$\iint_{D_9} \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}dxdy.$$

10. $D_{10} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$,
$$\iiint_{D_{10}} [(x-y)^2+z^2]dxdydz.$$

11. $D_{11} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq az,\ x^2+y^2+z^2 \leq 2a^2\}$

12. $D_{12} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3(x^2+y^2)+z^2 \leq 3a^2\}$
$$\iiint_{D_{12}} (x^+Y^2+z^2)dxdydz.$$

13. $D_{13} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq xy, y \leq x, x \leq 1, z \geq 0\}$,
$$\iiint_{D_{13}} xy^2z^3dxdydz.$$

Számítsuk ki a következő görbék által közrezárt területet:

14. $y^2 = x^3, y^2 = 8(6-x)^3$

15. $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$

16. $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$

Számítsuk ki a következő felületek által közrezárt területet:

17. $z = 4-x^2-y^2,\ 2z = 2+x^2+y^2$

18. $x^2+y^2 = z^2,\ x^2+y^2 = z,\ z = 0$

19. $x^+y^2+z^2 \leq 1,\ y^2-2xz \leq 0,\ x^2+y^2 \geq k^2z^2.$

1.4. Görbeív hossza, első- és másodfajú görbe menti integrálok

1.4.1. Értelmezés. *Egy* $\Gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *folytonos leképezés képét görbének nevezzük.*

Ha a Γ *görbébe beírt töröttvonalak hosszai egy korlátos* A *halmazt képeznek, akkor a* Γ *görbe rektifikálható és a* Γ *görbe hossza:* $L_\Gamma = \sup A$.

A $\Gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ *görbét simának nevezzük, ha az* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *függvények deriválhatók, deriváltjaik folytonosak és* $(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2 + \cdots + (x_n'(t))^2 \neq 0$.

1.4.2. Tétel. *Ha a* $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *görbe sima, akkor a hossza:*

$$L_\Gamma = \int_a^b \sqrt{(x_1'(y))^2 + (x_2'(y))^2 + \ldots + (x_n'(y))^2}dy$$

1.4.3. Értelmezés. *Legyen* $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *egy sima görbe,*

$$L_\Gamma(t) = \int_a^t \sqrt{(x_1'(y))^2 + (x_2'(y))^2 + \ldots + (x_n'(y))^2}dy,$$

$D \subset \mathbb{R}^n$ *egy olyan nyílt halmaz, hogy* $\Gamma([a, b]) \subset D$ *és* $F : D \to \mathbb{R}$ *egy folytonos függvény.*

Az

$$I = \int_a^b F(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))dL_\Gamma(t)$$

Stieltjes integrált a Γ *görbe mentén számolt elsőfajú görbe menti integrálnak nevezzük és szimbólummal jelöljük.*

1.4.4. Tétel. *A sima görbék esetén:*

$$\begin{aligned}\int_\Gamma F(x)ds &= \int_a^b F(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))dL_\Gamma(t) = \\ &= \int_a^b F(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))\sqrt{(x_1'(t)^2 + \ldots + (x_n'(t))^2}dt.\end{aligned}$$

1.4.5. Megjegyzés. $n = 2$ *esetén*

$$\int_\Gamma f(x, y)ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

Ha a Γ *görbe az* $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ *egyenlettel adott, akkor:*

$$\int_\Gamma f(x, y)ds = \int_a^b f(x, f(x))\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

1.4.6. Értelmezés. *Legyen* $D \subset \mathbb{R}^n$ *egy nyílt halmaz,* $\Gamma : [a, b] \to D$, $\Gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ *egy rektifikálható görbe* D*-ben és* $F : D \to \mathbb{R}^n$ $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ *egy folytonos leképezés.*

Ha az

$$\int_a^b F_k(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))dx_k(t)$$

Stiltjes integrálok léteznek minden $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *esetén, akkor a*

$$I = \sum_{n=1}^{n} \int_a^b F_k(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))dx_k(t)$$

összeget az F *függvény másodfajú inegrál jának nevezzük a* Γ *görbén.*

A másodfajú görbe menti integrál jelölésére a $\int_\Gamma < F(x), dx >$ *szimbólumot is használjuk.*

1.4.7. Tétel. *Legyen* $F : D \to \mathbb{R}^n$ *egy folytonos függvény.*

Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az $\int_\Gamma < F(x), dx >$ *integrál értéke független legyen az úttól (csak a* Γ *görbe kezdőpontjától és végpontjától függ), az hogy az*

$$< F(x), dx >= \sum_{k=1}^{n} F_k(x)dx_k$$

kifejezés, valamely $\phi : D \to \mathbb{R}$ *függvény differenciálja legyen.*

1.4.8. Tétel. *Legyen* $D \subset \mathbb{R}^n$ *egy nyílt halmaz és* $F : 0 \to \mathbb{R}^n$ *egy olyan leképezés, amely komponenseinek léteznek a parciális deriváltjai és folytonosak.*

Az $\int_\Gamma < F(x), dx >$ *másodfajú görbe menti integrál, akkor és csak akkor független az úttól, ha* $\dfrac{\partial F_k}{\partial x_p} = \dfrac{\partial F_p}{\partial x_k}$ *bármely* $k, p \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

1.4.9. Tétel. *Legyen* D *egy egyszerű zárt tartomány,* $D \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$, Ω *nyílt,* $\partial D = \Gamma$ *rektifikálható. Ha* $P, Q : \Omega \to \mathbb{R}$ *folytonos függvények,* P*-nek* y*-szerinti és* Q*-nak,* x*-szerinti parciális deriváltja létezik és folytonos* Ω*-án, akkor igaz a következő egyenlőség:*

$$\int_\Gamma P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

1.4.10. Példa.

1. *Számítsuk ki az* $I = \int_\Gamma xyds$ *integrált a* $\Gamma : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}, \ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *köríven.*

   Megoldás

$$\begin{aligned} I &= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}dt = \\ &= \frac{a^3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2tdt = \frac{a^3}{2}. \end{aligned}$$

2. *Számítsuk ki az* $\int_\Gamma xdx + e^x dy$ *integrált, ahol* $\Gamma : x = \ln(1+t)$, $y = \sqrt{1+t}$, $t \in [0,1]$ *görbe.*

   Megoldás

$$\begin{aligned} \int_\Gamma xdx + e^x dy &= \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t}\,dt + \int_0^1 \frac{1+t}{2\sqrt{1+t}}\,dt = \\ &= \left.\frac{\ln^2(1+t)}{2}\right|_0^1 + \frac{1}{2}\left.\frac{(1+t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \frac{1}{3}(\sqrt{8}-1). \end{aligned}$$

Feladatok

Számítsuk ki az elsőfajú görbe menti integrálokat

1. $\int_{\Gamma_1} x^2y^2ds$, $\Gamma_1 : x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$,

   $t \in [0, 2\pi]$ $\qquad E: \frac{3a^2}{70}$

2. $\int_{\Gamma_2} (x^2+y^2)\ln zds$, $\Gamma_2 : x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$

   $t \in [0,1]$ $\qquad E: \frac{1+2e^3}{\sqrt{27}}$

3. $\int_{\Gamma_3} |xy|ds$, $\Gamma_3 : x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $a > 0$, $b > 0$,

   $t \in [0, 4\pi]$ $\qquad E: \frac{8ab(a^3-b^3)}{3(a^2-b^2)}$

4. $\displaystyle\int_{\Gamma_4} (x^2 + y^2 + z^2)ds,\ \Gamma_4 : x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$

$$t \in [0, 2\pi]$$

5. $\displaystyle\int_{\Gamma_5} zds,\ \Gamma_5 : x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t$

$$t \in [0, 2\pi].$$

Számítsuk ki a következő másodfajú görbe menti integrálokat:

6. $\displaystyle\int_{\Gamma_6} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy,\ \Gamma_6 : y = x^2,\ -1 \leq x \leq 1.$

7. $\displaystyle\int_{\Gamma_t} \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dx - \frac{x-y}{x^2+y^2}\, dy,\ \Gamma_7 : x^2 + y^2 = \mathbb{R}^2.$

Ellenőrizzük, hogy a következő másodfajú görbe menti integrálok függetlenek az úttól és számítsuk ki.

8. $\displaystyle\int_{(-1,2)}^{(2,3)} xdy + ydx$

9. $\displaystyle\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x + y)dx + (x - y)dy$

10. $\displaystyle\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2}$

11. $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} xdx + y^2dy - z^3dz$

12. $\displaystyle\int_{(1,2,3)}^{(0,1,1)} yzdx + xzdy + xydz$

Számítsuk ki a következő másodfajú görbe menti integrálokat:

13. $\displaystyle\int_{\Gamma_13} (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz,$

$$\Gamma_{13} : x = t,\ y = t^2,\ z = t^3,\ t \in [0, 1].$$

14. $\displaystyle\int_{\Gamma_{14}} ydx + zdy + xdz$

$$\Gamma_{14} : x = a\cos t\ y = a\sin t,\ z = bt,\ t \in [0, 2\pi].$$

A Green-képlet alkalmazásával számítsuk ki

15. $\displaystyle\int_{\Gamma_{15}} xy^2dy - x^2ydx,\ \Gamma_{15} : x^2 + y^2 = \mathbb{R}^2$

16. $\displaystyle\int_{\Gamma_{16}} (x+y)dx - (x-y)dy,\ \Gamma_{16} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Számítsuk ki a következő másodfajú görbe menti integrálokat:

17. $\displaystyle\int_{\Gamma_1} (x+y)dx - ydy,\ \Gamma_1 : \begin{cases} xy = 2 \\ y = 2x, \qquad x \geq 0. \\ y = \frac{x}{2} \end{cases}$

18. $\displaystyle\int_{\Gamma_2} (2a-y)dx + xdy,\ \Gamma_2 : \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$

19. $\displaystyle\int_{\Gamma_3} \frac{1}{y}dx - \sqrt{2x}dy,\ \Gamma_3 : x^2 + y^2 - 2x = 0,\ y \geq 0.$

20. $\displaystyle\int_{\Gamma_4} \frac{1}{x+3}dy,\ \Gamma_4$: az $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - 1 = 0$ ellipszis $A(3,0)$, $B(0,2)$ pontok közötti része.

21. $\displaystyle\int_{\Gamma_5} (e^x \cos y + xy^2)dx - (e^x \sin y + x^2y)dy$

$D = \{(\rho, \theta) : \rho \leq a\sqrt{\cos 2\theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\},\ \Gamma_5 = \partial D.$

22. $\displaystyle\int_{\Gamma_6} \frac{x^3dy - y^3dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}},\ \Gamma_6 : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},\ x \geq 0,\ y \geq 0.$

23. $\displaystyle\int_{\Gamma_7} (y^2+z^2)dx + (z^2+x^2)dy + (x^2+y^2)dz,\ \Gamma_7 : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4ax \\ x^2 + y^2 = ax,\ z \geq 0 \end{cases}$

24. $\displaystyle\int_{\Gamma_8} y^2dx + z^2dy + x^2dx,\ \Gamma_8 : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 - ax = 0 \end{cases}$

1.5. Felületdarab területe, felületi integrálok

1.5.1. Értelmezés. *Legyen* $D \subset \mathbb{R}^2$, D *kompakt és mérhető. Az*

$$S : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in D, \\ z = z(u,v) \end{cases} \tag{1.1}$$

egyenletekkel értelmezett felületet simának nevezzük, ha az x, y, z *függvények egy olyan* G *nyílt halmazon értelmezettek, hogy* $D \subset G$, *az* x, y, z *függvényeknek léteznek az* u *és* v *szerinti parciális deriváltjuk, azok folytonosak és*

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = 2.$$

1.5.2. Tétel. *Ha az (1.1) összefüggéssel értelmezett* S *felület sima, akkor*

$$\operatorname{Ter}(S) = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,dudv,$$

ahol

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2. \end{aligned}$$

1.5.3. Megjegyzés. *Ha az* S *felület a* $z = f(z,y)$, $(x,y) \in D$ *egyenlettel adott, akkor:*

$$\operatorname{Ter}(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}\,dxdy.$$

1.5.4. Értelmezés. *Adott az* $S : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in D \\ z = z(u,v) \end{cases}$ *sima felület.*

Legyen $F : G \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, ahol $G \subset \mathbb{R}^3$ egy olyan nyílt halmaz, amely tartalmazza az S felületet.

Az $I = \iint_D F(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{EG - F^2}\,dudv$ integrált elsőfajú felületi integrálnak nevezzük és

$$I = \iint_S F(x,y,z)d\sigma$$

szimbólummal jelöljük.

1.5.5. Példa. *Számítsuk ki az $\iint_S \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}\,d\sigma$ integrált ahol $S : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipszoid.*

Megoldás

Felírjuk S parametrikus alakját:

$$S : \begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi \\ y = b\sin\theta\sin\varphi \qquad \theta \in [0,\pi],\ \varphi \in [0,2\pi]. \\ z = c\cos\theta \end{cases}$$

$$d\sigma = abc\sqrt{\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}}\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} = \sqrt{\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}}\ q\acute{e}s$$

$$I = abc\int_0^{\frac{pi}{2}}\left(\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}\right)\sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}\pi abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

$$\vec{r}(u,v) = \vec{i}x(u,v) + \vec{j}y(u,v) + \vec{k}z(u,v)$$

Legyen $\vec{n} = \dfrac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right\|}$ és $\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, ahol $P, Q, R : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^3$, G nyílt, G tartalmazza az S felületet.

1.5.6. Értelmezés. *Az*

$$I = \iint_S (\vec{V}\cdot\vec{u})d\sigma = \iint_S \frac{\left(V, \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)}{\left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right\|}d\sigma$$

elsőfajú felületi integrált, a V függvény, S felületen számolt másodfajú felületi integráljának nevezzük és

$$I = \iint_S P dydz + dzdx + R dxdy$$

szimbólummal jelöljük.

1.5.7. Megjegyzés. *Fenáll az*

$$I = \iint_S (\vec{v} \cdot \vec{u}) d\sigma = \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} dudv$$

egyenlőség.

1.5.8. Példa. *Számítsuk ki az* $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$ *integrált az* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ *gömb külső felületén.*

A gömb paraméteres egyenlete

$$x = R\sin\theta\cos\varphi,\ y = R\sin\theta\sin\varphi,\ z = R\cos\theta$$
$$\theta \in [0,\pi], \varphi \in [0,2\pi] \quad \vec{u} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{R}$$
$$I = \iint_S \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R} d\sigma$$
$$I = R\iint_S d\sigma = R4\pi R^2 = 4\pi R^3.$$

Feladatok

1. Határozzuk meg a $z = xy$ felület $x^2 + y^2 = a^2$ henger belsejébe eső területét.

2. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gömbfelület az $x^2 + y^2 = Rx$ henger belsejébe eső részének területét.

3. Számítsuk ki az $x^2 + y^2 = 2az$ felületből az $x^2 + y^2 = a^2$ henger által kimetszett rész területét.

4. Számítsuk ki az $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2)$ felület területét.

5. Számítsuk ki az $(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2) = 4a^2x^2y^2$ felület területét.

Számítsuk ki a következő elsőfajú integrálokat:

6. $\iint_S (x^2+y^2)d\sigma$ az $x^2+y^2 = 2z$ parabolóidból a $z=1$ sík által kimetszett korlátos rész.

7. $I = \iint_S \frac{1}{x^2+y^2+(R-z)^2}\,d\sigma$

   $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

8. $I = \iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}\,d\sigma$

   $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = R^2,\ z \geq 0\}$.

9. $I = \iint_S \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}\,d\sigma$

   $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 2az,\ h \geq z \geq 0\}$ $a > 0$, $h > 0$.

10. Számítsuk ki a $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y62 = 2z,\ 0 \leq z \leq 1\}$ felület tömegét, ha $\rho(x,y,z) = z$.

Számítsuk ki a következő másodfajú felületi integrálokat.

11. $\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, ahol S az $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$ gömb külső felülete.

12. $\iint_S \frac{1}{ax}dydz+\frac{1}{by}dzdx+\frac{1}{cz}dxdy$, ahol S az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipszoid külső felülete.

13. $\iint_S (x^2+y^2)dxdy$, S az $x^2+y^2 = z$ paraboloid $x^2+y^2 = 1$ hengerbe eső részének felső felülete.

14. $\iint_S (y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$

    $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = z^2,\ 0 \leq z \leq h\}$.

1.6. Gauss-Osztrogradszkij képlet és Stoks képlet

Legyen $D \subset \mathbb{R}^3$ egy nyílt halmaz.

Tegyük fel, hogy $P, Q, R : D \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények.

$S \subset D$, S kétoldalú sima felület darab, amelyet a Γ zárt görbe határol.

Ilyen feltételek mellett igaz a következő összefüggés

$$\int_{Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma,$$

ahol $n(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ az S felület normálisa, a felületnek arra az oldalára mutat, ahonnan nézve a Γ görbe körüljárása pozitív.

Feladatok

A Stoks formulával számítsuk ki:

1. $\displaystyle\int_\Gamma ydx+zdy+xdx, \Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = a^2, x+y+z = 0\}$

2. $\displaystyle\int_{\Gamma_2} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$

   $$\Gamma_2 : \begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = a\sin\varphi, \quad \varphi \in [0,\pi] \\ z = \dfrac{h}{2\pi} \end{cases}$$

3. $\displaystyle\int_{\Gamma_3} (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$

   $\Gamma_3 : x = a\sin^2 t,\ y = 2a\sin t\cos t,\ z = a\cos^2 t,\ t \in [0,\pi]$.

4. $\displaystyle\int_{\Gamma_4} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$

   $\Gamma_4 := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = a^2, \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{h} = 1\right\}$

   Γ_4 olyan bejárással vesszük, amely pozitív az Ox tengely felől nézve

5. $\displaystyle\int_{\Gamma_5} (y^2 + x62)dx + (z^2 + x^2)dy + (x^2 + y^2)dz$

$\Gamma_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, x^2 + y^2 = 2rx\}$ $0 < r < R$, $z > 0$

A Γ_5 görbét olyan bejárással vesszük, hogy a gömbfelületből kivágott kisebbik tartomány külső oldala balra esik.

6. $\displaystyle\int_{\Gamma_6} y^2z^2dx + z^2x^2dy + x^2y^2dz$

$\Gamma_6 : x = a\cos t,\ y = a\cos 2t,\ z = a\cos 3t,\ t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right].$

1.6.1. Tétel. *(Gauss-Ostrogradszkij)*

Legyen egy $D \subset \mathbb{R}^3$ halmaz.

Tegyük fel, hogy $P, Q, R : D \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények és S egy sima, zárt, egyszerű felület (nincs dupla pontja) D-ben, amely a V térbeli tartományt zárja közre. Ebben az esetben

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma =$$
$$= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$

Feladatok

Számítsuk ki:

1. $\displaystyle\iint_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, ahol S a $[0, a] \times [0, a] \times [0, a]$ kocka külső oldala.

2. $\displaystyle\iint_S x^3dydz + y63dzdx + z^3dxdy$, ahol S az $x^2 + y62 + z62 = R^2$ gömb külső oldala.

3. Számítsuk ki az

$$\iint_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)d\sigma$$

integrált, ahol S az $x^2 + y^2 = z^2$ kúpfelület $0 \le z \le h$ egyenlőtlenségnek megfelelő darabja.

4. Bizonyítsuk be, hogy az S egyszerű, zárt felülettel határolt test térfogata:
$$V = \frac{1}{3}\iint_S (x\cos\alpha + y\sin\beta + z\cos\gamma)d\sigma.$$

5. Jelölje S az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ külső felületét. Számítsuk ki az
$$\iint_S 2x^2yzdydz + z^2dzdx + xyz^2dxdy$$
integrált.

1.7. Fourier sorok

1.7.1. Értelmezés. *Legyen H egy hilbert tér, jelölje (x, y) az $x, y \in H$ elemek skaláris szorzatát és $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ az x vektor normáját.*

A $\{\varphi_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ vektorrendszert ortonormáltnak nevezzük, ha $(\varphi_k, \varphi_l) = 0$, ha $k \neq l$ és $\|\varphi_k\|^2 = (\varphi_k, \varphi_k) = 1$, $(\forall)$ $k \in \mathbb{N}$.

1.7.2. Értelmezés. *A $\{\varphi_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ortonormált vektorrendszer teljes, a H hilbert térben ha bármely $x \in H$ és bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\|x - \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k\| < \varepsilon$.*

1.7.3. Tétel. *A H hilbert térben a következő állítások ekvivalensek:*

(a) a H hilbert térben a $\{\varphi_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ vektorrendszer teljes;

(b) bármely $x \in H$ esetén $x = \sum_{k=1}^{\infty}(x, \varphi_k)\varphi_k$

(c) bármely $x \in H$ esetén igaz a Parseval képlet: $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(x, \varphi_k)^2$

(d) ha $(x, \varphi_k) = 0$, bármely $k \in \mathbb{N}$, akkor $x = 0$.

Legyen $[a, b]$ egy kompakt intervallum. Legyen $I_2[a, b]$ azon függvények halmaza amelyekre létezik és véges az $\int_a^b f^2(x)dx$ integrál, nevezzük ezt a halmazt a négyzetesen integrálható függvények halmazának az $[a, b]$ intervallumon.

Ha $f, g \in I_2([a,b])$, akkor $\lambda f + \mu g \in I_2([a,b])$ tehát $I_2([a,b])$ az összeadással és skalárissal való szorzással egy vektorteret képez.

Az $|f(x)\cdot g(x)| \leq \frac{1}{2}[f^2(x)+g^2(x)]$ egyenlőtlenségből következik, hogy az $\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx$ integrál is létezik.

Az $(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ összefüggéssel értelmezett művelet teljesíti a skaláris szorzat tulajdonságait egy kivételével.

A továbbiakban az $I_2([-e,e])$ esettel foglalkozunk.

1.7.4. Tétel. *Az $I_2([-e,e])$ vektortérben az*

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2l}}\right\} \bigcup \left\{\frac{\cos\frac{n\pi}{l}x}{\sqrt{l}} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\} \bigcup \left\{\frac{\sin\frac{n\pi}{l}x}{\sqrt{l}} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

vektorrendszer egy teljes ortonormált rendszer.

1.7.5. Tétel. *Ha $f \in I_2([-l,l])$ és*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{1.2}$$

akkor

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x dx \text{ és} \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx. \end{aligned}$$

1.7.6. Tétel. *Az $I_2[0,e]$ függvénytérben az $\left\{\frac{1}{\sqrt{l}}\right\} \bigcup \left\{\frac{\cos\frac{n\pi}{l}x}{\sqrt{e/2}} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ és a $\left\{\frac{\sin\frac{n\pi}{l}x}{\sqrt{e/2}} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ függvényrendszerek rendre teljes ortonormált rendszerek.*

Ha $f \in I_2([0,l])$ és $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x$, akkor $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x dx$.

Ha $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x$, akkor $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x dx$.

Az (1.2) összefüggésben szereplő függvénysort az f függvény Fourier sorának nevezzük.

Természetesen feltevődik a kérdés, hogy az egyenlőség igaz-e bármely $x \in [-l, l]$ esetén. Ha nem igaz mindenütt, akkor milyen $x \in [-l, l]$ esetén igaz. Erre a kérdésre a következő tétel ad részleges választ.

1.7.7. Tétel. *(Jordan) Ha az $f \in I_2[-l, l]$ függvény korlátos változású, akkor az f függvény, Fourier sora minden $x \in (-l, l)$ pontban konvergens az $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ értékhez.*

A konvergencia egyenletes minden olyan zárt intervallumon, ahol f folytonos.

Feladatok

Fejtsük Fourier sorba a következő függvényeket, a megadott intervallumokon:

1. $f(x) = x$, $x \in (-\pi, \pi)$
2. $f(x) = |x|$, $x \in (-\pi, \pi)$
3. $f(x) = e^{\alpha x}$, $x \in (-l, l)$,
4. $f(x) = \sin \alpha x$, $x \in (-\pi, \pi)$, $(\alpha \notin \mathbb{Z})$,
5. $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$, $x \in (-\pi, \pi)$,
6. $f(x) = \arcsin(\cos x)$, $x \in (-\pi, \pi)$,
7. $f(x) = (x)$, $x \in (-\pi, \pi)$

   (x) az x pont és a hozzá legközelebb eső egész szám közötti távolságot jelöli.
8. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |x| < \alpha \\ 0, & \text{ha } \alpha \leq |x| < \pi \end{cases}$

Írjuk fel a Parseval képletet az f függvényre.

9. Számítsuk ki a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2}$ összeget.

Fejtsük x-szerint Fourier sorba a következő függvényeket:

10. $f(x) = \frac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2}$, $|r| < 1$, $x \in \mathbb{R}$.

11. $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1 - 2r\cos x + r^2)$

12. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{r\sin x}{1 - r\cos x}$

13. Igazoljuk, hogy $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ esetén a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin^2 n\alpha}{n}$ sor összege állandó a $(0, 2\alpha)$ intervallumon és a $(2\alpha, \pi)$ intervallumon zéró.

14. Legyen $\delta \in (0, \pi)$. Az f függvényt a következőképpen értelmezzük:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |x| \leq \delta \\ 0, & \delta < |x| \leq \pi \end{cases} \quad \text{és}$$

$$f(x + 2\pi) = f(x), \ (\forall)\, x \in \mathbb{R}.$$

a) Írjuk fel f Fourier sorát.

b) Igazoljuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\delta)}{n} = \frac{\pi - \delta}{2}.$$

c) Vezessük le a Parseval tételből, hogy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\delta)}{n^2\delta} = \frac{\pi - \delta}{2}$$

d) Igazoljuk, hogy

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx \frac{\pi}{2}.$$

15. Fejtsük Fourier sorba

$$f(x) = \int_0^x \ln \sqrt{\left|\operatorname{ctg} \frac{t}{2}\right|} dt, \ x \in [-\pi, \pi]$$

16. Határozzuk meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$$

sorok összegét.

17. a) Határozzuk meg az

$$f(x) = \pi \cos \alpha x,\ \alpha \notin \mathbb{Z},\ x \in [0, 2\pi]$$

$f(x + 2\pi) = f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$ függvény Fourier sorát.

b) Bizonyítsuk be, hogy:

$$\pi \cos \pi\alpha = \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - k^2} \text{ és}$$
$$\frac{\pi}{\sin \alpha\pi} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2\alpha}{\alpha^2 - k^2}.$$

18. Fejtsük a következő függvényeket sinusz sorba a $[0, \pi]$ intervallumon.

a) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[0, \frac{|pi}{2}\right] \\ 0, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$

b) $f(x) = x(\pi - x)$

c) $f(x) = \sin \dfrac{x}{2}$.

19. Fejtsük a következő függvényeket cos sorba a $[0, \pi]$ intervallumon:

a) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, h] \\ 0, & x \in (h, \pi] \end{cases}$

b) $f(x) = |\cos x|$, $x \in [0, \pi]$

c) $f(x) = x \sin x$, $x \in [0, \pi]$.

1.8. Differenciálegyenletek

1.8.1. Értelmezés. *Legyen* $f : [a, n] \to \mathbb{R}$, $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ *két adott folytonos függvény. Az*

$$y' = f(x)\, g(y) \tag{1.3}$$

differenciálegyenlet szétválasztható változójú (szeparábilis) differenciálegyenletnek nevezzük. Ha létezik olyan $y : [a, b] \to [c, d]$ deriválható függvény, amely teljesíti az (1.3) egyenletet, akkor azt mondjuk, hogy y megoldása (1.3)-nek.

1.8.2. Példa.

$$xy' = y^2 - y,\ y(1) = \frac{1}{2}$$

Ha ezt az egyenletet az (1.3) egyenlettel analóg alakra akarjuk írni, akkor az $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(y) = y^2 - y$ *egyenlőségeket kell felírjuk. Az* y *függvény meghatározásához az* $y' = f(x)g(y)$ *egyenletet az* $\frac{y'}{g(y)} = f(x)$ *ekvivalens alakba írjuk.*

Innen az következik, hogy:

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{g(t)}\, dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt.$$

A jelen esetben:

$$\int_{y(1)}^{y(x)} \frac{1}{t^2 - t}\, dt = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \Rightarrow$$

$$\ln \left| \frac{t-1}{t} \right| \Bigg|_{\frac{1}{2}}^{y(x)} = \ln x \Rightarrow$$

$$\ln \frac{-y(x) + 1}{y(x)} = \ln x \Rightarrow y(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Feladatok

1. $y' = (1 + y^2) \ln x,\ y(1) = 0$

2. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0,\ y(0) = 1$

3. $y' = x(y^2 + 2y),\ y(\sqrt{3}) = 1$

4. $(1 + e^x)y \cdot y' = e^x$

5. $y' \sin x = y \ln y$

1.8.3. Tétel. *(Változóban homogén differenciálegyenletek) Legyen* $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ *adott folytonos függvény. Az* $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ *olyan, hogy* $0 \notin [a,b]$, y *deriválható* $[a,b]$*-n és* $y(x)/x \in [c,d]$*. Az* y *függvény akkor és csak akkor megoldása az*

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

egyenletnek, ha az

$$u : [a,b] \to \mathbb{R},\ u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

megoldása $[a,b] - n$ *az*

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

szétválasztható változójú differenciálegyenletnek.

1.8.4. Példa.

$$y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$$

Az $\frac{y}{x} = u$ *helyettesítést alkalmazzunk:*

$$y = ux \Rightarrow y' = xu' + u$$

Az egyenletünk így alakul:

$$\begin{aligned}
&xu' + u = u + e^u \Leftrightarrow \\
&xu' = e^u \Leftrightarrow \\
&\int_{x_0}^{x} \frac{du}{e^u} = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{t}\ dt \\
&e^{-u(x_0)} - e^{-u(x)} = \ln \frac{x}{x_0} \\
&e^{-u(x_0)} + \ln \frac{x_0}{x} = e^{-u(x)} \\
&u(x) = \ln\left(\frac{1}{e^{-u(x_0)} + \ln \frac{x_0}{x}}\right)
\end{aligned}$$

Feladatok

1. $y' = \frac{y}{x} + \cos^2 \frac{y}{x}$
2. $y' = \frac{y}{x} - 1$

3. $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$

4. $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1}$

5. $y' = \frac{1 - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}}$

Homogén egyenletre visszavezethető

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) \tag{1.4}$$

alakú differenciálegyenletek.

Két esetet különböztetünk meg:

a) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, akkor $u = x - x_0$, $v = y - y_0$ változócserét alkalmazunk, ahol (x_0, y_0) az

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldása.

Ezzel a helyettesítéssel a (1.4) egyenlet a

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{v}{u}}{a_2 + b_2 \frac{v}{u}}\right)$$

egyenletté alakul, amelyik u és v-ben homogén.

b) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$ és a (1.3) egyenlet a következő alakba írható:

$$y' = f\left(\frac{k(a_2 x + b_2 y) + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) = g(a_2 x + b_2 y)$$

és az $u = a_2 x + b_2 y$ helyettesítést alkalmazzuk.

1.8.5. Példa.

$$y' = \frac{x + y - 2}{-x + y + 4}$$

Megoldás

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Az $\begin{cases} x+y-2=0 \\ -x+y+4=0 \end{cases}$ *egyenletrendszer megoldása:* $x_0 = -1,\ y_0 = 3.$

$\begin{matrix} u = x+1 \\ v = y-3 \end{matrix}$ *helyettesítéssel a egyenlethez jutunk.*

A $\dfrac{v}{u} = z$ *helyettesítést alkalmazunk* $\Rightarrow v = uz \Rightarrow v' = uz' + z$ *és a következő egyenlethez jutunk:*

$$\begin{aligned}
& uz' = \frac{1+2z-z^2}{z-1} \Rightarrow \\
& \int \frac{z-1}{1+2z-z^2}\,dz = \int \frac{1}{u}\,du \Rightarrow \\
& u^2(1+2z-z^2) = c \Rightarrow \\
& (x+1)^2 + 2(x+1)(y-3) - (y-3)^2 = c. \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

Feladatok

1. $y' = \dfrac{x+y-2}{x-1}$

2. $y' = \dfrac{3y-7x+7}{3x-7y-3}$

3. $y' = \dfrac{x+y}{y-x+2}$

4. $y' = -\dfrac{8x+4y+1}{4x+2y+1}$

5. $y' = -\dfrac{x+y}{x+y-1}$

1.8.1. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Legyen $P, Q : I \to \mathbb{R}$ két folytonos függvény.

Az

$$y' = P(x)y + Q(x)$$

egyenletet elsőrendű lineáris inhomogán differenciálegyenletnek nevezzük.

Az

$$y' = P(x)y$$

egyenlet, elsőrendű, lineáris, homogén differenciálegyenlet.

A homogén egyenlet a következő szétválasztható változójú differenciálegyenletté alakítható:

$$\frac{dy}{y} = P(x)dx.$$

Integrálással a

$$\ln|y| = \int_{x_0}^{x} P(t)dt + \ln|c|$$

egyenlethez jutunk, amely ekvivalens az

$$y = ce^{\int_{x_0}^{x} P(t)dt}$$

egyenlettel, ami a homogén egyenlet megoldása.

Az inhomogén egyenlet egy megoldását a konstans változtatásának módszerével határozzuk meg:

$$y = c(x) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} P(t)dt}.$$

Ezt helyettesítve az inhomogén egyenletbe a

$$c'(x)e^{\int_{x_0}^{x} P(t)dt} + c(x)P(x)e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)dt} = P(x)c(x)ee^{\int_{x_0}^{x} P(t)dt} + Q(x)$$

összefüggéshez jutunk.

Innen következik, hogy:

$$\begin{aligned}
&c'(x) = Q(x) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)dt} \\
&c(x) = D + \int_{x_0}^{x} Q(s)e^{\int_{x_0}^{s} P(t)dt}ds \quad \text{és} \\
&Y = De^{\int_{x_0}^{x} P(t)dt} + \int_{x_1}^{x} Q(s)e^{\int_{s}^{x} P(t)dt}ds.
\end{aligned}$$

Ha az $y(x_0) = y_0$ kezdeti értékű Cauchy feladatot kell megoldani, akkor következik, hogy:

$$\begin{aligned}
&D = y_0 \quad \text{és} \\
&y(x) = y_0 \cdot e^{\int_{x_0}^{x} P(t)dt} + \int_{x_0}^{x} Q(s)e^{\int_{x}^{x} P(t)dt}ds.
\end{aligned}$$

1.8.6. Példa. *Oldjuk meg az $y' = y\,ctg\,x + 2x\sin x$ differenciálegyenletet.*

Megoldás

Először megoldjuk a homogén egyenletet

$$y' = y\,ctg\,x \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x}\,dx \Rightarrow$$
$$\ln|y| = \ln|\sin x| + \ln|c| \Rightarrow y_h = c\sin x$$

Ez a homogén egyenlet megoldása.

Az inhomogén egyenlet megoldását

$$\left.\begin{array}{l} y(x) = c(x)\sin x \quad \textit{alakban keressük} \\ y' = y\,ctg\,x + 2x\sin x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow c'(x)\sin x + c(x)\cos x = c(x)\sin x\,ctg\,x + 2x\sin x$

$\Rightarrow c'(x) = 2x \Rightarrow c(x) = x^2 + D$

$\Rightarrow y = x^2\sin x + D\sin x,$ *az inhomogén egyenlet megoldása.*

1.8.2. Bernoulli típusú differenciálegyenletek

Az általános alak:

$$y' = P(x)y + Q(x)y^{\alpha}, \tag{1.6}$$

ahol $P, Q : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények és $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Egyszerű belátni, hogy az $u(x) = (y(x))^{1-\alpha}$ helyettesítéssel az (1.6) egyenlet a következő lineáris, inhomogén elsőrendű differenciálegyenletté alakul:

$$u' = (1-\alpha)[P(x)u + Q(x)],$$

amit az előbb ismertetett módon oldunk meg.

1.8.7. Példa.

$$y' = 2xy + x^3\sqrt{y}$$

Megoldás

$\alpha = \dfrac{1}{2}$ *és az* $u = y^{\frac{1}{2}}$ *változócserét alkalmazunk:* $\Rightarrow = u' = xu + \dfrac{x^3}{2}.$

A lineáris egyenlet megoldása:

$$u = ce^{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^2+2}{2}$$

és az eredeti egyenlet megoldása:

$$y = \left(ce^{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^2+2}{2} \right)^2 .$$

1.8.3. A Riccati típusú egyenletek

A Riccati típusú differenciálegyenlet általános alakja:

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x),$$

ahol $P, Q, R : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények és $y \in C^1[I]$. Ha ismert a Ricatti egyenlet egy $y_1 \in C^1[I]$ megoldása, akkor az $y = \frac{1}{z} + y_1$ helyettesítéssel a Riccati egyenlet egy elsőrendű, lineáris inhomogén egyenletbe transzformálódik.

1.8.8. Példa. *Az*

$$y' = -2xy^2 + y + \frac{x-1}{x^2}$$

egyenlet egy megoldása $y = \frac{1}{x}$ *adjuk meg az általános megoldását.*

Megoldás

Az $y = \frac{1}{z} + \frac{1}{x}$ *helyettesítést alkalmazzuk és a*

$$z' = 3z + 2x$$

egyenlethez jutunk.

Ennek az egyenletnek a megoldása:

$$z = ce^{3x} - \frac{2(3x+1)}{9}.$$

Innen következik, hogy:

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{ce^{3x} - \frac{2(3x+1)}{9}}.$$

Feladatok

Oldjuk meg a következő elsőrendű lineáris differenciálegyenleteket:

1. $xy' - 2y = 2x^4$

2. $y' + y\mathrm{tg}\, x = 4x + 2y$

3. $x^2y' + xy + 1 = 0$

4. $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$

5. $y' - 2xy = 2x^3$

Oldjuk meg a következő Bernoulli egyenleteket:

6. $y' + \dfrac{2}{x}y = 3x^2y^{\frac{4}{3}}$

7. $y' + \dfrac{3x^2}{1+x^3}y = y^2(1+x^3)\sin x,\ y(0) = 1.$

8. $y' + \dfrac{2}{x}y = -y^2 \ln x$

9. $y' + y\mathrm{tg}\, x = y^2$

10. $y' + 2y = 2x\sqrt{y}$

Oldjuk meg a következő Riccati egyenleteket, ha ismert egy megoldásuk:

11. $y' - y^2 + 2e^2y = e^{2x} + e^x,\ y_1 = e^x$

12. $y'e^{-x} + y^2 - 2ye^x = 1 - e^{2x},\ y_1 = e^x$

13. $y' + y^2 - 2y\sin x + \sin^2 x - \cos x = 0,\ y_1 = \sin x$

14. $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1,\ y_1 = -\frac{1}{x}.$

1.8.4. Egzakt differenciálegyenletek

Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ egy tartomány és $P, Q : D \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvények. A

$$Pdx + Qdy = 0 \tag{1.7}$$

egyenletet egzaktnak nevezzük, ha létezik egy olyan $F : D \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, hogy

$$dF = Pdx + Qdy.$$

Az $y : I \to \mathbb{R}$ függvény akkor megoldása a (1.7) differenciálegyenletnek, ha létezik $c \in \mathbb{R}$ úgy, hogy:

$$F(x, y(x)) = C, \ (\forall)\ x \in I.$$

1.8.9. Tétel. *Legyen $P, Q : D \to \mathbb{R}$ folytonos parciális deriváltakkal rendelkező két függvény.*

A $Pdx + Qdy = 0$ egyenlet akkor és csak akkor egzakt, ha $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

1.8.10. Megjegyzés. *Ha a $Pdx+Qdy = 0$ differenciálegyenlet egzakt, akkor:*

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, s)d.$$

1.8.11. Értelmezés. *Ha $\mu : D \to \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$ egy olyan függvény, hogy*

$$\mu Pdx + \mu Qdx = 0$$

egzakt egyenlet, akkor a μ függvényt a

$$Pdx + Qdy = 0$$

egyenlet integráló szorzójának nevezzük.

1.8.12. Megjegyzés. *μ akkor és csak akkor integráló szorzó, ha*

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q).$$

Feladatok

Oldjuk meg a következő egzakt differenciálegyenleteket:

1. $(2x + y)dx + (x - 2y)dy = 0$

2. $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$

3. $\dfrac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$

Határozzuk meg az egyenletek integráló szorzóját és oldjuk meg:

4. $(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0$

$$\mu = \mu(x)$$

5. $(x + \sin x + \sin y)dx + \cos y dy = 0$

$$\mu = \mu(x)$$

6. $(x - xy)dx + (y + x^2)dy = 0$

$$\mu = \mu(x^2 + y^2)$$

7. $(x^2 + y^2 - 1)dx - 2xydy = 0$

$$\mu = \mu(y^2 - x^2)$$

1.9. Lineáris differenciálegyenletek

Adott az L differenciáloperátor:

$$L : C^{(n)}([a,b]) \to C([a,b])$$
$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y,$$

ahol $a_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények.

Az n-ed rendű, lineáris differenciálegyenlet általános alakja:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f, \tag{1.8}$$

ahol $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény.

Az (1.8) egyenlet az $L(y) = f$ egyenlettel ekvivalens.

1.9.1. Tétel. *(az (1.8) egyenlet megoldáshalmazának a szerkezete)*

Ha y_p az (1.8) egyenlet egy sajátos megoldása, akkor az (1.8) egyenlet bármely megoldása felírható

$$y = y_p + y_h$$

alakba, ahol y_h az $L(y) = 0$ homogén egyenlet megoldása.

1.9.2. Tétel. *Az L operátor egy lineáris leképezés az $L(y) = 0$ homogén egyenlet megoldáshalmaza az L operátor magtere, amely a $C^{(n)}([a,b])$ vektortér egy n dimenziós altere.*

1.9.3. Értelmezés. *Legyen* $y_i \in C^{(n)}([a,b])$. *A*

$$W(y_1,\ldots,y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

determinánst az $y_1,\ldots,y_n$ *függvények Wronski determinánsának nevezzük.*

1.9.4. Tétel. *Ha* $y_1,\ldots,y_n \in C^{(n)}([a,b])$ *függvények megoldásai az* $L(y) = 0$ *egyenletnek, akkor a következő két állítás ekvivalens:*

a) az $y_1,\ldots,y_n$ *függvények a* $C^{(n)}([a,b])$ *vektortérben lineárisan függetlenek*

b) $W(y_1,\ldots,y_n) \neq 0$

1.9.5. Következmények. *Ha* $y_1,\ldots,y_n \in C^{(n)}([a,b]))$ *megoldásai az* $L(y) = 0$ *egyenletnek és* $W(y_1,\ldots,y_n) \neq 0$, *akkor az* $L(y) = 0$ *egyenlet bármely* y *megoldása felírható*

$$y = c_1y_1 + \ldots + c_ny_n$$

alakba, ahol $c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{R}$.

Az $\{y_1,\ldots,y_n\}$ *függvényrendszert alapmegoldásnak nevezzük.*

1.9.6. Értelmezés. *Ha az* L *operátor értelmezésében szereplő* $a_k(x)$ *függvények állandóak, azaz* $a_k(x) = a_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,n}$, *akkor*

$$y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} a_k y^{(n-k)} = 0 \tag{1.9}$$

egyenletet n*-ed rendű állandó együtthatós, lineáris, homogén differenciálegyenletnek nevezzük.*

A $\lambda^n + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot \lambda^{n-k} = 0$ *egyenletet a (1.9) differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének nevezzük.*

1.9.7. Tétel. *Ha* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ *a karakterisztikus egyenlet* $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{N}$ *szeres gyökei* $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = n$*, akkor az*

$$\begin{gathered}
e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{p_1-1}e^{\lambda_1 x} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x}, \ldots, x^{p_k-1}e^{\lambda_k x}
\end{gathered}$$

függvényrendszer alapmegoldása a (1.9) egyenletnek.

Ha $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ *komplex számok* $p_1 = p_2 = p$ *szeres gyökei a karakterisztikus egyenletnek, akkor az alapmegoldás első két sora helyett az*

$$\begin{gathered}
e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{p-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \\
e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{p-1}e^{\alpha x}\sin\beta x
\end{gathered}$$

függvények szerepelnek.

1.9.8. Tétel. *(a konstans változtatás módszere)*

Ha $y_1, \ldots, y_n \in C^{(n)}$ *alapmegoldása a (1.9) egyenletnek és* $C_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ *deriválható függvények kielégítik a*

$$\begin{gathered}
\sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k^{(j)}(x) = 0,\ j = \overline{0, n-2} \\
\sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k^{(n-1)}(x) = f(x)
\end{gathered}$$

egyenletrendszert, akkor

$$y_p(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k(x)$$

megoldása az

$$y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} a_k y^{(n-k)} = f(x)$$

inhomogén egyenletnek.

1.9.9. Megjegyzés. *Néhány esetben az* $L(y) = f(x)$ $(L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y)$ *inhomogén egyenlet* y_s *sajátos megoldását egyszerűbben is meg lehet határozni.*

1. ha $f(x) = \lambda_0 x^m + \ldots + \lambda_{m-1}x + \lambda_m$ *és* $a_n \neq 0$, *akkor*

$$y_s(x) = \mu_0 x^m + \mu_1 x^{m-1} + \ldots + \mu_{m-1}x + \mu_m.$$

Ezt behelyettesítve az $L(y) = f(x)$ *egyenletbe az*

$$\begin{aligned} &a_n\mu_0 = \lambda_0 \\ &a_n\mu_1 + ma_{n-1}\mu_0 = \lambda_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

egyenletekhez jutunk amiből kiszámítható $\mu_0, \mu_1, \ldots$ *stb.*

2. ha $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_{n-p+1} = 0$ *és* $a_{n-p} \neq 0$, *akkor*

$$y_s = x^p(\mu_0 x^m + \mu_1 x^{m-1} + \ldots + \mu_m)$$

3. ha $f(x) = e^{\alpha x}(\lambda_0 x^m + \lambda_1 x^{m-1} + \ldots + \lambda_m)$ *és* α *nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor*

$$y_p = e^{\alpha x}(\mu_0 x^m + \mu_1 x^{m-1} + \ldots + \mu_m)$$

4. ha $f(x) = e^{\alpha x}(\lambda_0 x^m + \ldots + \lambda_m)$ *és* α *q-szoros gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor*

$$y_p = e^{\alpha x}x^q(\mu_0 x^m + \ldots + \mu_m)$$

5. ha $f(x) = e^{\alpha x}P_1(x) \cdot \cos\beta x + e^{\alpha x}P_2(x)\sin\beta x$ *és* $\alpha + i\beta$ *q-szoros gyöke a karakterisztikus egyenletnek (ahol q lehet zéró is), akkor* $y_p(x) = e^{\alpha x}x^q$ $(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x0\sin\beta x)$ *és* $gr(Q_1) = grQ_2 = \max\{gr(P_1), gr(P_2)\}$.

Feladatok

Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket:

1. $y'' - y' - 2y = 4x - 2e^x$,
2. $y'' + 2y' + 2y = (x+1)e^x$,
3. $y'' - 4y' + 5y = 1 + 8\cos x + e^{2x}$,
4. $y''' - y'' - 2y' = 4x$,

5. $y^{(4)} + 4y = 8e^x$,

6. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$,

7. $y'' + y = \operatorname{tg} x$,

8. $y'' - y' = \dfrac{1}{e^x + 1}$,

9. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$.

Oldjuk meg a következő Chauchy feladatokat:

10. $y'' - 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 8$

11. $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

12. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

13. $y''' - y' = -2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$.

14. $y'' + 4y = \sin 2x$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Oldjuk meg és határozzuk meg az adott feltételt teljesítő megoldást:

15. $y'' - y' - 5y = 1$, $\lim\limits_{y \to \infty} = 0\dfrac{1}{5}$.

16. $y'' + 4y' + 4y = 2e^x(\sin x + 7\cos x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = 0$.

Az $ax + b = e^t$ alakú helyettesítéssel vezessük vissza konstans együtthatós egyenletekre és oldjuk meg a következő egyenleteket:

17. $x^2 y'' + xy' + y = x(6 - \ln x)$,

18. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 - 2x + 2$,

19. $(x+1)^3 y'' + 3(x+1)^2 y' + (x+1)y = 6\ln(x+1)$,

20. $(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = x$.