Lineáris algebra - jegyzet

Kupán Pál

Tartalomjegyzék

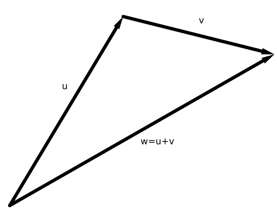
1. FEJEZET

Vektorgeometria

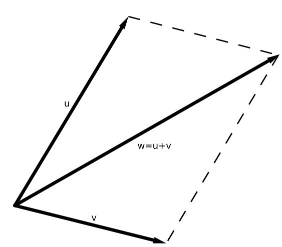
Az irányított szakaszokat vektoroknak nevezzük. A vektorokat vastagított betűkkel, vagy nagy betűvel jelöljük: $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\mathbf{x}$, $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overline{AB}$ (A a kezdeti, míg B a vektor végpontja). A vektorokat három dolog jellemzi: irány, irányítás, hossz.

A (szabad)vektorokat eltolhatjuk. Ha két vektor iránya, irányítása és hossza megegyezik akkor eltolással a vektorok pontosan lefedik egymást. Ebben az esetben a vektorokat ekvivalensnek $\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{v}$, vagy egyenlőknek nevezzük $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$.

A vektorok halmazán értelmezzük az összeadás műveletet: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ ahol $\boldsymbol{w}$ az $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{v}$ vektorok eredője.



Vektorok összeadása: w=u+v



Vektorok összeadása - paralelogramma szabály

A vektorok összeadása kommutatív és asszociatív:

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}, \tag{1.0.1}$$

(1.0.2) $$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})\,.$$

A zéró hosszúságú vektort *nullvektor*nak nevezzük és $\mathbf{0}$ vagy $\boldsymbol{\theta}$-vel jelöljük:

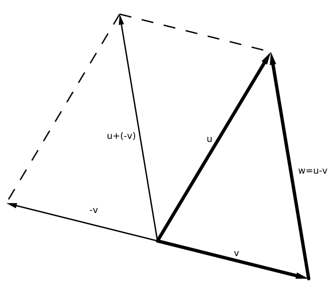
(1.0.3) $$\boldsymbol{v}+\mathbf{0}=\boldsymbol{v}.$$

A $\boldsymbol{v}$-vel azonos irányú és hosszúságú de ellentétes irányítású vektort $(-\boldsymbol{v})$ *ellentett vektor*nak nevezzük

(1.0.4) $$\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})=\mathbf{0}.$$

Az említett tulajdonságok igazak úgy a síkban mint a térben, tehát a sík ($\mathbb{R}^2$) illetve a tér ($\mathbb{R}^3$) vektorai a vektorok összeadására nézve egy kommutatív csoportot alkot.

Az $\mathbb{R}^2$-en ($\mathbb{R}^3$-ben) értelmezzük a vektorok valós számmal (skalárral) való szorzását. Ha $\boldsymbol{v}$ egy nem-nulla vektor és $\lambda \in \mathbb{R}$ akkor $\lambda\boldsymbol{v}$ egy $|\lambda|$-szor hosszabb vektor $\boldsymbol{v}$-nél, vele azonos irányítású ha $\lambda > 0$ és ellentétes irányítású ha $\lambda < 0$. A vektorok különbsége is skalárral való szorzatot jelenti $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+(-1)\cdot\boldsymbol{v}$:



Vektorok különbsége: w=u-v

A skalárral való szorzásra nézve a következő tulajdonságok érvényesülnek:

$$(\lambda+\mu)\,\boldsymbol{v}=\lambda\,\boldsymbol{v}+\mu\boldsymbol{v} \tag{1.0.5}$$

$$\lambda\,(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\lambda\,\boldsymbol{v}+\lambda\boldsymbol{w} \tag{1.0.6}$$

$$(\gamma\mu)\,\boldsymbol{v}=\gamma\,(\mu\boldsymbol{v}) \tag{1.0.7}$$

$$1\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}. \tag{1.0.8}$$

Ha $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ vektorok és α,β skalárok $\mathbb{R}$-ből akkor az

$$\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v} \tag{1.0.9}$$

vektort az $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{v}$ *lineáris kombináció*jának nevezzük.

1.1. Példa. $2\boldsymbol{u}+3\boldsymbol{v}$, $\frac{1}{2}\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v}$.

Ha két vektor párhuzamos (kollineáris) akkor az egyik felírható a másik számszorzataként

$$\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{v}. \tag{1.0.10}$$

A λ skalár egyértelműen meghatározott.

Ha a síkban az $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{v}$ vektorok nem párhuzamosak akkor bármely $\boldsymbol{w}$ vektor a síkból felbontható $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{v}$ vektorok (egyértelmű) lineáris kombinációjaként:

$$\boldsymbol{w}=\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}. \tag{1.0.11}$$

1.2. Definíció. Az $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ vektorokat *lineárisan függetlenek*nek nevezzük, ha az

$$\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0} \tag{1.0.12}$$

egyenlőségből következik, hogy $\alpha = 0$ és $\beta = 0$.

A síkban 2 párhuzamos vektor lineárisan függő mert ha $\alpha \neq 0$

$$\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\boldsymbol{v}.$$

A térben 3 vektor lineárisan függő ha a három vektor egy síkban van

$$\alpha \boldsymbol{u} + \beta\, \boldsymbol{v} + \gamma \boldsymbol{w} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\, \boldsymbol{v} - \frac{\gamma}{\alpha}\boldsymbol{w}.$$

1.3. Definíció. Az $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ vektorokat *lineárisan függetlenek*nek nevezzük, ha az

$$\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{w} = \mathbf{0} \tag{1.0.13}$$

egyenlőségből következik, hogy $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

1.4. Definíció. A síkbeli (térbeli) vektorok egy lineárisan független vektorpárját (vektorhármasát) *bázis*nak nevezzük.

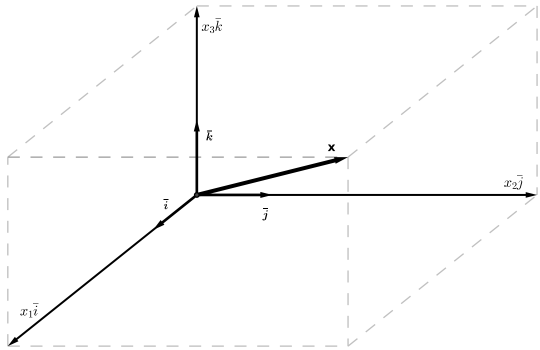
A legismertebb az $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ *egységvektorok* (hosszúk=1) a tengelyek mentén alkotta ún. *ortonormált bázis.*

A tér bármely vektora egyértelműen bontható fel az egységvektorok segítségével:

$$\boldsymbol{v} = \alpha\bar{i} + \beta\bar{j} + \gamma\bar{k}, \tag{1.0.14}$$

vagy

$$\mathbf{x} = x_1\bar{i} + x_2\bar{j} + x_3\bar{k}. \tag{1.0.15}$$



Az x_1, x_2, x_3 számokat az $\mathbf{x}$ vektor *koordinátáinak* nevezzük és az $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^t$ jelölést használjuk.

1.5. PÉLDA. a. $\mathbf{x} = \binom{2}{-3} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$, $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\bar{i} + 0\bar{j}$

b. $\bar{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t$, $\bar{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$, $\bar{k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$.

A sík (tér) minden pontjához hozzátartozik egy (origó középpontú) helyvektor és fordítva minden helyvektorhoz hozzárendelhető egy pont. Tehát egy egyértelmű megfeleltetés létezik a sík pontjai és a helyvektorok között.

Koordinátákra lebontva a vektorok közötti tulajdonságok:

- $\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow x_1 = y_1$ és $x_2 = y_2$, ahol x_1, x_2, y_1, y_2 az $\mathbf{x} = \binom{x_1}{x_2}$, illetve $\mathbf{y} = \binom{y_1}{y_2}$ vektorok koordinátái;
- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \binom{x_1}{x_2} + \binom{x_1}{x_2} = \binom{x_1+y_1}{x_2+y_2}$
- $\lambda\mathbf{x} = \binom{\lambda x_1}{\lambda x_2}$.

A térben hasonló tulajdonságok igazak.

1.6. PÉLDA. $2\binom{2}{-3} + \frac{1}{2}\binom{10}{-6} = \binom{4}{-6} + \binom{5}{-3} = \binom{9}{-9}$,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

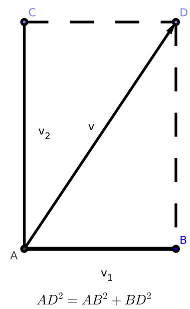
A vektorok koordinátáit használva az asszociativitás bizonyítása a következő ($\mathbb{R}^2$-ben)

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} &= \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1+v_1+w_1 \\ u_2+v_2+w_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1+w_1 \\ v_2+w_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}). \end{aligned}$$

1.1. Vektorok normája

Egy $\boldsymbol{v}$ vektor hosszát *normának* nevezzük és $\|\boldsymbol{v}\|$-vel jelöljük. Az $\mathbb{R}^2$ síkban a $\boldsymbol{v} = \binom{v_1}{v_2}$ vektor normáját a Pitagorasz tétellel számítjuk ki:

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}. \tag{1.1.1}$$



Hasonlóan járunk el $\mathbb{R}^3$-ben

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}, \tag{1.1.2}$$

ahol $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

1.7. Példa. Ha $\boldsymbol{v} = \binom{4}{-3}$ akkor $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$.

A nullvektor az egyetlen vektor amelynek hossza nulla.

A síkban a $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ pontok közötti távolság egyenlő a $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$ vektor hosszával, vagyis

$$d(P_1, P_2) = \|P_1P_2\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1.1.3}$$

A térben a $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ pontok közötti távolságot hasonlóan számítjuk ki:

$$d(P_1, P_2) = \|P_1P_2\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

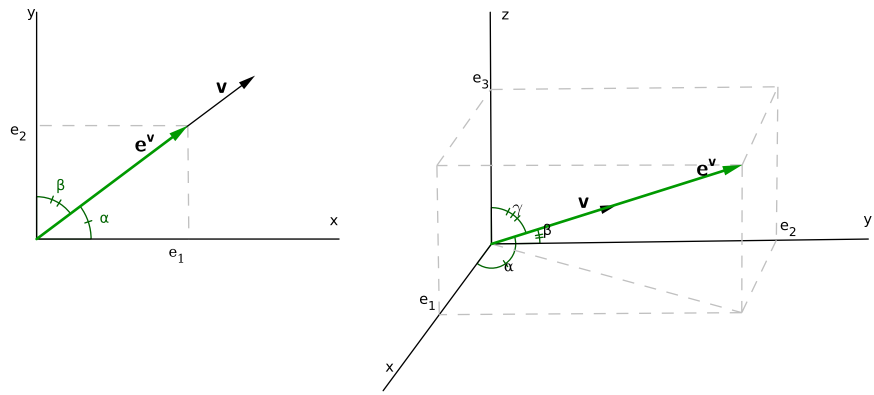
1.8. Példa. A $P_1(3,4,-1)$, $P_2(-2,6,0)$ pontok közötti távolság

$$d(P_1,P_2) = \|P_1P_2\| = \sqrt{(-2-3)^2 + (6-4)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{30}.$$

Mivel $\lambda\boldsymbol{v}$ vektor $|\lambda|$-szor hosszabb mint $\boldsymbol{v}$ következik, hogy

$$\|\lambda\boldsymbol{v}\| = |\lambda| \cdot \|\boldsymbol{v}\|\,. \tag{1.1.4}$$

A gyakorlatban gyakran észszerűbb ha a $\mathbf{v}$ vektor helyett a vele ugyanabban az irányba mutató $\mathbf{e}^{\mathbf{v}}$ egységvektort használjuk.



Az $\mathbf{e}^{\mathbf{v}}$ vektort úgy kapjuk, hogy az eredeti vektort elosztjuk a hosszával:

$$\mathbf{e}^{\mathbf{v}} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}. \tag{1.1.5}$$

Valóban, a (1.1.4) képletből következik, hogy $\|\mathbf{e}^{\mathbf{v}}\| = \left\|\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}\right\| = \left|\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\right| \|\mathbf{v}\| = 1$.

A síkban az $\mathbf{e}^{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ vektor koordinátáit kifejezhetjük mint $e_1 = \|\mathbf{e}_{\mathbf{v}}\| \cdot \cos\alpha = \cos\alpha$, illetve $e_2 = \cos\beta$, ahol α, β az $\mathbf{e}^{\mathbf{v}}(\mathbf{v})$ vektor hajlásszöge a tengelyekkel. Tehát a síkban az $\mathbf{e}^{\mathbf{v}}$ egységvektor koordinátái: $\mathbf{e}^{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \end{pmatrix}$, míg a térben

$$\mathbf{e}^{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}, \tag{1.1.6}$$

ahol α, β, γ a $\mathbf{v}$ vektor hajlásszöge a tengelyekkel. Az $\mathbf{e}^{\mathbf{v}}$ vektort a $\mathbf{v}$ vektor *iránycosinusá*nak is nevezik.

1.9. PÉLDA. Számítsuk ki a $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, illetve $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ vektorok iránycosinusát!

BIZONYÍTÁS. $\|\mathbf{v}\| = 10$ tehát a (1.1.5) képletből $\mathbf{e}^{\mathbf{v}} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$. Hasonlóan $\mathbf{e}^{\mathbf{u}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. □

1.10. PÉLDA. Számítsuk ki az u vektor v vektorra eső vetületének hosszát és a vektort

1.11. TÉTEL. *Ha $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{v}$ két vektor akkor igaz az úgy nevezett háromszög egyenlőtlenség:*

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \le \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|. \tag{1.1.7}$$

BIZONYÍTÁS. A tétel mértani jelentése: egy háromszögben egy oldal hossza mindig kisebb vagy egyenlő a másik két oldal hosszának az összegénél. □

1.2. Vektorok skaláris szorzata

1.12. DEFINÍCIÓ. Két $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ vektor *skaláris szorzat*án a

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\| \cos\varphi \tag{1.2.1}$$

számot értjük, ahol $\varphi \in [0, \pi)$ a vektorok által bezárt szög.

1.13. TÉTEL. *Két vektor merőleges egymásra akkor és csak akkor, ha a két vektor skaláris szorzata zéró.*

BIZONYÍTÁS. $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0.$ □

1.14. PÉLDA. $\overline{\boldsymbol{i}} \cdot \overline{\boldsymbol{i}} = \|\overline{\boldsymbol{i}}\| \, \|\overline{\boldsymbol{i}}\| \cos 0 = 1$, hasonlóan $\overline{\boldsymbol{j}} \cdot \overline{\boldsymbol{j}} = \overline{\boldsymbol{k}} \cdot \overline{\boldsymbol{k}} = 1$. $\overline{\boldsymbol{i}} \cdot \overline{\boldsymbol{j}} = \|\overline{\boldsymbol{i}}\| \, \|\overline{\boldsymbol{j}}\| \cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\overline{\boldsymbol{j}} \cdot \overline{\boldsymbol{k}} = \overline{\boldsymbol{k}} \cdot \overline{\boldsymbol{i}} = 0$.

1.15. TÉTEL. *Az* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^t, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^t$ *vektorok skaláris szorzata*

$$\boldsymbol{x} \boldsymbol{\cdot} \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3. \tag{1.2.2}$$

BIZONYÍTÁS. $\boldsymbol{x} \boldsymbol{\cdot} \mathbf{y} = \left(x_1 \overline{\boldsymbol{i}} + x_2 \overline{\boldsymbol{j}} + x_3 \overline{\boldsymbol{k}}\right) \left(y_1 \overline{\boldsymbol{i}} + y_2 \overline{\boldsymbol{j}} + y_3 \overline{\boldsymbol{k}}\right) = x_1 y_1 \overline{\boldsymbol{i}}^2 + x_1 y_2 \overline{\boldsymbol{i}} \overline{\boldsymbol{j}} + \ldots + x_3 y_3 \overline{\boldsymbol{k}}^2 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$

A skaláris szorzatot felhasználhatjuk egy vektor hosszának a kiszámítására, ugyanis:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{x}\| \cos 0$$

$\Rightarrow$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}. \tag{1.2.3}$$

□

1.16. PÉLDA. Számítsuk ki az alábbi vektorok skaláris szorzatát, hosszát és az általuk bezárt szöget: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 2 + 2 - 1 = 3,\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 2^2 + (-1)^2 + 1^2 = 6,\ \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = 6 \Rightarrow$$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{6},\ \|\mathbf{y}\| = \sqrt{6},$$

és a (1.2.1) képletből

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2},$$

vagyis $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

1.17. PÉLDA. Határozzuk meg a $k \in \mathbb{R}$ paramétert úgy, hogy az $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ k \end{pmatrix}$ vektorok merőlegesek legyenek egymásra.

BIZONYÍTÁS. A merőlegességi feltételből $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ következik, hogy $-4 + k^2 = 0$, vagyis $k = \pm 2$.

Az ismertetett jelölésekkel bemutatunk alább egy pár ismert tételt:

(1) $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Leftrightarrow \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$ (Pitagorasz-tétel);
(2) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2$ (paralelogramma azonosság);
(3) $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ (koszinusztétel);
(4) $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$ akkor $\mathbf{x}+\mathbf{y} \perp \mathbf{x}-\mathbf{y}$ (rombusz átlói merőlegesek).

$\square$

1.3. Vektorok vektoriális szorzata

1.18. DEFINÍCIÓ. Két vektor $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ vektoriális szorzatán (jel. $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$) azt a $\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ vektort értjük amelynek

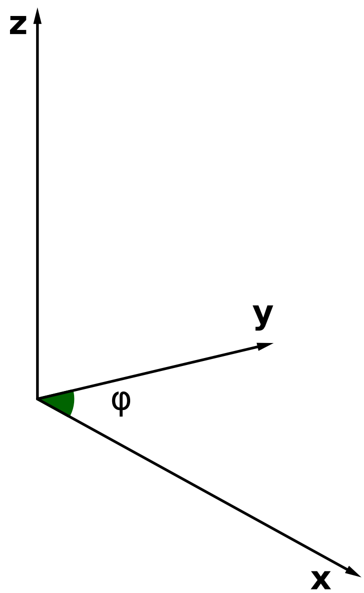
- iránya merőleges az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorok síkjára

$$\mathbf{z} \perp (\mathbf{x}, \mathbf{y})\,; \tag{1.3.1}$$

- irányítása a jobb kéz szabály szerint történik;
- hossza

$$\|\mathbf{z}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin\varphi, \tag{1.3.2}$$

ahol $\varphi \in [0, \pi)$ az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorok hajlásszöge.



A $\mathbf{z}$ vektor irányításából következik, hogy $\mathbf{y} \times \mathbf{x} = -(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$.

1.19. TÉTEL. *Két vektor akkor és csak akkor párhuzamos egymással ha vektoriális szorzatuk egyenlő a nullvektorral.*

BIZONYÍTÁS. Feltételezzük, hogy $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Ekkor $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = 0 \Leftrightarrow \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \sin\varphi = 0 \Leftrightarrow \sin\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$ vagyis $\mathbf{x} \parallel \mathbf{y}$. $\square$

A tételből következik, hogy

$$\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \mathbf{0}, \tag{1.3.3}$$

illetve

$$\begin{gathered}\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k},\ \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i},\ \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j} \\ \bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k},\ \bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i},\ \bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}.\end{gathered} \tag{1.3.4}$$

A fenti összefüggéseket figyelembe véve kiszámíthatjuk az $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\bar{i} + x_2\bar{j} + x_3\bar{k}$ és $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y_1\bar{i} + y_2\bar{j} + y_3\bar{k}$ vektorok vektoriális szorzatát:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \times \mathbf{y} &= \left(x_1\bar{i} + x_2\bar{j} + x_3\bar{k}\right) \times \left(y_1\bar{i} + y_2\bar{j} + y_3\bar{k}\right) = x_1y_1\bar{i} \times \bar{i} + x_1y_2\bar{i} \times \bar{j} + \\ &+ \ldots + x_3y_3\bar{k} \times \bar{k} = x_1y_2\bar{k} - x_1y_3\bar{j} + \ldots - x_3y_2\bar{i},\end{aligned}$$

amit determináns segítségével átírható az alábbi alakra:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \tag{1.3.5}$$

1.20. PÉLDA. Ha $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$,$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ akkor

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\bar{i} + 5\bar{j} + 2\bar{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ellenőrizzük, hogy $\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ valóban merőleges az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorokra: $\mathbf{z} \cdot \mathbf{x} = 4 - 10 + 6 = 0$, $\mathbf{z} \cdot \mathbf{y} = 2 + 0 - 2 = 0$.

1.21. PÉLDA. Igazoljuk, hogy az $ABCD$ egy trapéz, ahol $A(1, -1, 2)$, $B(2, 0, -1)$, $C(2, 1, -4)$, $D(0, -1, 2)$!

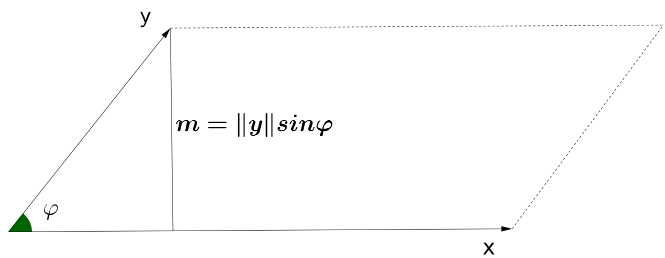
Igazolni kell, hogy $AB \parallel CD$ vagy $AD \parallel BC$. Mivel $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overline{CD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ észrevehető, hogy $\overline{CD} = -2\overline{AB}$, vagyis a vektorok párhuzamosak. Az arányos koordináták a vektoriális szorzat determináns második és harmadik sorában jelennek meg, tehát a vektoriális szorzat nulla és a vektorok párhuzamosak.

$$\overline{AB} \times \overline{CD} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Az (1.3.2) képlet mértani jelentése a következő: az $\|\mathbf{y}\| \sin\varphi$ egyenlő az $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ vektorok által alkotott paralelogramma m magasságával (lásd alábbi ábrát), tehát $\|\mathbf{z}\| = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \sin\varphi = \|\mathbf{x}\| \cdot m$, vagyis az $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ vektor hossza egyenlő a paralelogramma területével:

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = T_{paralelogramma}. \tag{1.3.6}$$

.



1.22. Példa. Számítsuk ki az ABC háromszög területét és a magasságok hosszait ha a csúcsok koordinátái $A(1,-1,2), B(2,0,2), C(-1,-1,1)$!

Az ABC háromszög területe egyenlő az $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $\overline{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ vektorok által kifeszített paralelogramma terület felével: $T_{ABC} = \frac{1}{2} \left\| \overline{AB} \times \overline{AC} \right\|$.

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\left\| \overline{AB} \times \overline{AC} \right\| = \sqrt{6},$$

tehát az ABC háromszög területe egyenlő $T_{ABC} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Legyen AA' az AB oldal magassága. Ekkor

$$\|AA'\| = \frac{T_{ABC}}{2\,\|AB\|} = \frac{\sqrt{6}}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Hasonlóan számítjuk ki a többi magasság hosszát.

2. FEJEZET

Vektorterek, alterek, bázis

2.1. Vektorterek

Legyen K egy kommutatív test (leggyakrabban $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_2$).

A $V \neq \emptyset$, halmazon értelmezünk egy belső (összeadás $+$) és egy külső (skalárral való szorzás $\cdot$) műveletet:

- belső művelet $+$: $V \times V \to V$, $\forall u, v \in V \Longrightarrow \exists!\; u + v \in V$;
- külső művelet $\cdot$: $K \times V \to V$, $\forall \lambda \in K,\; v \in V \Longrightarrow \exists!\; \lambda \cdot v \in V$.

2.1. Definíció. A V halmazt K feletti vektortérnek nevezzük (jel $(V, +, \cdot, K)$) ha:

(1) $(V, +)$ kommutatív csoport;

(2) $\forall \alpha, \beta \in K,\; \forall u, v \in V$

$(V1)$ $\alpha\,(u + v) = \alpha\,(u + v)$;

$(V2)$ $(\alpha + \beta)\,v = \alpha v + \beta v$;

$(V3)$ $(\alpha\beta)\,v = \alpha\,(\beta v)$;

$(V4)$ $1 \cdot v = v$.

Ha $K = \mathbb{R}$ akkor valósvektortérről, ha pedig $K = \mathbb{C}$ akkor komplex vektortérről beszélünk.

2.2. Példa. $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$ valós vektortér ahol $+$ illetve $\cdot$ műveleteket komponensenként végezzük.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix},\ \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix}.$$

Pl.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 8.1 \end{pmatrix}, \; 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6.6 \end{pmatrix}.$$

Általánosan $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$ vektortér. Hasonlóan $(\mathbb{C}^n, +, \cdot, \mathbb{C})$.

2.3. Példa. $(\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$; $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ a 2×3-as mátrixok halmaza valós vektorteret alkot az ismert műveletekre nézve (mátrixok összeadása, skalárral való szorzása):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \\ e' & f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \\ e+e' & f+f' \end{pmatrix}, \; \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \\ \alpha e & \alpha f \end{pmatrix}.$$

Általánosan $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$, $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), +, \cdot, \mathbb{C})$ vektorterek.

2.4. Példa. $(\mathbb{P}_2, +, \cdot, \mathbb{R})$; $\mathbb{P}_2$ a legfeljebb másodfokú polinomok halmaza vektorteret alkot az ismert műveletekre nézve (polinomok összeadása, skalárral való szorzása):

$$\left(aX^2 + bX + c\right) + \left(a'X^2 + b'X + c'\right) = (a+a')X^2 + (b+b')X + c + c',$$
$$\alpha\left(aX^2 + bX + c\right) = \alpha aX^2 + \alpha bX + \alpha c.$$

Általánosan $(\mathbb{P}_n, +, \cdot, \mathbb{R})$ vektortér.

2.5. Példa. $(F, +, \cdot, \mathbb{R})$; $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ a valós függvények halmaza valós vektorteret alkot az ismert műveletekre nézve (függvények összeadása, skalárral való szorzása):

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

2.6. Tétel. $\forall \alpha, \beta \in K, \; \forall u, v \in V \implies$

(i) $0 \cdot v = 0_V, \; \alpha \cdot 0_V = 0_V;$

(ii) $\alpha \cdot v = 0_V \implies \alpha = 0$ *vagy* $v = 0_V$;
(iii) $(-\alpha) \cdot v = \alpha(-v) = -(\alpha \cdot v)$, $(\alpha - \beta) v = \alpha v - \beta v$, $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$.

Bizonyítás. (i) $0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v \Rightarrow 0_V = 0 \cdot v$.
(ii) Ha $\alpha = 0$ akkor $\alpha \cdot v = 0_V$. Ha $\alpha \neq 0$ akkor létezik α^{-1}; beszorozva az egyenletet következik, hogy $\alpha^{-1} \cdot \alpha \cdot v = \alpha^{-1} \cdot 0_V$ vagyis $1 \cdot v = v = 0_V$. $\square$

2.2. Alterek

Legyen $(V, +, \cdot, K)$ egy vektortér és U részhalmaza V-nek: $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$.

2.7. Definíció. Az U altere (résztere) a V vektortérnek, ha vektortér ugyanazon K test felett az örökölt műveletekre nézve. Jelölése $U \leq_K V$.

2.8. Példa. $\{0_V\}$ illetve V triviális alterei V-nek: $\{0_V\} \leq_K V$, $V \leq_K V$.

2.9. Példa. Ha $U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid c = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.$\mathbb{R}^2 \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$ az ismert műveletekre nézve.

2.10. Tétel. *U pontosan akkor altere V-nek, ha:*
(i) $\forall u, v \in U \implies (u + v) \in U$ *(zárt a vektorok összeadására);*
(ii) $\forall \alpha \in K$, $\forall v \in U \implies \alpha \cdot v \in U$ *(zárt a vektorok skalárral való szorzására).*

2.11. Következmény. *Ha $U \leq_K V$ akkor:*
(i) $v \epsilon U \implies (-v) \in U$;
(ii) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K, v_1, v_2, ..., v_n \in U \implies \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n \in U$.

2.12. PÉLDA. Az $U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in R^3 \mid c = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset$ $\mathbb{R}^3 = V$ zárt a vektorok összeadására: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ 0 \end{pmatrix} \in U \Rightarrow$ $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ 0 \end{pmatrix} \in U$ és zárt a skalárral való szorzásra: $\alpha \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \in U \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ 0 \end{pmatrix} \in U$, tehát U résztere V -nek $U \leq_{\mathbb{R}} V$.

2.13. PÉLDA. Ha $V = \mathbb{R}^2$ és $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 + y^2 \leq 2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ akkor $U \nleq_{\mathbb{R}} V$ mert $(1,1) \in U$ de $2 \cdot (1,1) \notin U$.

2.14. DEFINÍCIÓ. Az $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$ összeget a $v_1, v_2, ..., v_n \in U$ vektorok $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ együtthatókkal képzett lineáris kombinációjának nevezzük. A lineáris kombinációk halmazát (jel. $lin\,(U)$ vagy $\langle v_1, ..., v_n \rangle$) az U halmaz burkának nevezzük:

$$lin\,(U) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n \ |v_1, v_2, ..., v_n \in U, \ \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K\}.$$

Az előbbi folyomány (ii) pontja szerint: $U \leq_K V \Longrightarrow lin\,(U) \leq_K V$.

Két altér metszete is altér viszont az egyesítésük nem. Ugyanakkor létezik egy legszűkebb altér ami tartalmazza mindkét alteret.

2.15. TÉTEL. *Legyen* U_1, U_2 *a* $(V, +, \cdot, K)$ *vektortér két altere:* $U_1 \leq_K V, \ U_2 \leq_K V$. *Akkor a*

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \,|u_1 \in U_1, \ u_2 \in U_2\}$$

halmaz altér, mégpedig az U_1, U_2 altereket tartalmazó legszűkebb altér.

Az előbbi állítás általánosítható $U_1, U_2, ..., U_n$ tetszőleges altérre.

$U_1+U_2+...+U_n = \{u_1 + u_2 + ... + u_n \,| u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2, ..., u_n \in U_n\}$.

2.16. Definíció. Azt mondjuk hogy V a $U_1, U_2, ..., U_n$ alterek direkt összege (jel. $V = U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_n$), ha $\forall v \in V$ pontosan egyféleképp írható fel

$$v = u_1 + u_2 + ... + u_n,\ u_i \in U_i,\ i = \overline{1, n}.$$

2.17. Tétel. *Egy V vektortér akkor és csak akkor írható két altér U_1, U_2 direkt összegére ($V = U_1 \oplus U_2$), ha*
(i) $U_1 + U_2 = V$, és
(ii) $U_1 \cap U_2 = \{0_V\}$.

2.18. Példa. A $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$ vektortér felírható mint a szimmetrikus $\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,| A^t = A\}$ és antiszimmetrikus $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,| A^t = -A\}$ mátrixok halmazával alkotott alterek direkt összege.

Bizonyítás. Igazoljuk, hogy $\mathcal{S}$ és $\mathcal{A}$ valóban $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alterei. Ha $A, B \in \mathcal{S}$, vagyis $A^t = A$, $B^t = B$ akkor $(A + B)^t = A^t + B^t = A + B$ tehát $A + B \in \mathcal{A}$. Ha $\alpha \in \mathbb{R}$ és $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ akkor $(\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha A$ tehát $\alpha A \in \mathcal{A}$ ahonnan $\mathcal{A} \leq_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Hasonlóan $S \leq_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A $\mathcal{M}_n = \mathcal{A} \oplus \mathcal{S}$ felbontást az előbbi tétel segítségével igazoljuk. Bármilyen A mátrix felírható a következő mátrixok összegeként $A = \frac{A+A^t}{2} + \frac{A-A^t}{2}$, és igazolható, hogy $\frac{1}{2}(A + A^t) \in \mathcal{A}$ és $\frac{1}{2}(A - A^t) \in \mathcal{S}$: $(A + A^t)^t = A^t + A = A + A^t$ és $(A - A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t)$. $\square$

2.3. Lineáris függetlenség, bázis

A $(V, +, \cdot, K)$ vektortérben legyen $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $v_i \in V$ egy vektorrendszer.

2.19. Definíció. A $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ vektorrendszert lineárisan függetlennek nevezzük ha:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0_V \;\Rightarrow\; \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Ha a rendszer nem lineárisan független akkor lineárisan (össze)függőnek nevezzük.

2.20. Példa. $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$ vektortérben

(i) $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektorokból álló rendszer lineárisan független mert;

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0_V \;\Rightarrow\; \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0_V \;\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha_1 \\ 1\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\alpha_2 \\ 2\alpha_2 \end{pmatrix} = 0_V \Rightarrow \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 & = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 & = 0 \end{cases},$$

tehát egy homogén lineáris egyenletrendszerhez jutottunk aminek a determinánsa $\det A = 3 \neq 0$, következik, hogy az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van - a triviális- $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

(ii) $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ vektorokból álló rendszer lineárisan függő. Úgyszintén lineárisan függő a $\{w_1, w_2, w_3\}$ vektorrendszer ahol

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\; w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\; w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2.21. Példa. A $(\mathbb{P}_2, +, \cdot, \mathbb{R})$ vektortérben a $\{1, X, X^2\}$ vektorrendszer lioneárisan független mert

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 X + \alpha_3 X^2 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

2.22. Példa. A $(F,+,\cdot,\mathbb{R})$ valós függvények vektorterében a $\left\{\cos^2 x, \sin^2 x, 2\right\}$ függvények lineárisan összefüggők mert az

$$\alpha_1 \cdot \cos^2 x + \alpha_2 \cdot \sin^2 x + \alpha_3 \cdot 2 = 0$$

egyenlőség nem csak $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ -ra teljesül, hanem $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -\frac{1}{2}$.

Ha a $\{f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ vektorrendszer függvényei $(n-1)$-szer folytonosan deriválhatóak, $f_i \in C^{n-1}$, $i = 1, \ldots, n-1$, akkor a rendszer lineáris függőségét a

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_0(x) & f_1(x) & f_{n-1}(x) \\ f_0'(x) & f_1'(x) & f_{n-1}'(x) \\ \vdots & & \\ f_0^{(n-1)}(x) & f_1^{(n-1)}(x) & f_{n-1}^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{2.3.1}$$

Wronski-féle determináns segítségével tárgyaljuk, ugyanis a $\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_{n-1} f_{n-1} = 0$ egyenlőség igaz kell legyen a triviálistól $(\alpha_i = 0,\ i = 1, \ldots n)$ eltérő értékekre is. Az egyenlőséget deriválva következik, hogy

$$\alpha_0 f_0' + \alpha_1 f_1' + \ldots + \alpha_{n-1} f_{n-1}' = 0$$

$$\vdots$$

$$\alpha_0 f_0^{(n-1)} + \alpha_1 f_1^{(n-1)} + \ldots + \alpha_{n-1} f_{n-1}^{(n-1)} = 0$$

vagyis a

(2.3.2)

$$\begin{pmatrix} f_0(x) & f_1(x) & \ldots & f_{n-1}(x) \\ f_0'(x) & f_1'(x) & \ldots & f_{n-1}'(x) \\ \vdots & & & \\ f_0^{(n-1)}(x) & f_1^{(n-1)}(x) & \ldots & f_{n-1}^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

homogén lineáris egyenletrendszernek a triviálistól eltérő megoldása kell legyen, tehát a determinánsa egyenlő nullával.

2.23. TÉTEL. *(i) Ha* $\{f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ *rendszer lineárisan összefüggő akkor* $W(x) = 0$.
(ii) Ha $W(x) \neq 0$ *akkor a* $\{f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ *vektorrendszer lineárisan független.*

BIZONYÍTÁS. (ii) A $\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_{n-1} f_{n-1} = 0$ -ból deriválással a (2.3.2) homogén lineáris egyenletrendszerhez jutunk és ha a determinánsa nem nulla $W(x) \neq 0$, akkor az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van, a triviális $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$, vagyis a függvények lineárisan függetlenek. $\square$

2.24. PÉLDA. Az $\{1, \cos x, \sin x\}$ vektorrendszer lineárisan független mert $W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \neq 0.$
Hasonlóan az

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx\}$$

vektorrendszer lineárisan független.

Az előbbi példa esetében nem használhatjuk a tételt ugyanis $W(x) = \begin{vmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x & 2 \\ -2\cos x \cdot \sin x & 2\cos x \cdot \sin x & 0 \\ -2\cos 2x & 2\cos 2x & 0 \end{vmatrix} = 0$, de a tétel nem rendelkezik mi történik ha a Wronski-féle determináns nulla.

2.25. TÉTEL. *Ha* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *vektorrendszer lineárisan függő* $\Longleftrightarrow$ *az egyik vektor felírható a többi függvényében:* $\exists v_k$ *ú.h.*

$$v_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \alpha_i v_i.$$

2.26. PÉLDA. A (2.20) Példa (ii) alpontjánál szereplő vektorok esetében: $u_2 = -2u_1$, $w_3 = w_1 + w_2$.

2.27. ÁLLÍTÁS. (i) *A* $\{0_v, v_2, ..., v_n\}$ *vektorrendszer lineárisan függő.*
(ii) *A* $\{v_1, v_1, v_2, ..., v_n\}$ *vektorrendszer lineárisan függő.*
(iii) *Ha* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *vektorrendszer lineárisan független* $\Longrightarrow \{v_2, ..., v_n\}$ *vektorrendszer is lineárisan független.*
(iv) *Ha* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *vektorrendszer lineárisan függő* $\Longrightarrow \{v_1, v_2, ..., v_n, w\}$ *vektorrendszer is lineárisan függő* $\forall w \in V$.

2.28. DEFINÍCIÓ. A $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $v_i \in V$ vektorrendszert generátorrendszerne nevezzük, ha $\forall w \in V$ előállítható a v_i, $i = 1, ..., n$ vektorok lineáris kombinációjaként.

2.29. PÉLDA. A $\{v_1, v_2, v_3\}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

generátorrendszere $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$ vektortérnek. A $w = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektor felírható

$$w = 2v_1 + 3v_2 - v_3, \ \text{vagy} \ w = v_1 + 2v_2 - 0v_3.$$

Különös jelentőségük van az olyan generátorrendszereknek amelyek segítségével egy tetszőleges vektor egyértelműen állítható elő. Ezek az úgynevezett bázisok.

2.30. Definíció. Egy $(V,+,\cdot,K)$ vektortér $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $v_i \in V$ vektorrendszerét bázisnak nevezzük, ha lineárisan független és generátorrendszer.

2.31. Példa. A $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektorok bázist alkotnak $(\mathbb{R}^2,+,\cdot,\mathbb{R})$ vektortérben.

Egy vektortérnek több bázisa is lehet; ezek közül különösen fontosak az úgynevezett kanonikus bázisok.

2.32. Példa. (i) A $(\mathbb{R}^3,+,\cdot,\mathbb{R})$ vektortérben $\{e_1, e_2, e_3\}$ kanonikus bázis

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Az $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot,\mathbb{R})$ vektortérben $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ kanonikus bázis

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) A $(\mathbb{P}_2,+,\cdot,\mathbb{R})$ legfeljebb másodfokú polinomok vektorterében $\{1, X, X^2\}$ kanonikus bázis. Úgyszintén bázis a $\left\{1, (X-a), (X-a)^2\right\}$ vektorrendszer.

(iv) Az $(F,+,\cdot,\mathbb{R})$ valós függvények vektorterében a $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x$ rendszer bázist alkot.

2.33. Tétel. *Ha $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ bázisa a $(V,+,\cdot,K)$ vektortérnek akkor minden $w \in V$ vektor egyértelműen írható fel a B bázis vektoraival ($\forall w \in V,\ \exists! \alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ ú.h. $w = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$).*

Bizonyítás. Mivel $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ generátor rendszer a lineáris kombinációjuk előállítja a w vektort $w = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$. Az egyértelműség bizonyításához feltételezzük, hogy létezik egy másik felírása a w vektornak: $w = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n$. Kivonva egymásból az egyenleteket kapjuk, hogy

$$\mathbf{0} = (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + ... + (\alpha_n - \beta_n) v_n,$$

vagyis, a $v_1, \ldots, v_n$ vektorok lineáris függetlenségét figyelembe véve következik, hogy $\alpha_i - \beta_i = 0$, $i = \overline{1, n}$. □

2.34. Definíció. Ha egy w vektor felírható a B bázisban mint $w = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$, akkor az $\alpha_1, ..., \alpha_n$ skalárokat a w vektor koordinátáinak nevezzük a B bázisban. Jelölés: $[w]_B = (\alpha_1 \; \alpha_2 \ldots \alpha_n)^t$.

2.35. Tétel. *Ha* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *lineárisan független rendszer és* $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ *generátorrendszere a* $(V, +, \cdot, K)$ *vektortérnek, akkor* $n \leq m$.

Bizonyítás. Feltételezzük, hogy $n > m$. Mivel $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ generátorrendszer a segítségükkel előállíthatók az $v_1, \ldots, v_n$vektorok:

$$\begin{aligned} v_1 &= k_{11} u_1 + k_{21} u_2 + \ldots + k_{m1} u_m \\ &\vdots \\ v_n &= k_{1n} u_1 + k_{2n} u_2 + \ldots + k_{mn} u_m \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

A $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ vektorok lineárisan függetlenek tehát

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0,$$

majd behelyettesítve a (2.3.3) képleteket és u_i szerint rendezve kapjuk, hogy:

$$(\alpha_1 k_{11} + \ldots + \alpha_n k_{1n}) u_1 + ... + (\alpha_1 k_{m1} + \ldots + \alpha_n k_{mn}) u_m = 0.$$

Ha a fenti képletben az u_i vektorok együtthatói mind nullák (nem szükségszerű hiszen u_i vektorok nem lineárian függetlenek) akkor az állítás igaz és a következő m-soros, n -oszlopos $(m < n)$ homogén lineáris egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{cases} \alpha_1 k_{11} + \ldots + \alpha_n k_{1n} & = & 0 \\ \vdots & & \\ \alpha_1 k_{m1} + \ldots + \alpha_n k_{mn} & = & 0 \end{cases}.$$

Következik, hogy a lineáris egyenletrendszer határozatlan tehát a triviálistól $(\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0)$ más megoldása is van, ami ellentmond a v_i vektorok lineáris függetlenségének.

Az előbbi tétel következményeként állítható, hogy: □

2.36. TÉTEL. *A* $(V, +, \cdot, K)$ *vektortérnek minden bázisának ugyanannyi vektora van.*

2.37. DEFINÍCIÓ. Egy vektortér dimenzióján a bázisban lévő elemek számát értjük, jelölése: $\dim V$.

2.38. PÉLDA. A 2.32. Példában a vektorterek dimenziója rendre $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\dim \mathcal{M}_2 = 4$, $\dim \mathbb{P}_2 = 3$, $\dim F = \infty$.

A nullvektorból álló vektortér dimenziója zéró: $\dim \{0_V\} = 0$.

2.39. PÉLDA. Legyen $V = \mathbb{R}^3$ valós vektortér és $U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid c = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Mint láttuk U résztere V -nek: $U \leq_{\mathbb{R}} V$, tehát vektortér.

Az U dimenziója egyenlő a bázisában lévő vektorok számával, ugyanakkor bármilyen $w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \in U$ vektor felbontható (generálható) mint

$w = a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, és igazolható, hogy $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ lineárisan független vektorok: $\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$ $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, tehát bázist alkotnak az U térben. Következik, hogy $\dim U = 2$.

Az eddigi eredményekbő az alábbi (vektorrendszerek közötti) összefüggések igazolhatók:

2.40. ÁLLÍTÁS. *Ha egy V vektortér dimenziója n $(\dim V = n)$ és:*

(i) ha a $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ rendszer bázis (tehát lineárisan független) akkor a rendszerből vektorokat kihagyva lineárisan független rendszert kapunk (lásd Allítás 2.27 (iii));

(ii) ha a $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ rendszer bázis (tehát generátor rendszer) akkor a rendszerhez vektorokat hozzáadva generátor rendszert kapunk;

(iii) ha az adott térben $(\dim V = n)$ n vektor $v_1, v_{2,} \ldots, v_n$ lineárisan független, akkor a $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ rendszer bázis.

2.41. PÉLDA. Az $\mathcal{M}_2$ térben $\dim \mathcal{M}_2 = 4$ és a $A_1 = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$, vektorok lineárisan függetlenek tehát $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ bázist alkot. Az $\{A_2, A_3, A_4\}$ vektorrendszer lineárisan független, míg a $\{A_1, A_2, A_3, A_4, B\}$ generátor rendszer $\forall B \in \mathcal{M}_2$.

2.42. TÉTEL. $\dim U_1 \oplus U_2 = \dim U_1 + \dim U_2$.

2.4. Bázis transzformáció

Ha $(V,+,\cdot,K)$ vektortér dimenziója $n=\dim V$ és $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$, illetve $B'=\{e'_1,e'_2,...,e'_n\}$ két bázisa akkor:

(2.4.1)

$$\begin{aligned} e'_1 &= t_{11}e_1+t_{21}e_2+...+t_{n1}e_n \\ e'_2 &= t_{12}e_1+t_{22}e_2+...+t_{n2}e_n \\ &\vdots \\ e'_n &= t_{1n}e_1+t_{2n}e_2+...+t_{nn}e_n \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad (e'_1\ ...\ e'_n) = (e_1\ ...\ e_n)\,T.$$

2.43. DEFINÍCIÓ. A $(t_{ij})_{i,j=1}^{n}=T\in\mathcal{M}_n(K)$ mátrixot áttérési vagy transzformációs mátrixnak nevezzük (a B bázisból a B' bázisba).

2.44. TÉTEL. *Ha $[x]_B=(x_1,x_2,...,x_n)^t$, illetve $[x]_{B'}=(x'_1,x'_2,...,x'_n)^t$ egy $x\in V$ vektor koordinátái (oszlop mátrix) a B, illetve B' bázisban, akkor*

$$[x]_B = T\cdot[x]_{B'} \tag{2.4.2}$$

ahol T az áttérési mátrix.

BIZONYÍTÁS.

$$x=x_1e_1+...+x_ne_n=(e_1\ ...\ e_n)\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}=(e_1\ ...\ e_n)\,[x]_B$$

$$x=x'_1e'_1+...+x'_ne'_n=(e'_1\ ...\ e'_n)\begin{pmatrix} x'_1\\ \vdots \\ x'_n\end{pmatrix}=(e'_1\ ...\ e'_n)\,[x]_{B'}=(e_1\ ...\ e_n)\,T\,[x]_{B'}$$

$$(e_1\ ...\ e_n)\,[x]_B=(e_1\ ...\ e_n)\,T\,[x]_{B'}$$

$\Rightarrow$

$$[x]_B=T\cdot[x]_{B'}\,.$$

□

Mivel T áttérési mátrix két bázis között következik, hogy az oszlopai lineárisan függetlenek, tehát a T mátrix reguláris ($\det(T) \neq 0$) és létezik az inverze. Beszorozva a (2.4.2) képletet balról T^{-1}-el kapjuk, hogy:

$$[x]_{B'} = T^{-1} \cdot [x]_B \,. \tag{2.4.3}$$

2.45. PÉLDA. $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$ vektortérben $B = \{e_1, e_2\}$, $e_1 = \binom{1}{0}, e_2 = \binom{0}{1}$, illetve $B' = \{e_1', e_2'\}$, $e_1' = \binom{1}{-2}, e_2' = \binom{-1}{3}$, és $x = \binom{-1}{4}$.

$$\begin{aligned} e_1' &= e_1 - 2e_2,\ e_2' = -e_1 + 3e_2 \Longrightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}. \\ x &= -e_1 + 4e_2,\ x = e_1' + 2e_2' \ \text{ vagyis } [x]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix},\ [x]_{B'} = \end{aligned}$$

Ellenőrzésképpen: $[x]_B = T \cdot [x]_{B'}$.

Az alábbi eljárás segítségével egy $(V, +, \cdot, K)$ vektortér $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ bázisvektorait egyesével kicserélve új bázist kapunk.

2.46. TÉTEL. *[Kicserélési tétel] Legyen $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ egy $(V, +, \cdot, K)$, vektortér bázisa és $[x]_B = (x_1, x_2, ..., x_n)^t$ egy $x \in V$ vektor koordinátái a B bázisban, vagyis $x = x_1e_1 + ... + x_ie_i + ... + x_ne_n$. Akkor:*
(i) $x_i \neq 0 \iff B^* = \{e_1, e_2, ..., e_{i-1}, x, e_{i+1}, ..., e_n\}$ vektorrendszer bázist alkot.
(ii) Ha $(y_1, y_2, ..., y_n)^t = [y]_B$ és $(y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*)^t = [y]_{B^*}$ egy $y \in V$ vektor koordinátái a B és B^* bázisokban, akkor

$$y_j^* = \begin{cases} \frac{y_i}{x_i} & , \ j = i \\ \frac{x_iy_j - x_jy_i}{x_i} & , \ j \neq i \end{cases}.$$

Táblázat alakban a tétel a következőképpen alakítható:

$$
\text{Bázis}\;
\begin{array}{c|ccc}
 & x & & y \\
\hline
e_1 & x_1 & & y_1 \\
\vdots & & & \\
e_i & \boxed{x_i} & - & y_i \\
\vdots & | & & | \\
e_j & x_j & - & y_j \\
\vdots & & & \\
e_n & x_n & & y_n
\end{array}
\quad \rightarrow \quad
\text{Bázis}\;
\begin{array}{c|ccc}
 & x & & y \\
\hline
e_1 & 0 & & \frac{x_i y_1 - x_1 y_i}{x_i} \\
\vdots & & & \\
x & 1 & - & \frac{y_i}{x_i} \\
\vdots & | & & | \\
e_j & 0 & - & \frac{x_i y_j - x_j y_i}{x_i} \\
\vdots & & & \\
e_n & 0 & & \frac{x_i y_n - x_n y_i}{x_i}
\end{array}
$$

BIZONYÍTÁS. (i) Feltételezzük, hogy $x_i \neq 0$ és igazoljuk, hogy $\{e_1, \ldots, x, \ldots, e_3\}$ lineárisan független.

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_i x + \ldots + \alpha_n e_n = 0$$

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_i \left(x_1 e_1 + \ldots + x_i e_i + \ldots + x_3 e_3\right) + \ldots + \alpha_n e_n = 0$$

$$\left(\alpha_1 + \alpha_i x_1\right) e_1 + \ldots + \alpha_i x_i e_i + \ldots + \left(\alpha_n + \alpha_i x_n\right) e_n = 0.$$

Mivel $e_1, \ldots, e_n$ lineárisan függetlenek $\Rightarrow$ $(\alpha_1 + \alpha_i x_1) = 0, \ldots, \alpha_i x_i = 0, \ldots (\alpha_n + \alpha_i x_n) = 0$. A feltételezés szerint $x_i \neq 0$ tehát $\alpha_i = 0$, következik, hogy $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

(ii) Egyfelől

$$y = y_1 e_1 + ... + y_i e_i + ... + y_n e_n$$

$$y = y_1^* e_1 + ... + y_i^* x + ... + y_n^* e_n = y_1^* e_1 + ... + y_i^* \left(x_1 e_1 + ... + x_i e_i + ... + x_n e_n\right) + ..$$

$$\ldots + y_n^* e_n = \left(y_1^* + y_i^* x_1\right) e_1 + ... + \left(y_i^* x_i\right) e_i + ... + \left(y_n^* + y_i^* x_n\right) e_n,$$

és mivel a felírás egyértelmű $\Rightarrow$ $y_1 = (y_1^* + y_i^* x_1)$, ...,$y_i = (y_i^* x_i)$,..., $y_n = (y_n^* + y_i^* x_n)$ vagy kifejezve $y_j^* = ...$ □

A lemma alkalmazásai: bázis ellenőrzés, lineáris egyenletrendszerek megoldása, mátrix inverzének, illetve rangjának a kiszámítása.

2.4.1. Bázis ellenőrzés

2.47. PÉLDA. Igazoljuk, hogy $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektorok bázist alkotnak a R^2 vektortérben. Fejezzük ki a $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektort ebben a bázisban.

Az $\mathbb{R}^2$ térben a kanonikus bázisból indulunk ki $B_k = \{e_1, e_2\}$ ahol $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ás $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ebben a bázisban a v_1, v_2 vektorok felírása a következő

$$v_1 = 2e_1 + e_2, v_2 = v_1 + 2v_2, w = 3e_1$$

amit a táblázat oszlopaiba írunk

$$\begin{array}{cc|cc|c} & & v_1 & v_2 & w \\ \hline \text{Bázis} & e_1 & \boxed{2} & 1 & 3 \\ & e_2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|cc|c} & & v_1 & v_2 & w \\ \hline \text{Bázis} & v_1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ & e_2 & 0 & \boxed{\frac{3}{2}} & -\frac{3}{2} \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|cc|c} & & v_1 & v_2 & w \\ \hline \text{Bázis} & v_1 & 1 & 0 & 2 \\ & v_2 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

Az utolsó táblázatból következik, hogy $\{v_1, v_2\}$ vektorrendszer bázis és ebben a bázisban $w = 2v_1 + (-1)\,v_2$.

2.4.2. Mátrix rangja A $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ vektorrendszerből maximálisan kiválasztható r lineárisan független vektorok számát a vektrorendszer rangjának nevezzük. Egymásmellé helyezve a $v_i \in \mathbb{R}^m$ oszlopvektorokat egy $A = (v_1\,|v_2|\ldots|v_n) \in M_{mn}$ mátrixot kapunk aminek a rangja $rang\,(A)$ értelmezés szerint azonos az r vektorrendszer rangjával.

A mátrix rangjára a következő állítások igazak: $r \leq \min\{m, n\}$, $rang(A^t) = rang(A)$.

A kicserélési tételből következik tehát, hogy a mátrix rangja egyenlő a maximálisan kiválasztható főelemek számával.

2.48. PÉLDA. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

v_1, v_2, v_3, v_4 -vel jelölve az A mátrix oszlopvektorait a következő báziscserét eszközöljük a $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ kanonikus bázissal:

$$\begin{array}{c|cccc} \text{Bázis} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline e_1 & \boxed{1} & -1 & -2 & 0 \\ e_2 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ e_3 & 2 & 3 & -4 & 5 \end{array} \to \begin{array}{c|cccc} \text{Bázis} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ e_2 & 0 & \boxed{-1} & 0 & -1 \\ e_3 & 0 & 5 & 0 & 5 \end{array} \to$$

$$\begin{array}{c|cccc} \text{Bázis} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ v_2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

A táblázatokból kitűnik, hogy csak kétszer választható főelem tehát $rang\,(A) = 2$. A főelemek kiválasztásából következik, hogy v_1 és v_2 lineárisan függetlenek és (az utolsó két oszlopból) $v_3 = -2v_1$, illetve $v_4 = v_1 + v_2$.

2.4.3. Lineáris egyenletrendszerek megoldása

2.49. PÉLDA. Oldjuk meg az alábbi határozott lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{cases} 2x + y &= 3 \\ x + 2y &= 0 \end{cases}.$$

Az egyenletrendszert felírhatjuk mint

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

vagyis

$$x \cdot v_1 + y \cdot v_2 = w,$$

ahol $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ és a feladat visszavezetődik a w vektor előállítására a v_1, v_2 vektorok lineáris kombinációjaként. Az előbbi példában ennek a feladatnak a megoldása: $2v_1 + (-1)\,v_2 = w$ tehát azonosíthatjuk a megoldást: $\begin{cases} x & = 2 \\ y & = -1 \end{cases}.$

2.50. PÉLDA. Oldjuk meg az alábbi határozatlan lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 & = 2 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 & = 1 \end{cases}.$$

Az egyenletrendszert felírhatjuk mint

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

vagyis

$$x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 v_3 = w,$$

ahol $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ és a feladat visszavezetődik a w vektor előállítására a v_1, v_2, v_3 vektorok lineáris kombinációjaként.

Bázis	v_1	v_2	v_3	w
e_1	3	-2	-4	2
e_2	$\boxed{-1}$	3	1	1

$\rightarrow$

Bázis	v_1	v_2	v_3	w
e_1	0	7	$\boxed{-1}$	5
v_1	1	-3	-1	-1

$\rightarrow$

Bázis	v_1	v_2	v_3	w
v_3	0	-7	1	-5
v_1	1	-10	0	-6

Az utolsó táblázatból következik, hogy $\{v_1, v_3\}$ bázis, $v_2 = -10v_1 - 7v_3$ és

$$\begin{cases} -7x_2 + x_3 &= -5 \\ x_1 - 10x_2 &= -6 \end{cases},$$

ahonnan $x_2 = t$ jelöléssel kapjuk a $x_1 = -6+10t$, $x_2 = t$, $x_3 = -5+7t$, $t \in \mathbb{R}$ határozatlan megoldást.

2.51. PÉLDA. Oldjuk meg a $(\mathbb{Z}_5^2, +, \cdot, \mathbb{Z}_5)$ vektortérben az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \hat{2}x_1 + \hat{3}x_2 &= \hat{3} \\ \hat{3}x_1 + x_2 &= \hat{4} \end{cases}.$$

2.4.4. Lineáris programozás Egy asztalos műhelyben két terméket gyártanak széket és asztalt és két alapanyagot használnak: PAL lemezt és deszkát. Egy szék előállításához $1m^2$ PAL lemezt és $1m^2$ deszkát használnak, míg egy asztal előállításához $1.5m^2$, illetve $0.5m^2$-t. PAL lemezből 18,míg deszkából 8 m^2van raktáron. Határozzuk meg az optimális gyártást ha egy széket 4 egységért, míg egy asztalt 5 egységért lehet értékesíteni!

	szék	asztal		raktár
PAL lemez	1	1.5		12
deszka	1	0.5		8
bevétel	4	5		

$$\begin{cases} x + \frac{3}{2}y & \leqq 12 \\ x + \frac{1}{2}y & \leq 8 \\ x, y & \geq 0 \\ f = 2x + 3y \to max \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y & \leqq 24 \\ 2x + y & \leq 16 \\ x, y & \geq 0 \\ f = 4x + 35y \to max \end{cases}$$

2.52. PÉLDA. Ahhoz hogy egy gyógykezelés hatásos legyen egy betegnek 3 féle hatóanyagból h_1, h_2, h_3, naponta legalább $12, 21, 60$

μg -ot kell beszednie. A hatóanyagokat 2 gyógyszerben A és B -ben találhatók; az A -ban $1, 3, 10$ μg van a h_1, h_2, h_3 hatóanyagokból, míg a B gyógyszerben $6, 7, 6$ μg ugyanazokból a hatóanyagokból. Ha az A, illetve B gyógyszer egységára 5, illetve 18 akkor adjuk meg a gyógyszerek optimálás adagolását! $(3.8, 1.3)$ megoldás

	A	B		
h1	1	6		12
h2	3	7		21
h3	10	6		60
f	5	18		

$$(P)\left\{\begin{array}{cc} x_1 + 6x_2 & \geq 12 \\ 3x_1 + 7x_2 & \geq 21 \\ 10x_1 + 6x_2 & \geq 60 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \\ f = 5x_1 + 18x_2 \rightarrow min & \end{array}\right.$$

$$(D)\left\{\begin{array}{cc} y_1 + 3y_2 + 10y_3 & \leq 5 \\ 6y_1 + 7y_2 + 6y_3 & \leq 18 \\ y_1, y_2, y_3 & \geq 0 \\ g = 12y_1 + 21y_2 + 60y_3 \rightarrow max & \end{array}\right.$$

3. FEJEZET

Euklideszi terek

3.1. Skaláris szorzat

Legyen $(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ egy valós vektortér.

3.1. Definíció. Az $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ leképezést valós skaláris szorzatnak nevezzük, ha $\forall u, v, w \in V$ vektorokra teljesülnek az alábbi feltételeket:

$(Ssz1)$ nemnegatív

$$\langle u, u \rangle \geq 0, \ \langle u, u \rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ u = 0_V;$$

$(SSz2)$ szimmetrikus

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle ;$$

$(SSz3)$ additív

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle ;$$

$(SSz4)$ homogén

$$\langle ku, v \rangle = k \langle u, v \rangle .$$

Egy V vektorteret amelyen egy skaláris szorzat van értelmezve euklideszi térnek nevezünk. Jelölése $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

3.2. Példa. Az $\mathbb{R}^n$ térben a $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u^t v, \tag{3.1.1}$$

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ leképezés teljesíti a skaláris szorzat négy feltételét. Ezt nevezzük euklideszi vagy standard skaláris szorzatnak.

Az $u = (-2, 1, 3)$ és az $v = (2, 2, 1)$ vektorok euklideszi skaláris szorzata $\langle u, v\rangle = -2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 1$.

Általánosabb skaláris szorzatot kapunk ha a (3.1.1) képletben a tagokat súlyozzuk $w_i \in \mathbb{R}_+,\ i = \overline{1, n}$ súlyokkal:

(3.1.2) $$\langle u, v\rangle = w_1u_1v_1 + w_2u_2v_2 + ... + w_nu_nv_n.$$

3.3. Példa. Az $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ mátrixok terében értelmezhető a következő skaláris szorzat:

(3.1.3)
$$\langle A, B\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + ... + a_{mn}b_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} = Tr\left(A^TB\right),$$

ahol $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}),\ B = (b_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \langle A, B\rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot (-5) = -6$.

3.4. Példa. A legfeljebb n-ed fokú polinomok $\mathbb{P}_n$ terében értelmezhető a következő skaláris szorzat:

(3.1.4) $$\langle P, Q\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + ... + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i,$$

ahol $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in \mathbb{P}_n,\ Q = b_0 + b_1X + ... + b_nX^n \in \mathbb{P}_n$.

$P = 2-3X+4X^2,\ Q = 1+3X \Longrightarrow \langle P, Q\rangle = 2\cdot1+(-3)\cdot3+4\cdot0 = -7$.

3.5. PÉLDA. A $C[a,b]$ folytonos függvények terében értelmezhető a következő skaláris szorzat:

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \tag{3.1.5}$$

ahol $f,g\in C[a,b]$.

$f,g:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin(x),\ g(x)=\cos(x)\Longrightarrow$
$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\sin(2x)\,dx = -\frac{1}{4}\cos(2x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$

3.6. TÉTEL. *Ha* $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{R}$ *egy skaláris szorzat és* $u,v,z\in V,\ k\in\mathbb{R}$, *akkor:*
(1) $\langle u,0_V\rangle = \langle 0_V,u\rangle = 0;$
(2) $\langle u,v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle;$
(3) $\langle u,kv\rangle = k\langle u,v\rangle;$
(4) $\langle u-v,w\rangle = \langle u,w\rangle - \langle v,w\rangle;$
(5) $\langle u,v-w\rangle = \langle u,w\rangle - \langle v,w\rangle.$

BIZONYÍTÁS. $\langle u,0_V\rangle = \langle 0_V,u\rangle$ szimmetria. $\langle v,u\rangle = \langle v,u\rangle \Longrightarrow \langle v,u\rangle - \langle v,u\rangle = 0 \Longrightarrow \langle v,u\rangle + \langle -v,u\rangle = 0 \Longrightarrow \langle v-v,u\rangle = 0 \Longrightarrow \langle 0_V,u\rangle = 0.$
$\langle u,v+w\rangle = \langle v+w,u\rangle = \langle v,u\rangle + \langle w,u\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle$, *stb.* □

3.2. Norma, távolság, szög

3.7. DEFINÍCIÓ. A $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi térben egy $v\in V$ vektor normáján az alábbi értéket értjük:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}. \tag{3.2.1}$$

Egy egység hosszúságú vektort($\|u\|=1$) egységvektornak nevezünk.

3.8. DEFINÍCIÓ. Két vektor közötti távolság (metrika):

$$d(u,v) = \|u-v\|. \tag{3.2.2}$$

3.9. PÉLDA. $v = (-2,1,3)^t \Longrightarrow \|v\| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \|A\| = \sqrt{1+4+9+16} = \sqrt{30}$. $P = 2-3x+5x^2 \Longrightarrow \|P\| = \sqrt{4+9+25} = \sqrt{38}$. $u = (1,1,5)^t \Longrightarrow d(u,v) = \|u-v\| = \left\|(3,0,2)^t\right\| = \sqrt{9+0+4} = \sqrt{13}$.

3.10. TÉTEL. *A norma tulajdonságai:*

$(N1)$

$$\|u\| \geq 0 \text{ és } \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0_V;$$

$(N2)$

$$\|ku\| = |k| \cdot \|u\|;$$

$(N3)$

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

3.11. DEFINÍCIÓ. Egy V vektorteret normált vektortérnek nevezünk, ha értelmezve van rajta egy norma $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ mely rendelkezik az $(N1), (N2), (N3)$ tulajdonságokkal.

A fenti tétel értelmezésként is használható.

Egy tetszőleges u vektorból úgy kapunk egy vele azonos irányú, egységvektort ha elosztjuk u-t a normájával:

$$e = \frac{1}{\|u\|}u. \tag{3.2.3}$$

Valóban $\|e\| = \left\|\frac{1}{\|u\|}u\right\| = \left|\frac{1}{\|u\|}\right| \cdot \|u\| = \frac{1}{\|u\|}\|u\| = 1$.

3.12. PÉLDA. $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow e = \frac{1}{\|u\|}u = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

3.13. TÉTEL. *A távolság (metrika) tulajdonságai:*

$(D1)$

$$d(u,v) \geq 0 \text{ és } d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v;$$

$(D2)$

$$d(u,v) = d(v,u);$$

$(D3)$

$$d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v).$$

3.14. Definíció. Egy H halmazt metrikus térnek nevezünk ha értelmezve van rajta egy $d : H \times H \to R$ távolság (metrika) mely rendelkezik a $(D1), (D2), (D3)$ tulajdonságokkal.

3.15. Példa. A skaláris szorzat, illetve norma tulajdonságait felhasználva:

- számítsuk ki:

$$\langle u+2v, 3u-4v\rangle = \langle u, 3u-4v\rangle + \langle 2v, 3u-4v\rangle =$$
$$\langle u, 3u\rangle + \langle u, -4v\rangle + \langle 2v, 3u\rangle + \langle 2v, -4v\rangle = 3\langle u,u\rangle - 4\langle u,v\rangle + 6\langle v,u\rangle - 8\langle v,v\rangle =$$
$$= 3\|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle - 8\|v\|^2;$$

- igazoljuk a paralelogramma egyenlőséget:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

3.16. Tétel. *(Cauchy-Schwarz)*

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|. \tag{3.2.4}$$

Bizonyítás. Ha $u = 0_V$ akkor igaz az egyenlőség. Feltételezzük, hogy $u \neq 0_V$ és legyen $t \in \mathbb{R}$, $\Rightarrow$

$$0 \leq \langle tu+v, tu+v\rangle = t^2\langle u,u\rangle + 2t\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle = at^2 + 2bt + c$$

ahol $a = \langle u,u\rangle, b = \langle u,v\rangle, c = \langle v,v\rangle$. Mivel a másodfokú függvény nemnegatív $\Longrightarrow$ a diszkriminánsa $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$ vagyis

$$4\langle u,v\rangle^2 - 4\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle \leq 0 \iff |\langle u,v\rangle| \leq \sqrt{\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle}.$$

□

A tételből következik, hogy:

$$-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1.$$

3.17. DEFINÍCIÓ. Ha $u, v \neq 0_V$ egy V euklideszi tér vektorai, akkor a közbezárt szögükön azt a $\varphi \in [0, \pi]$ szöget értjük, amelyre

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}. \tag{3.2.5}$$

3.18. PÉLDA. u=$(1, 2, 3)$, $v = (-2, 1, 2) \Longrightarrow \langle u, v \rangle = 6, \|u\| = \sqrt{14}, \|v\| = 3 \Longrightarrow \cos(\varphi) = \frac{6}{3\sqrt{14}}$.

Ha a bezárt szög $\varphi = \frac{\pi}{2}$, akkor a vektorokat ortogonálisnak nevezzük (jel. $u \perp v$). Ebben az esetben $\cos(\varphi) = 0$.

3.19. TÉTEL. *Egy $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklideszi térben az u és v vektorokat ortogonálisak ha*

$$\langle u, v \rangle = 0. \tag{3.2.6}$$

Az $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ vektorrendszert ortogonálisnak nevezünk ha $e_i \perp e_j$, $\forall i \neq j$.

3.20. PÉLDA. $u = (3, -1, 0, 2)$, $v = \left(1, 2, 5, -\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow \langle u, v \rangle = 0$ (euklideszi skaláris szorzat)$\Longrightarrow u \perp v$.
$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \langle A, B \rangle = 0 \Longrightarrow A \perp B$.
$P = 2 - X + 3X^2$, $Q = 4 + 5X - X^2 \Longrightarrow \langle P, Q \rangle = 0 \Longrightarrow P \perp Q$.

3.21. PÉLDA. Ha $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ akkor $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortogonális vektorrendszer $\mathbb{R}^3$ vektortérben. A $\mathbb{P}_2$ vektortérben az $\{1, X, X^2\}$ egy ortogonális vektorrendszer (bázis).

3.22. PÉLDA. A folytonos függvények esetében néhány fontosabb ortogonális rendszer: Fourier$=\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ...\}$ a $C[-\pi, \pi]$ vektortérben, Legéndre$=\left\{1, x, \frac{1}{2}(3x^2-1), \frac{1}{2}(5x^3-3x), \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3), ...\right\}$ a $C[-1,1]$-ben, Csebisev$=\{1, x, 2x^2-1, 4x^3-3x, 8x^4-8x^2+1, ...\}$ a $C[-1,1]$-ben, stb.

3.23. PÉLDA. Pitagorasz tétel

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

A merőlegességi feltételből következik, hogy $\langle x, y\rangle = 0$, tehát $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, y\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

3.24. TÉTEL. *Ha a* $\{e_1, ..., e_n\}$ *vektorrendszer ortogonális* $\left(e_i \neq 0_V,\ i = \overline{1, n}\right)$, *akkor lineárisan független.*

BIZONYÍTÁS. Ha

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n = 0$$

akkor ki kell mutatni, hogy $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = 0$. De $\forall e_i$-re

$$0 = \langle 0, e_i\rangle = \langle \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n, e_i\rangle =$$

$$= \alpha_1 \langle e_1, e_i\rangle + \alpha_2 \langle e_2, e_i\rangle + ... + \alpha_i \langle e_i, e_i\rangle + ... + \alpha_n \langle e_n, e_i\rangle = \alpha_i \langle e_i, e_i\rangle ,$$

és mivel $\langle e_i, e_i\rangle > 0$ $(e_i \neq 0_V)$ következik, hogy $\alpha_i = 0,\ i = \overline{1, n}$. □

3.25. DEFINÍCIÓ. Egy vektorrendszert ortonormáltnak nevezünk ha a vektorok ortogonálisak és egység hosszúságúak:

$$\{q_1, ..., q_n\} \text{ ortonormált } \Longleftrightarrow \langle q_i, q_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} . \tag{3.2.7}$$

3.26. DEFINÍCIÓ. Egy

$$Q = (q_1 | q_2 | ... | q_n) \tag{3.2.8}$$

mátrixot ortogonálisnak nevezünk ha oszlopai ortonormált vektorok.

3.27. PÉLDA.

(1) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ permutációs mátrix.

(2) $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ θ-szögű forgatás

(3) $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 4/5 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}$.

(4) $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$.

Adhemar

3.28. TÉTEL. *Ha Q ortogonális akkor*

$$Q^T \cdot Q = I_n.$$

3.29. KÖVETKEZMÉNY. *Ha $Q \in M_n(\mathbb{R})$ ortogonális akkor:*
a) $\det Q^T \det Q = 1 \Longrightarrow \det Q = \pm 1$.
b) $Q^{-1} = Q^T$.

3.3. Gram-Schmidt ortogonalizáció

3.30. TÉTEL. *Minden valós euklideszi térben létezik egy ortonormált bázis.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $B = \{e_1, ..., e_n\}$ egy bázis az n dimenziós V vektortérben. Első lépésben egy $B' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ ortogonális bázist hozunk létre, majd normálási eljárással létrehozzuk a $B" =$

$\{q_1, q_2, ..., q_n\}$ ortonormált bázist.

$$
\begin{aligned}
e_1' &= e_1 \\
e_2' &= e_2 + \alpha e_1' \\
e_3' &= e_3 + \beta e_2' + \gamma e_1' \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{3.3.1}
$$

(3.3.2)

ahol $\alpha-$t úgy határozzuk meg, hogy $e_2' \perp e_1'$, vagyis $\langle e_2', e_1' \rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle e_2 + \alpha e_1', e_1' \rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle e_2, e_1' \rangle + \alpha \langle e_1', e_1' \rangle = 0 \Longrightarrow$

$$\alpha = -\frac{\langle e_2, e_1' \rangle}{\langle e_1', e_1' \rangle} = -\frac{\langle e_2, e_1' \rangle}{\|e_1'\|^2}.$$

A β és γ-t a $e_3' \perp e_1'$, illetve $e_3' \perp e_2'$ merőlegességi feltételekből határozzuk meg. $\langle e_3', e_1' \rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle e_3 + \beta e_2' + \gamma e_1', e_1' \rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle e_3, e_1' \rangle + \beta \underbrace{\langle e_2', e_1' \rangle}_{=0} + \gamma \langle e_1', e_1' \rangle = 0 \Longrightarrow$

$$\gamma = -\frac{\langle e_3, e_1' \rangle}{\langle e_1', e_1' \rangle} = -\frac{\langle e_3, e_1' \rangle}{\|e_1'\|^2}.$$

Hasonlóan $\langle e_3', e_2' \rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle e_3 + \beta e_2' + \gamma e_1', e_2' \rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle e_3, e_2' \rangle + \beta \langle e_2', e_2' \rangle + \gamma \underbrace{\langle e_1', e_2' \rangle}_{=0} = 0 \Longrightarrow \beta = -\frac{\langle e_3, e_2' \rangle}{\|e_2'\|^2}$.

$$\beta = -\frac{\langle e_3, e_2' \rangle}{\langle e_2', e_2' \rangle} = -\frac{\langle e_3, e_2' \rangle}{\|e_2'\|^2}.$$

Az $e_4', ..., e_n'$ vektorokat hasonlóan számítjuk ki.
A normáláshoz a (3.2.3) eljárást alkalmazzuk, vagyis:

$$q_1 = \frac{1}{\|e_1'\|} e_1', \ q_2 = \frac{1}{\|e_2'\|} e_2', ..., \ q_n = \frac{1}{\|e_n'\|} e_n'.$$

$\square$

A Gram-Schmidt eljárásból következik, hogy q_k merőleges az $\{e_1, ..., e_{k-1}\}$, $k \geq 2$ vektorok által alkotott hipersíkra

$$q_2 \perp lin(e_1), q_3 \perp lin(e_1, e_2),\ ...,\ q_k \perp lin(e_1, ..., e_{k-1})$$

vagy sajátos esetként

$$\begin{aligned} q_2 &\perp e_1, \\ &\vdots \\ q_k &\perp e_1, ..., q_k \perp e_{k-1}. \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

3.31. Példa. Ha $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ ahol $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, akkor $B' = \{v_1', v_2', v_3'\}$ ortogonális bázis ahol $v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. $B" = \{q_1, q_2, q_3\}$ ortonormált bázis, ahol
$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $q_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.32. Példa. A $B = \{f_1, f_2, f_3\} = \{1, X, X^2\}$ bázisra alkalmazva a Gram-Schmidt ortogonalizálási módszert (a $V = C[-1, 1]$ térben) a következő bázist kapjuk: $B' = \{f_1', f_2', f_3'\} = \left\{1, X, X^2 - \frac{1}{3}\right\}$. Ha a függvényeket $f_1(1) = f_2(1) = f_3(1) = 1$ eljárással normalizáljuk akkor a Legéndre-féle ortogonális függvényeket kapjuk (lásd a (3.22) példát).

3.4. Alkalmazások

3.33. TÉTEL. *Ha a V euklideszi vektortérben $\{q_1, ..., q_n\}$ egy ortonormált bázis, akkor $\forall u \in V$ vektor kifejezhető az alábbi alakban:*

$$u = \langle u, q_1 \rangle q_1 + \langle u, q_2 \rangle q_2 + ... + \langle u, q_n \rangle q_n. \tag{3.4.1}$$

BIZONYÍTÁS. Mivel $\{q_1, ..., q_n\}$ bázis következik, hogy u felírható

$$u = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + ... + \alpha_n q_n.$$

Kimutatjuk, hogy $\alpha_i = \langle u, q_i \rangle$, $i = \overline{1, n}$. Minden q_i-re

$$\langle u, q_i \rangle = \langle \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + ... + \alpha_n q_n, q_i \rangle =$$
$$= \alpha_1 \langle q_1, q_i \rangle + \alpha_2 \langle q_2, q_i \rangle + ... + \alpha_i \langle q_i, q_i \rangle + ... + \alpha_n \langle q_n, q_i \rangle =$$
$$= \alpha_i \langle q_i, q_i \rangle = \alpha_i.$$

□

A (3.4.1) képlet segítségével egyszerűsödik egy vektor felírása egy adott bázisban.

3.34. PÉLDA. Ha $B = \{q_1, q_2, q_3\}$ ahol $q_1 = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix}$, $q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $q_3 = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix}$ és $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ akkor

$$\langle u, q_1 \rangle = 7/5, \ \langle u, q_2 \rangle = 1, \ \langle u, q_3 \rangle = 1/5,$$

tehát

$$u = \frac{7}{5} q_1 + q_2 + \frac{1}{5} q_3.$$

3.4.1. QR faktorizáció Legyen $A \in M_{mn}(R)$ egy mátrix melynek oszlopai $A = (u_1 | u_2 | ... | u_n)$ lineárisan függetlenek és legyen $\{q_1, q_2, ..., q_n\}$

az A oszlopvektorainak egy ortonormált rendszere, illetve $Q = (q_1\,|q_2\,|...\,|q_n\,)$ az (oszlop)vektorok által alkotott ortogonális mátrix.

A 3.33 tételből következik, hogy

$$\begin{aligned} u_1 &= \langle u_1, q_1\rangle\, q_1 + \langle u_1, q_2\rangle\, q_2 + ... + \langle u_1, q_n\rangle\, q_n \\ u_2 &= \langle u_2, q_1\rangle\, q_1 + \langle u_2, q_2\rangle\, q_2 + ... + \langle u_2, q_n\rangle\, q_n \\ &\vdots \\ u_n &= \langle u_n, q_1\rangle\, q_1 + \langle u_n, q_2\rangle\, q_2 + ... + \langle u_n, q_n\rangle\, q_n \end{aligned}$$

vagy mátrix alakban:

$$(u_1\,|u_2\,|...\,|u_n\,) = (q_1\,|q_2\,|...\,|q_n\,) \begin{pmatrix} \langle u_1, q_1\rangle & \langle u_2, q_1\rangle & \dots & \langle u_n, q_1\rangle \\ \langle u_1, q_2\rangle & \langle u_2, q_2\rangle & & \langle u_n, q_2\rangle \\ \vdots & & & \\ \langle u_1, q_n\rangle & \langle u_2, q_n\rangle & \dots & \langle u_n, q_n\rangle \end{pmatrix}.$$

Ha R-el jelöljük a

$$R = \begin{pmatrix} \langle u_1, q_1\rangle & \langle u_2, q_1\rangle & \dots & \langle u_n, q_1\rangle \\ \langle u_1, q_2\rangle & \langle u_2, q_2\rangle & & \langle u_n, q_2\rangle \\ \vdots & & & \\ \langle u_1, q_n\rangle & \langle u_2, q_n\rangle & \dots & \langle u_n, q_n\rangle \end{pmatrix}$$

mátrixot azt kapjuk, hogy A felbontható mint:

$$A = QR.$$

Figyelembe véve az (3.3.3) összefüggéseket következik, hogy az R mátrix átló alatti tagok nullák:

$$R = \begin{pmatrix} \langle u_1, q_1\rangle & \langle u_2, q_1\rangle & \dots & \langle u_n, q_1\rangle \\ 0 & \langle u_2, q_2\rangle & & \langle u_n, q_2\rangle \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \langle u_n, q_n\rangle \end{pmatrix}, \tag{3.4.2}$$

vagyis R egy felső-háromszög mátrix.

3.35. Tétel. *Ha $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ egy mátrix melynek oszlopai lineárisan függetlenek, akkor az A mátrix felírható*

$$A = QR \tag{3.4.3}$$

mátrix szorzatként, ahol $Q \in M_{mn}(\mathbb{R})$ egy ortogonális mátrix és $R \in M_{nn}(\mathbb{R})$ egy felső-háromszög mátrix.

3.36. Példa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = QR$$

$$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

A QR faktorizációs módszerrel $Ax = b$ egyenletrendszert

$$QRx = b$$

ahonnan a

$$Rx = Q^t b,$$

$(Q^{-1} = Q^t)$ felső-háromszög egyenletrendszert kapjuk amit visszahelyettesítési módszerrel megoldunk.

3.37. Példa. $\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 + \ 2x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = -4 \end{cases}$

Az $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix $A = QR$ felbontása

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 6/\sqrt{6} & 5/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 5/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

ahonnan az $Rx = Q^t b$ egyenletrendszer

$$\begin{cases} \frac{3}{\sqrt{3}}x_1 & & + & \frac{1}{\sqrt{3}}x_3 = & \frac{8}{\sqrt{3}} \\ & \frac{6}{\sqrt{6}}x_2 & + & \frac{5}{\sqrt{6}}x_3 = & \frac{7}{\sqrt{6}} \\ & & & \frac{5}{\sqrt{2}}x_3 = & -\frac{5}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

megoldását visszahelyettesítéssel oldjuk meg: $x_3 = -1$, $x_2 = 2$, $x_1 = 3$.

3.4.2. Fourier sor A $V = C[-\pi, \pi]$ folytonos függvények vektorterében a $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\}$ függvények ortogonálisak

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin mx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx = 0$$

ha $m \neq n$. A normájuk

$$\|1\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = 2\pi$$

$$\|\cos nx\|^2 = \|\sin mx\|^2 = \pi$$

tehát $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}1, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \ldots \right\}$ ortonormált bázis. Bármilyen $f \in C[-\pi, \pi]$ függvény felírható ebben a bázisban

$$f(x) = c_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + c_1\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x + c_2\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x + c_3\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x + c_4\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x + \dots$$
$$\dots + c_{2n-1}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx + c_{2n}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\dots$$

ahol az együtthatókat a (3.4.1) képletből számítjuk ki:

$$c_0 = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$
$$c_{2k-1} = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos kx\,dx$$
$$c_{2k} = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin kx\,dx.$$

Behelyettesítve a következő felirást kapjuk

(3.4.4)
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \dots$$
$$\dots + a_n\cos nx + b_n\sin nx\dots = \frac{a_0}{2} + \sum_{k\geq 1}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

ahol

(3.4.5)
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos kx\,dx$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin kx\,dx.$$

A (3.4.4) az f függvény sorfejtése a (3.4.5) Fourier együtthatókkal.

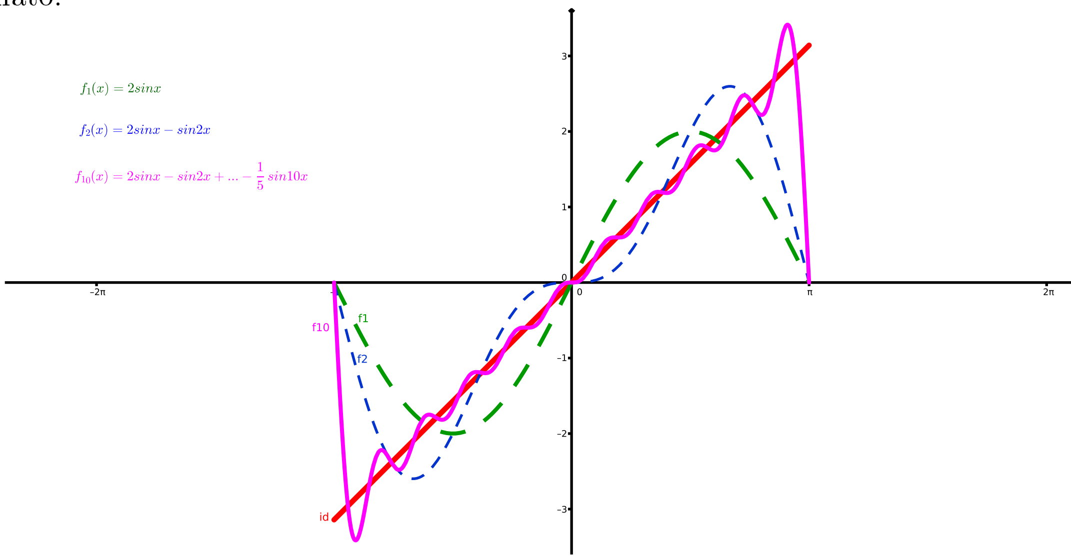
3.38. Példa. $f(x) = x,\ x\in[-\pi,\pi]$.

Mivel $x\cdot\cos kx$ páratlan függvény ezért $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cdot\cos kx\,dx = 0,\ \forall k\geq 0$. Ugyanakkor $x\cdot\sin kx$ páros függvény tehát $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cdot$

$\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cdot\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\left(x\frac{-\cos kx}{k}\right)\Big|_0^\pi + \frac{1}{k}\int_0^\pi\left(-\cos kx\right)\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^{k+1}\pi}{k}\right) = (-1)^{k+1}\cdot\frac{2}{k}$. Tehát az f függvény Fourier sorfejtése a következő:

$$f\left(x\right) = 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{2}{5}\sin 5x - \ldots$$

Az alábbi ábrán az f az egy, két, stb tagú ($f_1, f_2, \ldots, f_{10}$) közelítése látható.



4. FEJEZET

Lineáris transzformációk

Legyen $(V, +, \cdot, K)$ és $(W, +, \cdot, K)$ vektorterek.

4.1. Definíció. Az $f : V \to W$ leképezést lineáris transzformációnak vagy homomorfizmusnak nevezzük, ha $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha \in K$-ra az f

- additív (összegző) azaz

$$f(x+y) = f(x) + f(y);$$

- homogén azaz

$$f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

A lineáris transzformációk halmazát $Hom(V, W) = \{f : V \to W \,|f =$ lin. vel jelöljük. Ha $V = W$ akkor f-et endomorfizmusnak nevezzük és a halmazát $End(V)$-val jelöljük.

Az f additivitása és homogenitása az alábbi egyenlőséggel ekvivalens:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

$\forall x, y \in V, \forall \alpha, \beta \in K$.

4.2. Példa. (1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x) = -x_1 + 2x_2$, $x = \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2$.

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ g(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

(2) $D : C^1[a,b] \to C^0[a,b]\,\mathbb{R},\ D(f) = f'$.

(3) $I : C^0[a,b] \to C^1[a,b],\ I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$.

4.3. PÉLDA. Geometriai transzformációk a síkban $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$:

- identikus transzformáció: $f_1(x) = x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
- tükrözés az első tengelyre $f_2(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$
- vetítés az első tengelyre $f_3(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- tükrözés az első-szögfelezőre $f_4(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$
- lépték váltás ($k > 0$-paraméterű skálázás, $k > 1$ nagyítás, $k \in (0,1)$ kicsinyítés) $s_k(x) = kx = \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{pmatrix}$
- forgatás (θ-szögű) $R_\theta(x) = \begin{pmatrix} x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta \\ x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta \end{pmatrix}$

4.4. TÉTEL. *Ha $f : V \to W$ lineáris transzformáció, akkor:*

(1) $f(0_V) = 0_W$;
(2) $f(-x) = -f(x)$;
(3) $L \leq_K V \Rightarrow f(L) \leq_K W$;
(4) $\{x_1, ..., x_n\}$ *összefüggő vektorrendszer* $\Rightarrow \{f(x_1), ..., f(x_n)\}$ *is összefüggő vektorrendszer.*

BIZONYÍTÁS. *(1)* $f(0_V) = f(0 \cdot v) = 0 \cdot f(v) = 0_W$, *(2)* $f(-x) = f((-1) \cdot x) = (-1) \cdot f(x)$.

(3) $x_1, x_2 \in L \Rightarrow x_1 + x_2 \in L \Rightarrow f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \in W$; $x \in L \Rightarrow \alpha x \in L \Rightarrow f(\alpha x) = \alpha f(x) \in W$. $\square$

4.5. Definíció. Az alábbi halmazokat az $f : V \to W$ lineáris transzformáció magterének, illetve képterének nevezzük:

$$\ker f = \{x \in V \mid f(x) = 0_W\} = f^{-1}(\{0_W\}), \tag{4.0.6}$$

$$Imf = \{y \in W \mid \exists x \in V : \ y = f(x)\}. \tag{4.0.7}$$

4.6. Példa. (1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \ker f &= \left\{ (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; f(x_1, x_2, x_3) = \binom{0}{0} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} | x \in \mathbb{R} \right\}, \\ Imf &= \left\{ \binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ \binom{u}{v} = \binom{x_1 - x_2}{x_2 - x_3} \right\} = \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ (vetítés a második tengelyre) $\Rightarrow \ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x) = \binom{0}{0} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R} \right\}$ =első tengely.

$Imf = \left\{ \binom{y_1}{y_2} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ \binom{y_1}{y_2} = \binom{0}{x_2} \right\}$ =második tengely.

(3) D

4.7. Tétel. *Ha $f : V \to W$ lineáris transzformáció akkor*

(1)

$$\ker f \leq_K V;\ \ Imf \leq_K W.$$

(2)

$$\dim \ker f + \dim Imf = \dim V.$$

BIZONYÍTÁS. Ha $x, y \in \ker f$ akkor $f(x) = 0, f(y) = 0$ és az additivitásból $f(x + y) = f(x) + f(y) = 0$, tehát $x + y \in \ker f$. $x \in \ker f$ akkor $f(x) = 0$ és a homogenitásból $f(\alpha x) = \alpha f(x) = 0$, következik, hogy $\alpha x \in \ker f$, $\alpha \in \mathbb{R}$. □

A magtér dimenzióját ($\dim \ker f$) az f lineáris transzformáció nullitásának, míg a képtér dimenzióját ($\dim Imf$) az f rangjának nevezzük.

4.1. Izomorfizmus, lineáris transzformációk kompozíciója

4.8. TÉTEL. *Ha $f : V \to W$ lineáris transzformáció akkor:*

(1) *f injektív* $\Leftrightarrow \ker f = \{0_V\}$;
(2) *f szürjektív* $\Leftrightarrow Imf = W$.

BIZONYÍTÁS. *(1)* " $\Rightarrow$ " A 4.4.Tétel (1) pontjából $\Rightarrow f(0_V) = 0_W$, tehát $0_V \in \ker f$. Feltételezve, hogy létezik még más eleme is $\ker f$ -nek: $x\,(\neq 0_V) \in \ker f$, mivel f injektív $\Rightarrow f(x) \neq f(0_V) = 0_W$ tehát $x \notin \ker f$.
" $\Leftarrow$ " Legyen $x, y \in V$, $x \neq y \Rightarrow x - y \neq 0_V \Rightarrow f(x - y) \neq 0_W$ (különben $\ker f$ egy nem-nulla vektort tartalmazna) $\Rightarrow f(x) - f(y) \neq 0_W$, tehát $\{x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)\}$, vagyis f injektív. □

4.9. DEFINÍCIÓ. Ha az $f : V \to W$ lineáris transzformáció bijektív leképezés akkor izomorfizmusnak nevezzük. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy V izomorf W térrel és $V \cong W$-el jelöljük (görögül izo=azonos, morph=alak). Ha f bijektív és $V = W$ akkor f-et automorfizmusnak nevezzük és a halmazát $Aut(V)$-val jelöljük.

4.10. PÉLDA. 1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ nem injektív mert $\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R} \right\} \neq 0_{\mathbb{R}^3}$

?????

4.11. TÉTEL. *Ha* $(V, +, \cdot, K)$ *vektortér dimenziója* $n = \dim V$, *akkor* $V \cong K^n$.

BIZONYÍTÁS. Ha $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ a V vektortér egy bázisa akkor $\forall v \in V$ egyértelműen írható fel a bázisvektorok lineáris kombinációjaként:

$$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots \alpha_n e_n.$$

Az $f : V \to K^n,\ f(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ leképezés bijektív, tehát $V \cong K^n$. □

4.12. PÉLDA. $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4,\ f(A) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ ahol $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ bijektív leképezés, tehát $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$.

4.13. DEFINÍCIÓ. Az $f_1 : U \to V,\ f_2 : V \to W$ függvények kompozícióján a

$$f_2 \circ f_1 : U \to W, (f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x)),\ x \in U,$$

leképezést értjük.

4.14. TÉTEL. *Ha* $f_1 : U \to V$, $f_2 : V \to W$ *lineáris transzformációk akkor a kompozíciójuk* $f_2 \circ f_1$ *is lineáris transzformáció.*

BIZONYÍTÁS. Additivitás: $(f_2 \circ f_1)(x+y) = f_2(f_1(x+y)) = f_2(f_1(x) + f_1(y)) = f_2(f_1(x)) + f_2(f_1(y)) = (f_2 \circ f_1)(x) + (f_2 \circ f_1)(y)$.
Homogénitás: $(f_2 \circ f_1)(\alpha x) = f_2(f_1(\alpha x)) = f_2(\alpha f_1(x)) = \alpha f_2(f_1(x)) = \alpha (f_2 \circ f_1)(x)$. □

4.15. DEFINÍCIÓ. Ha $f : U \to V$ bijektív akkor az inverze $f^{-1} : V \to U$, $(f \circ f^{-1}) = id_V$, $(f^{-1} \circ f) = id_U$.

4.16. PÉLDA. Az $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $R_\theta(x) = \begin{pmatrix} x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta \\ x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta \end{pmatrix}$ théta szögű forgatás inverze a $(-\theta)$ szögű forgatás: $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.

4.17. TÉTEL. *Ha* $f_1 : U \to V$, $f_2 : V \to W$ *lineáris transzformációk bijektívek akkor a* $f_2 \circ f_1 : U \to W$ *kompozíciójuk is bijektív és* $(f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$.

4.2. Lineáris transzformációk mátrixa

4.18. PÉLDA. Az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$ transzformációt a következőképpen lehet megadni: $f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}^3$ vagyis

$$f(x) = A \cdot x, \tag{4.2.1}$$

ahol $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}^3$ vektor esetében a (4.2.1) képlet ekvivalens az alábbi egyenlőséggel

$$[f(x)]_{B_{\mathbb{R}^2}} = A \cdot [x]_{B_{\mathbb{R}^3}}, \tag{4.2.2}$$

ahol $[x]_{B_{\mathbb{R}^3}}$, illetve $[f(x)]_{B_{\mathbb{R}^2}}$ az x, illetve $f(x)$ vektorok koordinátái a $B_{\mathbb{R}^3}, B_{\mathbb{R}^2}$ kanonikus bázisokban.

Az A mátrixot az f lineáris transzformáció- kanonikus bázisoknak megfelelő- mátrixának nevezzük.

Általánosabban, ha $(V,+,\cdot,K)$ és $(W,+,\cdot,K)$ vektorterek, $\dim V = n$, $\dim W = m$, $B_V = \{v_1,...,v_n\}$, $B_W = \{w_1,...,w_m\}$ bázisok az adott terekben és $f : V \to W$ lineáris transzformáció, akkor

$$\begin{array}{c} f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + ... + a_{m1}w_m \\ f(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + ... + a_{m2}w_m \\ \vdots \\ f(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + ... + a_{mn}w_m \end{array} \iff$$

(4.2.3)

$$(f(v_1)\ f(v_2)\ \dots\ f(v_n)) = (w_1\ w_2\ \dots\ w_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

4.19. Definíció. Az $A = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{m,\ n} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ mátrixot az f lineáris transzformációhoz hozzárendelt mátrixának nevezzük a B_V, B_W bázispárban. Jelölés: $A = A_f^{B_V,B_W} = [f]_{B_V,B_W}$.

4.20. Tétel. *Minden $f : V \to W$ $(\dim V = n,\ \dim W = m)$ lineáris transzformációhoz egyértelműen rendelhető hozzá egy mátrix:*

$$Hom(V,W) \cong \mathcal{M}_{m,n}(K).$$

A (4.2.2) képlet általánosításaként felírhatjuk, hogy:

(4.2.4) $$[f(x)]_{B_W} = [f]_{B_V,B_W} \cdot [x]_{B_V},$$

ami lehetőséget ad arra, hogy függvény (lineáris transzformáció) kiértékelés helyett mátrix szorzatot használjunk.

4.21. Példa. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + \quad x_3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$,

(1) $B_{\mathbb{R}^3} = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B_{\mathbb{R}^2} = \{e_1', e_2'\}$ kanonikus bázisok$\Longrightarrow$ $f(e_1) = \binom{2}{1} = 2e_1' + 1e_2'$, $f(e_2) = \binom{0}{-2} = 0e_1' - 2e_2'$, $f(e_3) = \binom{1}{3} = 1e_1' + 3e_2'$, $\Longrightarrow [f]_{\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Egy $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ vektor képét (a kanonikus bázispárban) függvény kiértékeléssel: $f(x) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \\ 1 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 5e_1 + 6e_2$, vagy a (4.2.4) képletnek megfelelően mátrix szorzattal számíthatjuk ki: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(2) $B_V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $B_W = \{w_1, w_2\}$ bázisok ahol $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Longrightarrow f(v_1) = \binom{2}{3} = \frac{-4}{3} w_1 + \frac{5}{3} w_2$, $f(v_2) = \binom{-1}{2} = \frac{-5}{3} w_1 + \frac{1}{3} w_2$, $f(v_3) = \binom{1}{-1} = 1w_1 + 0w_2 \Longrightarrow [f]_{\mathbb{B}_V, B_W} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{3} & \frac{-5}{3} & 1 \\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

Az $x=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=2v_1+1v_2+2v_3$ $\left([x]_{B_V}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right)$ vektor képének a koordinátáit (a B_V,B_W bázispárban) függvény kiértékeléssel: $f(x)=\begin{pmatrix}2\cdot1+3\\1-2\cdot2+3\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}=-\frac{7}{3}w_1+\frac{11}{3}w_2$, vagy a (4.2.4) képletnek megfelelően mátrix szorzattal számíthatjuk ki: $\begin{pmatrix}\frac{-4}{3}&\frac{-5}{3}&1\\\frac{5}{3}&\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{3}\\\frac{11}{3}\end{pmatrix}$.

4.22. Példa. $R_\theta:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $R_\theta(x)=\begin{pmatrix}x_1\cos\theta-x_2\sin\theta\\x_1\sin\theta+x_2\cos\theta\end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $B_{\mathbb{R}^2}=\{e_1,e_2\}$ kanonikus bázis $\Longrightarrow [R_\theta]_{\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$. Egy $P(3,2)$ pont koordinátáit az R_θ transzformáció követően (pl. $\theta=\frac{\pi}{4}$ -re) függvény kiértékeléssel számíthatjuk ki: $R_\theta\left(\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3\cos\frac{\pi}{4}-2\sin\frac{\pi}{4}\\3\sin\frac{\pi}{4}+2\cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{5\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, vagy a (4.2.4) mátrix szorzattal: $\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4}&-\sin\frac{\pi}{4}\\\sin\frac{\pi}{4}&\cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{5\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, tehát a P pont $\theta=\frac{\pi}{4}$ szögű forgatása a $P'\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ pontot eredményezi.

4.23. Példa. A $D:\mathbb{P}_3\to\mathbb{P}_2$, $D\left(a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3\right)=a_1+2a_2X+3a_3X^2$ (deriválási) transzformáció mátrixa a $B_{\mathbb{P}_3}=\{1,X,X^2,X^3\}$, $B_{\mathbb{P}_2}=\{1,X,X^2\}$ kanonikus bázisokban a következő: $[D]_{B_{\mathbb{P}_3},B_{\mathbb{P}_2}}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$. Egy $P=5+4X+3X^2-2X^3\in\mathbb{P}_3$

polinom koordinátái a kanonikus bázisban $[P]_{B_{\mathbb{P}_3}} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}^t$.
A P polinom $D-$transzformáltjának a koordinátáit a (4.2.4) képlettel számítható ki: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$, vagyis $D(P) = 4 + 6X - 6X^2$ ami leellenőrizhető klasszikus deriválással.

4.24. Példa. $f : \mathbb{P}_2[X] \to \mathbb{R}^2$, $f(P) = \begin{pmatrix} P(1) \\ P'(1) \end{pmatrix}$, $B_{\mathbb{P}_2} = \{1, X, X^2\}$, $B_{\mathbb{R}^2} = \{e_1, e_2\}$ kanonikus bázisok$\Longrightarrow$ $[f]_{\mathbb{P}_2,\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4.25. Tétel. *Ha az $f : U \to V$, illetve $g : V \to W$ lineáris transzformációk, akkor a $g \circ f : U \to W$ lineáris transzformációhoz hozzárendelt mátrix egyenlő a g, illetve f transzformációkhoz hozzárendelt mátrixok szorzatával:*

$$[g \circ f]_{B_U,B_W} = [g]_{B_V,B_W} \cdot [f]_{B_U,B_V}\,. \tag{4.2.5}$$

4.26. Példa. Ha $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f=első-felező szerinti tükrözés $f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \binom{x_1}{x_2}$ és g=vetítés az Oy tengelyre $g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \binom{x_1}{x_2}$ ahol $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, akkor

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

A B kanonikus bázisokban hozzárendelt mátrixot a (4.2.5) képletből is kiszámíthatjuk:

$$[g]_{B,B} \cdot [f]_{B,B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.3. Endomorfizmus mátrix változása báziscsere esetén

Legyen $(V,+,\cdot,K)$ egy n dimenziós vektortér, $f: V \to V$ egy endomorfizmus, $x \in V$ egy vektor V-ből és $y \in V$ ennek képe az f lineáris transzformáción keresztül:

$$y = f(x). \tag{4.3.1}$$

Az f-hez tartozó mátrix függ a kiválasztott bázisoktól. Legyen $B = \{v_1, ..., v_n\}$, $B' = \{v_1', ..., v_n'\}$ a V vektortér két bázisa.

Jelöljük $[x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $[x]_{B'} = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$, illetve $[y]_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $[y]_{B'} = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$-vel az x és y vektorok koordinátáit a B, illetve B' bázisokban, és $A = [f]_{B,B}$, $D = [f]_{B',B'}$-vel a lineáris transzformáció mátrixait a két bázisnak megfelelően. Akkor a (4.3.1)-ből következik, hogy

$$[y]_B = [f]_{B,B}\,[x]_B \text{ vagy } [y]_B = A\,[x]_B\,, \tag{4.3.2}$$

illetve

$$[y]_{B'} = [f]_{B',B'}\,[x]_{B'} \text{ vagy } [y]_{B'} = D\,[x]_{B'}\,. \tag{4.3.3}$$

$T = (t_{ij})_{i,j=1}^n$-vel jelölve a két bázisnak megfelelő áttérési mátrixot, felírhatjuk, hogy:

$$[x]_B = T\,[x]_{B'}\,,\ [y]_B = T\,[y]_{B'}\,.$$

Felhasználva a (4.3.2) és (4.3.3) képleteket következik, hogy:

$$A\,[x]_B = T\,[y]_{B'} \Longrightarrow AT\,[x]_{B'} = TD\,[x]_{B'}$$

vagyis

$$AT = TD,$$

ahonnan

$$D = T^{-1}AT.$$

4.27. Tétel. *Az $f \in End(V)$ -hez tartozó mátrixa $B \to B'$ báziscsere esetén a következőképpen alakul:*

$$[f]_{B',B'} = T^{-1}[f]_{B,B}T, \tag{4.3.4}$$

ahol T a B, B' bázisoknak megfelelő áttérési mátrix.

Az eljárás az alábbi diagramon szemléltethető

$$\begin{array}{ccc} [x]_B & \overset{A=[f]_{B,B}}{\longrightarrow} & [f(x)]_B \\ \downarrow T^{-1} & & \downarrow T^{-1} \\ [x]_{B'} & \overset{D=[f]_{B',B'}}{\longrightarrow} & [f(x)]_{B'} \end{array}$$

ahol

$$\begin{aligned} [f(x)]_B &= A[x]_B \\ [x]_{B'} &= T^{-1}[x]_B \\ [f(x)]_{B'} &= D[x]_{B'} = T^{-1}[f(x)]_B . \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőségből következik, hogy

$$DT^{-1}[x]_B = T^{-1}A[x]_B$$

vagyis

$$DT^{-1} = T^{-1}A \Rightarrow D = T^{-1}AT.$$

4.28. Példa. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}, B = \{e_1, e_2\}$ kanonikus bázis, $B' = \{e_1', e_2'\}$ ahol $e_1' = \binom{2}{1}, e_2' = \binom{1}{2}$. Akkor $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ és $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \Longrightarrow [f]_{B',B'} =$

$T^{-1}AT = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$. Ellenőrzés: $f(e_1') = \binom{5}{6} = \frac{4}{3}e_1' + \frac{7}{3}e_2'$, $f(e_2') = \binom{7}{6} = \frac{8}{3}e_1' + \frac{5}{3}e_2'$.

4.29. Definíció. Az $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ mátrixokat hasonlóknak nevezzük (jel. $A \sim B$), ha

$$\exists T \in \mathcal{M}_n(K) \text{ ú.h. } B = T^{-1}AT.$$

A Tétel 4.27 átfogalmazva:

4.30. Tétel. *Ha a $(V, +, \cdot, K)$ vektortérben, B, B' bázisok és $f : V \to V$ endomorfizmus, akkor*

$$[f]_{B,B} \sim [f]_{B',B'},$$

vagyis, egy adott endomorfizmus mátrixai hasonlóak.

A hasonló mátrixok tanulmányozása azért indokolt, mert ezen mátrixok determinánsa, rangja, nyoma, karakterisztikus polinomja megegyezik.

4.31. Tétel. *Ha A és B mátrixok hasonlóak $A \sim B$, akkor:*

(1) $\det(A) = \det(B)$;
(2) $rang(A) = rang(B)$;
(3) $Tr(A) = Tr(B)$;
(4) $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$. *(lásd a 5.5 tételt)*

Bizonyítás. *(1)* A mátrixok hasonlóak tehát $\exists T \in \mathcal{M}_n(K)$ ú.h. $B = T^{-1}AT \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\det(B) &= \det\left(T^{-1}AT\right) = \det\left(T^{-1}\right)\det(A)\det(T) = \\ &= \det\left(T^{-1}\right)\det(T)\det(A) = \det\left(T^{-1}T\right)\det(A) = \\ &= \det(I_n)\det(A) = \det(A).\end{aligned}$$

(2) Egy mátrix rangja egyenlő a megfelelő lineáris transzformáció képterének a dimenziójával. Mivel $A \sim B$ ezért A és B ugyanannak a lineáris transzformációnak a mátrixa (különböző bázisban) tehát a képtér dimenziója, illetve rangja megegyezik.
(3) Figyelembe véve, hogy $\forall M \in \mathcal{M}_{m,n},\ N \in \mathcal{M}_{nm}$-re $Tr\,(MN) = Tr\,(NM)$, következik, hogy

$$Tr\,(B) = Tr\left(T^{-1}AT\right) = Tr\left((AT)\,T^{-1}\right) = Tr\left(ATT^{-1}\right) = Tr\,(A)\,.$$

$\square$

Adott endomorfizmus esetében: $f \in End\,(V)$, olyan B' bázist keresünk amelyre (a $[f]_{B,B}$-vel ekvivalens) $[f]_{B',B'}$ mátrix minél egyszerűbb alakú, például átló-, háromszög-, Jordan-alakú stb.

Adott endomorfizmus esetében: $f \in End\,(V)$, olyan B' bázist keresünk amelyre (a $[f]_{B}$-vel ekvivalens) $[f]_{B'}$ mátrix minél egyszerűbb alakú, például átló-, háromszög-, Jordan-alakú stb.

4.32. PÉLDA. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f\,(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$, $B = \{e_1, e_2\}$ kanonikus bázis, $B'' = \{e_1'', e_2''\}$ ahol $e_1'' = \binom{-3}{2}, e_2'' = \binom{1}{1}$. Akkor $[f]_B = A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ és $T = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, ahonnan $T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ és $\Longrightarrow [f]_{B''} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ egy átlós mátrix. Ellenőrzésképpen: $\det\left([f]_B\right) = \det\left([f]_{B''}\right) = -4$, $rang([f]_B) = rang([f]_{B''}) = 2$, $Tr\left([f]_B\right) = Tr\left([f]_{B''}\right) = 3$.

Az endomorfizmus esetében ismertetett eredmények általánosíthatók tetszőleges lineáris transzformáció esetére.

4.33. DEFINÍCIÓ. Az $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ mátrixokat ekvivalensnek nevezzük (jel. $A \approx B$), ha

$$\exists P \in \mathcal{M}_n(K), Q \in \mathcal{M}_m(K) \text{ ú.h. } B = QAP.$$

4.34. TÉTEL. *Ha $(V, +, \cdot, K)$ és $(W, +, \cdot, K)$ vektorterek, B_V, B'_V bázisok V-ben, B_W, B'_W bázisok W-ben és $f : V \to W$ lineáris transzformáció, akkor*

$$[f]_{B_V, B_W} \approx [f]_{B'_V, B'_W}.$$

(Egy adott homomorfizmus mátrixai ekvivalensek).

4.4. Alkalmazások- Geometriai transzformációk a térben

$f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1) Vetítés az alapsíkokra:

$$pr_{xy}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \; pr_{xz}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \; pr_{yz}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

A transzformációk mátrixai a B kanonikus bázispárban:

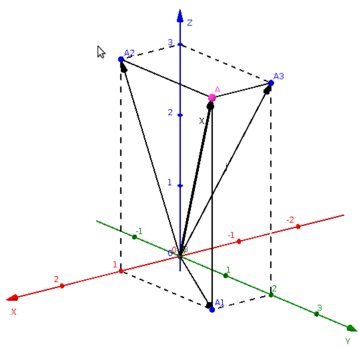
$$[pr_{xy}(\bar{x})]_{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; [pr_{xz}(\bar{x})]_{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$[pr_{yz}(\bar{x})]_{B,B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.35. PÉLDA. Az $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ pont ($\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ vektor) vetületeit a három alapsíkra mátrix szorzattal számítjuk ki:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$



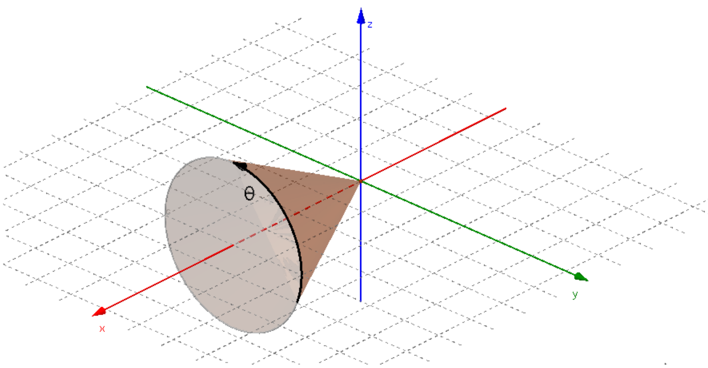
2) Tükrözés az alapsíkokra:

$$f_1(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \; f_2(\bar{x}) = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \end{pmatrix}, \; f_3(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ -z \end{pmatrix}.$$

3) Forgatás. A térben a forgatást a jobbkéz-szabály szerint történik, vagyis a nagy ujj az $\bar{x}$ forgatási tengely irányát míg a többi ujj a forgatási irányt mutatja.

- forgatás az Ox tengely körül:

$$R_{\theta,Ox}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} x \\ y\cos\theta - z\sin\theta \\ y\sin\theta + z\cos\theta \end{pmatrix}, [R_{\theta,Ox}(\bar{x})]_{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



- forgatás az Oy tengely körül:

$$R_{\theta,Oy}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} x\cos\theta + z\sin\theta \\ y \\ -x\sin\theta + z\cos\theta \end{pmatrix}, [R_{\theta,Oy}(\bar{x})]_{B,B} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- forgatás az Oz tengely körül:

$$R_{\theta,Oz}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \\ z \end{pmatrix}, [R_{\theta,Oz}(\bar{x})]_{B,B} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- forgatás az $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ egységvektor körül

$$[R_{\theta,u}(\bar{x})]_{B,B} =$$

$$\begin{pmatrix} a^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & ab(1-\cos\theta)-c\sin\theta & ac(1-\cos\theta)+b\sin\theta \\ ab(1-\cos\theta)+c\sin\theta & b^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & bc(1-\cos\theta)-a\sin\theta \\ ac(1-\cos\theta)-b\sin\theta & bc(1-\cos\theta)+a\sin\theta & c^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{pmatrix}$$

A forgatást az előbbi három alap-forgatás kombinációjaként lehet meghatározni.

5. FEJEZET

Sajátérték, sajátvektor

Legyen $(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ egy valós vektortér, $\dim V = n$, $B_V = \{v_1, ..., v_n\}$ egy bázisa és $f : V \to V$ lineáris transzformáció ($f \in End(V)$). Jelöljük $A = [f]_{B_V, B_V} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ a lineáris transzformáció mátrixát az adott bázisban.

5.1. Definíció. Az $x \in V$, $x \neq 0_V$ vektort a lineáris transzformáció (ill. a hozzárendelt mátrix) sajátvektorának nevezzük, ha $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ sajátérték ú.h.

$$f(x) = \lambda x \text{ i.e. } Ax = \lambda x. \tag{5.0.1}$$

5.2. Példa. $(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ vektortérben $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = \binom{2x_1+x_2}{x_1+2x_2} \Longrightarrow f \in End(\mathbb{R}^2)$ és $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, tehát $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sajátvektor, $\lambda = 3$ sajátérték.

A sajátvektor mértani jelentése: az X sajátvektora az f transzformációnak ha a képe f-en keresztül ugyancsak az X tartóegyenesén marad.

A (5.0.1) definícióból következik, hogy:

$$Ax = \lambda x \ \Leftrightarrow \ Ax = \lambda I_n x \ \Leftrightarrow AX - \lambda I_n X \ = 0_V \ \Leftrightarrow$$

$$(A - \lambda I_n) X \ = 0_V. \tag{5.0.2}$$

A (5.0.2) (karakterisztikus) egyenletrendszer mátrix alakja:

$$(5.0.3)\qquad \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ennek az egyenletrendszernek akkor van a triviálistól különböző megoldása, ha a (karakterisztikus) determinánsa nulla:

$$(5.0.4)\qquad \det\left(A-\lambda I_n\right)=0.$$

5.3. Definíció. A $P_f(\lambda) = P_A(\lambda) = \det\left(A-\lambda I_n\right)$ n-ed fokú polinomot karakterisztikus polinomnak nevezzük.

Tehát a sajátértékek a $P_A(\lambda)$ karakterisztikus polinom gyökei.

5.4. Példa. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$.

5.5. Tétel. *A $P_A(\lambda)$ karakterisztikus polinom nem függ a kiválasztott bázistól.*

Bizonyítás. Legyen $A = [f]_{B,B}$ és $A' = [f]_{B',B'}$ az f endomorfizmus két mátrixa a B, illetve B' bázispárokban. Az $A' = T^{-1}AT$ karakterisztikus polinomja:

$$\begin{aligned} P_{A'}(\lambda) &= \det\left(A'-\lambda I_n\right) = \det\left(T^{-1}AT-\lambda I_n\right) = \\ &= \det\left(T^{-1}AT-\lambda T^{-1}T\right) = \det\left(T^{-1}\left(A-\lambda I_n\right)T\right) = \\ &= \det T^{-1}\det T\det\left(A-\lambda I_n\right) = \det\left(A-\lambda I_n\right) = P_A(\lambda). \end{aligned}$$

□

5.6. Tétel.

$$(5.0.5)\qquad P_A(\lambda) = \left(-1^n\right)\left(\lambda^n - S_1\lambda^{n-1} + S_2\lambda^{n-2} - \ldots + (-1)^n S_n\right),$$

ahol S_i a főátlón elhelyezkedő $i \times i$ minorok összege:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn} = TrA, \\ S_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + ... + \begin{vmatrix} a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &\vdots \\ S_n &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A. \end{aligned}$$

Bizonyítás. A bizonyítás $n = 3$-ra végezzük.

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{31}(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21}(a_{33} - \lambda) - a_{23}a_{32}(a_{11} - \lambda) =$$

$$= (-1)^3 \left(\lambda^3 - \lambda^2 (a_{11} + a_{22} + a_{33}) + ... - \det(A)\right).$$

□

A (5.0.5) képletből a Viéte összefüggések szerint:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = Tr(A) \tag{5.0.6}$$

és

$$\lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_n = \det A. \tag{5.0.7}$$

A (5.0.7)-ból következik, hogy $\det A = 0 \Leftrightarrow \exists j$ index ú.h. $\lambda_j = 0$, vagyis A invertálható ha sajátértékei különböznek nullától.

5.7. DEFINÍCIÓ. A sajátértékek halmazát a transzformáció spektrumának nevezzük, jelölése $\sigma(f)$ vagy $\sigma(A)$. Ha λ többszörös (r-szeres) gyöke a $P_A(\lambda)$ karakterisztikus polinomnak, akkor r-et a λ sajátérték algebrai multiplicitásának nevezzük, jelölése $m_{alg}(\lambda) = r$.

5.8. TÉTEL.

(1) *Minden λ sajátértéknek több sajátvektor felel meg.*
(2) *Minden x sajátvektornak csak egy λ sajátérték felel meg.*

BIZONYÍTÁS. *(1)* Ha x a λ-hoz rendelt sajátérték, akkor kx, $(k \in \mathbb{R})$ is sajátértéke mert:

$$A(kx) = kAx = k\lambda x = \lambda(kx).$$

(2) Feltétezzük, hogy x sajátvektorhoz két: λ és λ' sajátérték felel meg: $Ax = \lambda x,\ Ax = \lambda' x \Rightarrow \lambda x = \lambda' x \Rightarrow (\lambda - \lambda')x = 0_V$
$\Rightarrow \lambda - \lambda' = 0$ vagyis $\lambda = \lambda'$. □

5.9. DEFINÍCIÓ. A $V(\lambda) = \{x \in V : Ax = \lambda x\}$ halmazt a λ-hoz tartozó sajátvektorok halmazának nevezzük.

5.10. PÉLDA. Az előbbi példában $\lambda_1 = 1$ sajátértéknek feleltessünk meg egy $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ sajátvektort $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_1 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. $V(\lambda = 1) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

5.11. TÉTEL. *A $V(\lambda)$ halmaz (a nullvektorral kiegészítve) részteret alkot V-ben:*

$$\emptyset \cup V(\lambda) \leq_K V.$$

Bizonyítás. Ha $x, y \in V(\lambda)$ akkor $A(x+y) = Ax + Ay = \lambda x + \lambda y = \lambda(x+y)$ vagyis $(x+y) \in V(\lambda)$. Hasonlóan ha $\alpha \in K$, akkor $\alpha x \in V(\lambda)$. □

5.12. Definíció. A $V(\lambda)$ vektortér dimenzióját a λ sajátérték geometriai multiplicitásának nevezzük, jelölése $m_{geom}(\lambda) = \dim V(\lambda)$.

5.13. Példa. (1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ akkor $\lambda_1 = 1, X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $V(\lambda = 1) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ és $\lambda_2 = 3, Y = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V(\lambda = 3) = \left\{ \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, tehát $m_{geom}(\lambda = 1) = 1$, és $m_{geom}(\lambda = 3) = 1$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ akkor $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V(\lambda = 1) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} | \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ és $\lambda_3 = 4$, $Y = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V(\lambda = 4) = \left\{ \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} | \gamma \in \mathbb{R} \right\}$, tehát $m_{geom}(\lambda = 1) = 2$, és $m_{geom}(\lambda = 4) = 1$.

5.1. Diagonalizálható endomorfizmusok (mátrixok)

5.14. Definíció. Az $f \in End(V)$ endomorfizmusról, illetve ennek A mátrixáról azt mondjuk, hogy diagonalizálható, ha $\exists B_V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ bázisa V-nek, amelyben a $[f]_{B_V, B_V} = D$ lineáris transzformáció mátrixa diagonális alakú,

$$D = diag\left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ha T-vel jelöljük az áttérési mátrixot a B_k kanonikus bázisból a B_V bázisba, akkor az előbbi definíció ekvivalens az alábbival:

A diagonalízálható $\Leftrightarrow \exists T$ reguláris ú.h $T^{-1}AT = D = diag\left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\right).$

Az alábbi tételben igazoljuk hogy, ha A-nak n lineárisan független sajátvektora van, akkor ezek alkotják a keresett B_V bázist.

5.15. Tétel. *Az $f \in End\left(V\right)$, $dimV = n$, endomorfizmus diagonalizálható akkor és csak akkor ha az A mátrixnak n lineárisan független sajátvektora van.*

Bizonyítás. A diagonalizálható $\Leftrightarrow \exists T$ reguláris mátrix ($\det T \neq 0$) úgy, hogy $T^{-1}AT = diag = D$. A továbbiakban igazoljuk, hogy a T mátrix oszlopai pontosan a sajátvektorokból áll, és mivel T reguláris következik, hogy a sajátvektorok lineárisan függetlenek.

$$\begin{aligned} AT &= TD = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & & t_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ t_{n1} & t_{n2} & & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 t_{11} & \lambda_2 t_{12} & \dots & \lambda_n t_{1n} \\ \lambda_1 t_{21} & \lambda_2 t_{22} & & \lambda_n t_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \lambda_1 t_{n1} & \lambda_2 t_{n2} & & \lambda_n t_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \overline{t_1} & | & \lambda_2 \overline{t_2} & | & \dots & | & \lambda_n \overline{t_n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ahol $\overline{t_i}$ a T mátrix i-edik oszlopa. Tehát

$$A\left(\begin{array}{c|c|c|c} \overline{t_1} & \overline{t_2} & \ldots & \overline{t_n} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \lambda_1\overline{t_1} & \lambda_2\overline{t_2} & \ldots & \lambda_n\overline{t_n} \end{array}\right)$$

ahonnan

$$A\overline{t_1} = \lambda_1\overline{t_1},\ A\overline{t_2} = \lambda_2\overline{t_2}, ..., A\overline{t_n} = \lambda_n\overline{t_n},$$

vagyis λ_i sajátértéke és $\overline{t_i}$, $i = \overline{1,n}$ sajátvektora az A mátrixnak. □

5.16. TÉTEL. *Különböző (párosával) sajátértékekhez* $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, $(\lambda_i \neq \lambda_j,\ \forall i \neq j)$ *tartozó sajátvektorok* $(X_1, X_2, ..., X_n)$ *lineárisan függetlenek.*

BIZONYÍTÁS. Feltételezzük, hogy $X_1, ..., X_n$ sajátvektorok lineárisan függőek. Ezekből kiemeljük a maximális számú lineárisan független vektorokat, például az első r-et $(r < n)$: $X_1, ..., X_r$. Akkor X_{r+1} felírható mint

$$X_{r+1} = \alpha_1 X_1 + ... + \alpha_r X_r \tag{5.1.1}$$

amit A-val beszorozva és felhasználva, hogy $AX_i = \lambda_i X_i$ következik, hogy

$$\alpha_1\lambda_1 X_1 + ... + \alpha_r\lambda_r X_r - \lambda_{r+1}X_{r+1} = 0. \tag{5.1.2}$$

Kivonva a (5.1.2)-ból a (5.1.1) képletet amit előzőleg λ_{r+1}-el szoroztunk kapjuk, hogy

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})X_1 + ... + \alpha_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})X_r = 0.$$

Mivel $X_1, ..., X_r$ lineárisan függetlenek $\Rightarrow \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) = ... = \alpha_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) = 0$ és mivel $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_r = 0$ vagyis (5.1.1)-ben $X_{r+1} = 0_v$ (hamis). □

A tételből következik, hogy ha a sajátértékek mind különböznek, akkor az n dimenziós V vektortérben az $\{X_1, ..., X_n\}$ lineárisan független vektorok egy bázist alkotnak, bázis amelyben az endomorfizmus mátrixa diagonális.

5.17. Következmény. *Ha az A mátrix $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sajátértékei párosával különböznek egymástól $\lambda_i \neq \lambda_j$, akkor az A diagonalizálható.*

5.18. Példa. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ sajátértékei: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ tehát A diagonalizálható és $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

A diagonalizáláshoz nem szükséges, hogy a sajátértékek mind különbözzenek.

5.19. Tétel. *Az $f \in End\,(V)$ endomorfizmus (A mátrix) diagonalizálható ha:*

(1) *a $P_A(\lambda)$ karakterisztikus polinomnak n gyöke van K-ban: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$;*
(2) *$m_{alg}(\lambda_i) = m_{geom}(\lambda_i)\,,\ \forall i = \overline{1, n}$.*

5.20. Példa. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $P_A(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 15\lambda - 7$, $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = 7 \Rightarrow\ m_{alg}(\lambda_1) = 2$, $m_{alg}(\lambda_3) = 1$. $X_1 = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow m_{geom}(\lambda_1) = 2$, $m_{geom}(\lambda_3) = 1 \Rightarrow$

$A \sim D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. A keresett bázis: $B_V = \{v_1, v_2, v_3\}$, ahol $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Igazoljuk, hogy:

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ nem diagonalizálható;

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ nem diagonalizálható;

(3) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ diagonalizálható ha $(a-d)^2 + 4bc \geq 0$.

(4) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \\ 8 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & 6 & -4 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & -3 \\ 8 & 16 & -6 \end{pmatrix}$,

$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -2 \\ -20 & 7 & -5 \\ 8 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$.

5.2. Szimmetrikus mátrixok diagonalizálása

Különleges tulajdonságaiknak köszönhetően, a szimmetrikus mátrixok diagonalizálása sajátos

5.21. Definíció. Az $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mátrixot szimmetrikusnak nevezzük ha szimmetrikus a főátlóra nézve, vagyis

$$A = A^T. \tag{5.2.1}$$

5.22. PÉLDA. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & -\frac{5}{8} \\ 7 & -\frac{5}{8} & -2 \end{pmatrix}$ szimmetrikus mátrix.

Mivel az ortogonális mátrixok inverze megegyezik a transzponáltjukkal $\left(Q^{-1} = Q^T\right)$, felmerül a kérdés milyen feltételek mellett diagonalizálható egy A mátrix egy ortogonális mátrixszal vagyis $T^{-1}AT = diag = D$ és T ortogonális. Ha egy ilyen $T = Q$ mátrix létezik akkor $A = QDQ^{-1} = QDQ^t$ és

$$A^t = \left(QDQ^t\right)^t = \left(Q^t\right)^t D^t Q^t = QDQ^t = A$$

tehát A szimmetrikus.

5.23. TÉTEL. *Ha az $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mátrix szimmetrikus: $A = A^T$, akkor a sajátértékei valósak és különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektor-halmazok ortogonálisak:*

$$\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow V(\lambda_i) \perp V(\lambda_j).$$

BIZONYÍTÁS. Legyen $X_i \in V(\lambda_i)$ és $X_j \in V(\lambda_j)$ két különböző $\lambda_i \neq \lambda_j$ sajátértékhez tartozó sajátvektor. Figyelembe véve, hogy két, u és v, oszlopvektor skaláris szorzata felírható mint

$$\langle u, v \rangle = v^T \cdot u,$$

következik, hogy

$$\langle AX_i, X_j \rangle = X_j^T \cdot AX_i = \left(A^T X_j\right)^T X_i = \left\langle X_i, A^T X_j \right\rangle = \langle X_i, AX_j \rangle.$$

Innen, az $AX_i = \lambda_i X_i$, $AX_j = \lambda_j X_j$ egyenlőségeket felhasználva kapjuk, hogy:

$$\langle \lambda_i X_i, X_j \rangle = \langle X_i, \lambda_j X_j \rangle,$$

vagyis

$$(\lambda_i - \lambda_j) \langle X_i, X_j \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle X_i, X_j \rangle = 0 \Leftrightarrow X_i \perp X_j.$$

$\square$

Tehát az A mátrixot ortogonalizáló Q mátrix oszlopai vagy eleve ortogonálisak (ha különböző sajátértékhez tartoznak), vagy ortogonális alakra hozhatók például Gram-Schmidt eljárással.

$$A = QDQ^t \tag{5.2.2}$$

ahol Q ortogonális mátrix, D pedig diagonális mátrix amelynek átlóján sajátértékek vannak.

5.24. PÉLDA. (1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \Rightarrow \lambda_1 = 1 \to X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ és $\lambda_2 = 3 \to Y = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Mivel $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ami számítással is igazolható. Tehát az A mátrix a $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ortogonális bázisban diagonális alakú: $A \sim D = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ahol $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ az áttérési mátrix a kanonikus bázisból a B bázisba. Normálással, a B bázis helyett használhatunk egy ortonormált bázist: $B = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$ amely egy ortogonális áttérési mátrixhoz vezet: $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 2, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 8,$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -1, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow$
5

(4) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 1, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow$
7

Az (5.2.2) képletben a Q mátrixot ortogonális vektorokra felbontva az A mátrix úgy nevezett spektrális felbontását kapjuk:

$$A = \begin{pmatrix} q_1| & q_2| & \dots & |q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{q_1^t} \\ \underline{q_2^t} \\ \vdots \\ \overline{q_n^t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 q_1| & \lambda_2 q_2| & \dots & |\lambda q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{q_1^t} \\ \underline{q_2^t} \\ \vdots \\ \overline{q_n^t} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

(5.2.3) $$A = \lambda_1 q_1 q_1^t + \lambda_1 q_2 q_2^t + \ldots + \lambda_1 q_n q_n^t.$$

5.25. Példa. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \Rightarrow \lambda_1 = 1 \to X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ és $\lambda_2 = 3 \to Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. $A = 1 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ vagyis $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5.3. Alkalmazások

5.3.1. Mátrix hatvány, mátrix exponenciális Ha egy A mátrix diagonalizálható: $A = TDT^{-1}$ akkor a k-ik hatványát a következőképpen számítjuk ki

$$A^k = TDT^{-1} \cdot TDT^{-1} \cdot \ldots \cdot TDT^{-1} = TD^kT^{-1},$$

tehát

$$A^k = T \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \\ 0 & \lambda_2^k & \\ & & \ddots \end{pmatrix} T^{-1}. \tag{5.3.1}$$

5.26. PÉLDA. Számítsuk ki A^{10} ha $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -2 \end{pmatrix}$.

Mátrix exponenciális

5.27. DEFINÍCIÓ. Egy A mátrix exponenciális alakján az alábbi kifejezést értjük:

$$e^{tA} = I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \ldots$$

Ehhez hasonló mátrixok a lineáris differenciál egyenletrendszer kapcsán merül fel ugyanis a

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$
$$x(0) = x_0$$

differenciál egyenletrendszer megoldása $x(t) = e^{tA}x_0$.

Az e^A kiszámításához használjuk az $A = TDT^{-1}$ felbontást, tehát

$$e^A = e^{TDT^{-1}} = I + \frac{1}{1!}TDT^{-1} + \frac{1}{2!}TD^2T^{-1} + \ldots =$$

$$= T\left(I + \frac{1}{1!}D + \frac{1}{2!}D^2 + \ldots\right)T^{-1} = T\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \\ 0 & e^{\lambda_2} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}T^{-1}.$$

Hasonlóan

$$e^{tA} = T\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}T^{-1}. \tag{5.3.2}$$

5.28. Példa. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$, $e^A = ?$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

tehát

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2e - \frac{1}{e} & e - \frac{1}{e} \\ -2e + \frac{2}{e} & -e + \frac{2}{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.068 & 2.350 \\ -4.700 & -1.982 \end{pmatrix}.$$

5.29. Példa. Oldjuk meg a $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = & x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = & -2x_1(t) + 3x_2(t) \end{cases}$, $t \in [0, 1]$, $\begin{cases} x_1(0) = & 1 \\ x_2(0) = & 3 \end{cases}$ differenciál egyenletrendszert!

A differenciál egyenletrendszer átírható $\dot{x}(t) = A \cdot x(t)$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ alakra ahol $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Az A mátrix felbontása

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

ahonnan

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

és a ddifferenciál egyenletrendszer megoldása:

$$x(t) = e^{tA} x_0 = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t + 2e^{2t} \\ -e^t + 4e^{2t} \end{pmatrix}, t \in [0,1],$$

ami deriválással ellenörízhető.

5.3.2. Fibonacci sorozat

5.30. Definíció. Fibonacci sorozatnak nevezzük a

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \varphi_{n-1},$$

rekurzív képlettel megadott sorozatot ahol $\varphi_0 = 0, \varphi_1 = 1$.

5.31. Példa. $\varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_0 = 1$, $\varphi_3 = \varphi_2 + \varphi_1 = 2, ...$ tehát a Fibonacci sorozat első tagjai: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$

5.32. Tétel. *A Fibonacci sorozat általános tagja*

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Bizonyítás. A $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, ...)$ sorozat két egymásutáni tag: a, b segítségével a következő tagot az alábbi módon állítjuk elő:

$$\begin{array}{llllll} (n-1)\,.\ \text{lépés} & a & b & \to & a+b & \\ (n)\,.\ \text{lépés} & & a & & b & \to a+b \end{array}$$

Ennek érdekében értelmezzük az $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix}$$

endomorfizmust, amelynek mátrixa a kanonikus bázisban:

$$[F]_{B_k} = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az F transzformációnak a segítségével a Fibonacci számokat a következőképpen hozzuk létre:

$$F\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix},\ F\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}, ..., F\begin{pmatrix} \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi_{n+1} \end{pmatrix}.$$

A transzformáció kompozícióját használva a tagok kiszámítása visszavezethető az első két tagra

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} &= F\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} &= F\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = F\left(F\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}\right) = F^2\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \\ &\ \ \vdots \\ \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi_{n+1} \end{pmatrix} &= F\begin{pmatrix} \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{pmatrix} = F\left(F\begin{pmatrix} \varphi_{n-2} \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix}\right) = \ldots = F^n\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A $\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektor felírásához az A (szimmetrikus) mátrix sajátvektoraiból alkotott ortogonális bázist használjuk. A karakterisztikus egyenletből

$$P_\lambda(A) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 1 = 0$$

kiszámítjuk a sajátértékeket:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

majd az $AX = \lambda_1 X$, illetve $AY = \lambda_2 Y$ egyenletekből kiszámítjuk az X, Y (ortogonális) sajátvektorokat és a hozzátartozó sajátvektorok

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \to X = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \to Y = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

A $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \right\}$ ortogonális bázisban a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektor felírása a következő

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

ahol $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Tehát az F additivitását és homogénitását felhasználva következik, hogy

$$\begin{aligned} F^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= F^n(\alpha X + \beta Y) = \alpha F^n(X) + \beta F^n(Y) = \\ &= \alpha A^n X + \beta A^n Y = \alpha \lambda_1^n X + \beta \lambda_2^n Y = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \end{pmatrix} \right),$$

ahonnan

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

$\square$

5.33. Gyakorlat.

(1) $f_1 = 1,\ f_1 = 1,\ f_{n+1} = f_n + 2f_{n-1}$.
(2) $f_0 = 0,\ f_1 = 1, f_{n+1} = 2f_n + f_{n-1}$.
(3) $L_0 = 2,\ L_1 = 1,\ L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ Lucas -féle számok.

6. FEJEZET

Bilineáris alakok, négyzetes alakok

6.1. Bilineáris alakok

Legyen $(V,+,\cdot,K)$ egy n dimenziós vektortér.

6.1. DEFINÍCIÓ. A $\beta : V \times V \to K$ leképezést bilineáris alaknak nevezzük, ha lineáris mindkét változójára nézve:

$$\begin{aligned} (6.1.1)\quad & \beta(x_1+x_2,y)=\beta(x_1,y)+\beta(x_2,y)\,,\ \beta(\alpha x,y)=\alpha\beta(x,y)\,; \\ & \beta(x,y_1+y_2)=\beta(x,y_1)+\beta(x,y_2)\,,\ \beta(x,\alpha y)=\alpha\beta(x,y)\,. \end{aligned}$$

A bilineáris alakok halmazát $\beta(V,K)=\{\beta : V\times V\to K\ \ |\beta \text{ bilineáris}\}$-val jelöljük.

6.2. PÉLDA. $\beta : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $\beta(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$, $\forall x=(x_1,x_2,x_3)^t\,, y=(y_1,y_2,y_3)^t\in\mathbb{R}^3$.

6.3. TÉTEL. *A $\beta(V,K)$ halmaz vektoteret alkot.*

BIZONYÍTÁS. Ha $\beta_1,\beta_2\in\beta(V,K)$ és $\alpha\in K$ akkor $(\beta_1+\beta_2)(x,y)=\beta_1(x,y)+\beta_2(x,y)$, $(\alpha\cdot\beta)(x,y)=\alpha\cdot\beta(x,y)\,.$ □

A lineáris transzformációkhoz hasonlóan, a bilineáris alakokat is mátrixokkal azonosítjuk.

Az n dimenziós V vektortérben legyen $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ egy bázis és $(x_1,...,x_n)^t\,,(y_1,...,y_n)^t$ az x illetve y vektorok koordinátái az adott bázisban. Akkor a $\beta : V \times V \to K$ bilineáris alak felírható:

$$\beta(x,y) = \beta(x_1e_1 + ... + x_ne_n, y) = \beta(x_1e_1, y) + ... + \beta(x_ne_n, y) =$$
$$= x_1\beta(e_1, y) + ... + x_n\beta(e_1, y) =$$
$$= x_1\beta(e_1, y_1e_1 + ... + y_ne_n) + ... + x_n\beta(e_1, y_1e_1 + ... + y_ne_n) =$$
$$= x_1\beta(e_1, e_1)\, y_1 + x_1\beta(e_1, e_2)\, y_2 + ... + x_n\beta(e_n, e_n)\, y_n =$$
$$= (x_1 \; ... \; x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

ahol $a_{ij} = \beta(e_i, e_j)$.

6.4. Tétel. *A $\beta : V \times V \to K$ bilineáris alak felírható az alábbi alakban:*

$$\beta(x,y) = x^t \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{21} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} y, \tag{6.1.2}$$

ahol $x = (x_1, ..., x_n)^t \in V$, $y = (y_1, ..., y_n)^t \in V$.

6.5. Definíció. Az $(a_{ij})_{i,j=1,n} = A = [\beta]_B$ mátrixot a β bilineáris alak mátrixának nevezzük a B bázisban.

6.6. Példa. Ha $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\beta(x,y) = x_1y_2 + 2x_2y_1$, $\forall x = (x_1, x_2)^t, y = (y_1, y_2)^t \in \mathbb{R}^2$, akkor $\beta(x,y) = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vagyis a B kanonikus bázisban $[\beta]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, míg a $B' = \{e_1', e_2'\}$,

$e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bázisban $[\beta]_{B'} = \begin{pmatrix} \beta(e_1', e_1') & \beta(e_1', e_2') \\ \beta(e_2', e_1') & \beta(e_2', e_2') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

6.7. Tétel. *A bilineáris alakok halmaza izomorf az $n \times n$-es mátrixok halmazával:*

$$\beta(V, K) \cong \mathcal{M}_n(K), \tag{6.1.3}$$

vagyis (egy adott bázisban) minden bilineáris alakhoz egyértelműen rendelhető hozzá egy $n \times n$-es mátrix.

6.8. Definíció. A β bilineáris alakot szimmetrikusnak nevezzük ha $\beta(x, y) = \beta(y, x)$, és antiszimmetrikusnak ha $\beta(x, y) = -\beta(y, x)$, $\forall (x, y) \in V \times V$.

6.9. Tétel. *A β bilineáris alak szimmetrikus $\Leftrightarrow A = [\beta]_B$ szimmetrikus ($A = A^t$).*

A következőkben vizsgáljuk hogyan módosul a bilineáris alak mátrixa báziscsere esetén. Legyen $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ és $B' = \{e_1', e_2', ..., e_n'\}$ két bázisa a V vektortérnek és T az áttérési mátrix a B és B' bázisok között.

6.10. Tétel. *Ha $[\beta]_B$ és $[\beta]_{B'}$-vel jelöljük a $\beta : V \times V \to K$ bilineáris alak mátrixait a B illetve B' bázisokban akkor:*

$$[\beta]_{B'} = T^t \cdot [\beta]_B \cdot T. \tag{6.1.4}$$

6.11. Példa. Az előbbi példában $[\beta]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow T^t [\beta]_B T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = [\beta]_{B'}$.

Kiemelt fontosságúak az olyan bázisok amelyben a bilineáris alak mátrixa diagonális $[\beta]_{B'} = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Ebben az esetben a bilineáris alakot kanonikus alakúnak nevezzük és β_k-val jelöljük:
(6.1.5)

$$\beta_k(x,y) = (x_1 \; ... \; x_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \lambda_1 x_1 y_1 + ... + \lambda_n x_n y_n.$$

6.12. Definíció. Az $u, v \in V$ vektorokat ortogonálisnak nevezzük a β -ra nézve ha $\beta(u,v) = 0$. A $\{v_1, ..., v_n\}$ vektorrendszer ortogonális ha $\beta(v_i, v_j) = 0, \; \forall i \neq j$.

6.13. Példa. Ha $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\beta(x,y) = x_1 y_2 + 2x_2 y_1$, $\forall x = (x_1, x_2)^t, y = (y_1, y_2)^t \in \mathbb{R}^2$, akkor $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ortogonálisak β-ra nézve mert $\beta(v_1, v_2) = 0$.

6.2. Négyzetes (kvadratikus) alakok

Legyen $\beta : V \times V \to K$ egy szimmetrikus bilineáris alak ahol V egy n dimenziós vektortér.

6.14. Definíció. A $q : V \to K, \; q(x) = \beta(x,x), \; x \in V$ leképezést a β-hoz tartozó négyzetes alaknak nevezzük.

6.15. Példa. Ha $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\beta(x,y) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$q(x) = \beta(x,x) = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_1 x_2.$$

6.16. TÉTEL. *A $q : V \to K$ négyzetes alak felírható az alábbi alakban:*

(6.2.1)

$$q(x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + ... + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

vagy mátrix alakban:

(6.2.2)

$$q(x) = (x_1 \ ... \ x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x^tAx = \langle x, Ax\rangle,$$

ahol $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V$ *és A egy szimmetrikus mátrix* $a_{ij} = a_{ji}, \ \forall i, j.$

A q alakját kanonikusnak nevezzük ha a mátrixa diagonális $q(x) = x^tDx, \ D = diag(\lambda_1 \ ... \ \lambda_n):$

(6.2.3)

$$q(x) = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_1x_1^2 + ... + \lambda_nx_n^2.$$

A továbbiakban olyan

(6.2.4) $$x = Ty,$$

lineáris transzformációkat keresünk amelyre a négyzetes alak kanonikus formát ölt

$$x^tAx = (Ty)^t A(Ty) = y^tT^tATy = y^tDy,$$

ugyanis ekkor a (6.2.3) képletből következtethetünk a q előjelére, például $q(x) > 0$ ha $\lambda_1, ..., \lambda_n > 0$, illetve $q(x) < 0$ ha $\lambda_1, ..., \lambda_n < 0$.

6.17. Definíció. Egy $q : V \to \mathbb{R}$ valós négyzetes alak
a) pozitív definit (PD) ha $q(x) > 0$, $\forall x \neq 0$;
b) negatív definit (ND) ha $q(x) < 0$, $\forall x \neq 0$;
c) pozitív szemidefinit (PSzD) ha $q(x) \geq 0$, $\forall x$;
d) negatív szemidefinit (NSzD) ha $q(x) \leq 0$, $\forall x$;
e) indefinit (I) ha $q(x)$ nem előjeltartó.

6.18. Példa. $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2$ PD, $q(x) = -x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2$ ND, $q(x) = x_1^2 + 2x_3^2$ PSz, $q(x) = -x_1^2 - 4x_3^2$ NSz, $q(x) = x_1^2 - 2x_2^2$ I.

6.19. Példa. Ha a $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$ négyzetes alakban a $x_1 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{3}y_2$, $x_2 = \frac{2}{3}y_2$, vagyis $x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} y$, lineáris transzformációt használjuk akkor a q négyzetes alak a következő kanonikus alakba írható: $q(y) = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{2}{3}y_2^2$. Ha pedig a $x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2$, $x_2 = y_2$, vagyis $x = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y$, lineáris transzformációt használjuk akkor a q a következő kanonikus alakba írható: $q(y) = 2y_1^2 + \frac{3}{2}y_2^2$.

Habár különböző transzformációk különböző kanonikus alakot eredményeznek, a négyzetes alak előjele (signaturája) nem módosul.

6.20. Tétel. *(Sylvester tehetetlenségi tétele) Egy négyzetes forma kanonikus alakja, transzformációtól függetlenül, mindig ugyanannyi pozitív, negatív és nulla tagot tartalmaz.*

6.2.1. Négyzetes alakok kanonikus alakra hozatala

6.2.1.1. Jacobi módszer Legyen $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ egy négyzetes alak $q(x) = (x_1 \ldots x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, ahol $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$, $a_{ij} = a_{ji}$. Jelöljük

$$\Delta_0 = 1, \Delta_1 = |a_{11}|, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \det A. \tag{6.2.5}$$

6.21. Tétel. *(Jacobi-Sylvester) Ha $\Delta_i \neq 0$, $\forall i = \overline{1,n}$, akkor létezik egy $x = Ty$ transzformáció amely következtében q kanonikus alakja:*

$$q(y) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} y_n^2. \tag{6.2.6}$$

A $T = (T_1^o | T_2^o | \ldots | T_n^o)$ transzformációt az $e_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}^t$ kanonikus vektorok segítségével állítjuk elő:

$$\begin{aligned} T_1^o &= c_{11} e_1 \\ T_2^o &= c_{21} e_1 + c_{22} e_2 \\ T_3^o &= c_{31} e_1 + c_{32} e_2 + c_{33} e_3 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

ahol

$$c_{11} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}$$

$$c_{21} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta_2},\ c_{22} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 1 \end{vmatrix}}{\Delta_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$$

$$c_{31} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{31} \\ 0 & a_{22} & a_{32} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_3},\ c_{32} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{31} \\ a_{21} & 0 & a_{32} \\ a_{31} & 1 & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_3}\ c_{33} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{vmatrix}}{\Delta_3} = \frac{\Delta_2}{\Delta_3}$$

$\vdots$

6.22. Következmény.

(1) *Ha* $\Delta_i > 0,\ \forall i = \overline{1,n}$, *vagyis*
$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, ... \Rightarrow q$ *PD.*
(2) *Ha* $(-1)^i \Delta_i > 0,\ \forall i = \overline{1,n}$, *vagyis*
$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, ... \Rightarrow q$ *ND.*

6.23. Példa. (1) Legyen $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 \Rightarrow$

$$q(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$\Delta_1 = |2| = 2 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$, tehát $q(x) > 0$ pozitív definit. Az $x = Ty$ ahol $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ transzformáció következtében a négyzetes alak átalakul $q(y) = y^t T^t A T y = y^t D y$ ahol $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, tehát $q(y) = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{2}{3}y_2^2$. A T

transzformációt a (6.2.7) képlettel határozzuk meg: $T_1^o = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $T_2^o = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta_2} e_1 + \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta_2} e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow$ $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

(2) Legyen $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3$,

$$q(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$\Delta_1 = |3| = 3 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 5 > 0$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 17 > 0$, tehát q pozitív definit. Az $x = Ty$ ahol $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{3}{17} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{17} \\ 0 & 0 & \frac{5}{17} \end{pmatrix}$ transzformáció következtőben a q kanonikus alakja: $q(y) = \frac{1}{3}y_1^2 + \frac{3}{5}y_2^2 + \frac{5}{17}y_3^2$.

6.2.1.2. Gauss-Lagrange módszer Legyen $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $q(x) = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$ egy négyzetes alak.

(i) Feltételezzük, hogy $\exists a_{ii} \neq 0$. Legyen $a_{11} \neq 0$, akkor

$$q(x) = a_{11}x_1^2 + 2x_1 \underbrace{(...)}_{=w} + ... = \frac{1}{a_{11}} \left(a_{11}^2 x_1^2 + 2a_{11}wx_1 + w^2 - w^2\right) + ... =$$

$$= \frac{1}{a_{11}} (a_{11}x_1 + w)^2 \underbrace{- \frac{w^2}{a_{11}} + ...}_{=q_1}$$

ahol q_1 nem függ x_1-től stb. Az eljárást q_1-el folytatjuk míg egy változó marad.

(ii) Ha $a_{ii} = 0$, $\forall i$ akkor változócserét alkalmazunk: $\begin{cases} y_1 &= x_1 + x_2 \\ y_2 &= x_1 - x_2 \\ y_3 &= x_3 \\ \vdots \end{cases}$

és ezzel y_1^2 együtthatója $\neq 0$, majd folytatjuk az (i) lépéssel.

6.24. Példa.

$$q(x) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 = 5x_1^2 + 2x_1\underbrace{(-2x_2 - 2x_3)}_{=w} + 6x_2^2 + 4x_3^2 =$$

$$= \frac{1}{5}\left(5^2x_1^2 + 2x_1 5w + w^2 - w^2\right) + 6x_2^2 + 4x_3^2 = \frac{1}{5}(5x_1 + w)^2 - \frac{w^2}{5} + 6x_2^2 + 4x_3^2 =$$

$$= \frac{1}{5}(5x_1 - 2x_2 - 2x_3)^2 \underbrace{- \frac{(-2x_2 - 2x_3)^2}{5} + 6x_2^2 + 4x_3^2.}_{=q_1}$$

$$q_1 = -\frac{1}{5}(-2x_2 - 2x_3)^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 = \frac{26}{5}x_2^2 + \frac{16}{5}x_3^2 - \frac{8}{5}x_2x_3 =$$

$$= \frac{5}{26}\left(\left(\frac{26}{5}\right)^2 x_2^2 + 2x_2\frac{26}{5}w_1 + w_1^2 - w_1^2\right) = \ ...$$

Tehát $q = \frac{1}{5}y_1^2 + \frac{5}{26}y_2^2 + \frac{40}{13}y_3^2$ ahol $\begin{cases} y_1 &= 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ y_2 &= \frac{26}{5}x_2 - \frac{4}{5}x_3 \\ y_3 &= x_3 \end{cases}$.

6.2.1.3. Sajátérték, sajátvektor módszer Mivel $q(x) = x^t Ax$ négyzetes alak $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mátrixa szimmetrikus, ezért a sajátértékei valósak és az A mátrix diagonalizálható egy Q ortogonális mátrixxal:

$$Q^t AQ = D = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n),$$

ahol λ_i az A sajátértékei. Az

$$x = Qy \tag{6.2.8}$$

változócserét eszközölve következik, hogy

$$\begin{aligned}
x^t A x &= (Qy)^t A (Qy) = y^t Q^t A Q y = y^t D y = \\
&= (y_1 \; y_2 \; ... \; y_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \\
&= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2
\end{aligned}$$

vagyis

$$q(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2. \tag{6.2.9}$$

6.25. Tétel. *(i)* $q(x) > 0 \Leftrightarrow \lambda_i > 0,\ \forall i = \overline{1,n}$;
(ii) $q(x) < 0 \Leftrightarrow \lambda_i < 0,\ \forall i = \overline{1,n}$;
(iii) $q(x) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_i \geq 0,\ \forall i = \overline{1,n}$;
(iv) $q(x) \leq 0 \Leftrightarrow \lambda_i \leq 0,\ \forall i = \overline{1,n}$;
(v) q *indefinit* $\Leftrightarrow \exists k, l$ *indexek ú.h.* $\lambda_k \lambda_l < 0$.

6.26. Példa. $q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 0 \to X = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 5 \to Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \Longrightarrow Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ $\Rightarrow Q^t A Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = D \Rightarrow q(y) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 5y_2^2 \geq 0$ (PSz). Az x és y változók közötti kapcsolatot a (6.2.8) transzformációból kapjuk

$$x = Qy = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} y$$

vagyis

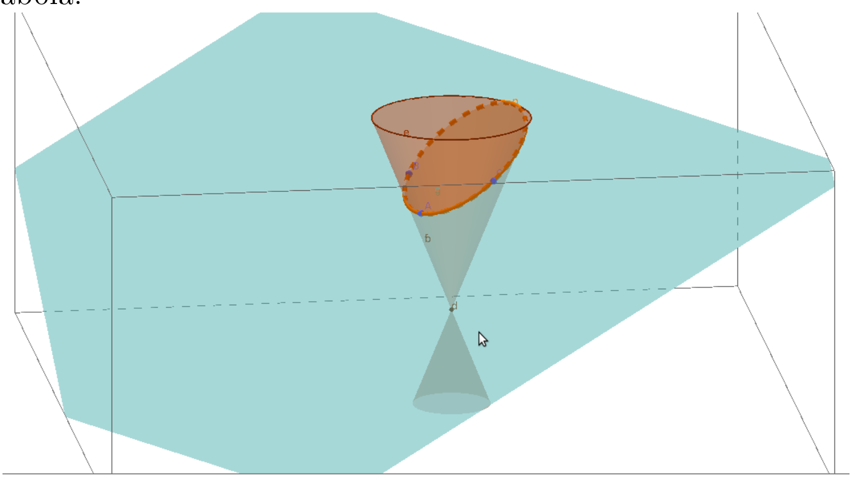
$$\begin{cases} x_1 = & \frac{2}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_2 \\ x_2 = & \frac{-1}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_2 \end{cases}.$$

Mivel Q ortogonális következik, hogy $Q^{-1} = Q^t$, tehát $y = Q^t x$, ahonnan kifejezhető az y változó:

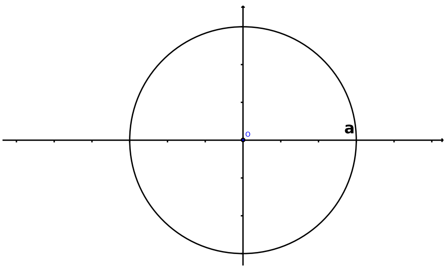
$$\begin{cases} y_1 = & \frac{2}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}x_2 \\ y_2 = & \frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}x_2 \end{cases}.$$

6.3. Alkalmazások: kúpszeletek

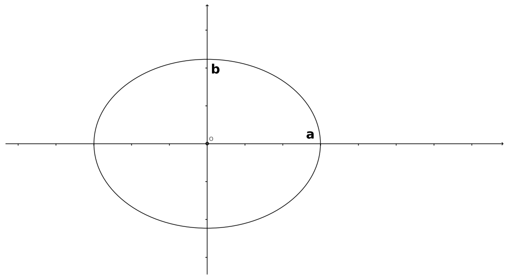
Egy kúp metszete egy síkkal lehet: ellipszis (kör), hiperbola, parabola.



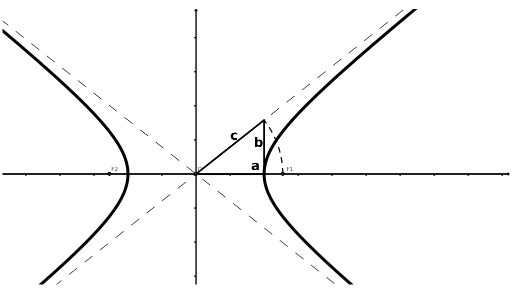
Ezeket (nemelfajult) kúpszeleteknek nevezzük. Az alábbi ábrákon láthatóak az említett görbék és a kanonikus egyenletük.



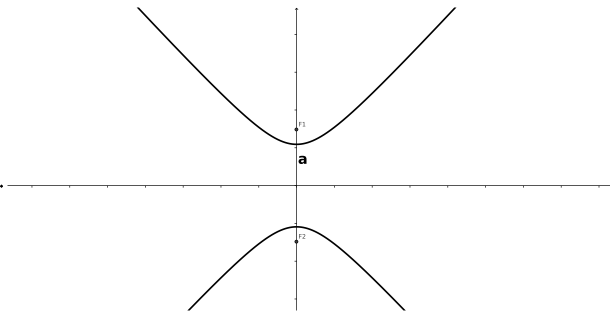
kör: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, $(a > 0)$



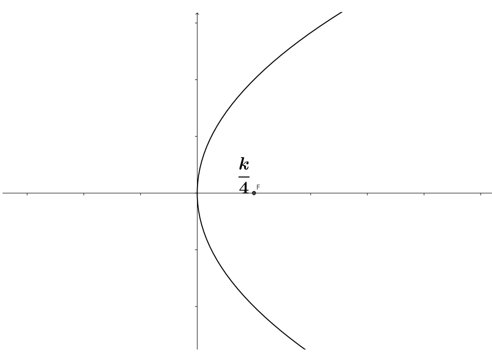
ellipszis: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(a, b > 0)$



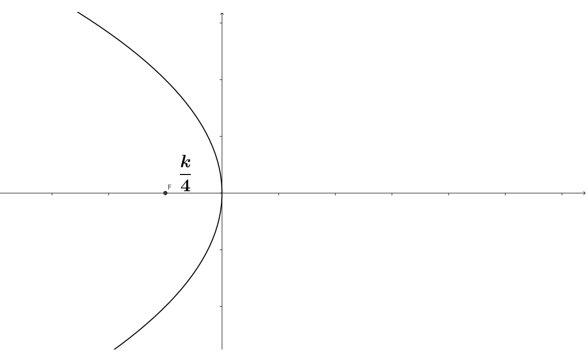
hiperbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,$(a, b > 0)$



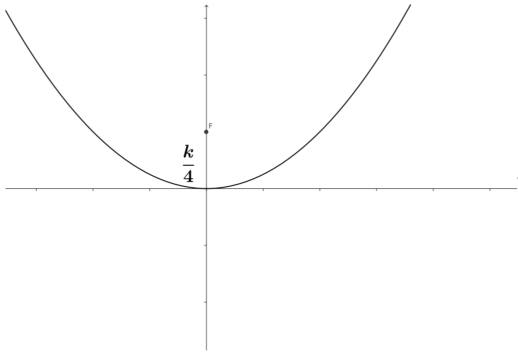
hiperbola: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$,$(a, b > 0)$



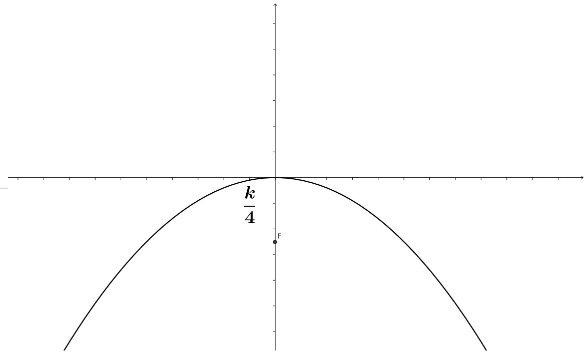
parabola: $y^2 = kx,\ k > 0$



parabola: $y^2 = kx,\ k < 0$



parabola: $x^2 = ky,\ k > 0$



parabola: $x^2 = ky,\ k < 0$

Az ismertetett elemi kúpszeletek sajátos alakjai az

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{6.3.1}$$

általános alaknak, mely átírható mátrix alakba

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0 \tag{6.3.2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{x}^t A \overline{x} + K\overline{x} + f = 0, \tag{6.3.3}$$

ahol

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}. \tag{6.3.4}$$

A

$$q(\overline{x}) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overline{x}^t A \overline{x},$$

kifejezést a kúpszelet négyzetes alakjának nevezük.

Mint láttuk, a kúpszeletek kanonikus képletében nem szerepel egyidőben x^2 és x, illetve y^2 és y tag. Ha a képletben előfordul, akkor teljes négyzeteket képzünk ami mértanilag a kúpszelet eltolásával ekvivalens.

Ha a képletben az xy vegyes szorzat szerepel, akkor a kúpszelet tengelyrendszere a standard alakhoz képest θ szöggel el van forgatva. Következésképpen, egy forgatással és egy transzlációval minden kúpszelet kanonikus alakra hozható.

Határesetekben a kúpszeletek egyenesekre, pontokra, üres halmazzá fajul. Ezeket elfajult kúpszeleteknek nevezzük. Pl. $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0 \ \rightarrow$ két összefutó egyenes, $x^2 - k^2 = 0$ vagy $y^2 - k^2 = 0$ $\rightarrow$két párhuzamos egyenes, $x^2 = 0$ vagy $y^2 = 0$ $\rightarrow$két egybeeső egyenes, $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0 \ \rightarrow$ egy pont (origó), $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = -1 \ \rightarrow$ üres halmaz.

6.27. Példa.

$$2x^2 + y^2 - 8x - 6y + 13 = 0$$

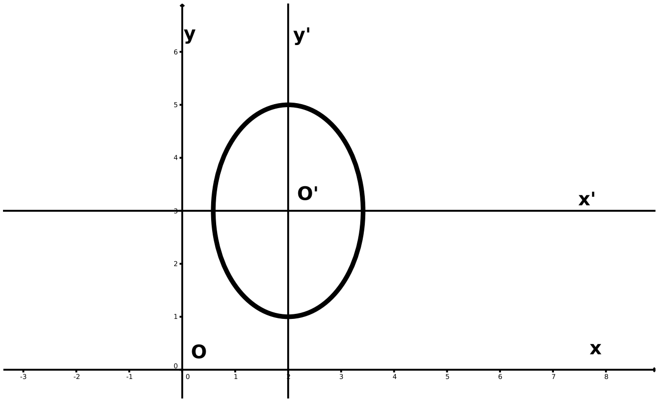
Ahhoz, hogy felísmerjük a kúpszeletet kanonikus alakba kell felírni:

$$2x^2 - 8x + y^2 - 6y + 13 = 2\left(x-2\right)^2 + \left(y-3\right)^2 - 4 = 0.$$

Az $x' = x - 2, \ y' = y - 3$ változócserét eszközölve kapjuk, hogy:

$$2x'^2 + y'^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{\sqrt{2}^2} + \frac{y'^2}{2^2} = 1,$$

vagyis a kúpszelet egy ellipszis melynek féltengelyei $\sqrt{2}$, illetve $2-$vel egyenlőek és az ellipszis középpontja $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ vektorral van eltolva.

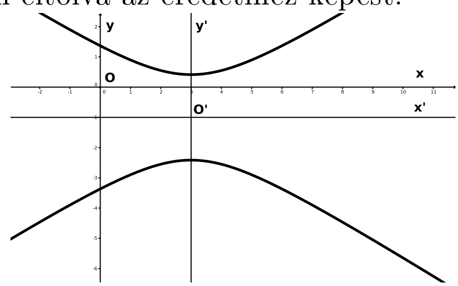


6.28. Példa.

$$2x^2 - 5y^2 - 12x - 10y + 23 = 0 \Leftrightarrow 2\left(x-3\right)^2 - 5\left(y+1\right)^2 + 10 = 0$$

$$\frac{\left(y+1\right)^2}{\sqrt{2}^2} - \frac{\left(x-3\right)^2}{\sqrt{5}^2} = 1 \Longleftrightarrow \frac{y'^2}{\sqrt{2}^2} - \frac{x'^2}{\sqrt{5}^2} = 1.$$

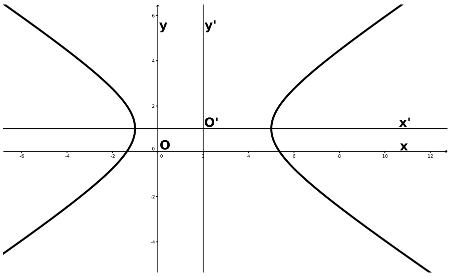
A kúpszelet egy hiperbola melynek tengelyrendszere $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ vektorral van eltolva az eredetihez képest.



6.29. Példa.

$$4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x-2\right)^2}{3^2} - \frac{\left(y-1\right)^2}{2^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{3^2} - \frac{y'^2}{2^2} = 1.$$

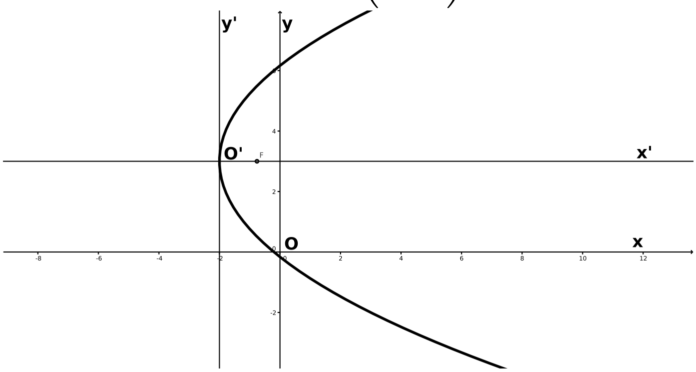
A hiperbola tengelyrendszere $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorral van eltolva:



6.30. Példa.

$$y^2 - 5x - 6y - 1 = 0 \Leftrightarrow (y-3)^2 = 5(x+2) \Leftrightarrow y'^2 = 5x'.$$

A parabola tengelyrendszere $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ vektorral van eltolva:



A vegyes szorzat kiküszöböléséhez a négyzetes alakot kanonikus alakra hozzuk a sajátérték-sajátvektor módszerrel.

Ennek érdekében a

$$\overline{x} = Q \cdot \overline{x'} \tag{6.3.5}$$

transzformációt (forgatást) alkalmazzuk, ahol Q a kúpszelet $q(\overline{x}) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ négyzetes alakjának az ortogonális mátrixa: $Q^{-1}AQ = Q^tAQ = diag.$

A forgatást körüljárási irányt megtartónak nevezük ha

$$\det Q = 1,$$

ezért szükség esetén (ha $\det Q = -1$) két oszlopot felcserélünk, vagy az első oszlop előjelét megváltoztatjuk.

Tehát, ha $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ akkor

$$Q^t A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{6.3.6}$$

ahol λ_1, λ_2 az A mátrix sajátértékei, ahonnan

$$q(\overline{x}) = \overline{x}^t A \overline{x} = \left(Q\overline{x'}\right)^t A \left(Q\overline{x'}\right) = \overline{x'}^t Q^t A Q \overline{x'} =$$

$$= \overline{x'}^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \overline{x'} = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2,$$

vagyis $x'y'$ vegyes szorzat mentes.

Az $X'OY'$ elforgatott tengelyrendszer θ szögét a $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ forgatási mátrixból kapjuk.

6.31. Példa. $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 36 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = (\lambda - 4)(\lambda - 9) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 9.$$

$$\lambda_1 = 4 \leftrightarrow\ X = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda_2 = 9 \leftrightarrow\ Y = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

A sajátvektorokból kiindulva a $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ ortogonális (forgatási) mátrixot kapjuk amelynek determinánsa $=1$, tehát a (6.3.5) képletnek megfelelő transzformáció:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Behelyettesítve az eredeti egyenletbe következik, hogy:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 36 = 0$$

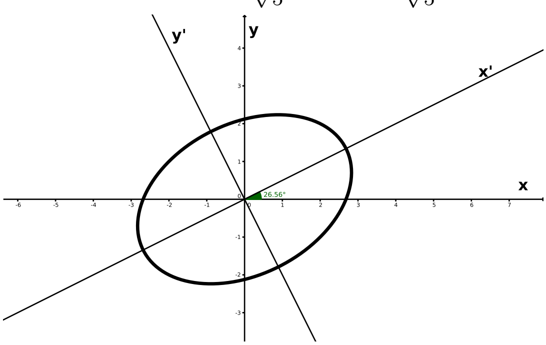
$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 36 = 0 \Longleftrightarrow 4x'^2 + 9y'^2 = 36.$$

Ismerve, hogy $Q^t AQ = diag(\lambda_1, \lambda_2)$, a $Q^t AQ$ szorzást nem szükséges elvégezni, viszont fontos, hogy a sajátértékek sorrendje megfeleljen a sajátvektorok sorrendjével.

A kúpszelet kanonikus alakja

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

ami egy 3 és 2 féltengelyű ellipszis. A θ szöget a Q forgatási mátrixából számítjuk ki: $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \simeq 26.565°$.



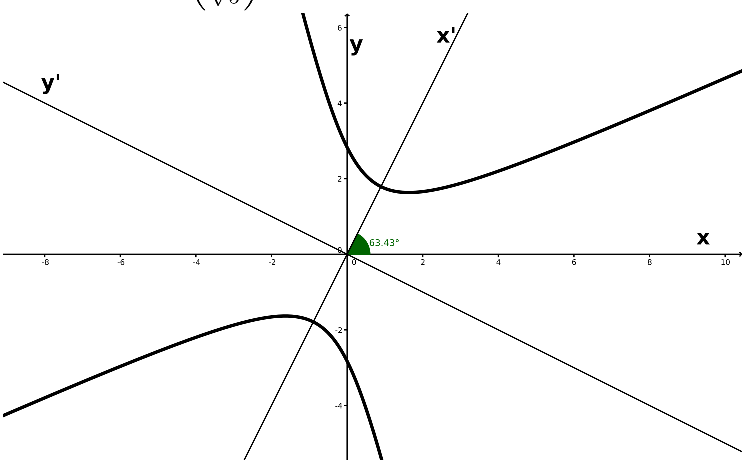
6.32. PÉLDA. $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -2 \leftrightarrow X = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 3 \leftrightarrow Y = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tehát a forgatást a $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ $(\det Q = 1)$ ortogonális mátrixxal végezzük $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 8 &= 0 \\ -2(x')^2 + 3(y')^2 + 8 &= 0 \\ \frac{x'^2}{2^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{\frac{8}{3}}^2} &= 1 \end{aligned}$$

A θ szöget a Q forgatási mátrixából számítjuk ki: $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \simeq 1.1071 rad = 63.432°$.



Irodalomjegyzék

[1] Anton H., Rorres C., Elementary linear algebra with applications,(10. ed.) Wiley, 2011.

[2] Davaadorzsin M., Valós lineáris algebra és lineáris programozás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2001.

[3] Demmel J.W., Applied numerical linear algebra, SIAM, 1997.

[4] Finta B., Kiss E., Bartha Zs.: Algebrai struktúrák-feladatgyűjtemény, Scientia Kiadó, Kolozsvár, 2006.

[5] Freud R., Lineáris algebra, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2001.

[6] Fried E., Klasszikus és lineáris algebra, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.

[7] Golub G., van Loan Ch., Matrix computations, Johns Hopkins Univ. Press, 2012.

[8] Klukovits L., Klasszikus és lineáris algebra, Polygon Jegyzettár, 1999.

[9] Kovács A., Alkalmazott matematika a közgazdaságtanban. Lineáris algebra, Scientia Kiadó, 2002.

[10] Marcus A., Lineáris algebra-egyetemi jegyzet, Ábel Kiadó, Kolozsvár, 2001.

[11] Meyer C.D., Matrix analysis and applied linear algebra, SIAM, 2000.

[12] Nicholson W.K., Linear algebra with applications, PWS Boston, 1995.

[13] Obádovics Gy., Lineáris algebra példákkal, Scolar Kiadó, 2001.

[14] Robinson D.J., A course in linear algebra with applications, World Scientific, 2006.

[15] Robbiano L., Linear algebra for everyone, Springer, 2011.

[16] Scharnitzky V., Vektorgeometria és lineáris algebra, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.

[17] Strang G., Linear algebra and its applications, (4. ed.), Cengage Learning, 2005.