2. Fejezet

Háromfázisú áramrendszerek

A gyakorlatban annyira szerteágazóvá vált a háromfázisú feszültség/ áramrendszer használata, hogy ennek a jegyzetnek a keretein messzemenően túlmutatna az, hogy összefoglaljunk minden lehetséges konfigurációt. Azonban arra lehetőség van, hogy az alapokkal megismerkedjünk, majd a megszerzett ismereteket megfelelően felhasználhassuk a későbbi gyakorlati vagy éppen elméleti problémák megoldására.

Tárgyalásunkat több részre kell osztanunk. Az első részben beszélünk a szimmetrikus háromfázisú rendszerekről, ezen belül a csillagkapcsolású nullvezetékes- és nullvezeték nélküli rendszerekről, majd a deltakapcsolású rendszerekről. A második részben az nem-szimmetrikus háromfázisú rendszerek problémáját tárgyaljuk. Beszélünk a szimmetrikus komponensekről, a szimmetrikus komponensekre való felbontásról, amely az ún. Fortescue-tétel nevet viseli. Ugyanakkor említést teszünk a nem-szimmetrikus elektromotoros feszültségrendszer és nem-szimmetrikus terhelés esetéről.

2.1. Szimmetrikus háromfázisú áramrendszerek.

Szimmetrikus feszültségrendszerről beszélünk abban az esetben, amikor a háromfázisú generátor mindhárom fázisfeszültsége azonos amplitúdóval rendelkezik, a fázisok között pedig rendre $2\pi/3$ a fáziskülönbség. Ahogy az előző fejezetben már említettük ezek lehetnek direkt vagy inverz feszültségrendszerek is. Tekintsünk az alábbiakban egy olyan háromfázisú generátort, amely direkt háromfázisú feszültségrendszert állít elő (2.1)

$$\begin{cases} u_R = U_0 \sin \omega t \\ u_S = U_0 \sin\left(\omega t - \dfrac{2\pi}{3}\right) \\ u_T = U_0 \sin\left(\omega t - \dfrac{4\pi}{3}\right) = U_0 \sin\left(\omega t + \dfrac{2\pi}{3}\right) \end{cases} . \tag{2.1}$$

Ezek a feszültségek nem mások, mint a háromfázisú rendszer fázisfeszültségei. Ugyanez felhasználva az idevonatkozó Euler-képletet komplex alakban a (2.2) összefüggésekkel adható meg.

$$\begin{cases} \underline{u}_R = U_0 e^{j\omega t} \\ \underline{u}_S = U_0 e^{j\omega t} e^{-j2\pi/3} = a^2 U_0 e^{j\omega t} \\ \underline{u}_T = U_0 e^{j\omega t} e^{-j4\pi/3} = a U_0 e^{j\omega t} \end{cases}$$, melyeknek komplex amplitúdói,

$$\begin{cases} \underline{U}_{R0} = U_0 \\ \underline{U}_{S0} = a^2 U_0 \\ \underline{U}_{T0} = a U_0 \end{cases}$$ és komplex effektív értékei $$\begin{cases} \underline{U}_R = U_0 \big/ \sqrt{2} = U \\ \underline{U}_S = a^2 U_0 \big/ \sqrt{2} = a^2 U \\ \underline{U}_T = a U_0 \big/ \sqrt{2} = a U \end{cases}$$, (2.2)

ahol

$$a = e^{j2\pi/3} = \cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

és

$$a^2 = e^{j4\pi/3} = \cos\frac{4\pi}{3} + j\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2.1.1. Csillagkapcsolás

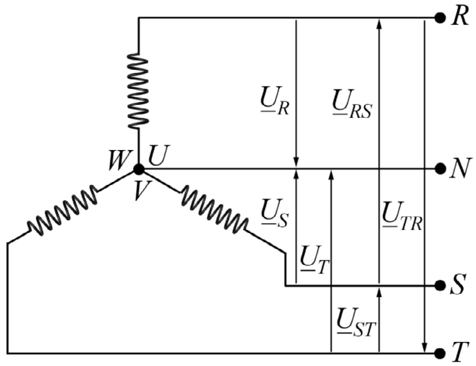
Az előző pontban vázolt direkt feszültségrendszert kapcsoljuk csillag alakzatba. A kapcsolást a 2.1 ábra szemlélteti.

Fázisfeszültségeket minden esetben a fázisvezetékek (*R, S, T*) és a nullvezeték (*N*, amennyiben létezik), vagy az *O* csillagpont között vehetünk le.

Figyelembe véve a (2.2) összefüggéseket egyszerű matematikai számítások elvégzésével könnyedén belátható, hogy szimmetrikus feszültségrendszer esetében a feszültségek összege nullával egyenlő.

$$\underline{U}_R + \underline{U}_S + \underline{U}_T = U\left(1 + a^2 + a\right) = 0$$

Két fázisvezeték között az ún. vonalfeszültséget vehetjük le. A 2.1 ábrán feltüntettük a vonalfeszültségeket, melyeket U_{RS}, U_{ST} és U_{TR}-el jelöltünk (megjegyzés: a rajzon komplex jelölésmódot használtunk, mivel a számításokat a komplex formalizmusban fogjuk végezni!).



2.1 ábra

Számítsuk ki a vonalfeszültségeket, a 2.1 ábrán jelzett konvenció szerint.

$$\underline{U}_{RS} = \underline{U}_R - \underline{U}_S = U\left(1-a^2\right) = U\left(1-\cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{U}{2}\left(3 + j\sqrt{3}\right)$$

$$\underline{U}_{ST} = \underline{U}_S - \underline{U}_T = U\left(a^2 - a\right) = -Uj\sqrt{3} \tag{2.3}$$

$$\underline{U}_{TR} = \underline{U}_T - \underline{U}_R = U\left(a-1\right) = \frac{U}{2}\left(-3 + j\sqrt{3}\right)$$

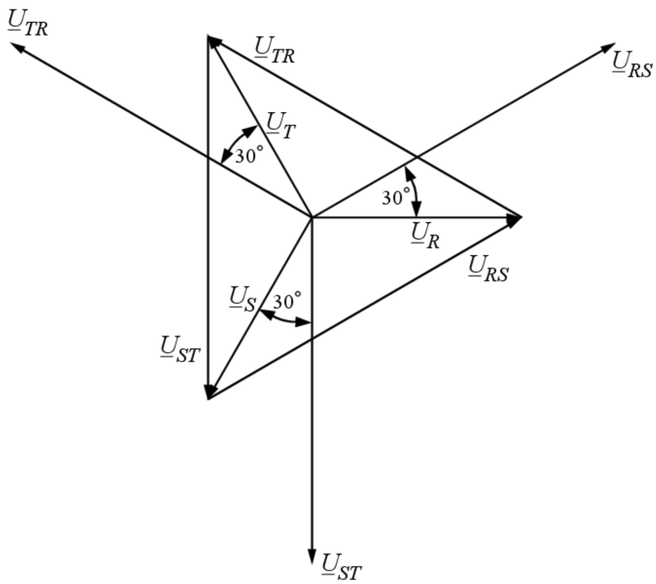
A továbbiakban meghatározzuk a vonalfeszültségek modulusait és fázisait.

$$U_{RS} = \left|\underline{U}_{RS}\right| = \frac{U}{2}\sqrt{9+3} = U\sqrt{3} \quad \textit{és} \quad \varphi_{RS} = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$U_{ST} = \left|\underline{U}_{ST}\right| = U\sqrt{3} \quad \textit{és} \quad \varphi_{ST} = \mathrm{arctg}\left(-\infty\right) = -\frac{\pi}{2} \tag{2.4}$$

$$U_{TR} = \left|\underline{U}_{TR}\right| = \frac{U}{2}\sqrt{9+3} = U\sqrt{3} \quad \textit{és} \quad \varphi_{TR} = \mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

A fázis- és vonalfeszültségeket a 2.2 fazorábrán szemléltetjük.



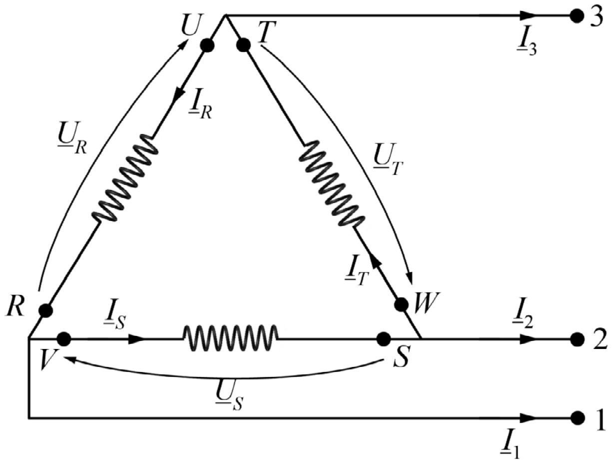
2.2 ábra

Látható az ábrán, hogy nemcsak a fázis-, hanem a vonalfeszültségek rendszere is szimmetrikus feszültségrendszert alkot. Az is megfigyelhető, hogy a vonalfeszültségek rendszere $\pi/6$ fázissal siet a fázisfeszültségekhez képest. Mivel a vonalfeszültségek fazorjai elcsúsztathatók, a 2.2 ábrán látható háromszög alakzatot lehet belőlük létrehozni. Ezt a háromszöget a vonalfeszültségek háromszögének nevezzük, ezt a továbbiakban sokszor fogjuk alkalmazni számításainkban. Továbbá észrevehetjük azt is, hogy abban az esetben, amikor a fázisfeszültségek szimmetrikusak, a vonalfeszültségek összege nullát ad, vagyis

$$\underline{U}_{RS} + \underline{U}_{ST} + \underline{U}_{TR} = U\left(1 + a^2 + a\right)\left(1 - 1\right) = 0 \quad . \qquad (2.5)$$

2.1.2. Háromszög- (delta) kapcsolás

Háromszög kapcsolás esetében a tekercsek ellentétes végeit összekapcsoljuk, és egy-egy vezetékkel kivezetjük a 2.3 ábrának megfelelően. Háromszögkapcsolásnál már csakis fázisfeszültségekről beszélhetünk, hiszen a kivezetések (vonalak) között éppen a tekercsek sarkai vannak, amelyről a fázisfeszültségeket vehetjük le. Azonban a háromszög-kapcsolásnál, a tekercsekben az ún. fázisáramok folynak (komplex formalizmusban $\underline{I}_R, \underline{I}_S, \underline{I}_T$) a csomóponttörvénynek megfelelően pedig a vonalvezetékekben az ún. vonaláramok folynak (komplex formalizmusban $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_2$).



2.3 ábra

A vonaláramokat kiszámítjuk a csomóponttörvény segítségével. Feltételezzük, hogy a háromfázisú feszültségrendszer szimmetrikus, ennek megfelelően a fázisáramok is szimmetrikus rendszert alkotnak.

- *VR* csomópont $\underline{I}_1 = \underline{I}_R - \underline{I}_S$
- *WS* csomópont $\underline{I}_2 = \underline{I}_S - \underline{I}_T$ (2.6)
- *UT* csomópont $\underline{I}_3 = \underline{I}_T - \underline{I}_R$

Azonnal észre lehet venni a 2.6 összefüggésekből, hogy a vonaláramok összege nulla.

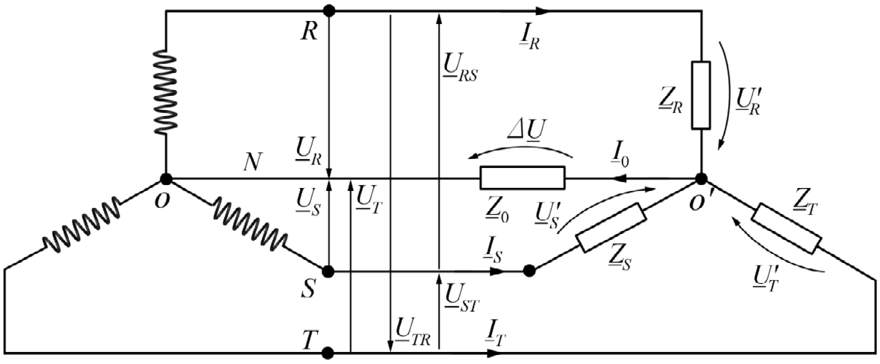
$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_R - \underline{I}_S + \underline{I}_S - \underline{I}_T + \underline{I}_T - \underline{I}_R = 0 \quad (2.7)$$

2.2. Nullvezetékes (négyvonalas) háromfázisú áramrendszer.

Általános esetben tekintsünk egy nem-szimmetrikus csillagkapcsolású háromfázisú feszültségrendszert (ismert a fázis- és vonalfeszültségek rendszere) és egy tetszőleges csillagkapcsolású terhelést ($\underline{Z}_R, \underline{Z}_S, \underline{Z}_T$). Vezessük ki a csillagpontokat és kössük össze őket, így nyerve az ún. nullvezetéket. Tekintünk ezen a nullvezetéken is egy terhelést ($\underline{Z}_0$). Ilyen áramkört szemléltet a 2.4 ábra.

Első feladatunk legyen a két csillagpont közötti potenciálkülönbség meghatározása. Ehhez a 2.4 ábra alapján ki tudjuk számítani a fázisfeszültségeket:

$$\begin{cases} -\underline{U}_R + \underline{I}_R \underline{Z}_R + \Delta\underline{U} = 0 \\ -\underline{U}_S + \underline{I}_S \underline{Z}_S + \Delta\underline{U} = 0 \\ -\underline{U}_T + \underline{I}_T \underline{Z}_T + \Delta\underline{U} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{U}_R - \Delta\underline{U} = \underline{I}_R \underline{Z}_R \\ \underline{U}_S - \Delta\underline{U} = \underline{I}_S \underline{Z}_S \\ \underline{U}_T - \Delta\underline{U} = \underline{I}_T \underline{Z}_T \end{cases} \quad (2.8)$$



2.4 ábra

Mivel $\Delta\underline{U} = \underline{I}_0\underline{Z}_0$, amit ha elosztunk $\underline{Z}_0$- val a $\underline{Y}_0\Delta\underline{U} = \underline{I}_0$ összefüggést kapjuk, ahol $\underline{Y}_0 = 1/\underline{Z}_0$ a nullvezeték admittanciája. A csillagpontokra érvényes a csomóponttétel, miszerint

$$\underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = \underline{I}_0\,. \tag{2.9}$$

Osszuk el a 2.8 összefüggés jobboldali tagját rendre fázisvezetéken található impedanciákkal, majd adjuk össze őket. Ez tulajdonképpen eredményképpen a 2.9 egyenletet adja.

$$\begin{cases}\underline{U}_R - \Delta\underline{U} = \underline{I}_R\underline{Z}_R\\ \underline{U}_S - \Delta\underline{U} = \underline{I}_S\underline{Z}_S\\ \underline{U}_T - \Delta\underline{U} = \underline{I}_T\underline{Z}_T\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\underline{Y}_R\underline{U}_R - \underline{Y}_R\Delta\underline{U} = \underline{I}_R\\ \underline{Y}_S\underline{U}_S - \underline{Y}_S\Delta\underline{U} = \underline{I}_S\\ \underline{Y}_T\underline{U}_T - \underline{Y}_T\Delta\underline{U} = \underline{I}_T\end{cases} \Rightarrow \tag{2.10}$$

$$\underline{Y}_R\underline{U}_R + \underline{Y}_S\underline{U}_S + \underline{Y}_T\underline{U}_T - \Delta\underline{U}\left(\underline{Y}_R + \underline{Y}_S + \underline{Y}_T\right) = \underline{Y}_0\Delta\underline{U}$$

tehát

$$\Delta\underline{U} = \frac{\underline{Y}_R\underline{U}_R + \underline{Y}_S\underline{U}_S + \underline{Y}_T\underline{U}_T}{\underline{Y}_R + \underline{Y}_S + \underline{Y}_T + \underline{Y}_0} \tag{2.11}$$

A $\Delta\underline{U}$ feszültséget a szakirodalomban szokás nullponti potenciál-eltolódásnak is nevezni.

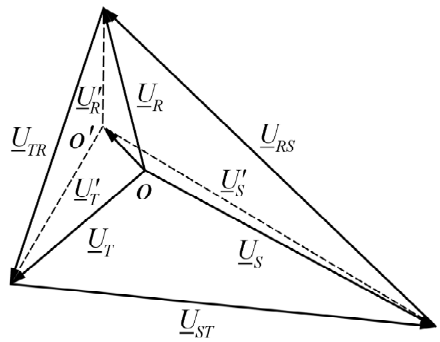
Figyelembe véve a 2.8 összefüggéseket meghatározhatjuk a fázisvezeték között impedanciákon megjelenő feszültségeket ($\underline{U}'_R, \underline{U}'_S, \underline{U}'_T$).

$$\begin{cases}\underline{U}'_R = \underline{I}_R\underline{Z}_R = \underline{U}_R - \Delta\underline{U}\\ \underline{U}'_S = \underline{I}_S\underline{Z}_S = \underline{U}_S - \Delta\underline{U}\\ \underline{U}'_T = \underline{I}_T\underline{Z}_T = \underline{U}_T - \Delta\underline{U}\end{cases} \tag{2.12}$$

Innen a keresett feszültségek a 2.13 egyenletekkel számíthatók ki.

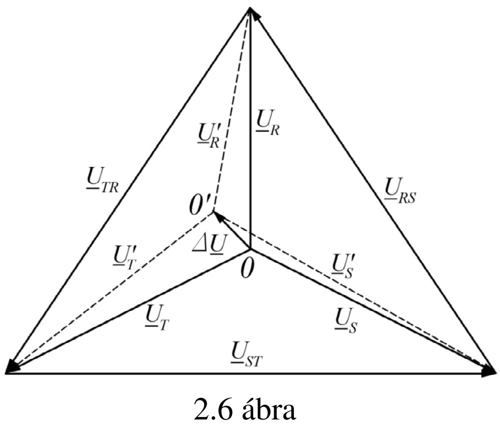
$$\begin{cases} \underline{U}'_R = \dfrac{\underline{Y}_S(\underline{U}_R - \underline{U}_S) - \underline{Y}_T(\underline{U}_T - \underline{U}_R) + \underline{U}_R\underline{Y}_0}{\underline{Y}_R + \underline{Y}_S + \underline{Y}_T + \underline{Y}_0} \\ \underline{U}'_S = \dfrac{\underline{Y}_T(\underline{U}_S - \underline{U}_T) - \underline{Y}_R(\underline{U}_R - \underline{U}_S) + \underline{U}_S\underline{Y}_0}{\underline{Y}_R + \underline{Y}_S + \underline{Y}_T + \underline{Y}_0} \\ \underline{U}'_T = \dfrac{\underline{Y}_R(\underline{U}_T - \underline{U}_R) - \underline{Y}_S(\underline{U}_S - \underline{U}_T) + \underline{U}_T\underline{Y}_0}{\underline{Y}_R + \underline{Y}_S + \underline{Y}_T + \underline{Y}_0} \end{cases} \qquad (2.13)$$

A 2.11., 2.13 és a kiindulási háromfázisú nem-szimmetrikus feszültségrendszer fazorábráját a 2.5 ábra szemlélteti. Megjegyezzük, hogy az $\underline{U}_R$, $\underline{U}_S$, $\underline{U}_T$ feszültségek fazorjai a megfelelő szögek szögfelezőinek irányába mutatnak. Matematikai bizonyítását nem végezzük el!



2.5 ábra

Abban az esetben, amikor a generátor szimmetrikus feszültségrendszert biztosít, de a terhelés nem-szimmetrikus, a 2.5 ábra az alábbi módon változik (2.6 ábra).

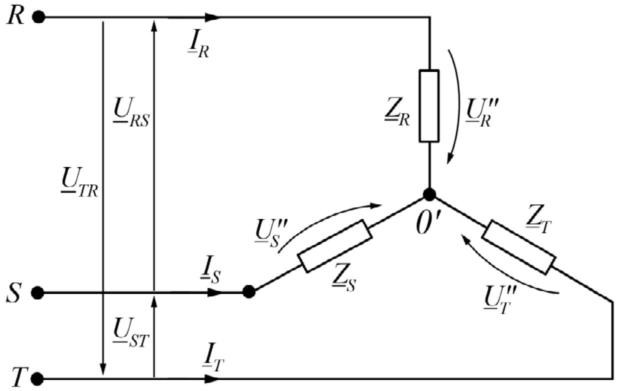


2.6 ábra

A 2.6 ábrából további érdekes információkat olvashatunk ki. Ilyen például az, hogy abban az esetben, amikor a nullvezeték impedanciája nulla ($\underline{Z}_0 = 0$), tehát admittanicája végtelen, a nullponti potenciál-eltolódás is nulla ($\Delta\underline{U} = 0$). Ez viszont azt jeleneti, hogy a szimmetrikus háromfázisú generátor esetén, ha a terhelés nem-szimmetrikus, a terhelésen megjelenő feszültségek szimmetrikusak ha a nullvezeték impedanciája nulla.

2.3. Háromvezetékes (nullvezeték nélküli) háromfázisú áramrendszer.

A háromvezetékes háromfázisú áramrendszernél, nem használunk nullvezetéket, így a 2.4 ábráról kivesszük azt, majd a 2.7 ábrán szemléltetett áramkörhöz jutunk, ahol a baloldalra nem rajzoltuk be a háromfázisú generátort, csak az ahhoz való csatlakozási pontokat hagytuk meg és bejelöltük a vonalfeszültségeket (ebben az esetben csak a vonalfeszültségeket tudjuk a hálózatba juttatni!)



2.7 ábra

Természetesen ebben az esetben az O' csillagpontra érvényes csomóponttörvény az alábbi formában írható fel.

$$\underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = 0 \tag{2.14}$$

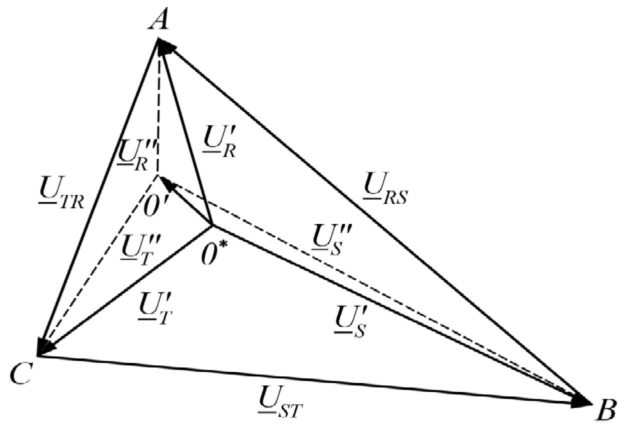
Figyelembe véve az Ohm-törvény szerint a vezetékekre elhelyezett impedanciákon megjelenő feszültségeket (2.7 ábra), $\underline{U}''_R = \underline{I}_R \underline{Z}_R$, $\underline{U}''_S = \underline{I}_S \underline{Z}_S$ és $\underline{U}''_T = \underline{I}_T \underline{Z}_T$, a fenti összefüggés az alábbi alakban írható fel

$$\frac{\underline{U}''_R}{\underline{Z}_R} + \frac{\underline{U}''_S}{\underline{Z}_S} + \frac{\underline{U}''_T}{\underline{Z}_T} = 0 \tag{2.15}$$

Abban az esetben, ha a fogyasztó szimmetrikus, vagyis $\underline{Z}_R = \underline{Z}_S = \underline{Z}_T \equiv \underline{Z}$, és az $\underline{U}''_R \equiv \underline{U}'_R$, $\underline{U}''_S \equiv \underline{U}'_S$ valamint $\underline{U}''_T \equiv \underline{U}'_T$ jelölésekkel a 2.15 egyenlet a következő alakba írható át

$$\frac{1}{Z}\left(\underline{U}'_R+\underline{U}'_S+\underline{U}'_T\right)=0 \qquad (2.16)$$

ami viszont nem jelenti önmagában azt, hogy az $\underline{U}'_R$, $\underline{U}'_S$, $\underline{U}'_T$ feszültségrendszer szimmetrikus volna. Visszatérve az eredeti feladatra, ábrázoljuk a 2.8 ábrán az $\underline{U}'_R$, $\underline{U}'_S$, $\underline{U}'_T$ feltételezett feszültségrendszer, az impedanciákon megjelenő $\underline{U}''_R$, $\underline{U}''_S$, $\underline{U}''_T$ feszültségrendszer és a generátor által szolgáltatott feszültségrendszer fazorjait. Csakúgy, mint a 2.1 alpont 2.5 ábrájánál itt is hasonló szerkesztést kell végezzünk az $\underline{U}'_R$, $\underline{U}'_S$, $\underline{U}'_T$ feszültségrendszer esetében.



2.8 ábra

Az ábrán az O^* pont az fogyasztó csillagpontjának potenciálját jelöli abban az esetben, amikor a feltételezett terhelés szimmetrikus.

Ha a fogyasztó kiegyensúlyozatlan, azaz aszimmetrikus, a 2.7 ábrának megfelelő feszültségek jönnek létre, amely azt is jelenti, hogy a fogyasztó csillagpontjának potenciálja megváltozik, ezt O'-el jelöljük a 2.8 ábrán. Ebben az esetben a fogyasztón megjelenő feszültségek összege nullától különböző, vagyis

$$\underline{U}''_R+\underline{U}''_S+\underline{U}''_T\neq 0\,. \qquad (2.17)$$

Egy egyszerű matematikai fogással meghatározhatjuk a fogyasztó impedanciáin megjelenő feszültségeket. Ehhez meghatározzuk a csillagpontnak a feltételezett szimmetrikus terhelés esetén, illetve a valós terhelés esetén létrejövő potenciáljának különbségét. Ez az előző pontban bevezetett nullponti potenciál-eltolódáshoz hasonló mennyiség, amely természetesen nem mérhető. A számításokat a 2.8 fazorábra segítségével könnyedén elvégezhetjük. Tekintsük az $O^*O'A$, $O^*O'B$ és $O^*O'C$ háromszöget, melyekben külön-külön a feszültségek összege nullát kell adjon

$$\begin{cases} \Delta\underline{U} + \underline{U}_R^{''} - \underline{U}_R^{'} = 0 \\ \Delta\underline{U} + \underline{U}_S^{''} - \underline{U}_S^{'} = 0 \\ \Delta\underline{U} + \underline{U}_T^{''} - \underline{U}_T^{'} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{U}_R^{''} = \underline{U}_R^{'} - \Delta\underline{U} \\ \underline{U}_S^{''} = \underline{U}_S^{'} - \Delta\underline{U} \\ \underline{U}_T^{''} = \underline{U}_T^{'} - \Delta\underline{U} \end{cases} \tag{2.18}$$

A 2.15 csomóponttörvényt a 2.18 összefüggésekből könnyedén előállíthatjuk, ha a jobboldali összefüggéseket elosztjuk rendre a megfelelő admittanciákkal, majd ezeket összegezzük (2.19),

$$\begin{cases} \underline{Y}_R\underline{U}_R^{''} = \underline{Y}_R\underline{U}_R^{'} - \underline{Y}_R\Delta\underline{U} \\ \underline{Y}_S\underline{U}_S^{''} = \underline{Y}_S\underline{U}_S^{'} - \underline{Y}_S\Delta\underline{U} \\ \underline{Y}_T\underline{U}_T^{''} = \underline{Y}_S\underline{U}_T^{'} - \underline{Y}_S\Delta\underline{U} \end{cases} \tag{2.19}$$

mivel a csomóponttörvény szerint

$$\underline{Y}_R\underline{U}''_R + \underline{Y}_S\underline{U}''_S + \underline{Y}_T\underline{U}''_T = 0$$

$$\underline{Y}_R\underline{U}'_R + \underline{Y}_S\underline{U}'_S + \underline{Y}_S\underline{U}'_T - (\underline{Y}_R + \underline{Y}_S\underline{Y}_S)\Delta\underline{U} = 0$$

végül a keresett nullponti potenciál-eltolódás

$$\Delta\underline{U} = \frac{\underline{Y}_R\underline{U}'_R + \underline{Y}_S\underline{U}'_S + \underline{Y}_S\underline{U}'_T}{\underline{Y}_R + \underline{Y}_S + \underline{Y}_T}. \tag{2.20}$$

A kapott $\Delta\underline{U}$ mennyiséget visszahelyettesítjük a 2.18 második egyenletrendszerébe és meghatározzuk a fogyasztón megjelenő feszültségeket.

$$\begin{aligned} \underline{U}''_R &= \frac{\underline{Y}_S(\underline{U}'_R - \underline{U}'_S) - \underline{Y}_T(\underline{U}'_T - \underline{U}'_R)}{\underline{Y}_R + \underline{Y}_S + \underline{Y}_T} = \frac{\underline{Y}_S\underline{U}_{RS} - \underline{Y}_T\underline{U}_{TR}}{\underline{Y}_R + \underline{Y}_S + \underline{Y}_T} \\ \underline{U}''_S &= \frac{\underline{Y}_T(\underline{U}'_S - \underline{U}'_T) - \underline{Y}_R(\underline{U}'_R - \underline{U}'_S)}{\underline{Y}_R + \underline{Y}_S + \underline{Y}_T} = \frac{\underline{Y}_T\underline{U}_{ST} - \underline{Y}_R\underline{U}_{RS}}{\underline{Y}_R + \underline{Y}_S + \underline{Y}_T} \\ \underline{U}''_T &= \frac{\underline{Y}_R(\underline{U}'_T - \underline{U}'_R) - \underline{Y}_S(\underline{U}'_S - \underline{U}'_T)}{\underline{Y}_R + \underline{Y}_S + \underline{Y}_T} = \frac{\underline{Y}_R\underline{U}_{TR} - \underline{Y}_S\underline{U}_{ST}}{\underline{Y}_R + \underline{Y}_S + \underline{Y}_T} \end{aligned}. \tag{2.21}$$

Az impedanciák felhasználásával az összefüggéseket az alábbi alakra hozhatjuk (2.22)

$$\begin{aligned} \underline{U}''_R &= \frac{(\underline{Z}_T\underline{U}_{RS} - \underline{Z}_S\underline{U}_{TR})\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R\underline{Z}_S + \underline{Z}_S\underline{Z}_T + \underline{Z}_T\underline{Z}_R} \\ \underline{U}''_S &= \frac{(\underline{Z}_R\underline{U}_{ST} - \underline{Z}_T\underline{U}_{RS})\underline{Z}_S}{\underline{Z}_R\underline{Z}_S + \underline{Z}_S\underline{Z}_T + \underline{Z}_T\underline{Z}_R} \\ \underline{U}''_T &= \frac{(\underline{Z}_S\underline{U}_{TR} - \underline{Z}_R\underline{U}_{ST})\underline{Z}_T}{\underline{Z}_R\underline{Z}_S + \underline{Z}_S\underline{Z}_T + \underline{Z}_T\underline{Z}_R} \end{aligned}. \tag{2.22}$$

Abban az esetben, amikor a fogyasztó szimmetrikus ($\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3$) a fogyasztón létrejövő feszültségeket sokkal egyszerűbb formában számolhatjuk ki (2.23).

$$\begin{aligned}\underline{U}''_R &= \frac{\underline{U}_{RS} - \underline{U}_{TR}}{3}\\ \underline{U}''_S &= \frac{\underline{U}_{ST} - \underline{U}_{RS}}{3}\\ \underline{U}''_T &= \frac{\underline{U}_{TR} - \underline{U}_{ST}}{3}\end{aligned} \quad . \qquad (2.23)$$

Ez egyúttal azt is jelenti, hogy a 2.23 feszültségrendszer megegyezik a számítások elvégzéséhez bevezetett feltételezett $\underline{U}'_R$, $\underline{U}'_S$, $\underline{U}'_T$ feszültségrendszerrel.

$$\begin{aligned}\underline{U}''_R &= \frac{\underline{U}_{RS} - \underline{U}_{TR}}{3} \equiv \underline{U}'_R\\ \underline{U}''_S &= \frac{\underline{U}_{ST} - \underline{U}_{RS}}{3} \equiv \underline{U}'_S\\ \underline{U}''_T &= \frac{\underline{U}_{TR} - \underline{U}_{ST}}{3} \equiv \underline{U}'_T\end{aligned} \quad . \qquad (2.24)$$

Fontos megjegyeznünk, hogy amennyiben a vonalfeszültségek szimmetrikusak, az $\underline{U}'_R$, $\underline{U}'_S$, $\underline{U}'_T$ feszültségrendszer is szimmetrikus, ha pedig a fogyasztó is szimmetrikus, akkor 2.20-ból következik, hogy

$$\Delta\underline{U} = \frac{\underline{Y}\left(\underline{U}'_R + \underline{U}'_S + \underline{U}'_T\right)}{\underline{Y}} = 0 \qquad (2.25)$$

tehát a fogyasztóban a fázisfeszültségek is szimmetrikusak. Ebből következik például, hogy a gyakorlatban csak a szimmetrikus fogyasztókat tápláljuk be nullvezeték nélkül!

2.4. Aszimmetrikus háromfázisú áramrendszerek. Szimmetrikus komponensek módszere – Fortescue-tétel.

A háromfázisú áramkörökkel való számítások sok esetben kényelmetlen, hosszadalmas munkát jelentenek. Gyakran használjuk emiatt az ún. szimmetrikus tényezőkre való bontást, mely nagymértékben egyszerűsíti, kényelmessé teszi a számításokat. Ennek a módszernek az alapját az ún. Fortescue-tétel képezi. A továbbiakban ezzel a tétellel, majd a szimmetrikus összetevők módszerével ismerkedünk meg, majd néhány alkalmazást ismertetünk.

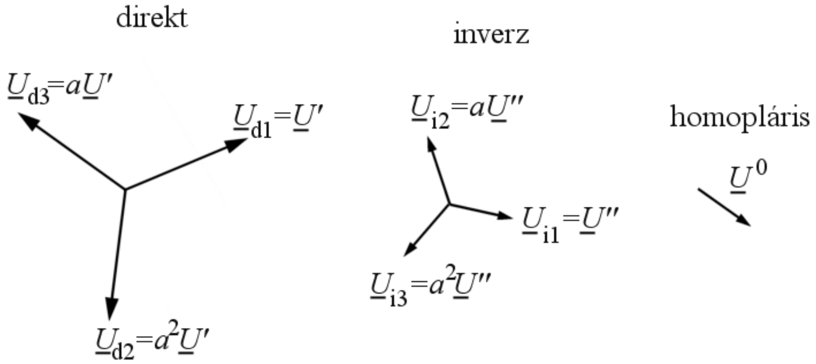
2.4.1. A Fortescue-tétel.

A szimmetrikus háromfázisú feszültségrendszerekről már említést tettünk az 1.2.1.2. alpontban, majd összefoglaltuk ennek a fejezetnek az elején is. Említettük, hogy létrehozhatunk direkt- és inverz feszültségrendszereket, amelyek mindegyikében minden fázis ugyanazzal az amplitúdóval rendelkezik és ugyanakkora, egymáshoz képest 120°-os fáziseltolásban vannak. A két feszültségrendszer csak abban különbözik egymástól, hogy a fázisok milyen sorrendben követik egymást. A szimmetrikus összetevők módszerének alapját szintén ilyen szimmetrikus feszültségrendszerek alkotják.

Minden aszimmetrikus feszültségrendszert három szimmetrikus komponens összegekét állíthatunk elő, ahol az egyik rendszer a már ismert direkt-, a második az inverz-, a harmadik pedig egy eddig nem ismert homopoláris feszültségrendszer. Ez utóbbi tulajdonképpen nem más, mint egy a komplex síkban adott fazor. Az előbbi kijelentés tulajdonképpen nem más, mint a Fortescue-tétel. A 2.9 ábra a szimmetrikus komponensek fazorábráit szemlélteti.

Direkt feszültségrendszer	Inverz feszültségrendszer	
$\underline{U}_{d1} \equiv \underline{U}'$ $\underline{U}_{d2} = a^2\underline{U}'$ $\underline{U}_{d3} = a\underline{U}'$	$\underline{U}_{i1} \equiv \underline{U}''$ $\underline{U}_{i2} = a\underline{U}''$ $\underline{U}_{i3} = a^2\underline{U}''$	
Trigonometrikus alakban	Trigonometrikus alakban	(2.26)
$u_{d1} \equiv U_{01} \sin \omega t$ $u_{d2} \equiv U_{01} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$ $\underline{u}_{d3} = U_{01} \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$	$u_{d1} \equiv U_{02} \sin \omega t$ $u_{d2} \equiv U_{02} \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$ $u_{d3} = U_{02} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$	

ahol $U' = U_{01}/\sqrt{2}$ és $U'' = U_{02}/\sqrt{2}$.



2.9 ábra

A Fortescue-tételt matematikailag két alakot használhatunk. Az egyik (2.27), a szimmetrikus komponensek függvényében meghatározza az aszimmetrikus feszültségrendszert, a másik pedig (2.28) a tulajdonképpeni szimmetrikus tényezőkre való bontást fejezi ki (a szimmetrikus összetevőket fejezi ki az aszimmetrikus feszültségek függvényében)

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}^0 + \underline{U}^{'} + \underline{U}^{''} \\ \underline{U}_2 = \underline{U}^0 + a^2\underline{U}^{'} + a\underline{U}^{''} \\ \underline{U}_3 = \underline{U}^0 + a\underline{U}^{'} + a^2\underline{U}^{''} \end{cases} \tag{2.27}$$

$$\begin{cases} \underline{U}^0 = \dfrac{1}{3}\left(\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3\right) \\ \underline{U}^{'} = \dfrac{1}{3}\left(\underline{U}_1 + a\underline{U}_2 + a^2\underline{U}_3\right) \\ \underline{U}^{''} = \dfrac{1}{3}\left(\underline{U}_1 + a^2\underline{U}_2 + a\underline{U}_3\right) \end{cases} \tag{2.28}$$

A 2.27 összefüggés könnyedén felírható a 2.9 ábra segítségével, a 2.28 pedig az alábbi egyszerű meggondolás alapján számítható ki. Már az eddigiekben is használtuk az a operátor következő tulajdonságát: $a + a^2 + 1 = 0$. Ezt segítségül hívhatjuk a számításainkhoz.

Adjuk össze a 2.27 egyenletrendszer három egyenletét,

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 3\underline{U}^0 + \underline{U}^{'}\left(1 + a^2 + a\right) + \underline{U}^{''}\left(1 + a^2 + a\right) \tag{2.29}$$

ahonnan a hompoláris komponens

$$\underline{U}^0 = \frac{1}{3}\left(\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3\right). \tag{2.30}$$

Szorozzuk meg a 2.27 rendszer második egyenletét a-val, a harmadikat pedig a^2-el, majd a három egyenletet adjuk össze.

$$\underline{U}_1 + a\underline{U}_2 + a^2\underline{U}_3 = \underline{U}^0\left(1 + a + a^2\right) + \underline{U}^{'}\left(1 + a^3 + a^3\right) + \underline{U}^{''}\left(1 + a^2 + a^4\right) \tag{2.31}$$

Mivel $a^3 = 1$ és $a^4 = a$ következik, hogy

$$\underline{U}^{'} = \frac{1}{3}\left(\underline{U}_1 + a\underline{U}_2 + a^2\underline{U}_3\right). \tag{2.32}$$

Szorozzuk meg a 2.27 rendszer második egyenletét a^2-el, a harmadikat pedig a-val, majd a három egyenletet adjuk össze.

$$\underline{U}_1 + a^2\underline{U}_2 + a\underline{U}_3 = \underline{U}^0\left(1 + a^2 + a\right) + \underline{U}^{'}\left(1 + a^4 + a^2\right) + \underline{U}^{''}\left(1 + a^3 + a^3\right) \tag{2.33}$$

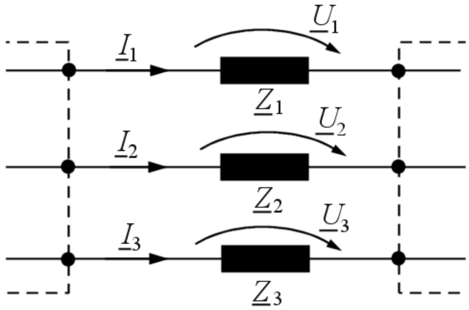
Mivel $a^3 = 1$ és $a^4 = a$ következik, hogy

$$\underline{U}^{''} = \frac{1}{3}\left(\underline{U}_1 + a^2\underline{U}_2 + a\underline{U}_3\right). \qquad (2.34)$$

Így egyszerűen meghatározhattuk a 2.28 rendszer egyenleteit. Természetesen meg lehet határozni másként is, pl. mátrix számítások segítségével, ahol inverz mátrix számítására van szükség. Az út járható, viszont sokkal több matematikai számítás elvégzését követeli meg, mint az előzőekben bemutatott egyszerű eljárás esetében.

2.4.2. A helyettesítő monofázisos kapcsolás alkalmazása.

Tekintsük egy háromfázisú áramkörben az alábbi áramköri részt (2.10 ábra).



2.10 ábra

Kiindulásként feltételezzük, hogy mind a terhelés, a terhelésen megjelenő feszültség és a rajtuk átfolyó áramok aszimmetrikusak. Feladatunk kapcsolatot teremteni az említett mennyiségek között. Ehhez írjuk fel az ábra szerinti jelölésekkel az Ohm-törvényeket mindhárom impedanciára.

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{I}_1\underline{Z}_1 \\ \underline{U}_2 = \underline{I}_2\underline{Z}_2 \\ \underline{U}_3 = \underline{I}_3\underline{Z}_3 \end{cases}. \qquad (2.35)$$

Mivel az áramokat aszimmetrikusaknak feltételeztük, megadhatjuk az alábbi formában (2.36).

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}^0 + \underline{I}^{'} + \underline{I}^{''} \\ \underline{I}_2 = \underline{I}^0 + a^2\underline{I}^{'} + a\underline{I}^{''} \\ \underline{I}_3 = \underline{I}^0 + a\underline{I}^{'} + a^2\underline{I}^{''} \end{cases} \qquad (2.36)$$

Helyettesítsük be a 2.36-ot a 2.35-be

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \left(\underline{I}^0 + \underline{I}^{'} + \underline{I}^{''}\right)\underline{Z}_1 \\ \underline{U}_2 = \left(\underline{I}^0 + a^2\underline{I}^{'} + a\underline{I}^{''}\right)\underline{Z}_2 \\ \underline{U}_3 = \left(\underline{I}^0 + a\underline{I}^{'} + a^2\underline{I}^{''}\right)\underline{Z}_3 \end{cases} . \tag{2.37}$$

Célunk meghatározni az ugyancsak aszimmetrikus feszültségrendszer komponenseit. Ehhez feltételezzük, hogy a szimmetrikus komponensek a Fortescue-tétel 2.28 alakjával adhatók meg.

$$\begin{cases} \underline{U}^0 = \frac{1}{3}\left(\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3\right) \\ \underline{U}^{'} = \frac{1}{3}\left(\underline{U}_1 + a\underline{U}_2 + a^2\underline{U}_3\right) \\ \underline{U}^{''} = \frac{1}{3}\left(\underline{U}_1 + a^2\underline{U}_2 + a\underline{U}_3\right) \end{cases} \tag{2.38}$$

Helyettesítsük be a 2.38 egyenletrendszer első egyenletébe a 2.37 egyenletrendszer egyenletei által definiált aszimmetrikus feszültségeket.

$$\underline{U}^0 = \frac{1}{3}\left[\left(\underline{I}^0 + \underline{I}^{'} + \underline{I}^{''}\right)\underline{Z}_1 + \left(\underline{I}^0 + a^2\underline{I}^{'} + a\underline{I}^{''}\right)\underline{Z}_2 + \left(\underline{I}^0 + a\underline{I}^{'} + a^2\underline{I}^{''}\right)\underline{Z}_3\right] \tag{2.39}$$

Csoportosítsuk a 2.39 összefüggésben a tagokat a homopoláris-, direkt- és inverz áramok szerint.

$$\underline{U}^0 = \frac{1}{3}\left[\left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3\right)\underline{I}^0 + \left(\underline{Z}_1 + a^2\underline{Z}_2 + a\underline{Z}_3\right)\underline{I}^{'} + \left(\underline{Z}_1 + a\underline{Z}_2 + a^2\underline{Z}_3\right)\underline{I}^{''}\right] \tag{2.40}$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket,

$$\begin{aligned} \underline{Z}^0 &= \frac{1}{3}\left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3\right) \\ \underline{Z}^{'} &= \frac{1}{3}\left(\underline{Z}_1 + a^2\underline{Z}_2 + a\underline{Z}_3\right) \\ \underline{Z}^{''} &= \frac{1}{3}\left(\underline{Z}_1 + a\underline{Z}_2 + a^2\underline{Z}_3\right) \end{aligned} \tag{2.41}$$

amelyek az aszimmetrikus terhelés szimmetrikus komponenseit jelölik.

Ezekkel a jelölésekkel a 2.40 összefüggés az alábbi alakra hozható

$$\underline{U}^0 = \frac{1}{3}\left[\underline{Z}^0\underline{I}^0 + \underline{Z}^{'}\underline{I}^{'} + \underline{Z}^{''}\underline{I}^{''}\right] \tag{2.42}$$

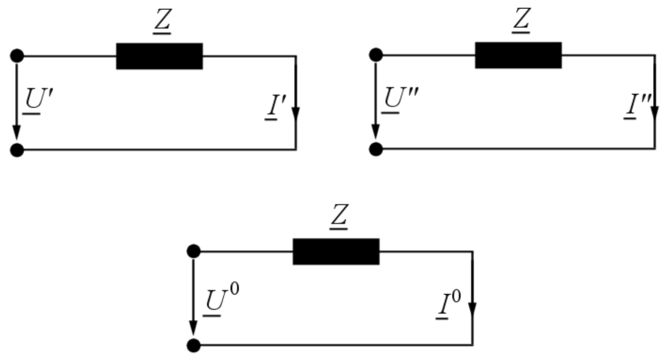
Hasonló számítások során meghatározhatjuk a direkt- és az inverz feszültséget is az áramok szimmetrikus komponenseinek függvényében és így a 2.43 egyenletrendszert írhatjuk fel.

$$\begin{cases} \underline{U}^0 = \underline{Z}^0\underline{I}^0 + \underline{Z}^{'}\underline{I}^{'} + \underline{Z}^{''}\underline{I}^{''} \\ \underline{U}^{'} = \underline{Z}^{''}\underline{I}^0 + \underline{Z}^0\underline{I}^{'} + \underline{Z}^{'}\underline{I}^{''} \\ \underline{U}^{''} = \underline{Z}^{'}\underline{I}^0 + \underline{Z}^{''}\underline{I}^{'} + \underline{Z}^0\underline{I}^{''} \end{cases} \tag{2.43}$$

Ez az általános esetre érvényes egyenletrendszer sokkal egyszerűbb alakra hozható abban az esetben, ha a terhelést szimmetrikusnak tekintjük ($\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 \equiv \underline{Z}$, amely nagyon sok gyakorlati alkalmazásnak is megfelel!). Szimmetrikus terhelésnél, figyelembe véve, hogy $a + a^2 + 1 = 0$, a 2.41-el adott terhelés szimmetrikus komponensei közül úgy a direkt-, mint az inverz komponens értéke nullával egyenlő. Így a 2.43 egyenletrendszer a 2.44 egyszerűbb alakra hozható.

$$\begin{cases} \underline{U}^0 = \underline{Z}\underline{I}^0 \\ \underline{U}^{'} = \underline{Z}\underline{I}^{'} \\ \underline{U}^{''} = \underline{Z}\underline{I}^{''} \end{cases} \tag{2.44}$$

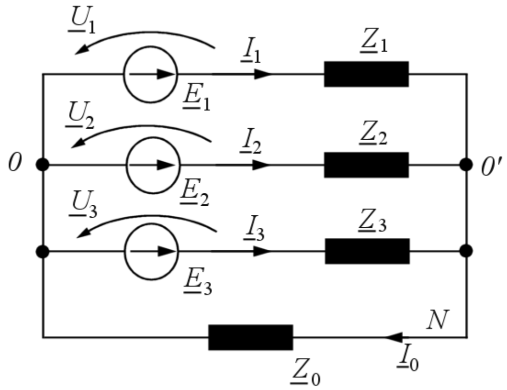
A 2.44 rendszer egyenletei egy-egy egyszerű Ohm-törvény alakját öltik fel, amelyeket egyszerű, monofázisos helyettesítő áramköri résszel szemléltethetünk, az alábbiaknak megfelelően (2.11 ábra).



2.11 ábra

2.4.3. Csillagkapcsolású négyvonalas áramkör.

A továbbiakban tekintsünk egy csillagkapcsolású aszimmetrikus generátor, amely egy ugyancsak csillagkapcsolású aszimmetrikus terhelést táplál egy olyan áramkörön keresztül, ahol a nullvezeték impedanciája $\underline{Z}_0$-val adott (2.12 ábra).



2.12 ábra

Feladatunk kapcsolatot teremteni az aszimmetrikus áramok és feszültségek között. Ehhez írjunk fel három huroktörvényt és egy csomóponttörvényt a 2.12 ábra szerint (2.45).

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{I}_1\underline{Z}_1 + \underline{I}_0\underline{Z}_0 \\ \underline{U}_2 = \underline{I}_2\underline{Z}_2 + \underline{I}_0\underline{Z}_0 \\ \underline{U}_3 = \underline{I}_3\underline{Z}_3 + \underline{I}_0\underline{Z}_0 \end{cases} \qquad (2.45)$$

és

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$

Behelyettesítjük a csomóponttörvény által adott összefüggésből $\underline{I}_0$-t a huroktörvényekbe és csoportosítjuk a tagokat az áramok szerint.

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{I}_1(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_0) + \underline{I}_2\underline{Z}_0 + \underline{I}_3\underline{Z}_0 \\ \underline{U}_2 = \underline{I}_1\underline{Z}_0 + \underline{I}_2(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_0) + \underline{I}_3\underline{Z}_0 \\ \underline{U}_3 = \underline{I}_1\underline{Z}_0 + \underline{I}_2\underline{Z}_0 + \underline{I}_3(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_0) \end{cases} \qquad (2.46)$$

Mivel az áramokat aszimmetrikusaknak feltételeztük, megadhatjuk az alábbi formában (2.47).

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}^0 + \underline{I}' + \underline{I}'' \\ \underline{I}_2 = \underline{I}^0 + a^2\underline{I}' + a\underline{I}'' \\ \underline{I}_3 = \underline{I}^0 + a\underline{I}' + a^2\underline{I}'' \end{cases} \qquad (2.47)$$

Helyettesítsük be a 2.47-et a 2.46-ba. Célunk meghatározni az ugyancsak aszimmetrikus feszültségrendszer komponenseit. Ehhez feltételezzük, hogy a szimmetrikus komponensek a Fortescue-tétel 2.48 alakjával adhatók meg.

$$\begin{cases} \underline{U}^0 = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3) \\ \underline{U}^{'} = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + a\underline{U}_2 + a^2\underline{U}_3) \\ \underline{U}^{''} = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + a^2\underline{U}_2 + a\underline{U}_3) \end{cases} \tag{2.48}$$

Helyettesítsük be rendre a 2.47 egyenleteket a 4.46 egyenletekbe, majd a kapott feszültségeket 2.48 egyenletrendszer első egyenletébe, így meghatározhatjuk az aszimmetrikus feszültségrendszer homopoláris komponensét, ugyanígy járunk el a második és a harmadik egyenlettel is, hogy meghatározhassuk a direkt- valamint az inverz feszültségeket. A számításokat nem végezzük el, csak az eredményeket írjuk fel a 2.49 egyenletrendszer formájában.

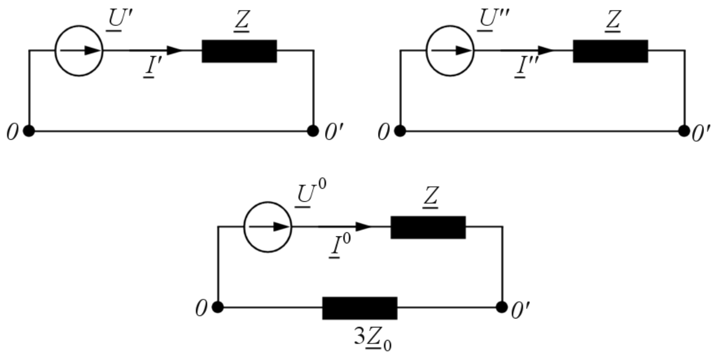
$$\underline{U}^0 = \frac{1}{3}\left[(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + 9\underline{Z}_0)\underline{I}^0 + (\underline{Z}_1 + a^2\underline{Z}_2 + a\underline{Z}_3)\underline{I}^{'} + (\underline{Z}_1 + a\underline{Z}_2 + a^2\underline{Z}_3)\underline{I}^{''}\right]$$

$$\begin{aligned} \underline{U}^{'} &= \frac{1}{3}\left[(\underline{Z}_1 + a\underline{Z}_2 + a^2\underline{Z}_3)\underline{I}^0 + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)\underline{I}^{'} + (\underline{Z}_1 + a^2\underline{Z}_2 + a\underline{Z}_3)\underline{I}^{''}\right] \\ \underline{U}^{''} &= \frac{1}{3}\left[(\underline{Z}_1 + a^2\underline{Z}_2 + a\underline{Z}_3)\underline{I}^0 + (\underline{Z}_1 + a\underline{Z}_2 + a^2\underline{Z}_3)\underline{I}^{'} + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)\underline{I}^{''}\right] \end{aligned} \tag{2.49}$$

Ez az általános esetre érvényes egyenletrendszer sokkal egyszerűbb alakra hozható abban az esetben, ha a terhelést szimmetrikusnak tekintjük ($\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 \equiv \underline{Z}$, amely nagyon sok gyakorlati alkalmazásnak is megfelel!). Szimmetrikus terhelésnél, figyelembe véve, hogy $a + a^2 + 1 = 0$, a 2.41-el adott terhelés szimmetrikus komponensei közül úgy a direkt-, mint az inverz komponens értéke nullával egyenlő. Így a 2.49 egyenletrendszer a 2.50 egyszerűbb alakra hozható.

$$\begin{cases} \underline{U}^0 = (\underline{Z} + 3\underline{Z}_0)\underline{I}^0 \\ \underline{U}^{'} = \underline{Z}\underline{I}^{'} \\ \underline{U}^{''} = \underline{Z}\underline{I}^{''} \end{cases} \tag{2.50}$$

A 2.50 rendszer egyenletei egy-egy egyszerű Ohm-törvény alakját öltik fel, amelyeket egyszerű, monofázisos helyettesítő áramköri résszel szemléltethetünk, az alábbiaknak megfelelően (2.11 ábra).



2.13 ábra