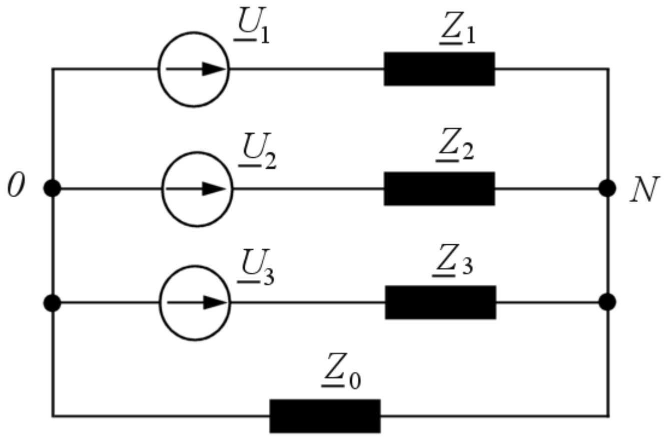
A. Háromfázisú áramkörök

A.1. Adott az 1.1 ábrán látható háromfázisú áramkör. $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$ és $\underline{U}_3$ a háromfázisú szinkron generátor elektromotoros feszültségeinek az egyszerűsített komplex ábrázolása, $\underline{U}_1 = 240\,(V)$, $\underline{U}_2 = 180e^{-j2\pi/3}\,(V)$ és $\underline{U}_3 = 180e^{j2\pi/3}\,(V)$. A generátor belső impedanciáit elhanyagoljuk. A háromfázisú terhelés impedanciái $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ és $\underline{Z}_3$, a nullvezeték impedanciája $\underline{Z}_0 = 2j\,(\Omega)$ és a hálózati frekvencia $50Hz$.



1.1 ábra

a) ábrázoljuk grafikusan az elektromotoros feszültségek időfüggvényét,

b) készítsük el az elektromotoros feszültségek fazordiagramját,

c) a szimmetrikus összetevőkre vonatkozó Fortescue tétel segítségével bontsuk az elektromotoros feszültségek nemszimmetrikus rendszerét szimmetrikus összetevőkre,

d) készítsük el az így kapott szimmetrikus feszültségrendszerek fazordiagrammjait,

e) legyen $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = 6j\,(\Omega)$, határozzuk meg $\underline{Z}_3$ értékét úgy, hogy a nullvezetéken ne folyjon áram,

f) legyen $\underline{Z} = \underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = 6j\,(\Omega)$. Erre az esetre (kiegyensúlyozott terhelés) határozzuk meg a fázisáramok időfüggvényét a szimmetrikus összetevők módszerével.

Megoldás:

a) A feladat megadja az elektromotoros feszültségek komplex effektív értékeit. A valós pillanatnyi értékek meghatározásához először meghatározzuk a komplex effektív értékeket (1.1).

$$\underline{U}_{10} = 240\sqrt{2}\ (V),\ \underline{U}_{20} = 180\sqrt{2}e^{-j2\pi/3}\ (V),\ \underline{U}_{30} = 180\sqrt{2}e^{j2\pi/3}\ (V) \tag{1.1}$$

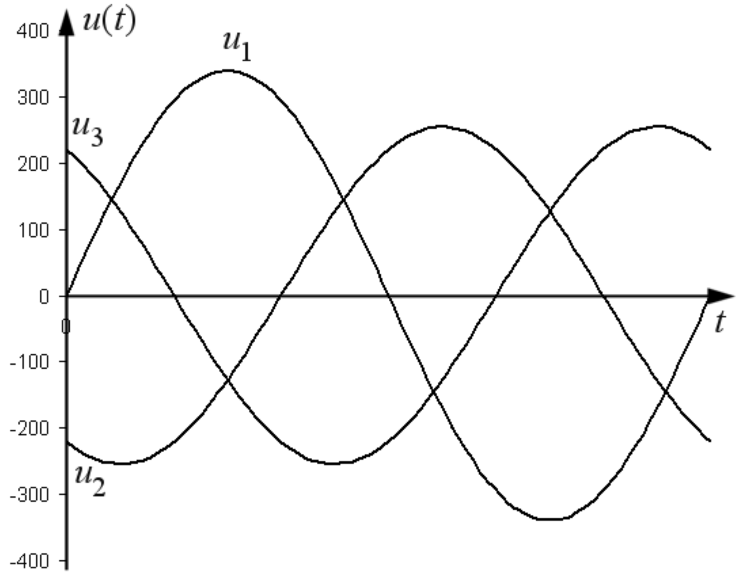
A komplex pillanatnyi értékeket a következő alakban írhatjuk meg (1.2):

$$\underline{u}_1 = 240\sqrt{2}e^{j\omega t}\ (V),\ \underline{u}_2 = 180\sqrt{2}e^{j(\omega t - 2\pi/3)}\ (V),\ \underline{u}_3 = 180\sqrt{2}e^{j(\omega t + 2\pi/3)}\ (V) \tag{1.2}$$

A valós pillanatnyi értékeket megkapjuk az $u = \mathrm{Im}(\underline{u})$ összefüggésnek az (1.2) összefüggésre való alkalmazásával (1.3).

$$\begin{gathered} u_1 = 240\sqrt{2}\sin\omega t\ (V),\ u_2 = 180\sqrt{2}\sin(\omega t - 2\pi/3)\ (V), \\ \underline{u}_3 = 180\sqrt{2}\sin(\omega t + 2\pi/3)\ (V) \end{gathered} \tag{1.3}$$

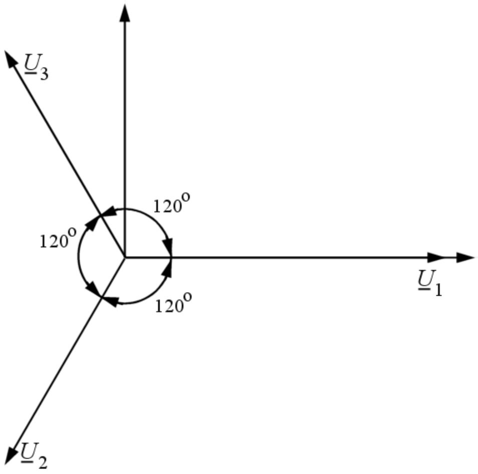
Az elektromotoros feszültségek pillanatnyi értékeinek időfüggését az 1.2 ábra szemlélteti.



1.2 ábra

b) A fazorábra elkészítéséhez kiszámoljuk a komplex effektív értékeket (1.4) és az 1.3 ábra szemlélteti.

$$\begin{gathered} \underline{U}_1 = 240\ (V), \\ \underline{U}_2 = 180\left(\cos\frac{2\pi}{3} - j\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 180\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -90(1 + j\sqrt{3})(V), \\ \underline{U}_3 = 180\left(\cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 180\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 90(-1 + j\sqrt{3})(V). \end{gathered} \tag{1.4}$$



1.3 ábra

c) A Fortescue-tétel segítségével a nemszimmetrikus feszültségrendszert felbontjuk szimmetrikus összetevőkre (1.5).

$$\begin{cases} \underline{U}^0 = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3) \\ \underline{U}' = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + a\underline{U}_2 + a^2\underline{U}_3) \\ \underline{U}'' = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + a^2\underline{U}_2 + a\underline{U}_3) \end{cases} \tag{1.5}$$

A számításokhoz felhasználjuk, hogy a következő összefüggéseket:

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}},\ a^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = e^{-j\frac{2\pi}{3}},\ a^3 = e^{j\frac{6\pi}{3}} = 1,$$

$$a^4 = e^{\left(j\frac{2\pi}{3}\right)^4} = e^{\left(-j\frac{2\pi}{3}\right)^2} = e^{-j\frac{4\pi}{3}} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = a,\ a + a^2 - 1 = 0\,.$$

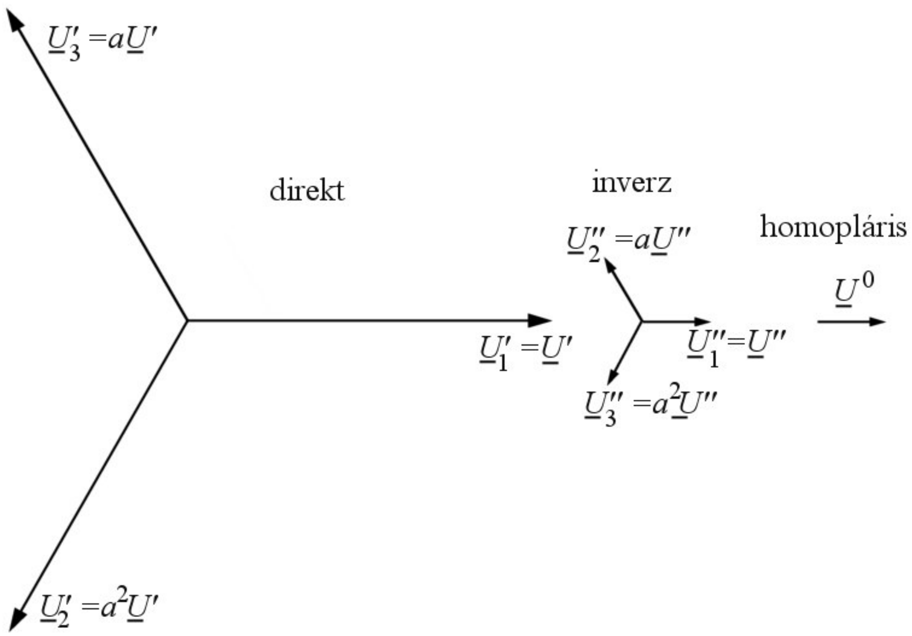
$$\underline{U}^0 = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3) = \frac{1}{3}(240 - 90(1 + j\sqrt{3}) + 90(-1 + j\sqrt{3})) = 20(V)$$

$$\begin{aligned} \underline{U}' &= \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + a\underline{U}_2 + a^2\underline{U}_3) = \frac{1}{3}(240 + a180a^2 + a^2 180a) = \\ &= 80 + 120a^3 = 200(V) \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\underline{U}'' = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + a^2\underline{U}_2 + a\underline{U}_3) = \frac{1}{3}(240 + a^2 180a^2 + a180a) =$$

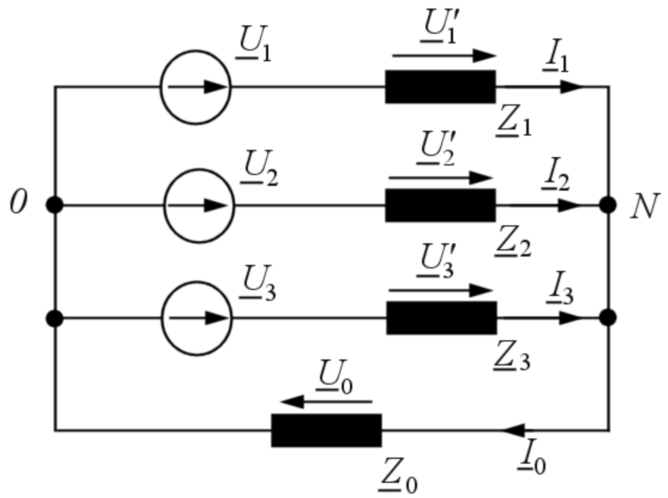
$$\frac{1}{3}(240 + 180(a + a^2) = \frac{1}{3}(240 - 180) = 20(V)$$

d) a kapott feszültségrendszerek fazorábráit az 1.4 ábra szemlélteti.



1.4 ábra

e) Az így megadott terhelés kiegyensúlyozatlan. A nullvezeték árammentességének feltételét az 1.5 ábra alapján vezethetjük le. Felírjuk három huroktörvényt, illetve az *N* csomópontra a csomóponttörvényt.



1.5 ábra

$$\begin{cases} \underline{U}_1 - \underline{U}'_1 = \underline{I}_0 \underline{Z}_0 = \underline{U}_0 \\ \underline{U}_2 - \underline{U}'_2 = \underline{I}_0 \underline{Z}_0 = \underline{U}_0 \\ \underline{U}_3 - \underline{U}'_3 = \underline{I}_0 \underline{Z}_0 = \underline{U}_0 \\ \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_0 = \dfrac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_0} = \underline{U}_0 \underline{Y}_0 \end{cases} \tag{1.6}$$

Felírjuk a terhelésekre az Ohm-törvényt és kifejezzük az impedanciákon megjelenő feszültségeket, majd az (1.6) egyenletrendszer első három összefüggéséből kifejezzük az $\underline{U}'_1$, $\underline{U}'_2$ és $\underline{U}'_3$ feszültségeket és behelyettesítjük őket.

$$\begin{cases} \underline{U}'_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 \\ \underline{U}'_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 \\ \underline{U}'_3 = \underline{I}_3 \underline{Z}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{U}'_1 \underline{Y}_1 = (\underline{U}_1 - \underline{U}_0)\underline{Y}_1 \\ \underline{I}_2 = \underline{U}'_2 \underline{Y}_2 = (\underline{U}_2 - \underline{U}_0)\underline{Y}_2 \\ \underline{I}_3 = \underline{U}'_3 \underline{Y}_3 = (\underline{U}_3 - \underline{U}_0)\underline{Y}_3 \end{cases} \tag{1.7}$$

Az így kapott összefüggéseket behelyettesítjük az (1.6) egyenletrendszer negyedik egyenletébe, és kifejezzük az $\underline{U}_0$ feszültséget.

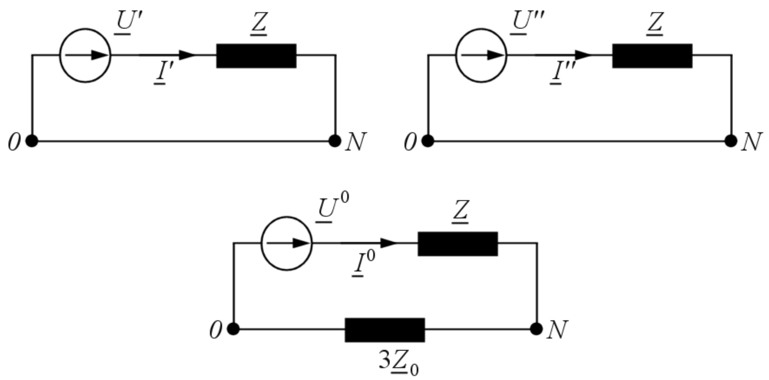
$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{Y}_1 \underline{U}_1 + \underline{Y}_2 \underline{U}_2 + \underline{Y}_3 \underline{U}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_0} \tag{1.8}$$

Mivel célunk a nullvezeték árammentessége, így az (1.8) összefüggéssel meghatározott feszültség nulla kell legyen. Behelyettesítjük az ismert mennyiségeket és meghatározzuk a $\underline{Z}_3$ impedancia megfelelő értékét.

$$\begin{gathered} \underline{U}_0 = \frac{\underline{Y}_1 \underline{U}_1 + \underline{Y}_2 \underline{U}_2 + \underline{Y}_3 \underline{U}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_0} = 0 \Rightarrow \underline{Y}_1 \underline{U}_1 + \underline{Y}_2 \underline{U}_2 + \underline{Y}_3 \underline{U}_3 = 0 \\ \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = 0 \Rightarrow \frac{240}{6j} + \frac{a^2 180}{6j} + \frac{a180}{\underline{Z}_3} = 0 \Rightarrow \underline{Z}_3 = 2.39 + 9.69j\,(\Omega) \end{gathered} \tag{1.9}$$

f) A direkt, inverz és homopoláris áramok meghatározásához felrajzoljuk az 1.6 ábrán látható helyettesítő áramköröket és felírjuk a huroktörvényeket (1.10).

$$\begin{aligned} \underline{I}' &= \frac{\underline{U}'}{\underline{Z}} \Rightarrow \underline{I}' = \frac{200}{6j} = -j\frac{200}{6}(A) \\ \underline{I}'' &= \frac{\underline{U}''}{\underline{Z}} \Rightarrow \underline{I}'' = \frac{20}{6j} = -j\frac{20}{6}(A) \\ \underline{I}^0 &= \frac{\underline{U}^0}{\underline{Z} + 3\underline{Z}_0} \Rightarrow \underline{I}^0 = 20 = -j\frac{20}{12}(A) \end{aligned} \tag{1.10}$$



1.6 ábra

Alkalmazzuk a Fortescue-tételt a nemszimmetrikus áramok meghatározására, mely az (1.11) egyenletrendszerrel adott.

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}^0 + \underline{I}' + \underline{I}'' \\ \underline{I}_2 = \underline{I}^0 + a^2 \underline{I}' + a\underline{I}'' \\ \underline{I}_3 = \underline{I}^0 + a\underline{I}' + a^2 \underline{I}'' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = -j\frac{20}{6} - j\frac{200}{6} - j\frac{20}{12} = -j\frac{115}{3}\ (A) \\ \underline{I}_2 = -j\frac{20}{6} - a^2 j\frac{200}{6} - aj\frac{20}{12} = \frac{5}{6}(17j - 19\sqrt{3})\ (A) \\ \underline{I}_3 = -j\frac{20}{6} - aj\frac{200}{6} - a^2 j\frac{20}{12} = \frac{5}{6}(17j + 19\sqrt{3})\ (A) \end{cases} \qquad (1.11)$$

Az áramok pillanatnyi értékei az (1.12) összefüggésekkel határozzuk meg.

$$\underline{I}_1 = -j\frac{115}{3}\ (A) \Rightarrow I_{10} = I_1\sqrt{2} \text{ és } \varphi_1 = arct(-\infty) = -90^\circ \text{ így}$$

$$i_1(t) = 54{,}21 \sin\left(\omega t - 90^\circ\right)(A)$$

$$\underline{I}_2 = \frac{5}{6}(17j - 19\sqrt{3})\ (A) \Rightarrow I_{20} = I_2\sqrt{2} = \frac{5}{6}\sqrt{17^2 + 3\cdot 19^2} = 30{,}86\ (A) \text{ és}$$

$$\varphi_2 = arct\left(-\frac{17}{19\sqrt{3}}\right) = -27^\circ 17' \text{ így } i_2(t) = 30{,}86 \sin\left(\omega t - 27^\circ 17'\right)(A) \qquad (1.12)$$

$$\underline{I}_3 = \frac{5}{6}(17j + 19\sqrt{3})\ (A) \Rightarrow I_{30} = I_3\sqrt{2} = \frac{5}{6}\sqrt{17^2 + 3\cdot 19^2} = 30{,}86\ (A) \text{ és}$$

$$\varphi_3 = arct\left(\frac{17}{19\sqrt{3}}\right) = 27^\circ 17' \text{ így } i_3(t) = 30{,}86 \sin\left(\omega t + 27^\circ 17'\right)(A)$$