

Kakucs András

SZILÁRDSÁGTAN

(jegyzet)

Figyelem!

Ez a jegyzet még tovább alakuló és nem teljes verziója. Lehetnek benne hibák, elírások és kevésbé sikeres megfogalmazások.

Tartalom

1. ALAPFOGALMAK	5
1.1. A SZILÁRDSÁGTAN TÁRGYA	5
1.2. RUGALMAS ÉS RUGALMATLAN ALAKVÁLTOZÁSOK	6
1.3. A SZILÁRDSÁGI JELLEMZŐK	7
1.3.1. A lágyacél szakítódiagramja	7
1.3.2. A lágyacél zömítődiagramja	11
1.3.3. Az anyag jelleggörbéje és az anyagegyenlet	12
1.3.4. A szakítási diagram energetikai vonatkozásai	13
1.3.5. Egyéb anyagok jelleggörbéi	14
1.3.6. A kísérletek során meghatározott szilárdsági és alakíthatósági jellemzők	15
1.4. A GEOMETRIAI NEMLINEARITÁS	16
1.5. A SZERKEZET MODELLEZÉSE	17
1.5.1. A geometriai modellezés	17
1.5.2. A kényszerek modellezése	18
1.5.3. A terhelés modellezése	21
1.5.4. A szerkezet anyagának modellezése	23
1.6. AZ ELEMI SZILÁRDSÁGTAN ÁLTALÁNOS ÉRVÉNYŰ EGYSZERŰSÍTŐ HIPOTÉZISEI	23
2. IGÉNYBEVÉTELI ÁBRÁK	25
2.1. KERESZTMETSZETI IGÉNYBEVÉTELEK	25
2.2. AZ EGYENES TARTÓK ESETE	29
2.2.1. <i>A reakcióerők kiszámítása</i>	29
2.2.2. <i>A keresztmetszeti igénybevételek kiszámításának analitikus módszere</i>	47
2.2.3. <i>A keresztmetszeti igénybevételek és a terhelés közötti összefüggések</i>	55
2.2.4. <i>A terület-módszer</i>	56
2.3. A TÖRTVONALÚ TARTÓK	83
2.4. ÍVES TARTÓK	90
3. KERESZTMETSZETI JELLEMZŐK	99
3.1. KERESZTMETSZETI JELLEMZŐK	99
3.2. A KERESZTMETSZET TERÜLETE	99
3.2.1. <i>Az egyszerű idomok területe</i>	99
3.2.2. <i>Az összetett idomok területe</i>	102
3.3. AZ ELSŐRENDŰ NYOMATÉKOK ÉS A GEOMETRIAI KÖZÉPPONT	103
3.3.1. <i>Az elsőrendű (sztatikai) nyomatékok</i>	103
3.3.2. <i>A geometriai középpont (súlypont)</i>	105
3.3.3. <i>Összetett idomok elsőrendű nyomatékai és geometriai középpontja</i>	108
3.4. A MÁSODRENDŰ NYOMATÉKOK ÉS AZOK FŐÉRTÉKEI	112
3.4.1. <i>A másodrendű (tehetetlenségi) nyomatékok</i>	112
3.4.2. <i>A másodrendű nyomatékok változása a koordináta-rendszer eltolása esetén (a Steiner-tétel)</i>	114
3.4.3. <i>A másodrendű nyomatékok változása a koordináta-rendszer elforgatása esetén</i>	117
3.4.4. <i>A másodrendű nyomatékok főirányai és főértékei</i>	118
3.5. ÖSSZEFOGLALÓ	129
3.6. TÖMEG, TÖMEGKÖZÉPPONT, SZTATIKUS ÉS TEHETETLENSÉGI NYOMATÉKOK	132
3.6.1. <i>Tömeg</i>	133
3.6.2. <i>Sztatikus nyomatékok</i>	133
3.6.3. <i>A sztatikus nyomatékok változása a tengelyek eltolása során</i>	134
3.6.4. <i>A tömegközéppont</i>	134
3.6.5. <i>A sztatikus nyomatékok változása a tengelyek elforgatásakor</i>	134
3.6.6. <i>Tehetlenségi nyomatékok</i>	135
3.6.7. <i>A tehetlenségi nyomatékok változása a tengelyek eltolása során</i>	136
3.6.8. <i>A tehetlenségi nyomatékok változása a tengelyek elforgatásakor</i>	136
3.6.9. <i>A tehetlenségi nyomatékok főirányai és főértékei</i>	136
4. HÚZÓ ÉS NYOMÓ IGÉNYBEVÉTEL	138
4.1. EGYSZERŰ ÉS ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTELEK	138
4.2. PRIZMATIKUS RUDAK KÖZPONTOS HÚZÁSA ÉS NYOMÁSA	138
4.2.1. <i>Alapvető feltételezések és összefüggések</i>	138

4.2.2. A harántirányú alakváltozás	140
4.2.3. A húzóerő támadáspontja	141
4.2.4. Feszültség-gyűjtő helyek és a de Saint-Venant elv	142
4.2.5. A szakaszonként állandó keresztmetszetű rúd	143
4.2.6. Az összetett keresztmetszetű rúd	144
4.2.7. A folyamatosan változó keresztmetszetű rúd	147
4.2.8. Általánosítás	148
4.2.9. A hőmérséklet-változás hatása	148
4.3. EGYÉB HÚZÓ VAGY NYOMÓ IGÉNYBEVÉTELNEK KITETT ALKATRÉSZEK	150
4.3.1. Láncok, kötelek, kábelek	150
4.3.2. Vékonyfalú hengeres tartályok	153
4.4. MÉRNÖKI FELADATOK	154
4.4.1. Méretezés	154
4.4.2. Ellenőrzés	155
4.4.3. A teherbíró-képesség megállapítása	155
4.5. SZTATIKAILAG HATÁROZATLAN FELADATOK	161
5. NYÍRÓ IGÉNYBEVÉTEL	166
5.1. KIS KERESZTMETSZETEK NYÍRÁSA	166
5.1.1. Tiszta nyírás	166
5.1.2. A nyíró-igénybevétel által előidézett alakváltozás	166
5.1.3. A nyírófeszültség és a fajlagos szögváltozás kapcsolata	168
5.1.4. A nyíróerő és az alakváltozás kapcsolata	168
5.2. CSAVAR- ÉS SZEGECSKÖTÉSEK	169
5.2.1. Egyszer nyírt kötőelem	169
5.2.2. A felületi nyomás és a palástnyomás	170
5.2.3. Kétszer vagy többször nyírt kötőelem	172
5.2.4. Két vagy több kötőelemmel összefogott húzott alkatrészek	173
5.2.5. Nyomatékkal terhelt átlapolt kötés	175
5.2.6. Húzóerővel és nyomatékkal terhelt kötés	177
5.3. HEGESZTETT KÖTÉSEK	178
5.4. TOVÁBBI ESETEK	181
6. HAJLÍTÓ IGÉNYBEVÉTEL	183
6.1. TISZTA HAJLÍTÁS	183
6.1.1. Egyenes hajlítás	183
6.1.2. A hajlítás következtében fellépő alakváltozás	191
6.1.3. Ferde hajlítás	197
6.1.4. A ferde hajlítás, mint összetett igénybevétel	200
6.1.5. Az összetett keresztmetszetű rúd hajlítása	204
6.2. HAJLÍTÁS NYÍRÁSSAL	213
6.2.1. A nyírófeszültségek dualitása	214
6.2.2. Zsuravszkij képlete	215
6.2.3. A harántirányú nyírófeszültség	227
6.2.4. A hajlított és nyírt rúd alakváltozása	231

1. ALAPFOGALMAK

1.1. A szilárdságtan tárgya

A mechanikában különféle test-modelleket tanulmányozunk, amelyekkel a valódi testek egyensúlyát vagy mozgását szeretnénk leírni. Gyakran azt feltételezzük, hogy a tanulmányozott testre ható erők nem, vagy csak elhanyagolható mértékben változtatják meg annak méreteit és formáját, tehát azt tökéletesen merevnek tekinthetjük. Ez a feltételezés a megoldandó feladatot jelentős mértékben leegyszerűsíti, azonban nem minden esetben állja meg a helyét.

A merevnek tekinthető testektől az alakváltozásra képes testeket el kell határolnunk. Mérnöki megközelítésben azokat a testeket tekintjük szilárdnak, amelyek erre az alakváltozásra képesek és nem mutatják a folyékony vagy gáznemű halmazállapotra jellemző meghatározó tulajdonságokat.

A szilárd testeknek a tanulmányozása a szilárd test mechanikájának a tárgya, a folyadékok és gázok mozgásával az áramlástan foglalkozik. A mechanika nagy fejezetei a sztatika, a kinematika és a dinamika: a legtágabb értelemben a szilárdságtan a szilárd test mechanikájának egyik fejezetét, annak sztatikáját jelenti. A szilárd test dinamikája a lengésstan.

A szilárdságtan a mérnöki gyakorlatban kiemelten fontos szerepet tölt be a különféle alkatrészek, szerkezetek, gépezetek

- méretezésében, azok
- ellenőrzésében, vagy pedig a
- teherbíró-képességük kiszámításában,

ezért tipikusan mérnöki tudománynak tekintik.

E *méretezésben* a szilárdságtani ismereteket úgy kell alkalmazni, hogy a megtervezett szerkezet bizonyos kritériumoknak megfeleljen: legyen az kellőképpen:

- szilárd,
- merev,
- stabil és
- gazdaságos.

A *szilárdság* kritériuma azon kívánalomra vonatkozik, hogy a tervezett szerkezet a rendeltetésszerű használat során a reá ható terhelést törés, tönkremenetel nélkül át tudja venni. Ha például egy széket tervezünk, akkor annak törés és maradandó alakváltozás nélkül át kell tudni vennie a rendeltetésszerű használat során fellépő összes terhelést.

A *merevség* kritériuma a szerkezet alakváltozására vonatkozik: ezek mértéke nem szabad meghaladja azt a határt, amely a szerkezet használatát megakadályozó deformációkhoz vagy elmozdulásokhoz vezet. A székeknek például elég merevnek kell lennie ahhoz, hogy az ne inogjon a súlyunk alatt. Egy érezhető mértékben deformálódó szék a biztonságérzetten is jelentősen ront.

A *stabilitás* kritériuma a szerkezet alakjának állandóságára vonatkozik, a szerkezet a reá ható terhelés alatt stabil kell legyen. A szék lábainak például nem szabad kihajlania még akkor sem, ha hintázunk rajta.

A *gazdaságosságot* gyakran elfelejtik felsorolni, azonban az is egy fontos kritérium: a szerkezetet úgy kell megtervezni, hogy az minél olcsóbb legyen. A tervezés során megválasztjuk az anyagot és a formát, ezek pedig együttesen meghatározzák az előállításához szükséges gyártástechnológiát is. A gazdaságosság kérdése egy optimum keresésére vezetődik vissza: azt a megoldást keressük, amely a legolcsóbb kivitelezéshez vezet, az előbbi három kritérium teljesítése mellett. A túlméretezés kerülendő, de a drága anyagok és technológiák indokolatlan felhasználása is. A szék vázát ésszerűtlen lenne például titáncsővekből építenünk, ha arra az acélcsővet is alkalmasnak találjuk.

Az *ellenőrzés* az a folyamat, amelynek során

- egy tervezett,
- vagy már létező

szerkezetet vizsgálunk.

A *tervezés* során a méretezést arra a várható terhelésre végezzük, amely a rendeltetésszerű használat során lép fel. Ez a méretezés rendszerint a szilárdság kritériuma alapján, egy mérvadónak tekintett igénybevételre történik. Ekkor a többi igénybevétellel szembeni szilárdság, a merevség és a stabilitás kritériumait ellenőrzésre használjuk.

Például látni fogjuk, hogy egy hajlított rúd méretezését a hajlítás miatt létrejövő legnagyobb tengely irányú feszültségre végezzük el, annak ellenőrzése pedig a legnagyobb nyírófeszültség kiszámításával történik. Ugyanezt a rudat a hajlítás által előidézett alakváltozásra is ellenőrizhetjük: ha azt a megengedhető mértéknél nagyobbak találjuk, akkor a rúd méreteit meg kell növelnünk még akkor is, ha a szilárdság feltételeit már teljesítettük a méretezés folyamán.

Előfordulhat, hogy a tervezett szerkezetet esetleg valamilyen véletlenszerű túlterhelés érheti – ekkor a szerkezetet erre a túlterhelésre is le kell ellenőrizni. Ekkor a megengedett feszültségek és alakváltozások nagyobbak szoktak lenni a méretezésben előírtaknál. A példaként említett hajlított rúd esetében elfogadhatunk átmenetileg előforduló nagyobb alakváltozásokat is a szilárdság kritériumának betartásával: ekkor a túlterhelés nem vezet a rúd tönkremeneteléhez. Vagy pedig elfogadhatjuk a megengedettnél nagyobb, de az anyag szilárdságánál kisebb feszültségek megjelenését is: ekkor a túlterhelés maradandó alakváltozásokat okozhat és előidézheti az alkatrész tönkremenetelét, de nem vezet töréshez és így a megtervezett szerkezetünk baleset esetében is biztonságos marad.

A már *létező szerkezetek* ellenőrzése a tervezéskor elvégzett számítások megismétléséből áll: arról szeretnénk meggyőződni, hogy egy adott terhelésre a szilárdság, a merevség és a stabilitás kritériumai teljesülnek-e vagy sem.

A szilárdságtan harmadik fajta feladata a *teherbíró-képesség megállapítása* tulajdonképpen az ellenőrzésnek az egyik fajtája, amelynek során azt a legnagyobb terhelést állapítjuk meg, amelyet a tanulmányozott szerkezet még biztonságosan át tud venni.

A mérnöki gyakorlatban a méretezés és az ellenőrzés során rendszerint valamilyen műszaki előírás szerint kell eljárni. Ezeknek az előírásoknak az ismertetése nem a szilárdságtan tárgya.

1.2. Rugalmas és rugalmatlan alakváltozások

A szilárd test a reá ható terhelés hatására alakváltozást szenved. Bizonyos esetekben a terhelés megszűnésekor ez az alakváltozás eltűnik, a test visszanyeri eredeti alakját. Ezt tapasztalhatjuk például amikor egy acélrugót összenyomunk, majd elengedünk. Ekkor a testet (és annak anyagát) rugalmasnak, elasztikusnak nevezzük. A rugalmas testekkel foglalkozó tudományágot *rugalmaságtannak* nevezzük.

A tökéletesen rugalmas alakváltozás inkább egy idealizált folyamat, a valóságban a kisebb-nagyobb maradandó alakváltozások megjelenését, a rugalmatlan viselkedést figyelhetjük meg. Amikor a terhelés maradandó alakváltozást okoz, azt képlékenynek vagy plasztikusnak nevezzük. Ezekkel a jelenségekkel a *képlékenységtan* foglalkozik.

Előfordulhat, hogy az alakváltozás nem azonnali, hanem egy időben lejátszódó folyamat, mintha valamilyen sűrű folyadék, viszkózus anyag lassú folyásáról lenne szó. E viszkózus anyagok részletesebb tanulmányozása a *reológia* tárgya. Szigorúbban véve képlékenynek azokat az anyagokat nevezzük, amelyeknél a maradandó alakváltozások azonnaliak.

A terhelés és az általa előidézett alakváltozás közötti kapcsolat arányosságának szemszögéből is tehetünk észrevételeket. Amennyiben e mennyiségek egyenesen arányosak, úgy lineáris

szilárdságtanról beszélünk, míg ellenkező esetben e kapcsolatot csak nemlineáris egyenletekkel írhatjuk le.

Amennyiben egy rugalmas anyag vagy szerkezet esetében fellépő alakváltozás az azt előidéző terheléssel arányos, akkor azt *lineárisan rugalmasnak* mondjuk.

Nyilvánvaló, hogy a linearitás hipotézisének elfogadása mellett a számítások elvégzése lényegesen egyszerűbb, mint a jelenségek nemlineáris összefüggésekkel történő leírása. Éppen ezért a fizikában és annak alkalmazott területein igen gyakran élünk ezzel a hipotézissel még akkor is, ha valójában a szóban forgó jelenséget szigorúan véve nem lehetne leírni egy ilyen egyszerű függvénykapcsolattal.

A rugalmas szerkezetek nemlineáris viselkedésének kétféle forrása van. Ennek első oka a tanulmányozott testet alkotó anyag nemlineáris jellegéből fakad és ezt *anyag* (vagy *fizikai*) nemlinearitásnak nevezzük. Ilyenkor az illető anyagból alkotott egyszerű próbatest, így egy huzal alakváltozását a terhelés nemlineáris függvényeként írhatjuk le. Példaként vegyünk egy acélhuzalt és egy gumikötelet: ha súlyt függesztünk fel velük, akkor azt tapasztaljuk, hogy az acélhuzal megnyúlása a terhelő súllyal arányos lesz, míg a gumikötél esetében ilyen egyenes arányosság nem tapasztalható. A gumi a megnyúlás növekedésével mind merevebbé válik, tehát egyre kevésbé lesz hajlamos a további megnyúlásra. Mi több, ha a terhelő súly meghalad egy bizonyos mértéket, akkor ez az arányosság az acélhuzal esetében is meg fog szűnni.

A nemlineáris viselkedés második oka a nagy alakváltozásokban rejlik, azt *geometriai*nak nevezzük. Néha beszélnek a terhelés nemlineáris voltáról is, azonban ez is a nagy elmozdulásokra vagy alakváltozásokra vezethető vissza.

1.3. A szilárdsági jellemzők

Laboratóriumban a terhelés és az alakváltozás kapcsolatát a legegyszerűbben húzó- (szakító-), illetve nyomó- (zömítő- vagy törő-) vizsgálattal tudjuk felmérni, attól függően, hogy az anyagot húzásnak vagy összenyomásnak akarjuk kitenni.

A vizsgálatot egy géppel végezzük: a tanulmányozott anyagból egy szabványosított alakú és méretű próbatestet készítünk, azt pedig a gépbe befogva húzó-, illetve nyomó-igénybevételnek tesszük ki. A gép a próbatestre ható erőt lassan növeli, így a terhelés sztatikusnak tekinthető. A gép a vizsgálat során rögzíti a terhelő erő intenzitását és az általa előidézett alakváltozás mértékét is.

1.3.1. A lágyacél szakítódigramja

A vizsgálat során a próbatest állandó keresztmetszetű, terheletlen állapotban l_0 hosszúságú szakaszának Δl megnyúlását vizsgáljuk, amelyet a gép által kifejtett N húzóerő által idéz elő. E megnyúlás mértéke arányos a mért szakasz l_0 hosszával és fordítottan arányos annak keresztmetszetével. A kísérleti eredmények összehasonlíthatóságának céljából ezeket a mennyiségeket fajlagosítjuk, így a húzóerőt a próbatest kezdeti S_0 keresztmetszetével elosztva az egységnyi keresztmetszetre eső erőhöz jutunk, amelyet *feszültség*nek nevezünk:

$$\sigma = \frac{N}{S_0}, \quad (1.1)$$

a megnyúlást pedig annak kezdeti hosszához viszonyítjuk, ami a *fajlagos alakváltozás*:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (1.2)$$

Esetünkben, pontosabban, húzófeszültségről és fajlagos nyúlásról beszélhetünk.

Észrevehetjük, hogy a feszültség mértékegysége ugyanaz, mint a nyomásé (mindkettő egységnyi felületre eső erő), mértékét a Nemzetközi Mértékegység-rendszerben *pascal*ban kell megadnunk ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$). E mértékegység használata gyakorlati szempontból kényelmetlen, mert igen kicsi, éppen ezért gyakran találkozhatunk annak többszörösével (pl. $1 \text{ GPa} = 10^9 \text{ Pa}$), esetleg más származtatott SI-mértékegységekkel (pl. $1 \text{ kN/mm}^2 = 1 \text{ GPa}$).

A fajlagos alakváltozás egy viszonyszám, két azonos fizikai jellegű mennyiség hányadosa, tehát mértékegység nélküli szám. Mivel a fajlagos alakváltozás a mérnöki gyakorlatban általában nagyon kicsi, gyakran százalékban vagy ezrelékben fejezzük ki (% , ‰), vagy pedig $\mu\text{m/m}$ -ben adjuk meg.

A húzóerő és a megnyúlás, illetve a húzófeszültség és a fajlagos megnyúlás kapcsolatát grafikusán ábrázolhatjuk. A kapott grafikon a húzó- vagy szakítódiagram.

A próbatest anyagától függően e diagramok nagymértékben eltérhetnek egymástól. Példaként tekintsük az 1.1. ábrán látható szakítódiagramot, amelynek formája a kis széntartalmú lágycélokra jellemző. E diagramon a következőkben felsorolt jellegzetes szakaszokat és pontokat fedezhetjük fel.

- A szakítódiagramnak van egy, az origóból kiinduló egyenes szakasza ($o - a$). Ezen a szakaszon a húzófeszültség és a fajlagos nyúlás között egyenes arányosság áll fenn:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = E = \text{áll.} \quad (1.3)$$

Ezt az arányossági tényezőt *Young-modulus*znak, rugalmassági modulusznak vagy az anyag merevségének nevezik. Mivel ε egy mértékegység (dimenzió) nélküli szám, a Young-modulus mértékegysége azonos a feszültség mértékegységével. Ez a szám a kezdeti egyenes szakasz meredekségének felel meg.

Az 1.3. megállapítás, a feszültség és a fajlagos alakváltozás egyenes arányossága *Hooke törvénye*, amelyet

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (1.4)$$

formában szokás felírni.

A Young-modulus anyagjellemző mennyiség, de nem anyagállandó, mert például a hőmérséklettől is függ. Ha egy adott anyagból több próbatestet készítünk és az azonos körülmények között felvett húzódiagramokból mindegyikre meghatározzuk E értékét, akkor a statisztikai szóráson belül közel azonos értékeket kapunk.

Ha a diagram e kezdeti egyenes szakaszán a húzóerőt fokozatosan megszüntetjük, akkor a próbatest visszanyeri kezdeti hosszúságát és alakját. Azt fogjuk tapasztalni, hogy a tehermentesítés során az E meredekségű egyenes mentén a grafikon ugyanazon pontjain keresztül térünk vissza az origóhoz, amelyeken a terhelés folyamán a másik irányban is áthaladtunk, tehát az acél ezen a szakaszon lineárisan rugalmas anyagként viselkedik.

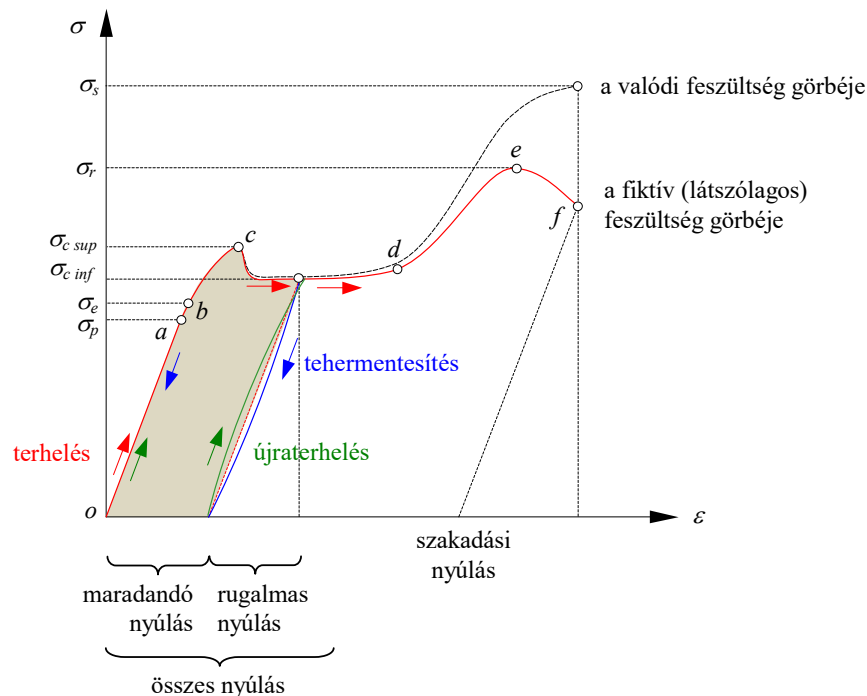
- A nyújtóerő növekedésekor egy bizonyos feszültségen (a σ_p arányossági határon, az a ponton) túl a kezdeti egyenes szakasz fokozatosan meggyöngyösödik. Ha a próbatestet nem nyújtjuk meg túlságosan, akkor a terhelés megszüntetésekor az továbbra is visszanyeri kezdeti hosszúságát és a tehermentesítés görbéje ezen esetben is fedni fogja a terhelésgörbét. Az $a - b$ tartományon az acél továbbra is rugalmas marad, azonban σ és ε aránya már nem állandó, kapcsolatukat tehát csak egy nemlineáris egyenlettel írhatjuk le.

- A próbatest megnyújtásának fokozásával rugalmatlan alakváltozások is meg fognak jelenni. Ezek mértéke a kezdetben csekély, észrevétlenül jelennek meg, de a próbatest megnyújtásának növekedésével együtt egyre nagyobbak lesznek. Ezeket a rugalmatlan alakváltozásokat a

tehermentesítés után mérhető maradandó megnyúlásként észleljük, a tehermentesítés görbe ilyenkor nem azonos a terhelésgörbével. A tehermentesítés görbéje egy egyenes szakasszal közelíthető, amelynek a dőlése azonos az origóból kiinduló egyenes dőlésével, tehát az ekkor érvényes Young-modulusz azonos a lineárisan rugalmas szakasznak megfelelő értékkel. A tehermentesítés során az acél rugalmas anyagként viselkedik még akkor is, ha a terhelés során maradandó alakváltozásokat is szenvedett.

Mivel elég nehéz kimutatni azt a σ_e feszültségértéket (rugalmassági határt; a diagramon a b pont jelöli), amelyetől kezdve a rugalmatlan alakváltozások is megjelennek, egyezményesen az anyagot rugalmasnak tekintjük egészen addig, amíg a maradandó alakváltozások el nem érik a 0.02 %-os értéket. A σ_e rugalmassági határnak tehát azt a feszültséget tekintjük, amely a 0.02 %-os maradandó fajlagos alakváltozáshoz vezet.

A lágyacél esetében a σ_e rugalmassági határ közel van σ_p arányossági határhoz.



1.1. ábra. A lágyacél szakítódigramja

• A lágyacél próbatestet a rugalmassági határon túl terhelve a maradandó alakváltozások egyre nagyobbak lesznek, de az anyag bizonyos mértékben ellenáll az őt érő terhelésnek. Ez az ellenállás azonban egy adott feszültség elérése után visszaesik, a szakítódigram görbéje pedig a c ponttól kezdve hirtelen ereszkedik, majd közel vízszintessé válik. A c pont feszültség-koordinátája a $\sigma_{c\ sup}$ felső folyáshatár. A felső folyáshatáron túl a terhelés enyhe növekedésekor is nagy megnyúlást tapasztalhatunk, a próbatest anyaga *megfolyik*. Az állandó terhelés mellett is nyúló próbatestek esetében a görbe vízszintessé válik. A feszültségnek azon értéke, amely az anyag folyás közben kifejtett ellenállását jelenti, a $\sigma_{c\ inf}$ alsó folyáshatár nevet viseli.

Nem minden anyag esetében létezik alsó és felső folyáshatár; sőt, vannak olyan anyagok, ahol nincs olyan tartomány, ahol az anyag egyértelműen folya (a szakítódigramnak nincs közel vízszintes szakasza). Ekkor a 0.2 %-os maradandó alakváltozásnak megfelelő σ_c feszültségértéket nevezzük *folyáshatárnak*. A fémek képlékeny alakításában ennek a határértéknek fontos szerepe van, ezért *alakítási szilárdságnak* is nevezik.

A folyást megszakító tehermentesítés görbéje is egy, a kezdeti lineárisan rugalmas szakasszal párhuzamos egyenessel közelíthető.

A szakítódiaagram a rugalmatlan alakváltozást szenvedett anyag újbóli megterhelésekor a tehermentesítési görbét fogja követni, tehát a tehermentesítés és az újrateherelés alatt az rugalmasan viselkedik. Azt mondjuk, hogy az anyag *felkeményedik*, ugyanis e folyamat alatt a folyáshatára (és az arányossági határa is) feljebb tolódik. Újrateherléskor az új folyáshatártól kezdve azonban az anyag az eredeti szakítódiaagramot fogja követni, mintha a tehermentesítés nem is történt volna meg.

- A lágyacél szakítódiaagramja egy bizonyos ponttól kezdve megint emelkedni kezd, a $d - e$ tartományon az anyag *keményedik*. Más, *lágyluló* anyagok esetében a diagram ereszkedni kezd.

- A kísérletileg rögzített görbe egy adott pontban eléri a maximumát majd onnan visszaesik (az $e - f$ szakasz). Az ereszkedő szakaszon ε növekedő értékeihez a σ feszültség csökkenő értékei tartoznak, tehát a diagram alapján úgy tűnik, hogy a maximumon túl a próbatest anyaga a terhelés alatt „magától” tönkremegy. A valóságban ez nem így van, mert a próbatest megnyúlását annak elvékonyodása, *harántkontrakciója* követi. Ez azt jelenti, hogy a feszültség 1.1. képletének nevezője, az S keresztmetszet nem állandó, hanem fokozatosan csökken. Ha ezt a csökkenést figyelembe vesszük, akkor az észlelt görbénket korrigálva a lágyacélok esetében egy folyamatosan emelkedő szakítódiaagramhoz jutunk (az 1.1. ábrán ez a szaggatott vonallal megrajzolt valódi feszültség-görbe).

Az ábrán szereplő „fiktív” és „valódi” feszültségek háttérben az a tény áll, hogy a kísérletek során nem a feszültséget, hanem az erőt mérjük. A feszültségeket egyezményesen az erőnek a eredeti S_0 keresztmetszettel való osztásával számítjuk ki, a valódi feszültségekhez a keresztmetszet aktuális, valódi nagyságára lenne szükségünk. Ennek meghatározása azonban nem egyszerű feladat és az csak az igen nagy alakváltozást szenvedett próbatest esetében tér el jelentősebb mértékben a kezdeti értéktől, így kényelmesebb a fiktív, *mérnöki* feszültségek használata.

A feszültségnek az e pontban mért legnagyobb értéke (amit az eredeti keresztmetszettel, az 1.1. képlettel számítunk) jelenti a *szakítószilárdságot*, amelyet a hazai szakirodalom többnyire σ_r -rel jelöl. Ez adja a húzóerő azon $F = \sigma_r \cdot S_0$ határértékét, amely már a próbatest elszakadásához vezet, ugyanis e ponton továbbmenve a keresztmetszet csökkenése miatt a feszültség még állandó húzóerő esetén is növekedni fog.

- A szakítópróba utolsó fázisában, az e ponton túl a próbatest egy előre meg nem határozható helyen jelentősen elvékonyodik, majd a görbe végét jelentő f pontban az elszakad. A tényleges feszültség végső, *szakadási feszültségnek* (másképpen *kontrakciós feszültségnek*) mondott értékének (σ_s) megfelelő legnagyobb maradandó fajlagos nyúlást *szakadási nyúlásnak* nevezik. Ez utóbbi mennyiség inkább informatív, hiszen a próbatest szakadáshoz vezető jelentős elvékonyodása csak egy rövidebb szakaszon jelenik meg és ráadásul az nem egyenletes, tehát szigorúan véve az 1.2. képlet nem alkalmas a tényleges fajlagos nyúlás kiszámításához. Emiatt a szakítódiaagram végső szakaszán a σ mellett az ε koordináta meghatározása is bizonytalanná válik.

Az előbbi pontokat áttekintvén a szakítódiaagramon a kísérlet alatt lejátszódó jelenségek szerint több jellegzetes szakaszt különböztethetünk meg:

- $o - b$ a rugalmas alakváltozás szakasza;
- $b - c$ a képlékeny alakváltozások megjelenése;
- $c - d$ a folyási szakasz;
- $d - e$ a keményedési szakasz;
- $e - f$ a kontrakciós szakasz.

A rugalmas alakváltozásnak van egy ferde egyenes szakasszal jól közelíthető, lineáris része ($o - a$), a rugalmatlan alakváltozásoknak pedig van egy vízszintes egyeneshez igazodó része ($a - c - d$ intervallumon belül).

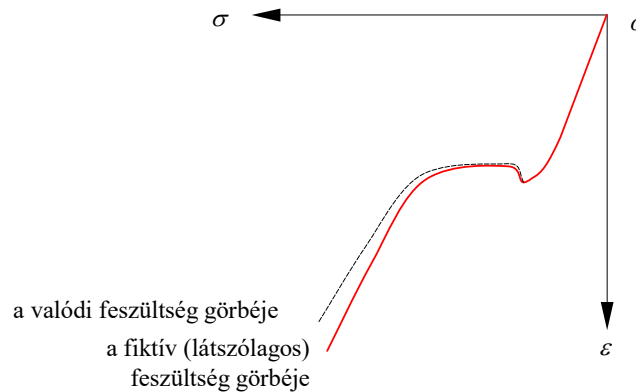
Szigorúan véve a $b - c$ szakasz már nem tartozik a rugalmas alakváltozás szakaszához a maradandó alakváltozások miatt, és az nem tartozik a folyási szakaszhoz sem, hiszen ekkor a kis terhelésnövekedéshez tartozó nagy megnyúlásokat (tényleges folyást) még nem észleljük.

A legnagyobb átvett erőnek megfelelő e pontig a keresztmetszet elvékonyodása egyenletes (bármely keresztmetszeten azonos), ezért az $o - e$ szakaszt az *egyenletes nyúlás* szakaszának nevezik.

1.3.2. A lágyacél zömítődiagramja

A lágyacél zömítődiagramja a szakítódiagramjához igen sokban hasonlít. Egyezményesen a nyomó igénybevételt negatív előjellel látjuk el és a rövidülést is negatívnak tekintjük. Így a zömítés során a σ nyomófeszültség és az ε fajlagos rövidülés egyaránt negatív mennyiségek (1.2. ábra).

A vizsgálat alatt ugyanazokkal a jelenségekkel találkozunk, amelyeket a szakítódiagram ismertetése során felsoroltunk. A zömítés során is azt tapasztalhatjuk, hogy a feszültség egy bizonyos határértékéig az acél lineárisan rugalmas, majd a feszültség és fajlagos alakváltozás kapcsolata nemlineárisra válik. Egy adott ponton túl megjelennek a maradandó alakváltozások is. A lágyacél zömítődiagramjának jellemző pontjai körülbelül ugyanazokkal a koordinátákkal rendelkeznek, mint a szakítódiagramé, egyedül az előjelek különböznek. A lineárisan rugalmas szakaszon meghatározható Young-modulusz megegyezik a szakítóvizsgálat alatt meghatározottal, és a számításokban kiemelten fontos alsó folyáshatár is mindkét esetben megegyezik. A folyt anyag tehermentesítése és újrateherelése most is a kezdeti lineáris szakasszal párhuzamosan történik.



1.2. ábra. A lágyacél zömítődiagramja

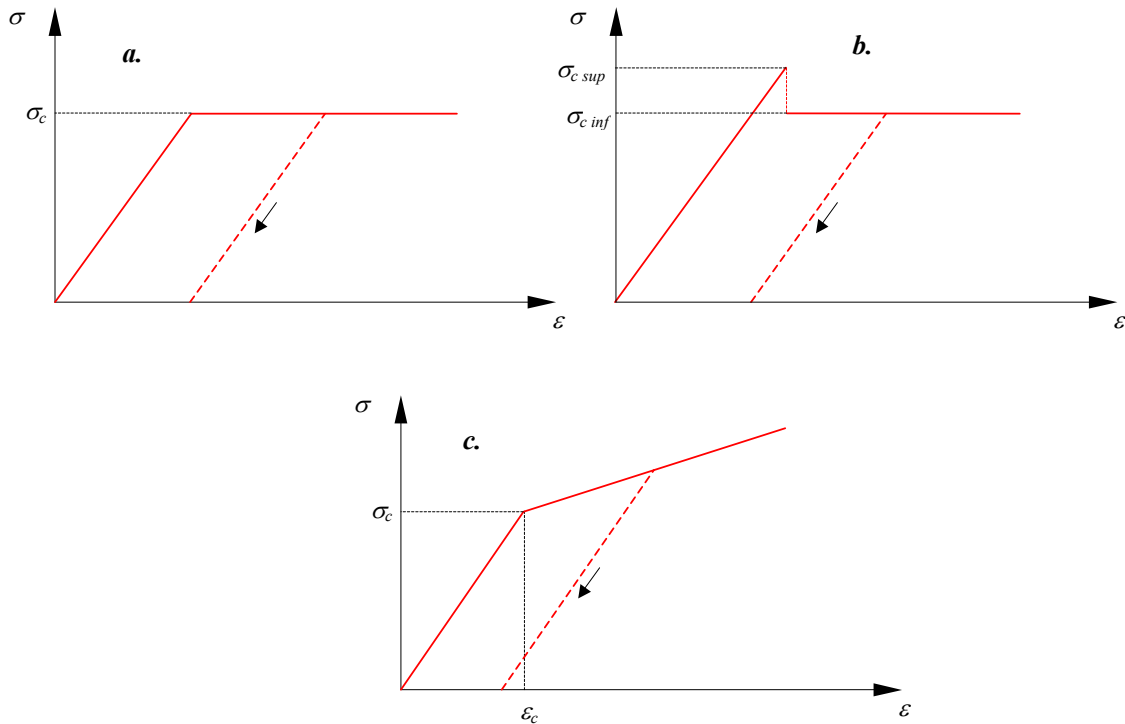
A lényeges különbség a folyást követő keményedési szakasztól történik: mivel a lágyacél igen nagy kompressziós alakváltozásokat tud átvenni (a próbatest egész egyszerűen kilapul), hiányozni fog az egyértelmű törést jelentő pont. A diagram végpontját a kísérletben használt nyomógép által kifejthető legnagyobb erő jelenti. A kontrakciós szakaszt egy dilatációs szakasszal helyettesíthetnénk, ez a keményedési szakasznak azt a részét jelentené, ahol a hordósodás (a próbatest, keresztmetszetének növekedése) már jelentőssé válik. A keresztmetszet-növekedés miatt a valódi feszültségek most kisebbek a látszólagosaknál.

1.3.3. Az anyag jelleggörbéje és az anyagegyenlet

A szakító- és a zömítődiagramot akár egyetlen görbeként egyesíthetjük, ezt húzónyomógörbének vagy az *anyag jelleggörbéjének* (karakterisztikájának) nevezik. A görbét leíró matematikai összefüggés az *anyagegyenlet*.

A valódi jelleggörbét matematikailag leírni elég nehéz feladat lenne s az így kapott anyagegyenletet annak bonyolultsága miatt körülményes lenne a számításokban használni. Éppen ezért a jelleggörbét és a hozzá illő anyagegyenletet valamilyen egyszerűsített, idealizált formában szokták használni.

Az 1.3. ábrán példaként három egyszerűsített szakítódiagramot látunk.



1.3. ábra. Egyszerűsített szakítódiagramok

Az 1.3.a. ábrán egy lineárisan rugalmas és egy szintén lineáris képlékeny szakaszból álló jelleggörbét láthatunk. Feltételezzük, hogy a folyáshatár alatt az anyag ideálisan rugalmas, a folyáshatár elérésekor az anyag pedig ideálisan képlékeny. Az anyag belsejében nem jelenhet meg a folyáshatár σ_c értékét meghaladó feszültség. A megfelelő anyagegyenlet:

$$\sigma = \begin{cases} E \cdot \varepsilon & \text{míg } E \cdot \varepsilon < \sigma_c, \\ \sigma_c & \text{ellenben.} \end{cases} \quad (1.5)$$

Az 1.3.b. ábrán szintén egy ideálisan rugalmas-ideálisan képlékeny jelleggörbét látunk, egy olyan anyagra, amely alsó és felső folyáshatárral rendelkezik:

$$\sigma = \begin{cases} E \cdot \varepsilon & \text{míg } E \cdot \varepsilon < \sigma_{c \text{ sup}}, \\ \sigma_{c \text{ inf}} & \text{ellenben.} \end{cases} \quad (1.6)$$

Az 1.3.c. ábra egy felkeményedő anyag egyszerűsített jelleggörbéje: a folyáshatáron túl a görbe tovább is lineárisan emelkedik, de ezen a szakaszon az anyag már nem rugalmas. E második

szakasz meredekségét egy E_{ep} rugalmas-képlékeny (elaszto-plasztikus) modulusszal adhatjuk meg. Ekkor az anyagegyenlet

$$\sigma = \begin{cases} E \cdot \varepsilon & \text{míg } E \cdot \varepsilon < \sigma_c, \\ E \cdot \varepsilon_c + E_{ep} \cdot (\varepsilon - \varepsilon_c) = \sigma_c \cdot \left(1 - \frac{E_{ep}}{E}\right) + E_{ep} \cdot \varepsilon & \text{ellenben.} \end{cases} \quad (1.7)$$

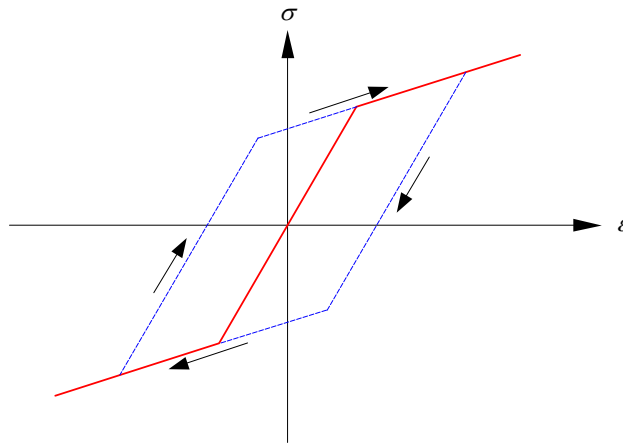
Észrevehetjük, hogy ha ez utóbbi egyenletben:

- $E_{ep} > 0$, akkor a jelleggörbe emelkedik (az anyag keményedik);
- $E_{ep} = 0$, a jelleggörbe vízszintessé válik (az anyag megfolyik);
- $E_{ep} < 0$, akkor a jelleggörbe ereszkedik (az anyag lágyul);

a második eset pedig az ideálisan rugalmas-ideálisan képlékeny anyagot írja le.

Húzásra és nyomásra azonosképpen viselkedő anyagok jelleggörbéje az origóra nézve szimmetrikus (1.4. ábra).

A lágyacélt a folyáshatáron túl megterhelve annak keményedését tapasztaltuk, a folyáshatára megemelkedett. Amennyiben a próbatestet felváltva, ciklikusan a folyáshatárt meghaladó húzásnak és nyomásnak tesszük ki, akkor azt tapasztaljuk, hogy a húzás és a zömítés alatt meghatározható folyáshatárok együttesen változnak. Az egyik megváltozása maga után vonja a másik azonos mértékű megváltozását is: ha abszolút értékben az egyik növekedik (megemelkedik), akkor abszolút értékben a másik ugyanannyival fog csökkenni (ugyanolyan mértékben emelkedik meg). Ezt a jelenséget Bauschinger-hatásnak nevezik.



1.4. ábra. Egyszerűsített húzó-nyomó diagram és a Bauschinger-hatás illusztrálása

1.3.4. A szakítási diagram energetikai vonatkozásai

Amennyiben egy derékszögű koordináta-rendszer tengelyein bizonyos fizikai mennyiségeket, „dimenziókat” ábrázolunk, akkor az ebben a rendszerben ábrázolt idomok területe a két fizikai mennyiség szorzatának dimenziójával rendelkezik. Ha a szakítógörbét az F erő és a Δl nyúlás (elmozdulás) koordinátákkal ábrázolnánk, a görbe alatti területnek mechanikai munka jellege lenne: a próbadarab megnyújtásakor elvégzett mechanikai munkát jelentené. σ és ε fajlagosított mennyiségek, a szorzatuk is fajlagosított mennyiséget jelent: az alakváltozás során az egységnyi térfogaton (J/m^3) elvégzett mechanikai munkát.

Rugalmas alakváltozáskor a tehermentesítés görbéje a terhelésgörbét fedi, a teljes terhelés-tehermentesítés ciklus alatt elvégzett munka nulla lesz. A terheléskor befektetett mechanikai munka potenciális energia formájában felhalmozódik a rugalmas testben, tehermentesítéskor pedig az teljes egészében mechanikai munkává alakul vissza. Az ilyen rendszert a mechanikában „konzervatívnek” nevezik.

A rugalmatlan alakváltozások megjelenését követő tehermentesítés során a görbék már nem fedik egymást, az 1.1. ábrán a sátirozott területet kapjuk. Ez a terület a rugalmatlan alakváltozás következtében, hő formájában „elvesztett” fajlagos mechanikai munkát jelenti; a rugalmatlan alakváltozást szenvedett test „disszipatív” rendszerként viselkedik. A mechanikai munka hővé való átalakulását az anyag belső súrlódásának tulajdonítjuk. Ezt a jelenséget tapasztalhatjuk például akkor, amikor egy drótot ismételt hajlítgatással szándékozunk eltörni: a drót fel fog melegedni.

Valójában ideális, konzervatív rendszerek nincsenek, a terhelés és a tehermentesítés görbéi nem fedik egymást (még a rugalmasnak tekintett szakaszon sem). Az, hogy valamely ε, σ koordinátájú pontból a terhelés vagy a tehermentesítés során merre haladunk tovább, attól függ, hogy milyen úton jutottunk el oda: ezt mechanikai „hiszterézisnek” nevezzük (a hiszterézis a rendszerek azon tulajdonsága, mely szerint a jövőbeni állapotuk nem csak a jelenlegitől, hanem a múltbelitől is függ).

A folyáshatárt meghaladó ciklikus terhelésvonal a Bauschinger-hatás miatt az 1.4. ábrán látható hiszterézis-görbéhez vezet. Az origón átmenő folytonos vonal a *szűzgörbe*, amely az előzetesen képlékeny alakváltozást nem szenvedett anyag terhelésvonalja.

1.3.5. Egyéb anyagok jelleggörbéi

Az előbbieken a lágyacél jelleggörbéjét tanulmányoztuk, amely e jelleggörbék minden jellegzetes pontjával és szakaszával rendelkezik. Azonban ha más anyagokat tanulmányozunk, akkor megtörténhet, hogy a lágyacélétől erősen eltérő jelleggörbékhez jutunk.

Az 1.5. ábrán néhány jellegzetes húzódiagramot láthatunk. A keményacél diagramja a kezdetben a lágyacéléhoz hasonlít, a két anyag Young-modulusza is közel azonos. A lágyacélhoz viszonyítva azonban a keményacél folyáshatára sokkal fennebb van és azt tapasztalhatjuk, hogy a keményacél különösebb folyás nélkül, a lágyacélhoz viszonyítva igen kis maradandó alakváltozás mellett szakad el. A lágyacélból készített alkatrészek tönkremenetelét tehát nagy alakváltozások megjelenése előzi meg, míg a keményacélból készítették, bár nagyobb terhelést tudnak átvenni, hirtelen mennek tönkre.

A törést megelőző rugalmatlan alakváltozások szempontjából az anyagokat két kategóriába szokás sorolni: a *szívós* anyagok tönkremenetelét jelentős alakváltozás előzi meg. Egyezményesen egy anyagot szívósnak tekintünk, amennyiben a szakadási nyúlása legalább 5%. A *rideg* anyagok tönkremenetele hirtelen történik, csekélyebb sokszor észrevehetetlen alakváltozások után, emiatt szerkezeti anyagokként való beépítésüket kerülni kell. A rideg anyagok gyakran törékenyek, egy nagyobb ütés, egy repedés megjelenése vagy pedig egy feszültséggyűjtő hely létezése azok gyors tönkremeneteléhez vezethet.

A bronz diagramjának formája hasonlít a keményacéléhoz, a bronz Young-modulusza viszont az acélénak mintegy fele és így a lineárisan rugalmas szakasz dőlése enyhébb. Összetételétől függően a bronz lehet keményebb vagy lágyabb, ez utóbbi esetben a szakadás előtt nagyobb maradandó megnyúlást észlelhetünk.

Az 1.5. ábrán megtalálhatjuk az öntöttvas húzódiagramját is. Az öntöttvas csak egy rövid lineáris szakasszal rendelkezik, szakítási diagramja hamar meggörbül. A kezdeti lineárisan rugalmas szakaszt egy eléggé hosszú nemlineárisan rugalmas szakasz követi. Ez a lefele görbülő karakterisztika azt jelenti, hogy a terhelés növekedésekor egy adott terhelés-növekedésre egyre nagyobb megnyúlás-növekedést észlelhetünk, az ilyen anyagot *lágylónak* nevezik. Az öntöttvas, akár csak a keményacél, kismértékű maradandó alakváltozás után megy tönkre.

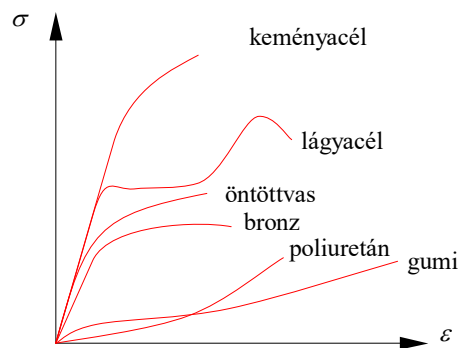
Az 1.5. ábrán láthatunk egy felfele kunkorodó jelleggörbét is, a poliuretánét. Az előbbivel ellentétben ez a karakterisztika azt jelenti, hogy a terhelés növekedésekor egy adott terhelés-növekedésre egyre kisebb megnyúlás-növekedés jut. Az ilyen anyagot *keményedőnek* nevezik.

A nemlineáris anyagok esetében a feszültség és az alakváltozás kapcsolatát nemlineáris egyenletek írják le. Példaként említhető a gyakran alkalmazott Ramberg-Osgood anyagtörvény, amely nemcsak a rugalmas anyagok leírására használható és amelynek három paramétere van:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + K \cdot \left(\frac{\sigma}{E} \right)^n. \quad (1.8)$$

Ebben az anyagtörvényben az E paraméter az igen kicsi alakváltozások esetében érvényes rugalmassági modulusz (tehát E a jelleggörbéhez az origóban húzott érintő meredeksége), K és n pedig két, kísérletileg meghatározott paraméter.

A gumi jelleggörbéje végig görbült és annak egy inflexiós pontja is van. A gumi a kezdetben egy rövid lágyuló szakasszal rendelkezik amelyet egy igen hosszú keményedő szakasz követ. A gumi nagyon nagy alakváltozásokat is elszenvedhet tönkremenetel, maradandó alakváltozás nélkül és ilyenkor az ε feltételezett kicsinységéből fakadó egyszerűsítéseket a számításainkban nem alkalmazhatjuk, hiszen e fajlagos alakváltozás 100% vagy annál több is lehet. Az ilyen, jelentős rugalmas alakváltozást mutató anyagokat *hiperelasztikusnak* nevezzük és a számításukhoz az általános szilárdságtanon túlmutató eljárások szükségesek.



1.5. ábra. Különböző anyagok húzódiagramja

Az anyagok egy része húzásra és nyomásra hasonlóképpen viselkedik, más anyagok, különösképpen a törékenyek, viszont nem. A legjelentősebb különbség a szilárdság eltolódásában van: a nyomószilárdság a szakítószilárdság többszöröse is lehet.

1.3.6. A kísérletek során meghatározott szilárdsági és alakíthatósági jellemzők

Az anyag szilárdságát kutató kísérletek során nagyszámú próbát, például szakítópróbát végzünk. Bárhogyan is iparkodunk azonos körülmények között mérni, a különböző próbatestekre kapott jellemzők bizonyos mértékben különbözni fognak egymástól. E különbség az alkalmazott eljárás pontosságán belül véletlenszerűen előforduló értékekhez vezet, amelyeket valószínűségi változóknak tekinthetünk. E véletlenszerű változásnak több forrása is lehet, a mérés hibák szokásos eloszlásán túl tekintetbe kell vennünk azt, hogy még a legszigorúbban ellenőrzött gyártási folyamat során is a különféle körülmények (például az összetétel) megengedett határok közötti ingadozásával kell számolnunk.

Felvetődik tehát az a kérdés, hogy ez esetben miképpen állapítsuk meg a szilárdsági jellemzők nominális értékét, amelyekkel majd a számításokban dolgozhatunk. Ha átlagos értékeket fogadunk el nominálisként, akkor a valóságban az illető valószínűségi változó eloszlásától függően fordulhatnak elő annál nagyobb vagy kisebb értékek, így például normál-eloszlás szerint fele-fele arányban. Ha az anyag szilárdságát így határoznánk meg, akkor 50%-os eséllyel méreteznénk alul a tervezett szerkezetünket, hiszen 50%-os valószínűséggel fordulhatnának elő annál kisebb szilárdságú gyártmányok. Éppen ezért ezeket az értékeket nem az átlagként adjuk meg, hanem olyan határértékeként amelyeknél kedvezőtlenebbek csak bizonyos valószínűséggel fordulnak elő. Így egy bizonyos standardizált összetételű és gyártástechnológiájú anyaghoz például egy standardizált folyáshatárt (σ_c , R_e) és szilárdságot (σ_r , R_m) rendelhetünk.

A szilárdságtani számításokban különféle *határállapotokra* méretezünk. Ezen állapot lehet például a rugalmatlan alakváltozások megjelenése vagy pedig a szerkezet törése, tehát amikor a leginkább igénybevett keresztmetszeten a feszültség eléri a folyáshatárt, illetve az anyag szilárdságát. E számításokban a határállapothoz egy megengedhető legnagyobb feszültség-értéket rendelünk, amit σ_a -val jelölünk. Ez a *megengedett feszültség*, amelyet az illető határállapotnak és az igénybevételnek megfelelően egy-egy c biztonsági tényezővel állapítanak meg:

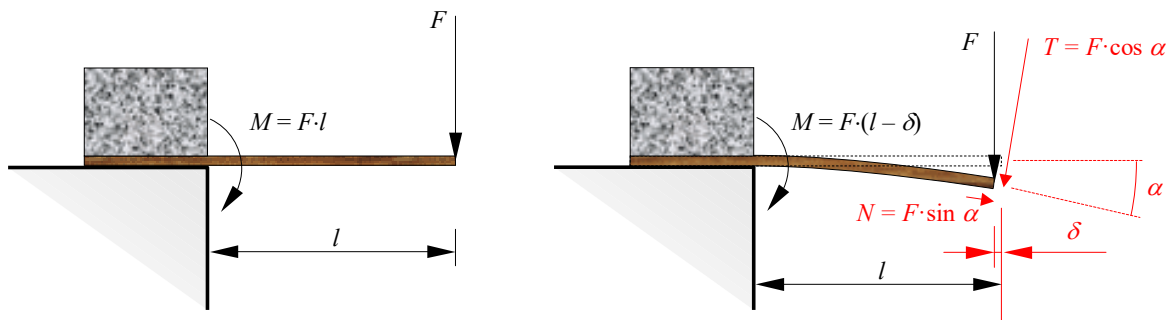
$$\sigma_a = \frac{R}{c}, \quad (1.9)$$

ahol R az előbbieken tanulmányozott határértékek (például folyáshatár, szakítószilárdság) egyike.

A megengedett feszültségek megállapításának módozata standardizált, illetve standardizált anyagok esetén maguk a megengedett feszültségek is standardizált értékek.

1.4. A geometriai nemlinearitás

A nemlineáris viselkedés második forrása geometriai lehet. Tegyük fel, hogy a test egy adott pontjában egy koncentrált erő hat és ennek következtében az deformálódik. Ha e deformáció miatt a koncentrált erő támadáspontja elmozdul, akkor ez az elmozdulás kihatással lesz az előidézett alakváltozásra. Mindaddig, amíg az alakváltozások megfelelően kicsik, addig a támadáspont elmozdulása miatti hatások elhanyagolhatónak tekinthetők. Ellenkező esetben egy geometriai nemlinearitást mutató jelenséggel állunk szemben.



1.6. ábra. Geometriailag nemlineáris eset

Példaként vegyünk egy hajlékony vonalzót, amelynek az egyik végét az asztal lapjához szorítjuk. Ha a másik végét a vonalzó lapjára merőleges irányban megnyomjuk, akkor az lehajlik és ennek következtében a nyomóerő merőlegessége megszűnik és a támadáspontja is közelebb kerül a

vonalzó asztalhoz szorított végéhez. Ennek következtében a vonalzóra ható erőnek a befogásnál számított nyomatéka kisebb lesz, viszont tengely irányú igénybevétel is jelentkezik (1.6. ábra).

A műszaki gyakorlatban azonban az alakváltozások rendszerint csekélyek és ekkor a megoldandó feladatok geometriailag lineárisnak tekinthetők: ilyen esetben az egyensúlyi egyenleteket a szerkezet eredeti, terheletlen alakjára írjuk fel. Ezt a közelítést a *megmerevítés elvének* nevezik, a reá alapozó számításokat pedig *elsőrendűnek* mondják.

Amennyiben ez az elv valamilyen megfontolás miatt elfogadhatatlan, akkor a számításokat az alakváltozások figyelembe vételével kell elvégezzük. A *másodrendű* számításokban az egyensúlyi egyenleteket a szerkezet deformált alakjára írjuk fel, azonban a feszültségek, fajlagos deformációk kiszámítása továbbra is a kis alakváltozások hipotézisének megfelelő relációkkal történik (az 1.1. és 1.2. formulákkal megadott „mérnöki” képleteket használjuk). Az elemi szilárdságtanban a rudak kihajlásának vizsgálata az egyedüli olyan feladat, ami ilyen számításokat igényel.

A *harmadrendű* számítások már nem tartoznak az elemi szilárdságtanhoz: ekkor a nagy, a szerkezet méreteivel egybevethető mértékű elmozdulások, alakváltozások miatt az említett mérnöki mennyiségek már nem használhatók és ekkor a rugalmasságtan keretein belül megállapított bonyolultabb összefüggésekhez kell folyamodnunk.

1.5. A szerkezet modellezése

A szilárdságtani számítások során a tanulmányozott szerkezetet modellezzük, azaz egy olyan egyszerűsített „vázlatot” készítünk róla amely lehetővé teszi egy minél egyszerűbb, de kellőképpen pontos eredményekhez vezető számítási eljárás alkalmazását.

1.5.1. A geometriai modellezés

Az egyszerűsítés első lépése a geometriai modellezés. A szerkezeti elemeket geometriájuk szerint három kategóriába soroljuk.

Az első kategória az *egydimenziós* elemek osztálya. Valódi egydimenziós tárgyak a természetben nincsenek, hiszen mindegyiknek van valamilyen térbeli kiterjedése, viszont egy dimenzióval leírhatónak tekinthetünk minden olyan szerkezeti elemet, amelynek valamelyik irányban mért kiterjedése jóval nagyobb az illető irányra merőleges méreteinél. Ilyen elemek a különféle egyenes vagy görbe rudak, csövek, tengelyek, oszlopok, gerendák, vonórudak, kötelek, kábelek és így tovább. Ezeket tehát középvonalukkal, tengelyükkel adjuk meg (ez lehet egyenes, sík vagy térbeli görbe), az arra merőleges, esetenként állandó vagy változó keresztmetszetüket pedig paraméterként, illetve e tengely mentén értelmezett függvényként írjuk le. Az elemi szilárdságtan többnyire az ilyen egydimenziós elemekkel foglalkozik – ez a deformálható testek tanulmányozásában használható lehető legegyszerűbb geometriai modell. Az elemtípus megnevezésében szereplő egy dimenziót annak tengelye mentén értelmezzük, de ez a tengely lehet egy háromdimenziós Descartes-féle koordináta-rendszerben leírható vonal is.

A második kategóriába tartoznak a *kétdimenziós* elemek, ezeknek a középfelületükre merőlegesen mért vastagságuk jóval kisebb a másik két irányban mérhető kiterjedésüknél. Az ilyen elemeket a középfelületükkel adjuk meg (ez lehet sík vagy görbült) és a vastagságuk szerepel paraméterként vagy függvényként. Ilyen elemek a különféle lemezek, a tárcsák (ezek a szilárdságtan szóhasználata szerint sík elemek) és a héjyak (ezek görbültek), valamint a sík vagy görbült membránok (ahogyan az egy dimenziós elemek közül a kábelek, kötelek hajlítással szemben kifejtett merevsége ideális esetben nulla, ugyanúgy a kétdimenziós elemek közül a membránok hajlítással szemben kifejtett ellenállása is nulla). A kétdimenziós szerkezeti elemeket az elemi szilárdságtan csupán néhány egyszerűbb esetben tudja tárgyalni, ezekkel speciális fejezetek foglalkoznak.

A harmadik kategóriába a *háromdimenziós* elemeket soroljuk, ezek kiterjedése mindhárom irányban összemérhető. Akárcsak az előbbi esetben, tárgyalásukhoz az elemi szilárdságtan általában nem használható.

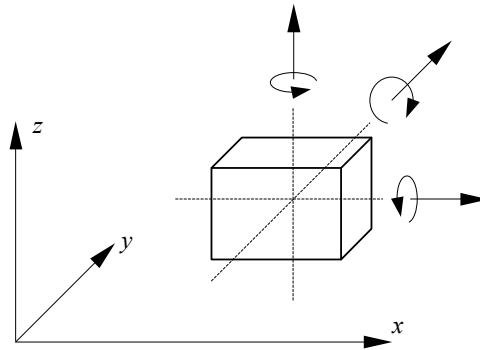
A szilárdságtanban (és nemcsak ott) szereplő mennyiségek egy része, így az erő, a nyomaték, az elmozdulás és az elfordulás, vektoriális mennyiség, közöttük különféle vektoriális egyenleteket írhatunk fel. Ezeket a mennyiségeket egy koordináta-rendszer tengelyeire eső vetületeikkel adjuk meg. Ha a koordináta-rendszer megválasztásában eléggé körültekintőek vagyunk, akkor megtörténhet, hogy csak két vagy akár csak egy tengelyre eső vetületekkel kell dolgoznunk: ekkor a megoldandó feladatot *síknak*, illetve *egy tengelyűnek* nevezzük.

1.5.2. A kényszerek modellezése

Nemcsak a geometriát, hanem a szerkezeti elemek közötti kapcsolatot, a kényszereket is sematizáljuk, azokat is modelleznünk kell.

A mechanikában egy anyagi ponthoz három *szabadságfokot* rendelünk. A szabadságfok a pont helyzetének leírásához szükséges, egymástól független paraméterek számát jelenti. Az anyagi pont helyzetét három koordinátával (helyzetvektorának három vetületével) tudjuk megadni.

Egy merev testnek hat szabadságfoka van, mivel az elfordulását is meg kell adnunk. A testhez hozzárendelhetünk egy azzal együtt mozgó helyi koordináta-rendszert, ekkor a helyzetének, elmozdulásának leírásához szükséges plusz három szabadságfok a helyi koordináta-rendszernek elfordulását írja le a rögzítettnek tekintett globális koordináta-rendszerben.



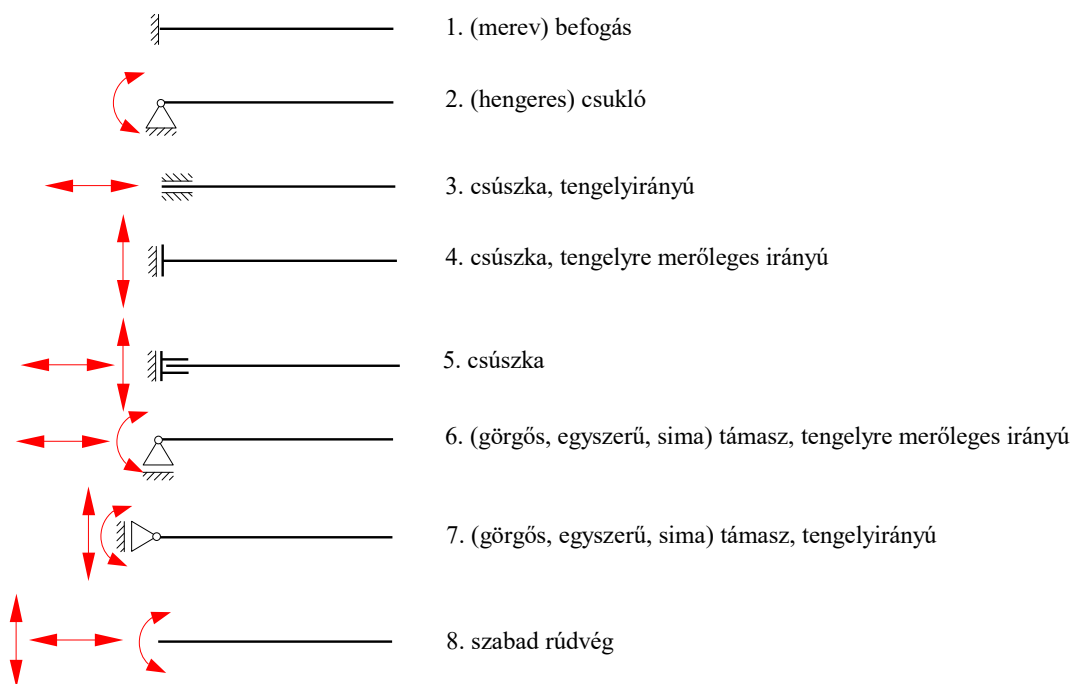
1.7. ábra. A merev test hat szabadságfoka

Az elfordulás – akárcsak az elmozdulás, – egy vektoriális mennyiség. Az elfordulásvektornak a tartóegyenese (irányvonala) a test pillanatnyi forgástengelye, a vektor nagysága az elfordulás mértéke, irányítása (iránya) pedig a jobbkez-szabálynak megfelelő (arra mutat amerre a tartóegyenesen a megadott irányba forgatott csavaranya elmozdul). Az elfordulásvektort (és a nyomatékvektort is) néha kettős hegyű nyíllal jelölik, hogy meg lehessen különböztetni az elmozdulásvektortól (illetve az erővektortól). Nos, akárcsak az elmozdulásvektornak, az elfordulásvektornak is vannak tengelyre eső vetületei és ez a három vetület jelenti az újabb három szabadságfokot.

Egy merev test pontjai egymáshoz viszonyítva nem mozdulnak el, azonban ez a kijelentés egy deformálható test esetében már nem igaz: az alakváltozás, a test formájának és/vagy alakjának megváltozását a pontok relatív elmozdulása jelenti. Ha a deformálható test mozgását le szeretnénk írni, akkor minden egyes pontjának mozgását le kellene írjuk és mivel hogy a testnek végtelen sok pontja van, következésképpen végtelen sok szabadságfoka is van. Végtelen mennyiségekkel dolgozni nehéz, éppen ezért a deformálható test egyensúlyának vizsgálatában bizonyos engedményeket teszünk: az illető test (szerkezeti elem) szabadságfokainak számát azonképpen

határozzuk meg, mintha az merev lenne, az alakváltozást pedig rendszerint a testhez rendelt koordináta-rendszerben határozzuk meg a lekötött szabadságfokoknak megfelelően.

Az elmondottak alapján a legegyszerűbb geometriával rendelkező, egydimenziós szerkezeti elemek, mint például a rudak, végtelen sok szabadsági fokkal rendelkeznek, azonban mi csak hat szabadságfokot rendelünk hozzájuk. Mi több, ha a feladat sík, akkor elegendő csak három szabadságfokkal dolgoznunk, egytengelyű feladatoknál a szabadságfokok száma pedig csupán egy lesz. Ahhoz, hogy egy testet a térben rögzítsünk, hat szabadságfokát kell lekötelnünk (három elmozdulás, három elfordulás), síkban pedig a lekötendő szabadságfokok száma három (két elmozdulás, egy elfordulás). A lekötött szabadságfokokat a rúd tengelyének egy-egy pontjához rendeljük, ezek a pontok jelképezik a rúd kényszereit, ezek a rúd *támaszai*. Az egy ponthoz rendelt lekötéseket a rögzített szabadságfokoknak megfelelően nevezzük el és ábrázoljuk. Térbeli esetben, mivel 6 szabadságfokunk van, a lehetséges kombinációk száma $2^6 = 64$, síkban azonban csak 3 szabadságfokunk van és így a lehetséges kombinációk száma $2^3 = 8$.



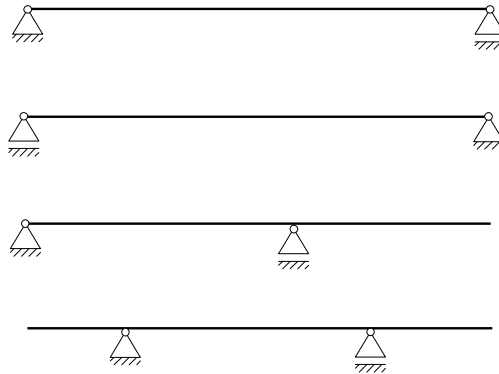
1.8. ábra. Sík kényszerek, rögzítetlen szabadságfokok

Az egyszerűség kedvéért az 1.8. ábrán csak a sík esetet ábrázoljuk, a lehetséges elmozdulások ábrázolásával és a kényszer megnevezésével. A nyolc kombináció közül a gyakorlatban a befogás, a csukló és a 6. számmal jelölt tengelyre merőleges egyszerű támasz fordul elő a leggyakrabban. A kényszereket „fokszámmal” is jellemezhetjük, amely a lekötött szabadságfokok számát jelenti. Sík esetben a legnagyobb fokszámmal (harmadfokú) a befogás rendelkezik. A 8. számmal jelölt szabad rúdvég már nem is tartozik a kényszerek közé, ezt csak a lehetséges kombinációk teljessége miatt ábrázoltuk. E kényszereket, szabadságfokokat a rúd tengelyéhez igazítottuk, azonban léteznek más irányú elmozdulást meggátoló ferde kényszerek is.

A kényszerek lehetnek ideálisak, amelyek esetében a le nem kötött szabadságfok irányában történő elmozdulás súrlódásmentes és a lekötött szabadságfokok irányában a megtámasztás teljesen merev, illetve nem ideálisak, amikor a szabad elmozdulást súrlódási erők korlátozzák, illetve a lekötött szabadságfokok irányában egy bizonyos rugalmas elmozdulás lehetséges (ez utóbbiakat rugalmas támaszoknak nevezzük).

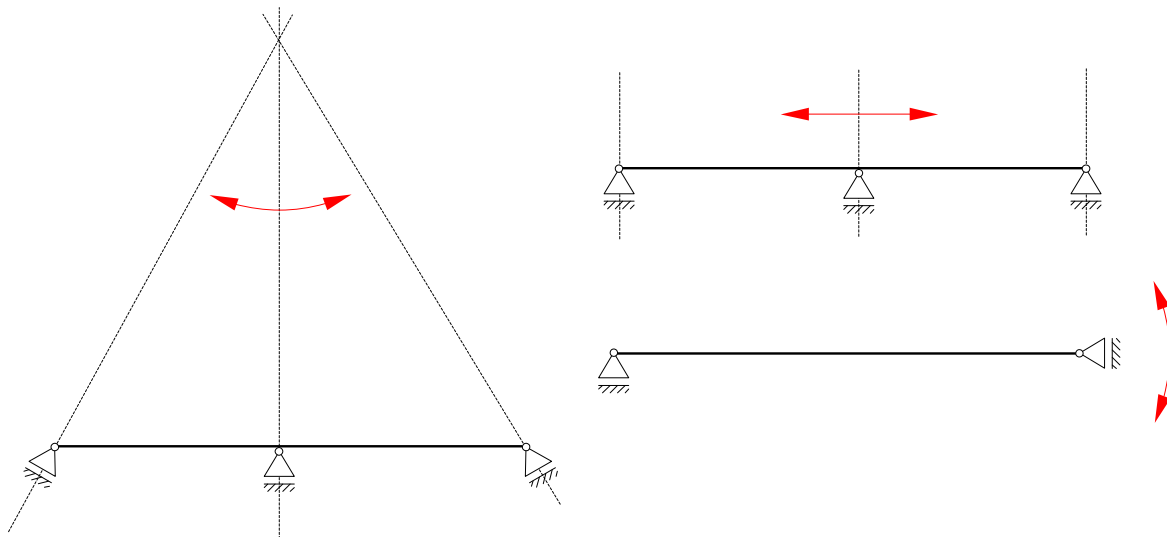
A rúd síkban történő rögzítéséhez szükséges kényszerek legalább három szabadságfokot kell lekössenek. Az 1.8. ábra tanulsága szerint önmagában erre csak a merev befogás képes, egyéb esetekben a rudat többfajta megtámasztással is el kell lássuk.

A gyakorlatban előforduló egyik legfontosabb eset a kéttámaszú tartó (1.9. ábra), ahol a két támasz közül az egyik egyszerű, a másik pedig csuklós. E két támasz elhelyezése történhet a rúdvégeken, de bárhol máshol is. A szabadon „lógó” végű rudakat konzolosnak nevezzük (az ábrán az alsó két eset).



1.9. ábra. Kéttámaszú tartók

A kényszerek (támaszok) nem minden kombinációja eredményez stabil szerkezetet. Megvizsgálván a lehetséges eseteket kijelenthetjük, hogy a párhuzamos vagy egy pontban összefutó hatásvonalú támaszok labilis szerkezetekhez vezetnek. Az 1.10. ábra ilyen szerkezeteket ábrázol, ahol a megengedett elmozdulást, (pillanatnyi) elfordulást is megjelöltük.



1.10. ábra. Labilis tartók

A rúd (vagy bármely szerkezet) a reá ható terhelést a kényszereket megvalósító támasztószervezeten keresztül adja át azoknak az elemeknek, amelyekre támaszkodik. Ez utóbbiak a hatás-ellenhatás alapján az átadott erővel vagy nyomatékkal azonos nagyságú, de fordított irányú reakcióerőkkel és nyomatékokkal (kényszererőkkel) hatnak vissza az illető rúdra. A

kényszer fokszáma a benne fellépő reakció komponenseinek (erők, nyomatékok vetületeinek) számával egyenlő.

Ha a rúd a terhelés és a reakcióerők hatása alatt nincs stabil egyensúlyban, akkor azt labilisan mondjuk: az ilyen szerkezetek mechanizmusnak tekinthetők.

Ha a rúd stabil és a reakcióerők és nyomatékok a vetületi egyensúlyi egyenletekből meghatározhatók, akkor azt *sztatikailag határozottnak* (determináltnak) nevezzük. Sík esetben három vetületi egyenletet írhatunk fel. Ha a szóban forgó sík a koordináta-rendszer xy síkja, akkor ezek az erők az x és az y tengelyekre eső vetületeinek, illetve az z tengely körül forgató nyomatékok egyensúlyi egyenletei. Mivel három egyenletet írhatunk fel, következésképpen a sztatikailag határozott rúdnak három lekötött szabadságfoka van, a reakciókat pedig a három egyenletből álló egyenletrendszer megoldásaként kapjuk meg.

Ha a reakciókat az egyensúlyi egyenletekből nem tudjuk meghatározni, akkor a rudat (vagy szerkezetet) *sztatikailag határozatlannak* nevezzük. Három ilyen eset is lehetséges:

- amikor a felírható egyenletek, tehát a kényszerek által lekötött szabadságfokok száma ugyan azonos az ismeretlenek számával, de az egyenletrendszernek nincs megoldása (az 1.9. ábrán látható labilis tartók);
- vagy, amikor a felírható egyenletek, lekötött szabadságfokok száma túl kevés és egy mechanizmusról van szó (alulhatározott rendszer: ekkor az egyenletrendszert kevesebb egyenlet alkotja, mint ahány ismeretlenünk van);
- illetve, amikor a felírható egyenletek, tehát a lekötött szabadságfokok száma túl nagy (több egyenletünk van, mint ismeretlenünk). Az utóbbi esetet szokás még *túlhatározottnak* is nevezni. A túlhatározott rendszerek reakcióit csak a rugalmas alakváltozások figyelembe vételével lehet kiszámítani.

1.5.3. A terhelés modellezése

A szerkezeti elemet különféle erők terhelik, közvetlenül vagy pedig a vele kapcsolatban álló egyéb szerkezeti elemeken keresztül.

Az erőket általában *külső* és *belső* erőkre osztjuk fel.

Külső erőknek nevezzük azokat, amelyek valamilyen közvetlen környezeti hatásnak tulajdoníthatók, mint amilyenek például a szerkezetre támaszkodó alkatrészek által átadott erők, a szerkezet saját súlya (ezeket *aktív* erőknek is nevezik) vagy a támaszokban fellépő reakcióerők (ezek *passzív* erők, mivel a támaszban ébredő visszaható erőkről van szó). A külső erők nemcsak a test felületén ható, tehát *felületi* erők: azok lehetnek a test térfogatában ható *térfogati* erők is, mint például a test súlya és a mozgás során megjelenő tehetetlenségi erők is.

A belső erők a szerkezetet alkotó elemek között fellépő erők, illetve az elemek belsejében ható erők. Megjelenésük valamilyen belső okra vezethető vissza, mint például a szerkezeti elemek között, az illesztésekben vagy kontaktfelületeken átadott erők, illetve például a terhelés vagy az egyenetlen hőtágulás által előidézett belső feszültségek. Belső erőkről beszélünk amikor egy képzeletbeli metszéspelületeken fellépő hatásokat tanulmányozzuk: úgy tekintjük, hogy ezen belső erők a lemetszett rész által átadott erőket helyettesítik. A hatás-ellenhatás elve miatt a belső erők mindig párban lépnek fel, tehát a metszéspelület vagy érintkezési felület mindkét oldalán megjelennek, azonos nagysággal, de ellentétes irányjal.

Az erő vektoriális mennyiség. A merev test mechanikájában az erővektor *szabad* (másképpen mondva *a tartóegyeneséhez kötött*), mert az a tartóegyenesen szabadon elcsúsztatható anélkül, hogy az illető testre kifejtett hatása megváltozna. A szilárd test mechanikájában ez nem így van, az erővektor *kötött*, amely a támadáspontjában hat a testre. Vegyünk egy példát: ha egy rúd tengelyében, annak egyik végén ható húzóerőt átköltöztetnénk a rúd másik végére, akkor ugyanaz az erő például a rúd összenyomását és nem annak húzását eredményezné.

A definíciója szerint az erő a támadáspontjában hat, a támadáspont pedig egy kiterjedés nélküli objektum. Ennek következtében a vektorként felfogott erő nyilván egy idealizálás kell legyen, hiszen a testek valódi kiterjedésük folytán kisebb-nagyobb közös felületeken keresztül érintkeznek hatnak egymásra, mivel még a legjobban kihegyezett tű csúcsának is véges méretei vannak (nagyon kicsi, de van kiterjedése). Az ilyen, vektorként leírt terhelést a szilárdságtanban *koncentrált erőnek* nevezzük és akkor alkalmazzuk, amikor a szerkezeti elemet érő hatás csak egy kis felületre korlátozódik.

A valódi erőhatások tehát kisebb-nagyobb felületen érik a vizsgált szerkezeti elemet, és ha ezeket nem modellezhetjük koncentrált erőként, akkor *megoszló erőkről* beszélünk. A *felületen megoszló erő* nem más, mint a test felszínére gyakorolt nyomás, mértékegysége pedig a nyomás mértékegysége, amit azonban inkább erő/felület (például N/m^2) formában szoktak megadni. Megjegyzendő, hogy a hidrosztatikai nyomástól eltérően a felületen megoszló erő nem feltétlenül merőleges az illető felületre.

A megoszló erőnek van egy idealizált, egyszerűsített változata: a *vonall mentén megoszló erő*. Ezt akkor használjuk, amikor a test felületét erő hatás egy vonal közvetlen környékére koncentrálódik, vagy amikor a tanulmányozott elem valódi geometriáját annak középvonalával helyettesítettük, tehát azt egy dimenziós elemként modellezzük. A vonal mentén megoszló erő nagyságát erő/hosszúság, N/m mértékegységekben adjuk meg.

Az eddigiekben olyan erőkről beszélünk, amelyek a szerkezeti elem felületére hatnak. Ezeket *felületi erőknek* nevezzük. Vannak olyan erők amelyek a test térfogatában hatnak, ilyenek például a gravitációs erő és a tehetetlenségi erő. Ezeket térfogategységre eső intenzitásukkal adjuk meg, például N/m^3 -ben. Ezek a *térfogaton megoszló erők*, vagy röviden, *térfogati erők*. Akárcsak a felületi erők esetében ez esetben is megengedhetünk néhány egyszerűsítést: az egydimenziós elemekre ható térfogati erőket vonal mentén eloszló erőkkel, a kétdimenziós elemekre hatókat pedig a középfelületen megoszló erőkkel helyettesíthetjük. Ha például adott egy állandó keresztmetszetű és anyagú rúd G súlya és L hossza, akkor azt egy $p = G/L$ vonal mentén (a rúd tengelye mentén) megoszló erővel helyettesíthetjük.

Amikor a vizsgált szerkezeti elem terhelését egy vele kapcsolatban levő másik szerkezeti elem idézi elő, megtörténhet, hogy a tulajdonképpeni hatást jelentő megoszló erők eredőjét (ami koncentrált terhelést jelent) és azok eredő forgatónyomatékát lesz könnyebb számításba venni. A hatást ekkor a koncentrált erő mellett egy *koncentrált nyomaték*, mint idealizált terhelés-típus jelenti. E nyomatékról tudjuk, hogy vektoriális mennyiség. A szilárd test mechanikájában ez sem szabad vektor, a támadáspontjában hat.

Bizonyos esetekben, például peremük mentén befogott héjak vagy tárcsák esetében beszélünk vonal mentén *megoszló nyomatékról* is (ezek mértékegysége $N \cdot m/m$).

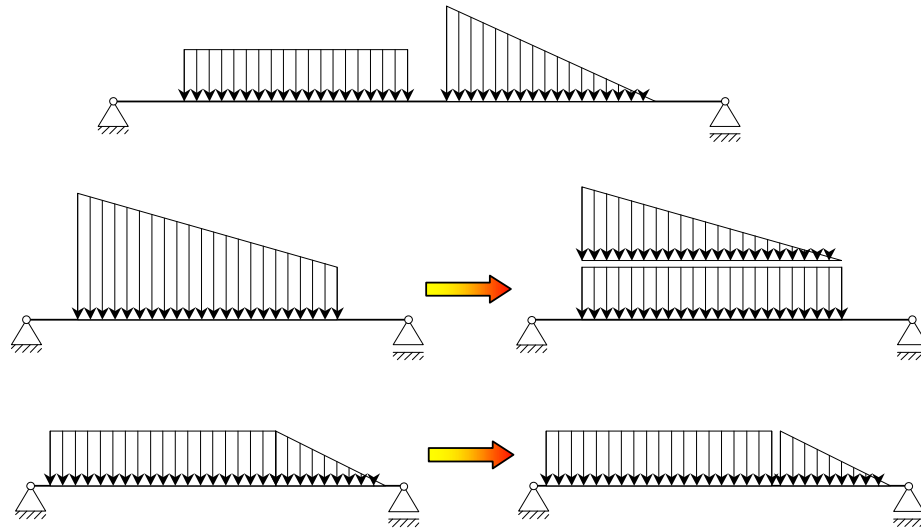
A rudak esetében előforduló gyakoribb terhelésformák az 1.11. ábrán láthatók. A vonal mentén megoszló erő intenzitását egy $p(x)$ függvénnyel írjuk le. A gyakorlatban előforduló esetek többségében egyenletesen megoszló (a rúd tengelye mentén állandó intenzitású), illetve lineárisan megoszló (a tengely mentén egyenletesen változó intenzitású) erőkkel találkozhatunk. Az egyenletesen megoszló erő diagramja egy téglalap, a legegyszerűbb lineárisan megoszló erő diagramja pedig egy háromszög. E kettő kombinációjával bonyolultabb diagramokat is alkothatunk.

A terhelést jelentő erők időben változhatnak. Az időben állandó terhelést, igénybevételt vagy erőt *állandónak* (permanensnek) nevezzük: ez alatt azt értjük, hogy a szerkezet teljes élettartama alatt gyakorlatilag állandó intenzitással, állandóan hatnak. Ilyen például egy álló szerkezet saját súlya. Az összes olyan terhelést, ami nem állandó, *esetlegesnek* nevezzük.

Az időben igen lassan változó, tehát elhanyagolható mértékű tehetetlenségi erőket előidéző hatásokat *sztatikusnak* (vagy statikusnak) nevezzük.

Az állandó intenzitású tehetetlenségi erőket *stacionáriusnak* nevezzük. Ezek időben állandó gyorsulással mozgó testekben lépnek fel, mint például gyorsan forgó alkatrészekben. Ez esetben a

tanulmányozott test már gyors mozgásban van ugyan, de a rá ható terhelés legfennebb csak lassan változik.



1.11. ábra. Egyenletesen és lineárisan megoszló terhelés, valamint azok kombinált esetei

A ténylegesen és lényegesen változó erők már „igazi” dinamikus terhelést jelentenek, amikor is a jelenség tanulmányozásakor a tehetetlenséget nem hagyhatjuk figyelmen kívül. A szűkebb értelemben vett szilárdságtan ezekkel az erőkkel nem foglalkozik, ez már a lengéstan témaköréhez tartozik. A teljesség kedvéért elmondható, hogy ezek az erők lehetnek igen gyors lefolyású ütések (sokkszerű igénybevételek), valamint lassúbb lefolyású ciklikus és nem ciklikus terhelések.

1.5.4. A szerkezet anyagának modellezése

Az előzőek alapján kitűnik, hogy az anyag viselkedését leíró karakterisztikus görbét egészen pontosan csak bonyolult képletekkel lehetne leírni, s azok használata igen kényelmetlen lenne. Az egyszerűsítés tehát szükségessé válik, főleg azon gyakorlati esetekben ahol a karakterisztikus görbének amúgy is csak egy részén dolgoznánk. Ezek az egyszerűsítések végső soron azt jelentik, hogy egy olyan anyagmodellt dolgozunk ki a létező, valódi anyag viselkedésének alapján, amely ez utóbbit megfelelő pontossággal közelíti, legalábbis a számításba vett feszültségi-alakváltozási tartományon belül.

Az elemi szilárdságtanban általában elfogadjuk azt, hogy az anyag lineárisan rugalmas és csak kis mértékű alakváltozásokat szenved. Néhány feladatban azonban a rugalmatlan alakváltozással is számolni kell, ekkor az 1.3. ábrán látható egyszerűsített jelleggörbékkel is dolgozhatunk.

1.6. Az elemi szilárdságtan általános érvényű egyszerűsítő hipotézisei

A szilárdságtanban háromfajta összefüggést írunk fel:

- egyensúlyi egyenleteket, amelyeket sztatikai ismeretek alapján írunk fel és sztatikai egyenleteknek is nevezünk. Másképpen úgy is mondjuk, hogy ezek az egyenletek a megoldandó feladat sztatikai aspektusát írják le.
- geometriai egyenleteket, amelyek az alakváltozások és az elmozdulások közötti mértani összefüggések alapján felírt egyenletek. Ezek a feladat geometriai aspektusát adják.

- anyagegyenletek, amelyek az anyag fizikai (tulajdonképpen mechanikai) tulajdonságait tükrözik és ezért fizikai egyenleteknek is nevezik, s a feladat fizikai aspektusát öntik matematikai formába.

Az előbbi fejezetben láthattuk, hogy a számítások egyszerűsítése végett a szilárdságtanban többféle egyszerűsítést, feltételezést (hipotézist) is bevezetünk. Ezen feltételezések a fenti egyenletek egyszerűsítését jelentik, mibenlétük pedig az éppen megoldandó feladat sajátosságaitól függ. Létezik azonban néhány olyan feltevés is, amelyek az elemi szilárdságtanban általános érvényű. Ezek a következők:

- a sztatikai aspektust tekintvén: a terhelés állandó vagy pedig az olyan lassan változik, hogy a tehetetlenségi erők elhanyagolhatók (a terhelés tehát kvázisztatikus);
- a geometriai aspektus egyszerűsítése: az alakváltozások kicsinyek, s éppen ezért alkalmazható a geometriai linearitás hipotézise;
- a testet alkotó szerkezeti elemek anyaga homogén, izotróp, lineárisan rugalmas és folytonos, terheletlen állapotban feszültségmentes.

Az izotrópia a szilárdságtani tulajdonságokra vonatkozik: az izotróp anyagok tulajdonságai nem irányfüggők, tehát bármilyen irányban is mérjük azokat, ugyanazt a mennyiséget kapjuk. Nem izotróp (vagyis anizotróp) anyagra példa a fa, amely szálirányban könnyen hasad, de a szálakra merőlegesen nehezebben vágható. Anizotróp anyagok a szál- vagy szövetterősítésű kompozit (összetett) anyagok is.

Ezen összefüggések szerint a megoldandó feladat minden szempontból lineáris, s emiatt bármilyen esetben alkalmazható az *egymásrahalmazás*, másképpen a *szuperpozíció* elve: ha egy lineáris rendszer A gerjesztésre adott válasza a , B gerjesztésre pedig b , akkor a $k_1 \cdot A + k_2 \cdot B$ gerjesztésre az a $k_1 \cdot a + k_2 \cdot b$ választ fogja adni. Példázzhatjuk is: a gerjesztésen a terhelést értjük, a válaszon pedig a szerkezet valamely pontjának elmozdulását.

Az általános érvényű hipotézisek mellett több olyan is létezik, amelyeket csak egy-egy bizonyos fajta feladat megoldásánál alkalmazhatunk. Ezekről a későbbiekben lesz szó.

2. IGÉNYBEVÉTELI ÁBRÁK

2.1. Keresztmetszeti igénybevételek

Tekintsünk egy tetszőleges testet, amely a rá ható erők alatt egyensúlyi állapotban van. Ezek az erők jelentik úgy az aktív terhelést, mint a passzív reakcióerőket is, amelyek a test rögzítésére szolgáló kényszerekben, támaszokban lépnek fel (a 2.1. ábra bal oldalán).

Az egyensúly feltételei sztatikából ismertek: a testre ható erők eredője, valamint azok eredő forgatónyomatéka zérus kell legyen. Az ábra jelöléseivel tehát

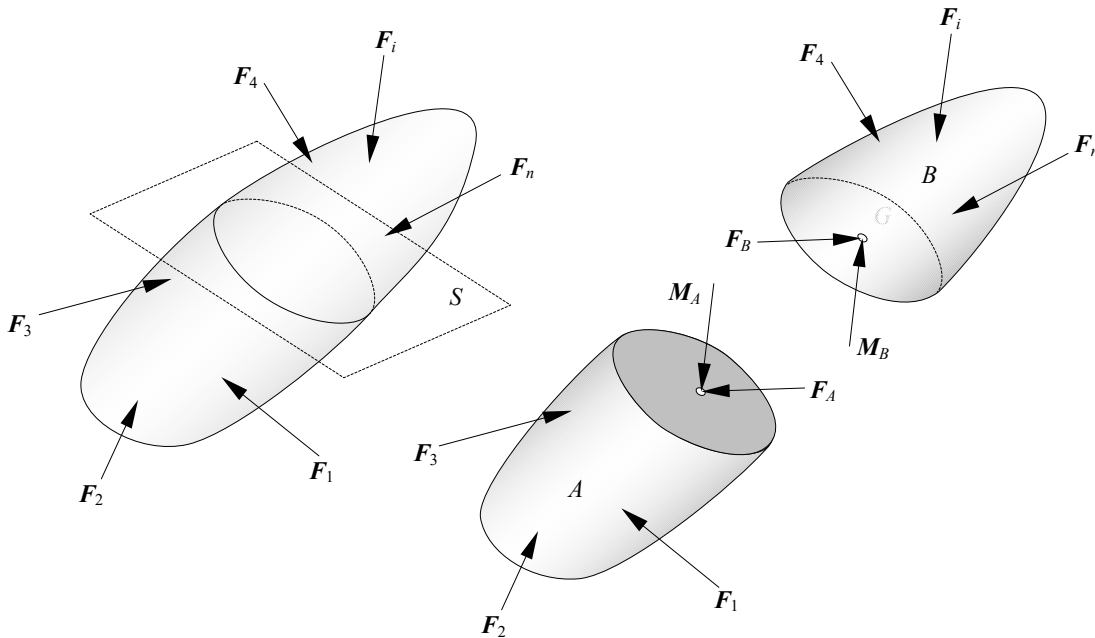
$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i = 0, \quad (2.1)$$

ahol \mathbf{M}_i az \mathbf{F}_i erő valamely pontra, pólusra vonatkoztatott nyomatékát jelenti (az összegben minden egyes nyomaték ugyanarra a pólusra vonatkozik).

A mérnöki gyakorlatban azonban eléggé nehéz lenne az ilyen általános, vektoriális formulákat használni, könnyebb dolgunk van, ha az erők, nyomatékok vetületeivel dolgozunk:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} &= 0, & \sum_{i=1}^n F_{iy} &= 0, & \sum_{i=1}^n F_{iz} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n M_{ix} &= 0, & \sum_{i=1}^n M_{iy} &= 0, & \sum_{i=1}^n M_{iz} &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

ahol az x , y és z indexek az \mathbf{F}_i erő, illetve az \mathbf{M}_i nyomaték valamely tetszőlegesen megválasztott koordináta-rendszer tengelyeire eső vetületeit jelölik.



2.1. ábra. A keresztmetszeten ébredő igénybevételek

Tegyük fel, hogy ezt a testet egy tetszőleges S síkkal elmetstettük, amely azt két részre, az A és a B darabokra osztja. Ahhoz, hogy a két rész egyensúlya továbbra is fennálljon, a

metszéspelületen egy-egy olyan erő és nyomaték jelenlétét kell feltételeznünk, amelyek az illető részre ható terheléssel vannak egyensúlyban:

$$\begin{aligned} F_A + \sum_A F_i &= 0, & M_A + \sum_A M_i &= 0, \\ F_B + \sum_B F_i &= 0, & M_B + \sum_B M_i &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

ahol az összegzés csak az illető részen ható erőkre és azok nyomatékára vonatkozik. Ezeket az erőket és nyomatékokat a keresztmetszet G geometriai középpontjába szoktuk helyezni, és akárcsak a terhelést, vetületekre szoktuk bontani. A fenti négy vektoriális egyenlet 12 skaláris vetületi egyenletre bontható fel.

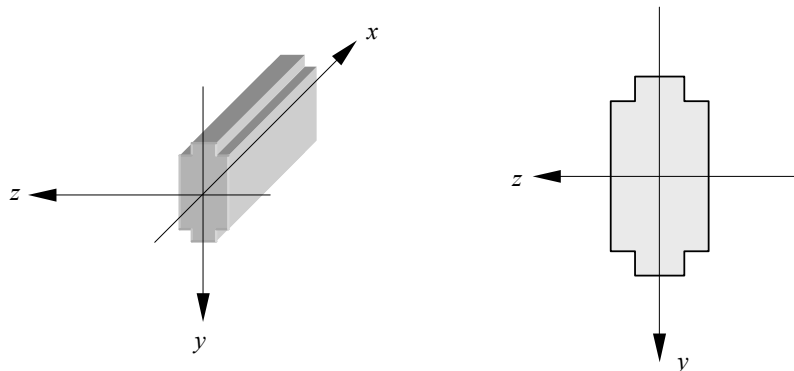
Ez utóbbi egyenletekből könnyen beláthatjuk (ha az összegeket átvisszük az egyenlőségjel jobb oldalára), hogy a keresztmetszeten fellépő erő és nyomaték nem más, mint az illető részre ható terhelés eredőjének, illetve eredő nyomatékának ellentettje. Mi több, mivel a két rész is egyensúlyban volt egymással mielőtt a testet elmetesztük volna, a metszéspelület két oldalán ható eredő erőkre és nyomatékokra azt kapjuk, hogy azok egymás ellentettei (hatás - ellenhatás):

$$F_A + F_B = 0, \quad M_A + M_B = 0. \quad (2.4)$$

Ezt egyébként könnyen be is bizonyíthatjuk, ha a 2.3. egyenletek közül az erőkre és a nyomatékokra vonatkozókat külön-külön összegezzük. A 2.1. értelmében a terhelést jelentő erők és nyomatékok összege zérus, mivel a test egyensúlyban volt, tehát végső soron a 2.4. egyenleteknek is fenn kell állniuk.

A keresztmetszeten ható F erő és M nyomaték tehát végső soron a terhelésből ered és azok az illető keresztmetszet igénybevételét jelentik. A felületen támadó erők hatása az anyag részecskéin keresztül tevődik át az illető keresztmetszetre.

Amennyiben nem egy tetszőleges testről, hanem egy rúdról beszélünk, akkor az említett koordináta-rendszert nem tetszőlegesen vesszük fel, hanem valamilyen egyezményhez igazodunk. Sajnos ez az egyezmény szerzőnként más és más, azonban mégis van bennük egy közös vonás: az x koordinátát a rúd tengelyében mérjük (az x tengely tehát a rúd tengelye, ami a keresztmetszet geometriai középpontján megy keresztül), az egyik tengely függőleges, a másik pedig vízszintes.



2.2. ábra. A rúd és valamely metszetének koordináta-rendszere

Tekintsük hát az y tengelyt függőlegesnek, a z -t pedig vízszintesnek. A függőleges tengely rendszerint lefele mutat: ezt az indokolja, hogy a terhelés jelentős része a gravitációból származik, s emiatt kényelmesebb a lefele mutató irányt pozitívnak tekinteni.

A gyakorlatban használt koordináta-rendszer jobbsodrású, ami azt jelenti, hogy a tengelyek a 2.2. ábrán látható módon állnak. Ha valamelyik tengely irányát megváltoztatjuk, akkor egy balsodrású, tükörkép koordináta-rendszert kapunk.

Ahhoz, hogy elkerüljük a negatív x koordináták használatát, célszerű a rendszer origóját a rúd baloldali végén felvenni.

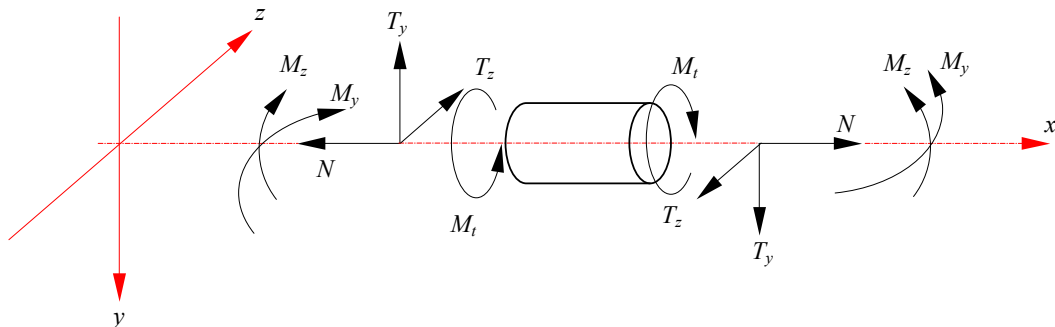
Ha a rúd tengelyre merőleges keresztmetszetét szeretnénk ábrázolni, akkor bal oldali nézetként rajzoljuk meg azt: ekkor az x tengely az ábra síkjára merőleges és lefele mutat (tehát az x tengely negatív „vége” felől nézzük azt).

A rúd tengelyeire eső vetületek, igénybevételek speciális megnevezést és jelölést kapnak:

- a keresztmetszeten ható erőknek a rúd tengelyére eső, tehát az illető keresztmetszetre merőleges vetületét tengely irányú (húzó vagy nyomó) igénybevételnek, normálerőnek vagy axiális erőnek nevezzük és N -nel jelöljük;
- a metszet síkjába eső vetületek a nyíró igénybevételt, tangenciális erőket, nyíróerőket jelentik. Mivel két nyíróerőnk is van, mert a két tengelyre eső vetülettel dolgozunk, jelölésük utal az illető irányra: T_y és T_z ;
- a rúd tengelye körül forgató nyomaték a csavarónyomaték, amit M_t -vel jelölünk és csavaró igénybevételt okoz. A „ t ” index itt a csavarásra utal, aminek idegen eredetű neve *torzió*;
- a másik két tengely körül forgató nyomaték-összetevő a két hajlítónyomaték, M_y és M_z , amelyek hajlító igénybevételt okoznak.

Ezeket a vetületeket skaláris mennyiségekként kezeljük, habár tulajdonképpen azok is vektorok. Mivel tartóegyenesük rögzített (egy-egy koordináta-tengelyről van szó) a nagyságukon kívül elegendő az irányukat megadni valamilyen módon. A mechanikában a vetület pozitív értéke azt jelenti, hogy a vetületvektor iránya a tengely irányával azonos. A szilárdságtanban ez másként van, az egyezményes pozitív irányokat a 2.3. ábra mutatja:

- a pozitív nagyságú N tengely irányú erő a rudat megnyújtani igyekezik;
- a pozitív T_y nyíróerő a lementszett részt a z tengely körüli pozitív irányban forgatja. A pozitív T_z nyíróerő az y tengely körüli pozitív irányban forgat;
- a pozitív M_z hajlítónyomaték a rúd alsó felét igyekszik megnyújtani, tehát a görbült rúd domború oldala alul, a homorú oldala pedig felül lesz. A bal oldalon pozitív, a jobb oldalon negatív irányban forgat. A pozitív M_y nyomaték is bal oldalon pozitív, a jobb oldalon pedig negatív irányban forgat, de az y tengely körül;
- a pozitív csavarónyomaték a bal oldalon pozitív irányban, a jobb oldalon pedig negatív irányban forgat.



2.3. ábra. A keresztmetszeti igénybevételek egyezményes pozitív iránya

A metszéspületen ható erők természetesen a test elmentése előtt is az illető felületen, a test belsejében hatottak, persze nem koncentrált erőként, hanem az adott keresztmetszeten megoszló

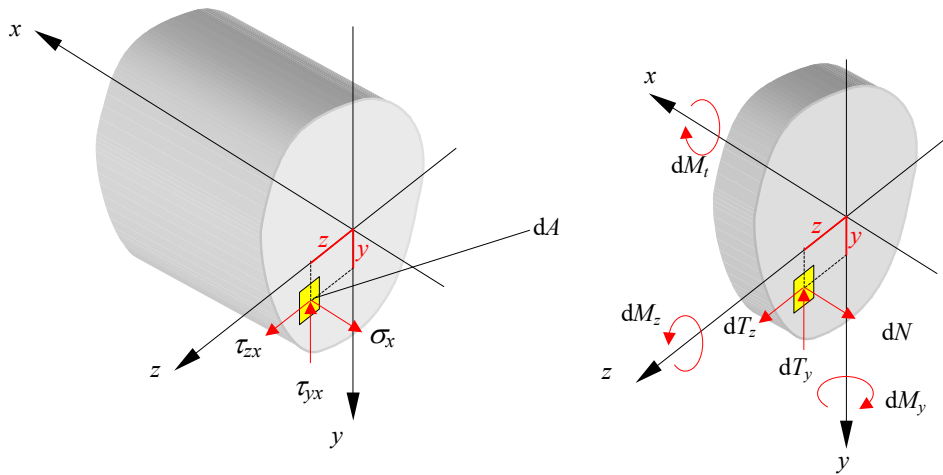
feszültségként. Az F rezultáns erő ezen feszültség (megoszló erők) eredője, míg az M rezultáns nyomaték azoknak a keresztmetszet geometriai középpontjára vonatkoztatott eredő nyomatéka.

Akárcsak az eredő erőt, úgy a feszültséget is levetíthetjük:

- a tengelyekre: a keresztmetszetre merőleges (tehát tengely) irányú feszültség a már ismert σ_x normálfeszültség, ahol az index a normális irányára utal;
- míg a keresztmetszet síkjába eső, y és z irányú összetevők a τ_{yx} , illetve a τ_{zx} tangenciális, másképpen nyírófeszültség. A nyírófeszültség kettős indexéből az első betű a feszültség irányát, a második a normális irányát jelöli.

A feszültségek és a keresztmetszeti igénybevételek kapcsolatát a 2.4. ábra alapján magyarázhatjuk: elfogadhatjuk azt, hogy a megjelölt dA felületelem annyira kicsiny, hogy azon a feszültség gyakorlatilag nem változik. A feszültség ott érvényes állandó értékének és a felületelem nagyságának a szorzata egy elemi erőt eredményez:

$$dN = \sigma_x \cdot dA, \quad dT_y = \tau_{yx} \cdot dA, \quad dT_z = \tau_{zx} \cdot dA. \quad (2.5)$$



2.4. ábra. A keresztmetszeten ható feszültségek

Az ábrán a feszültségek a megfelelő igénybevétel pozitív irányának felelnek meg, a tekintett bal oldali keresztmetszeten. Ezeket az elemi erőket a keresztmetszet teljes egészén összegezván az igénybevételekhez jutunk. Mivel ez az összegzés folytonos (tehát nem diszkrét) változónak egy tartományon számított összegét jelenti, a következő integrálok kiszámításáról van szó:

$$\begin{aligned} N &= \int_A dN = \int_A \sigma_x \cdot dA, \\ T_y &= \int_A dT_y = \int_A \tau_{yx} \cdot dA, \\ T_z &= \int_A dT_z = \int_A \tau_{zx} \cdot dA. \end{aligned} \quad (2.6)$$

A 2.5. képletekkel kiszámított elemi erők nyomatéka a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned}
dM_t &= dT_z \cdot y + dT_y \cdot z = \tau_{zx} \cdot dA \cdot y + \tau_{yx} \cdot dA \cdot z, \\
dM_y &= -dN \cdot z = -\sigma_x \cdot dA \cdot z, \\
dM_z &= dN \cdot y = \sigma_x \cdot dA \cdot y,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

amelyek integrálása a csavaró és a hajlítónyomatékokhoz vezet:

$$\begin{aligned}
M_t &= \int_A dM_t = \int_A (dT_z \cdot y + dT_y \cdot z) = \int_A (\tau_{zx} \cdot y + \tau_{yx} \cdot z) dA, \\
M_y &= \int_A dM_y = -\int_A dN \cdot z = -\int_A \sigma_x \cdot z dA, \\
M_z &= \int_A dM_z = \int_A dN \cdot y = \int_A \sigma_x \cdot y dA.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Ezen keresztmetszeti igénybevételeket felírhatjuk a vetületi egyensúlyi egyenletekből is, ekkor a 2.3. egyenleteket valamelyik lementszett részre írjuk fel:

$$\begin{aligned}
N &= \sum_A (\pm F_{ix}) = \sum_B (\pm F_{ix}), \\
T_y &= \sum_A (\pm F_{iy}) = \sum_B (\pm F_{iy}), \quad T_z = \sum_A (\pm F_{iz}) = \sum_B (\pm F_{iz}), \\
M_t &= \sum_A (\pm M_{ix}) = \sum_B (\pm M_{ix}), \\
M_y &= \sum_A (\pm M_{iy}) = \sum_B (\pm M_{iy}), \quad M_z = \sum_A (\pm M_{iz}) = \sum_B (\pm M_{iz}).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

A 2.9. relációk használatakor oda kell figyelni arra, hogy az egyenletekben az erők és a nyomatékok vetületeinek pozitív iránya a mechanikában használt egyezményes irányoknak felel meg, míg a keresztmetszeti igénybevételeké a szilárdságtanban használt egyezményeknek kell megfeleljen: a „ \pm ” szimbólum az előjelek szükséges egyeztetését jelképezi.

2.2. Az egyenes tartók esete

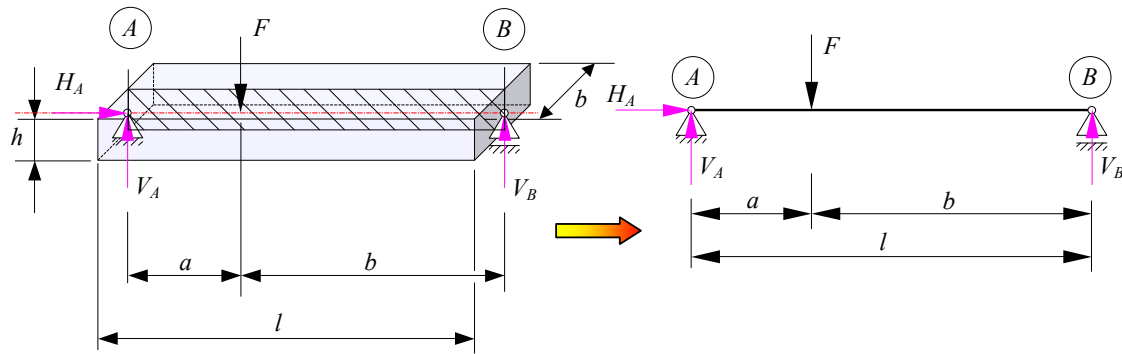
2.2.1. A reakcióerők kiszámítása

Az egyszerűség kedvéért foglalkozunk csak a sík esettel: azzal, amikor az xy síkban dolgozunk (tehát a lap síkjában az xy koordináta-sík van, a z tengely pedig a lapra merőleges és befele mutat). Ekkor a kiszámításra kerülő mennyiségek az N tengely irányú igénybevétel, a T_y nyíró igénybevétel, az M_z hajlító igénybevétel és esetenként, csavart rudaknál, tengelyeknél az M_t csavarónyomaték.

A számítások elvégzéséhez ismernünk kell a rúdra ható terhelést: ez nemcsak az előírt aktív terhelőerőkből áll, hanem ide tartoznak az ismeretlen reakcióerők is. Első lépésként tehát a reakcióerőket kell kiszámítanunk. Itt két lehetőség van: a sztatikailag határozott rudak esetében annyi független egyensúlyi egyenlet tudunk felírni, ahány ismeretlen reakcióerőnk van (ezért „határozott” a rúd), ellenkező esetben valamilyen egyéb eljáráshoz kell folyamodjunk, mert több ismeretlenünk van, mint egyenletünk. A nem határozott esetben a reakcióerők kiszámításához a rúd rugalmas alakváltozását is figyelembe kell veyük, ezzel pedig egy későbbi fejezet fog foglalkozni.

Egyelőre maradunk tehát a sztatikailag determinált rudaknál: ekkor a felírható egyensúlyi egyenletek az erők vetületeire vonatkozó egyenletek (sík esetben két ilyen van), valamint a valamely pontra vonatkoztatott nyomatékok egyensúlyi egyenletei. Ez utóbbiból többet is felírhatunk, de sík esetben összesen három (a csavart rudak esetében négy) független egyenletünk lehet, a további egyenleteket legfennebb a kiszámított eredmények ellenőrzésére használhatjuk fel.

Lássunk néhány példát.



2.5. ábra. Koncentrált erővel terhelt rúd reakcióerői

2.1. példa. Merőleges koncentrált erővel terhelt kéttámaszú tartó reakciói

A 2.5. ábrán látható kéttámaszú rudat egy koncentrált erő terheli. A koncentrált erő egy kellőképpen kis kiterjedésű tartományon megoszló erő, amelyet az eredőjével helyettesítjük. A valódi rúd számításokban használt modellje azt feltételezi, hogy a koncentrált erő, irányától függetlenül, a rúd tengelyének egy bizonyos pontjában hat, példánkban a tengely tartalmazó függőleges síkban: ez érvényes úgy az aktív terhelőerőre, mint a pontszerűnek tekintett támaszokban fellépő reakcióerőkre is.

A kéttámaszú rudak esetében a következőképpen járhatunk el:

→ felírjuk a vízszintes vetületek egyensúlyi egyenletét. Az egyensúlyi egyenlet algebrai, azaz a vetületeket előjellel kell ellátnunk: például pozitívnak tekinthetünk minden olyan vízszintes erőt, amely az x tengely pozitív irányába mutat. Az egyetlen vízszintes erő az A pontban (csuklóban) fellépő ismeretlen reakcióerő vízszintes vetülete, tehát:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0; \quad (2.10)$$

→ felírjuk a függőleges vetületek egyensúlyi egyenletét, mely egyenletben két ismeretlen is megjelenik, tehát ez az egyenlet önmagában nem lesz elegendő azok meghatározásához. Legyen például a lefele (az y tengely pozitív irányába) mutató erő pozitív, ekkor:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F - V_A - V_B = 0; \quad (2.11)$$

→ felírjuk az erők A pontra vonatkoztatott nyomatékának egyensúlyi egyenletét. Ez az egyenlet is algebrai, tehát valamilyen előjel-szabályt kell felállítanunk. Legyen az óramutató járásával megegyező (a z tengely körüli pozitív) irányban forgató nyomaték pozitív, ekkor:

$$\sum M_{z,A} = 0 \Rightarrow a \cdot F - l \cdot V_B = 0 \Rightarrow V_B = F \cdot \frac{a}{l}; \quad (2.12)$$

→ felírjuk a B pontra vonatkoztatott nyomatékok egyensúlyi egyenletét is:

$$\sum M_{z,B} = 0 \Rightarrow -b \cdot F + l \cdot V_A = 0 \Rightarrow V_A = F \cdot \frac{b}{l}. \quad (2.13)$$

Ha végigtekintünk e négy egyenleten, akkor azt láthatjuk, hogy a vízszintes vetületekre, valamint a csuklóra és a támaszra felírt nyomaték-egyenletekből azonnal meghatározható egy-egy ismeretlen, a függőleges vetületekre vonatkozó 2.11. egyenletet pedig ellenőrzésre használhatjuk:

$$\sum F_y = F - F \cdot \frac{b}{l} - F \cdot \frac{a}{l} = F - F \cdot \frac{a+b}{l} = F - F \cdot \frac{l}{l} = 0. \quad (2.14)$$

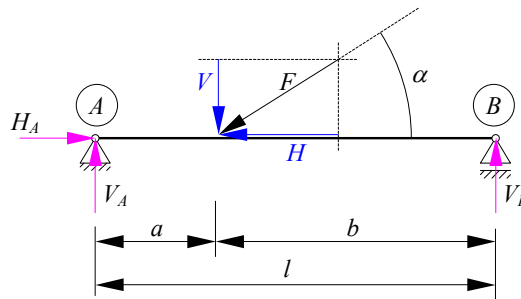
A pozitívnak kapott reakcióerők az ábrázolt irányba mutatnak. Ha ezeket az irányokat rosszul vettük fel, akkor a kiszámított mennyiségek negatívak lesznek. Ez nem számít hibának, ugyanis összetettebb terhelés esetén nem lehet minden esetben előzetesen megjósolni a helyes irányt – a további számításokat elvégezése előtt helyesbíthetjük az illető reakció előjelét és irányát.

E feladat megoldásaként kapott egyenleteket megvizsgálván észrevehetjük, hogy a függőleges koncentrált erő a távolságokkal súlyozott mértékben, tehát az a/l és a b/l hányadosokkal arányosan oszlik meg a két kényszer között (valamely kényszerre vonatkozó képlet a számlálójában a másik kényszerrel számított távolság szerepel). Ha $a = b = l/2$, akkor $V_A = V_B = F/2$: az ilyen észrevételek hasznosak, mert ilyen esetben „szimmetria okokra” hivatkozva a számításokat el sem végezzük, csak felírjuk a reakciókat.

2.2. példa. Koncentrált ferde erővel terhelt kéttámaszú tartó reakciói

Legyen most a koncentrált erő ferde: ekkor azt felbontjuk vízszintes és függőleges komponensekre (2.6. ábra). Ha az F vektornak a rúd tengelyével bezárt szöge α , akkor:

$$V = F \cdot \sin \alpha, \quad H = F \cdot \cos \alpha. \quad (2.15)$$



2.6. ábra. Ferde koncentrált erővel terhelt rúd reakcióerői

Ezekkel a vetületekkel dolgozunk tovább, ekkor a vízszintes erők vetületéből

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = H = F \cdot \cos \alpha, \quad (2.16)$$

a csuklóra (az A pont) felírt nyomaték-egyenletből

$$\sum M_{z,A} = 0 \Rightarrow V_B = V \cdot \frac{a}{l} = F \cdot \frac{a}{l} \cdot \sin \alpha, \quad (2.17)$$

a támaszra felírtból pedig

$$\sum M_{z,B} = 0 \Rightarrow V_A = V \cdot \frac{b}{l} = F \cdot \frac{b}{l} \cdot \sin \alpha. \quad (2.18)$$

A vízszintes erőknek nincs nyomatékuk sem a csuklóra, sem a támaszra nézve, mivel a tartóegyeneseik keresztül megy a megtámasztott pontokon.

A két reakcióerő összege, mivel $a + b = l$, a terhelő erő függőleges összegét adja:

$$\sum F_y = V - V_A - V_B = F \cdot \sin \alpha - F \cdot \frac{b}{l} \cdot \sin \alpha - F \cdot \frac{a}{l} \cdot \sin \alpha = 0. \quad (2.19)$$

Amennyiben megoszló erőkkel van dolgunk, akkor először előállítjuk a megoszló erő eredőjét, majd azzal, mint koncentrált erővel dolgozunk tovább. Az eredő erő nagysága a diagram integráljával (két dimenzióban tehát annak területével) azonos, támadáspontja pedig a diagram „súlypontjában” (valójában annak geometriai középpontjában) van.

Ezt a következőképpen bizonyíthatjuk (2.7. ábra): a rúd valamely x koordinátájú pontjában a megoszló erő intenzitása $p(x)$. E pont közvetlen környezetében, a dx hosszúságú szakaszon ez az intenzitás állandónak tekinthető, tehát az ezen a szakaszon ható terhelés nagysága

$$dR = p(x) \cdot dx. \quad (2.20)$$

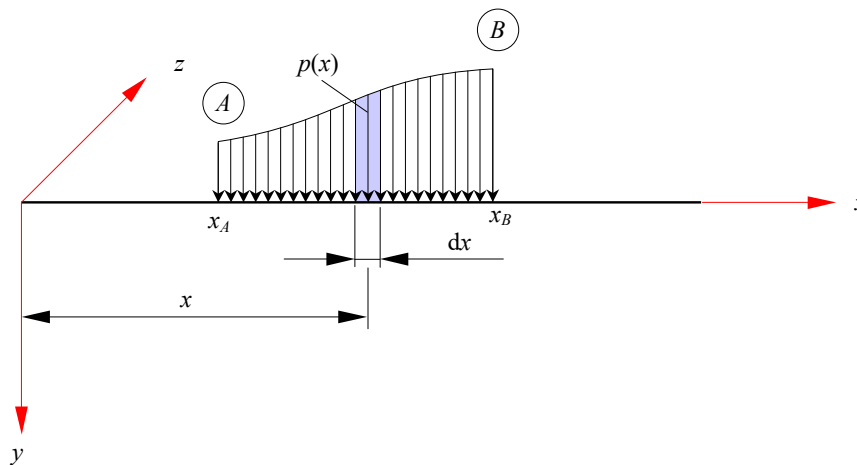
Az A és a B pontok között megoszló erő tehát az előbbi elemi erők eredőjeként összesen egy

$$R = \int_{x_A}^{x_B} dR = \int_{x_A}^{x_B} p(x) \cdot dx \quad (2.21)$$

nagyságú koncentrált terhelést jelent, a határozott integrál geometriai értelmezése szerint pedig ez nem más, mint a $p(x)$ diagram A területe. Támadáspontja helyzetének meghatározásához Varignon tételét használjuk: egy erőrendszer eredő nyomatéka az erőrendszer eredőjének nyomatékával azonos. A 2.20 elemi erő z tengelyre vonatkoztatott nyomatéka a

$$dM_z = x \cdot p(x) \cdot dx. \quad (2.22)$$

elemi nyomaték.



2.7. ábra. A megoszló erő eredőjének kiszámítása

A dR erők rendszerének eredő nyomatéka tehát

$$M_z = \int_{x_A}^{x_B} dM_z = \int_{x_A}^{x_B} x \cdot p(x) \cdot dx, \quad (2.23)$$

az integrál pedig, geometriai értelmezése szerint, nem más, mint a $p(x)$ diagramnak a z tengelyre vonatkoztatott S_z sztatikus nyomatéka. E nyomaték azonos a geometriai középpont tengelytől mért koordinátájának és a terület szorzatával:

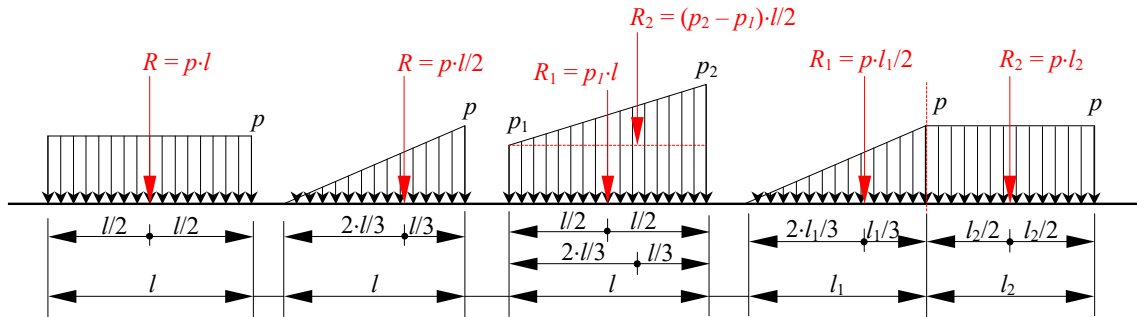
$$S_z = x_G \cdot A, \quad (2.24)$$

vagyis

$$M_z = x_G \cdot R. \quad (2.25)$$

A Varignon-tételből következően tehát a megoszló erő támadáspontjának x koordinátája a diagram geometriai középpontjának x_G koordinátájával azonos.

Az előző fejezetben szó volt arról, hogy a gyakorlatban előforduló megoszló erők legtöbbször állandó, vagy lineárisan változó intenzitással szerepelnek. Az alábbi ábra ezeket az eseteket sorolja fel; az általános alakú diagramokat, így a trapézokat téglalapokra és háromszögekre bontjuk fel. Trapézok esetében például két eredőt is számolunk, egyet a háromszögre és egyet a négyszögre, így elkerülhetjük a trapéz geometriai középpontjának kiszámítását (2.8. ábra).



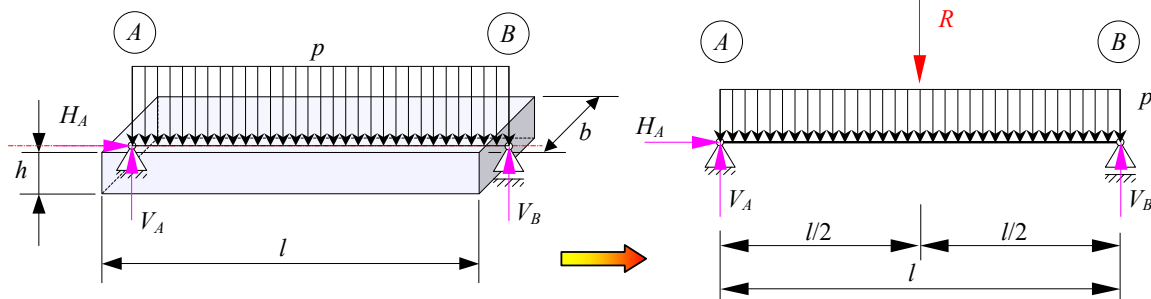
2.8. ábra. Megoszló erő eredője és támadáspontja

2.3. példa. Egyenletesen megoszló merőleges erővel terhelt kéttámaszú tartó reakciói

A 2.9. ábrán egy p intenzitású egyenletesen megoszló erővel terhelt rudat látunk. A számításokban ezt az erőt egy vonal (a rúd tengelye) mentén megoszló erőnek képzeljük el. Egy ilyen erőt, annak valamely síkban levő összetevőjét (a példánkban csak függőleges összetevője van), függvény formájában a

$$p(x) = p \quad (2.26)$$

kifejezésként adhatjuk meg, mely konstans-függvény az $x \in [x_1, x_2]$ tartományon értelmezett, ahol a két koordináta a terhelés kezdetének, illetve a végpontjának x koordinátája.



2.9. ábra. Egyenletesen megoszló erővel terhelt rúd reakcióerői

Mivel példánkban a terhelés a rúd teljes hosszán hat,

$$R = p \cdot l \quad (2.27)$$

eredője (amelyet a téglalap területeként határozhatunk meg) a rúd közepén támad. Ezzel az eredővel, az A pontra vonatkoztatott nyomatékok egyensúlyi egyenletéből:

$$\sum M_{z,A} = 0 \Rightarrow \frac{l}{2} \cdot R - l \cdot V_B = 0 \Rightarrow V_B = \frac{R}{2} = \frac{p \cdot l}{2}; \quad (2.28)$$

a B pontra vonatkoztatott nyomatékok egyensúlyi egyenletéből pedig:

$$\sum M_{z,B} = 0 \Rightarrow -\frac{l}{2} \cdot R + l \cdot V_A = 0 \Rightarrow V_A = \frac{R}{2} = \frac{p \cdot l}{2}, \quad (2.29)$$

és könnyen beláthatjuk, hogy a függőleges erők összege zérus, tehát a kényszererőket helyesen számítottuk ki.

Ezt a feladatot megoldhattuk volna másként is: a 2.9. ábrán látható rúd a terhelés és a kényszerek szempontjából is szimmetrikus, tehát a kényszererők is szimmetrikusak kell legyenek. Az egyensúly feltételének következtében a kényszererők összege csak előjelben különbözik a függőleges terhelések eredőjének összegétől, a szimmetria miatt pedig mindkét reakcióerő a terhelés felével azonos nagyságú kell legyen.

2.4. példa. Egyenletesen megoszló erővel részben terhelt kéttámaszú tartó reakciói

Tegyük fel, hogy a p intenzitású egyenletesen megoszló erő csak a rúd egy bizonyos hosszát terheli (2.10. ábra). Ez a terhelés származhat például egy vízszintes, állandó keresztmetszetű gerenda saját súlyából is. Bár a kényszerek szimmetrikusak, a terhelés nem az, tehát most nem hivatkozhatunk a szimmetriára. A megoszló terhelés eredője most

$$R = p \cdot b, \quad (2.30)$$

amivel, és amely támadáspontjának megfelelő távolságaival felírt nyomatékegyenletekből

$$\sum M_{z,A} = 0 \Rightarrow \left(a + \frac{b}{2}\right) \cdot R - l \cdot V_B = 0 \Rightarrow V_B = \frac{R}{l} \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) = \frac{p \cdot b}{l} \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) \quad (2.31)$$

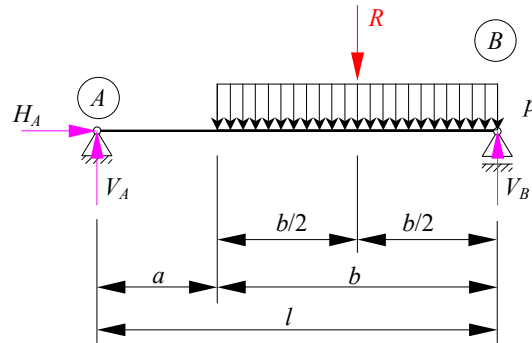
és

$$\sum M_{z,B} = 0 \Rightarrow -\frac{b}{2} \cdot R + l \cdot V_A = 0 \Rightarrow V_A = \frac{R}{l} \cdot \frac{b}{2} = \frac{p \cdot b}{l} \cdot \frac{b}{2}. \quad (2.32)$$

A függőleges erők összege

$$\sum F_y = R - V_A - V_B = p \cdot b - \frac{p \cdot b}{l} \cdot \frac{b}{2} - \frac{p \cdot b}{l} \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) = \frac{p \cdot b}{l} \cdot [l - (a + b)] = \frac{p \cdot b}{l} \cdot (l - l) = 0, \quad (2.33)$$

tehát a reakcióerőket helyesen számítottuk ki.



2.10. ábra. Egyenletesen megoszló erővel részben terhelt rúd

2.5. példa. Egyenletesen megoszló erővel részben terhelt kéttámaszú konzolos tartó reakciói

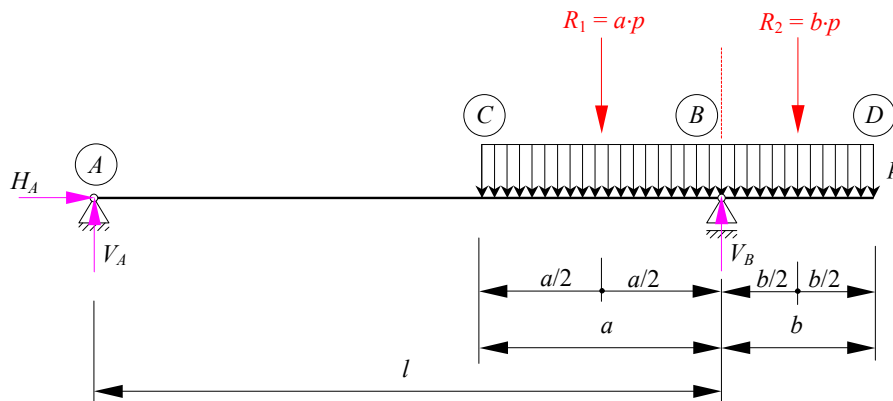
Ha a megoszló erővel terhelt szakaszon egy támaszt vagy csuklót találunk, akkor világosabb ábrát kapunk és a számítások egyszerűbbek lesznek, ha az illető pontban a diagramot két részre osztjuk, amint az a 2.11. ábrán látható.

Egyszerű ránézéssel is észrevehetjük, hogy vízszintes reakcióerőnk most sincs. Az A pontra felírt nyomaték-egyenletből

$$\begin{aligned} \sum M_{z,A} = 0 &\Rightarrow R_1 \cdot \left(l - \frac{a}{2}\right) + R_2 \cdot \left(l + \frac{b}{2}\right) - V_B \cdot l = 0 \Rightarrow \\ V_B &= \frac{R_1}{l} \cdot \left(l - \frac{a}{2}\right) + \frac{R_2}{l} \cdot \left(l + \frac{b}{2}\right) = \frac{p}{l} \cdot \left(a \cdot l - \frac{a^2}{2} + b \cdot l + \frac{b^2}{2}\right), \end{aligned} \quad (2.34)$$

a B pontra felírtból pedig

$$\begin{aligned} \sum M_{z,B} = 0 &\Rightarrow -R_1 \cdot \frac{a}{2} + R_2 \cdot \frac{b}{2} + V_A \cdot l = 0 \Rightarrow \\ V_A &= \frac{R_1}{l} \cdot \frac{a}{2} - \frac{R_2}{l} \cdot \frac{b}{2} = \frac{p}{l} \cdot \left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.35)$$



2.11. ábra. Egyenletesen megoszló erővel terhelt konzolos rúd

Ellenőrzésképpen:

$$\sum F_y = R_1 + R_2 - V_A - V_B = p \cdot a + p \cdot b - \frac{p}{l} \cdot \left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2}\right) - \frac{p}{l} \cdot \left(a \cdot l - \frac{a^2}{2} + b \cdot l + \frac{b^2}{2}\right) = 0. \quad (2.36)$$

Észrevehetjük, hogy ha e példában $a = b$, vagyis a támasz éppen a megoszló erővel terhelt szakasz közepén van, akkor az A pontban nem lép fel reakcióerő és a B támasz veszi át a teljes terhelést. Ha $a < b$, akkor V_A lefele mutat.

2.6. példa. Lineárisan, háromszög szerint megoszló erővel terhelt kéttámaszú tartó reakciói

Amennyiben a megoszló erő nem egyenletes, hasonlóképpen járunk el, csupán a megoszló erő eredőjének elhelyezkedése változik meg. Legyen például a 2.12. ábrán látható, lineárisan megoszló terhelésű rúd. Ez a fajta terhelés származhat például a hidrosztatikai nyomásból: egy tartály falát merevítő függőleges rúd terhelése lineárisan növekszik a mélységgel.

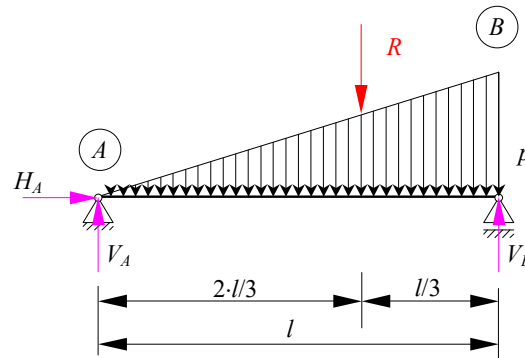
A háromszög alakú diagram szerint megoszló terhelést a végpontban mért, legnagyobb p intenzitásával adhatjuk meg. Ha függvényként kell leírnunk, amennyiben a háromszög csúcsa a bal oldalon látható, a

$$p(x) = p \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (2.37)$$

ha pedig a csúcs a jobb oldalon van, akkor a

$$p(x) = p \cdot \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad (2.38)$$

képletet használhatjuk; mindkét esetben $x \in [x_1, x_2]$, ahol a határértékek a megoszló terhelés kezdetének, illetve a végének a koordinátái.



2.12. ábra. Lineárisan megoszló erővel terhelt rúd reakcióerői

Ebben a példában $x_1 = 0$, $x_2 = l$, az első képlet alapján

$$p(x) = p \cdot \frac{x}{l}, \quad (2.39)$$

mely összefüggés a rúd teljes hosszán értelmezett.

A megoszló erő eredője a diagram, vagyis a háromszög területe:

$$R = \frac{p \cdot l}{2}, \quad (2.40)$$

s ez az eredő a diagram geometriai középpontjában, tehát a háromszög csúcsától $2/3$, alapjától pedig $1/3$ távolságra van. A diagram a rúd teljes hosszát terheli, így ezek a távolságok most $2 \cdot l/3$ -mal, illetve $l/3$ -mal egyenlők. Az eredővel és annak támadáspontjával:

$$\sum M_{z,A} = 0 \Rightarrow \frac{2 \cdot l}{3} \cdot R - l \cdot V_B = 0 \Rightarrow V_B = \frac{2 \cdot R}{3} = \frac{p \cdot l}{3}, \quad (2.41)$$

$$\sum M_{z,B} = 0 \Rightarrow -\frac{l}{3} \cdot R + l \cdot V_A = 0 \Rightarrow V_A = \frac{R}{3} = \frac{p \cdot l}{6}. \quad (2.42)$$

Ellenőrzésképpen:

$$\sum F_y = R - V_A - V_B = \frac{p \cdot l}{2} - \frac{p \cdot l}{6} - \frac{p \cdot l}{3} = 0. \quad (2.43)$$

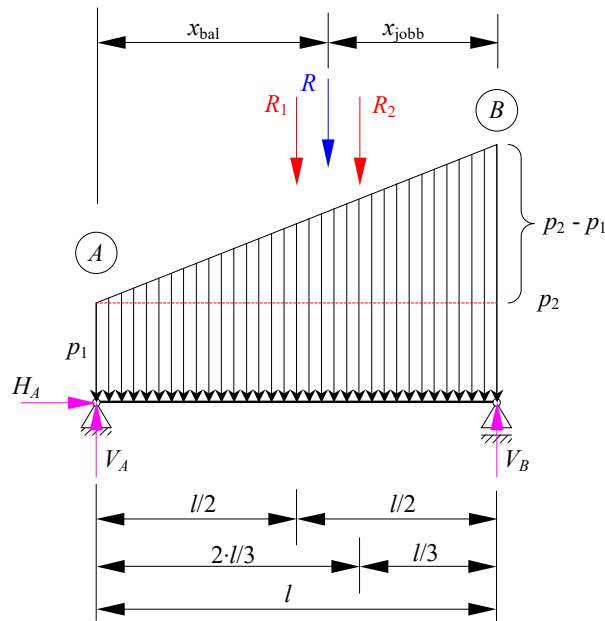
2.7. példa. Trapéz szerint megoszló erővel terhelt kéttámaszú tartó reakciói

Következő példaként tekintsük a 2.13. ábrán látható rúd esetét: a megoszló erő most is lineáris, de a terhelésdiagram trapéz alakú és nem háromszög. E trapéz alakú diagramot a megoszló erőnek a végpontokban mért intenzitásával, a p_1 és a p_2 értékekkel adhatjuk meg. A 2.8. ábra szerint ezt a trapéz alakú diagramot egy téglalap és egy háromszög összegének tekinthetjük. Az első (a téglalap) egy egyenletesen megoszló terhelésnek felel meg, amelyet a 2.26-os függvény ír le. A második (a háromszög) egy lineárisan megoszló terhelést jelent, amelyet a 2.37.-es vagy a 2.38.-as függvény ír le. E kettő kombinációjaként a trapéz alakú terhelés-diagramot a

$$p(x) = p_1 + (x - x_1) \cdot \frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1}, \quad x \in [x_1, x_2] \quad (2.44)$$

lineáris függvénnyel írhatjuk le, amely szintén a terhelés kezdetének és végének koordinátái által lehatárolt intervallumon értelmezett. Ez a képlet egyébként a lineárisan megoszló erőkre és az egyenletesen megoszló erőkre is érvényes, a 2.26, a 2.37. és a 2.38. függvények ennek valamilyen sajátosságos esetei:

- egyenletesen megoszló erőkre (téglalap alakú diagram): $p_1 = p_2 = p$;
- lineárisan megoszló, zérótól növekvő terhelésre (háromszög alakú diagram, csúcs a bal oldalon) $p_1 = 0$, $p_2 = p$;
- lineárisan megoszló, zéróig csökkenő terhelésre (háromszög alakú diagram, csúcs a jobb oldalon) $p_1 = p$, $p_2 = 0$.

**2.13. ábra.** Trapéz alakú terhelésdiagram, a diagram felbontásának egyik lehetősége

Példánkban az egyenletesen megoszló összetevő eredője

$$R_1 = p_1 \cdot l \quad (2.45)$$

(a téglalap területe), a lineárisan megoszlóé pedig

$$R_2 = \frac{(p_2 - p_1) \cdot l}{2} \quad (2.46)$$

(a háromszög területe). A függőleges terhelés tehát mindösszesen

$$R = R_1 + R_2 = p_1 \cdot l + \frac{(p_2 - p_1) \cdot l}{2} = \frac{(p_1 + p_2) \cdot l}{2} \quad (2.47)$$

(a teljes trapéz területe). Ha ez utóbbi képletbe az egyenletesen, vagy a zérótól lineárisan növekvő vagy pedig a zéróig lineárisan csökkenő diagramoknak megfelelő p_1 és p_2 értékeket helyettesítjük be, úgy a téglalap, illetve a háromszög alakú diagramokkal ábrázolt megoszló terhelés eredőjét kapjuk.

A reakcióerőket most is a nyomatékegyenletekből határozzuk meg:

$$\begin{aligned} \sum M_{z,A} = 0 &\Rightarrow \frac{l}{2} \cdot R_1 + \frac{2 \cdot l}{3} \cdot R_2 - l \cdot V_B = 0 \Rightarrow \\ V_B &= \frac{R_1}{2} + \frac{2 \cdot R_2}{3} = \frac{p_1 \cdot l}{2} + \frac{(p_2 - p_1) \cdot l}{3} = \frac{(p_1 + 2 \cdot p_2) \cdot l}{6}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \sum M_{z,B} = 0 &\Rightarrow -\frac{l}{2} \cdot R_1 - \frac{l}{3} \cdot R_2 + l \cdot V_A = 0 \Rightarrow \\ V_A &= \frac{R_1}{2} + \frac{R_2}{3} = \frac{p_1 \cdot l}{2} + \frac{(p_2 - p_1) \cdot l}{6} = \frac{(2 \cdot p_1 + p_2) \cdot l}{6}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Ellenőrzésként, a függőleges erők összege:

$$\sum F_y = R_1 + R_2 - V_A - V_B = p_1 \cdot l + \frac{(p_2 - p_1) \cdot l}{2} - \frac{(2 \cdot p_1 + p_2) \cdot l}{6} - \frac{(p_1 + 2 \cdot p_2) \cdot l}{6} = 0. \quad (2.50)$$

Észrevehetjük, hogy a terhelés két, egyszerűbb részre való bontásának eredményeképpen a reakcióerők is két részből tevődnek össze. A szuperpozíció (a hatások összegzésének) elve alapján a reakcióerők összetevőit kiszámíthatjuk a terhelés összetevőivel, mintha azok külön-külön hatnának a rúdon (jelen példában a 2.9. és a 2.12. ábra szerint), majd az összetett terhelésnek megfelelő reakcióerőket ezen összetevők összegzésével kaphatjuk meg.

Példánkban a 2.48.-as reakcióerőt a 2.28.-as és a 2.41.-es képletek összegzésével, a 2.49.-es reakcióerőt pedig a 2.29.-es és a 2.42.-es képletek összegzésével is megkaphatjuk, a jelölések megfelelő átírásával:

$$V_A^{\text{trapéz}} = V_A^{\text{téglalap}} + V_A^{\text{háromszög}}, \quad (2.51)$$

illetve

$$V_B^{\text{trapéz}} = V_B^{\text{téglalap}} + V_B^{\text{háromszög}}. \quad (2.52)$$

A komplikáltabb nyomatékegyenletek felírása tehát némi többlet-munkával, a terhelés részekre bontásával és a hatások összegzésével kiküszöbölhető, így a számítások áttekinthetőbbé és könnyebben ellenőrizhetővé válnak.

A felírt egyenletekből meghatározhatjuk a derékszögű trapéz geometriai középpontjának a magasság irányában mért koordinátáit: Varignon tétele alapján az R_1 és az R_2 erők által álló rendszer nyomatéka e rendszer R eredőjének nyomatékával egyenlő kell legyen:

$$x_{G1} \cdot R_1 + x_{G2} \cdot R_2 = x_G \cdot R \Rightarrow x_G = \frac{x_{G1} \cdot R_1 + x_{G2} \cdot R_2}{R}. \quad (2.53)$$

Behelyettesítve az eredményeket és a geometriai középpontok bal oldalról (tehát a p_1 intenzitású ponttól) mért $x_{G1} = l/2$, $x_{G2} = 2 \cdot l/3$ koordinátáit:

$$x_G^{\text{bal}} = \frac{l}{3} \cdot \frac{p_1 + 2 \cdot p_2}{p_1 + p_2}, \quad (2.54)$$

a jobbról mért $x_{G1} = l/2$, $x_{G2} = l/3$ koordinátákkal pedig

$$x_G^{\text{jobb}} = \frac{l}{3} \cdot \frac{2 \cdot p_1 + p_2}{p_1 + p_2} \quad (2.55)$$

(a 2.13. ábrán x_{bal} , illetve x_{jobb}).

Ez utóbbi képletek az egyenletesen, vagy a zérótól lineárisan növekvő vagy pedig a zéróig lineárisan csökkenő diagramoknak megfelelő p_1 és p_2 értékekkel a téglalap, illetve a háromszög alakú diagramokkal ábrázolt megoszló terhelés eredményének támadáspontját adják.

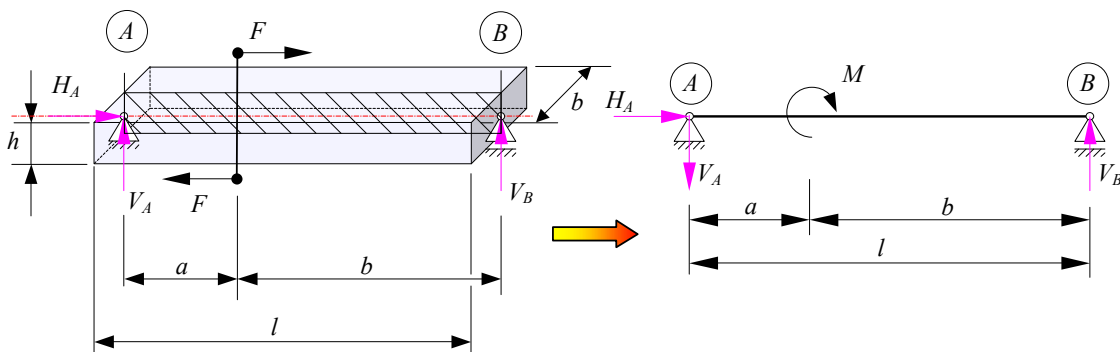
2.8. példa. Koncentrált hajlítónyomatékkal terhelt kéttámaszú tartó reakciói

Most tekintsük a koncentrált nyomatékkal terhelt kéttámaszú rúd esetét (2.14. ábra). A koncentrált nyomatékot úgy értelmezhetjük, mint a rúd egy igen rövid szakaszán ható, zérus eredőjú erőrendszer forgató nyomatékát, amelynek hatáspontját e szakasz közepére tesszük.

Mivel vízszintes terhelőerő nincs, a H_A reakcióerő most is zérus lesz. Függőleges terhelőerőnk sincs, de téves lenne azt a következtetést levonni, hogy akkor függőleges reakcióerők sem keletkezhetnek: ezeket most is a nyomatékegyenletekből határozhatjuk meg. Ezekben az egyenletekben az M koncentrált nyomatékot az általunk megválasztott egyezmény szerinti előjellel kell beírni. Az eddigiekben az óramutató járásával megegyező irányban, tehát a z tengely körüli forgatás pozitív irányát tekintettük pozitívnak:

$$\sum M_{z,A} = 0 \Rightarrow M - l \cdot V_B = 0 \Rightarrow V_B = \frac{M}{l}, \quad (2.56)$$

$$\sum M_{z,B} = 0 \Rightarrow M - l \cdot V_A = 0 \Rightarrow V_A = \frac{M}{l}. \quad (2.57)$$



2.14. ábra. Koncentrált nyomatékkal terhelt kéttámaszú rúd

Ellenőrzésképpen:

$$\sum F_y = V_A - V_B = \frac{M}{l} - \frac{M}{l} = 0, \quad (2.58)$$

vagyis a két reakcióerő azonos nagyságú, de ellentétes irányú, és egy $-M$ nyomatékú erőpárt alkot, amely a rudat terhelő koncentrált nyomatékkal azonos nagyságú, de azzal ellenkező irányban forgat.

Észrevehetjük, hogy a reakcióerők képleteiben sehol sem szerepel a koncentrált nyomaték lokalizálása: ez tulajdonképpen a rúd tengelye mentén bárhol lehetne, a reakcióerők nem fognak megváltozni.

2.9. példa. Koncentrált erővel merőlegesen terhelt, egyik végén befogott tartó reakciói

A sztatikailag határozott rudak közé tartozik az egyik végén befogott rúd is. Tegyük fel, hogy ezt egy koncentrált függőleges erő terheli, a szabad végén (2.15. ábra).

Befogott rúd esetében a következőképpen járhatunk el:

→ felírjuk a vízszintes vetületek egyensúlyi egyenletét. Az egyetlen vízszintes reakcióerő a merev befogásnál (az A pontban) lép fel, ami ebből az egyenletből azonnal meghatározható. A példánkban nincs vízszintes terhelő erő, tehát:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0; \quad (2.59)$$

→ felírjuk a függőleges vetületek egyensúlyi egyenletét, mely egyenletben szintén csak egy ismeretlen, a merev befogásnál fellépő függőleges reakcióerő jelenik meg. Tehát ez szintén azonnal meghatározható:

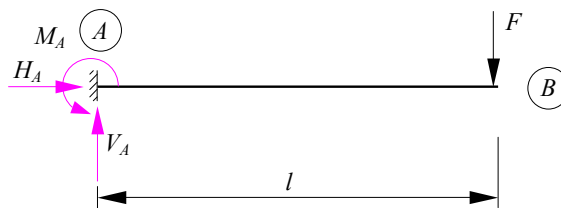
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F - V_A = 0 \Rightarrow V_A = F; \quad (2.60)$$

→ felírjuk az erőknek a merev befogásra, az A pontra vonatkoztatott nyomatékának egyensúlyi egyenletét. Ez az egyenlet is csak egyetlen ismeretlent, a reakciónyomatékot fogja tartalmazni:

$$\sum M_{z,A} = 0 \Rightarrow l \cdot F - M_A = 0 \Rightarrow M_A = l \cdot F. \quad (2.61)$$

→ felírjuk egy másik, például a B pontra vonatkoztatott nyomatékok egyensúlyi egyenletét is. Ezt ellenőrzésre használhatjuk:

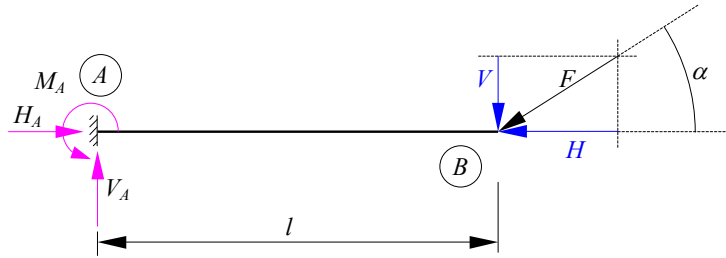
$$\sum M_{z,B} = 0 \Rightarrow l \cdot V_A - M_A = l \cdot F - l \cdot F = 0. \quad (2.62)$$



2.15. ábra. Koncentrált erővel terhelt egyik végén befogott rúd

2.10. példa. Koncentrált erővel ferdén terhelt, egyik végén befogott tartó reakciói

Ha a rudat egy ferde erő terheli, akkor annak lesz egy vízszintes vetülete, amely a vízszintes reakcióerő megjelenéséhez vezet (2.16. ábra).



2.16. ábra. Ferde koncentrált erővel terhelt egyik végén befogott rúd

Ekkor

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A - H = 0 \Rightarrow H_A = H = F \cdot \cos \alpha ; \quad (2.63)$$

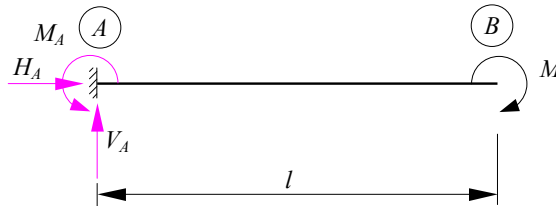
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V - V_A = 0 \Rightarrow V_A = V = F \cdot \sin \alpha ; \quad (2.64)$$

$$\sum M_{z,A} = 0 \Rightarrow l \cdot V - M_A = 0 \Rightarrow M_A = l \cdot V = l \cdot F \cdot \sin \alpha . \quad (2.65)$$

A nyomatékegyenletben a vízszintes erő nem jelenik meg, hiszen a tartóegyenese keresztül megy a befogott ponton.

2.11. példa. Koncentrált hajlítónyomatékkal terhelt, egyik végén befogott tartó reakciói

A koncentrált nyomatékkal terhelt befogott rúdnak nincsenek reakcióerői (2.17. ábra), a reakciónyomaték pedig a terhelő nyomatékkal azonos nagyságú, de ellentétes irányban forgat:



2.17. ábra. Koncentrált nyomatékkal terhelt egyik végén befogott rúd

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0 ; \quad (2.66)$$

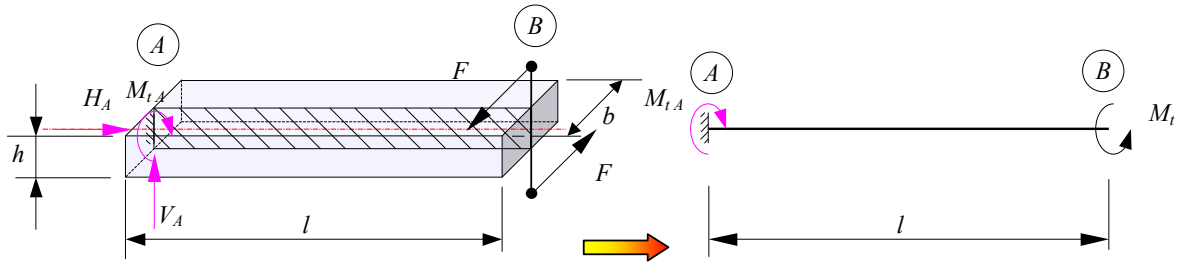
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A = 0 ; \quad (2.67)$$

$$\sum M_{z,A} = 0 \Rightarrow M - M_A = 0 \Rightarrow M_A = M . \quad (2.68)$$

2.12. példa. Koncentrált csavarónyomatékkal terhelt, egyik végén befogott tartó reakciói

Az előbbi példákban a „koncentrált nyomaték” hajlítónyomatékokat jelentett. A befogott rúd (tulajdonképpen: tengely) esetében az lehet csavarónyomaték is (2.18. ábra). Ebben az esetben is csak egy reakciónyomaték fog megjelenni, ami a terhelő csavarónyomatékkal azonos nagyságú, de az x tengely körül ellenkező irányba forgató nyomaték lesz:

$$\sum M_{x,A} = 0 \Rightarrow M_t - M_{t,A} = 0 \Rightarrow M_{t,A} = M_t . \quad (2.69)$$



2.18. ábra. Az egyik végén befogott csavart tengely

2.13. példa. Lineárisan megoszló erővel terhelt, egyik végén befogott tartó reakciói

Ha az egyik végén befogott rudat valamilyen megoszló erő terheli, akkor a megoszló erő eredőjének és az eredő támadáspontjának meghatározása után a számítások a koncentrált erővel terhelt rúd esetét követik. Legyen például a 2.19. ábrán látható rúd. Az eredő nagyságához és támadáspontjához használhatnánk a már levezetett 2.47. és 2.54. formulákat, azonban közelítsük meg ezt a feladatot egy másik irányból.

A trapéz alakú terhelés-diagramot a számítások egyszerűsítésének szándékával gyakran célszerűbb egy egyenletesen megoszló terhelésre és egy olyan lineárisan megoszló terhelésre felbontani, amelynek a diagramja egy olyan háromszög, amelynek a csúcsa bal oldalon van.

A 2.19. ábrán a trapéz nagyalapja a bal oldalon van, tehát ha az említett módon szeretnénk a terhelés-diagramot felbontani, akkor a 2.13. ábrán bemutatott eljárás módosítanunk kell: tekintsük a terhelést egy olyan egyenletesen megoszló komponenssel, amely a nagyalapnak megfelelő intenzitással rendelkezik és amelyből kivonunk egy olyan lineárisan változó komponenst, amely a jobb oldalon a kisalapnak megfelelő intenzitáshoz vezet. A „kivonás” tehát egy fordított irányú, a jelen példában felfele mutató összetevőt jelent.

A számításokat tehát az

$$R_1 = p_1 \cdot l \quad (2.70)$$

és az

$$R_2 = \frac{(p_1 - p_2) \cdot l}{2} \quad (2.71)$$

eredőkkel végezzük el, amelyek közül az utóbbi alulról felfele mutat.

A vízszintes erők egyenletéből kiderül, amit amúgy azonnal beláthatunk, hogy ilyen irányú reakcióerőnk nincs:

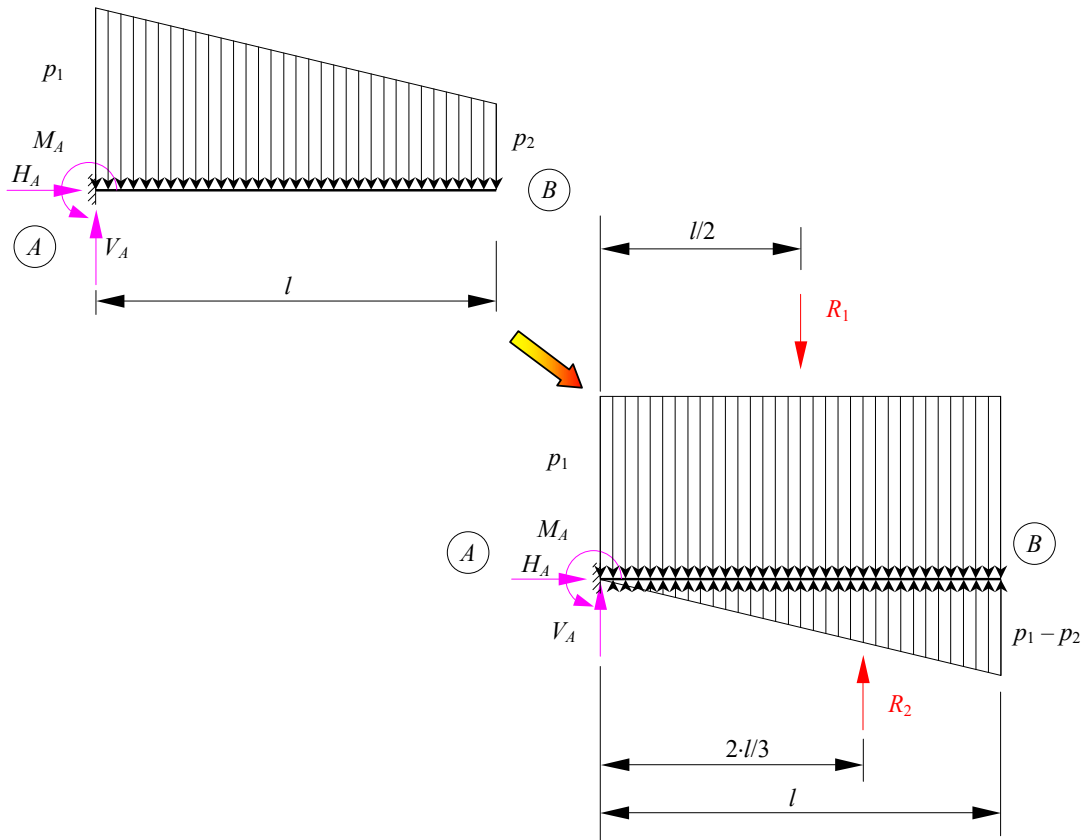
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0. \quad (2.72)$$

A függőleges erők egyenletéből következik, hogy az ilyen irányú reakcióerő a diagram területével egyenlő:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_1 - R_2 - V_A = 0 \Rightarrow V_A = R_1 - R_2 = p_1 \cdot l - \frac{(p_1 - p_2) \cdot l}{2} = \frac{(p_1 + p_2) \cdot l}{2}, \quad (2.73)$$

a reakciónyomatékot pedig az A pontra felírt egyensúlyi egyenletből kapjuk:

$$\begin{aligned} \sum M_{z,A} = 0 &\Rightarrow \frac{l}{2} \cdot R_1 - \frac{2 \cdot l}{3} \cdot R_2 - M_A = 0 \Rightarrow \\ M_A &= \frac{l}{2} \cdot R_1 - \frac{2 \cdot l}{3} \cdot R_2 = \frac{l}{2} \cdot p_1 \cdot l - \frac{2 \cdot l}{3} \cdot \frac{(p_1 - p_2) \cdot l}{2} = \frac{l^2}{6} \cdot (p_1 + 2 \cdot p_2). \end{aligned} \quad (2.74)$$



2.19. ábra. Megoszló erővel terhelt egyik végén befogott rúd, a trapéz alakú diagram felbontásának újabb lehetősége

A reakciónyomatékra, amely ez esetben a derékszögű trapéz alakú diagramnak a bal oldali kezdőpontjára vonatkoztatott nyomatéka, ugyanezt az összefüggést kapnánk a 2.47. és a 2.54. formulák szorzataként is.

2.14. példa. Megoszló tengelyirányú erővel terhelt kéttámaszú tartó reakciói

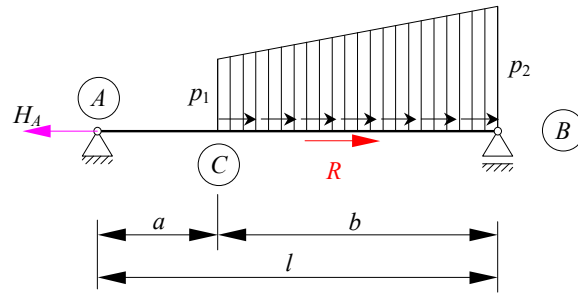
Az eddigi példákban a megoszló terhelés a rúd tengelyére merőleges volt: ez azonban nem kizárólagos eset, a megoszló erő tengelyirányú is lehet. Erre példa a függőleges rúd (oszlop) saját súlyából eredő terhelése.

Az eddigi példákból láthattuk, hogy a rúd tengelyében ható erőknek nincs nyomatékuk a kényszerekre nézve, így a vízszintes (tengely irányú) reakcióerő az egyensúlyi egyenletből könnyen meghatározható: az a vízszintes erők eredőjével azonos nagyságú lesz. Ez érvényes a megoszló tengelyirányú erők esetében is: egy ilyen erő eredőjét is a 2.21. integrállal számíthatjuk ki, vagyis az a diagram területével egyenlő:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -H_A + R = -H_A + \frac{(p_1 + p_2) \cdot b}{2} = 0 \Rightarrow H_A = \frac{(p_1 + p_2) \cdot b}{2}. \quad (2.75)$$

A tengelyre merőleges megoszló erők esetében szükségünk volt az eredő támadáspontjára is. Erre a nyomatékegyenletek felírásakor volt szükség. A kényszerekre nézve a tengelyirányú erők erőkarja nulla hosszúságú, így a tengelyirányú erők eredőjének az erőkarja is nulla hosszúságú lesz:

a megoszló erő támadáspontja a rúd tengelyén van. Ha szükségünk van az eredő ábrázolására, akkor a geometriai középpontnak megfelelő pontban helyezzük azt el.



2.20. ábra. Megoszló tengelyirányú erővel terhelt kéttámaszú rúd

2.15. példa. Megoszló ferde erővel terhelt, egyik végén befogott tartó reakciói

A ferde megoszló erőket tengelyirányú és tengelyre merőleges összetevőkre bontjuk, a 2.6. és a 2.16. ábrákon látható esetekhez hasonlóan. Ha az erő intenzitását egy $p(x)$ függvénnyel írjuk le és az egy $\alpha(x)$ függvénnyel megadott szöget zár be a rúd tengelyével, akkor a két összetevő a következő lesz:

$$\rightarrow \text{a tengely irányában} \quad h(x) = p(x) \cdot \cos(\alpha(x)); \quad (2.76)$$

$$\rightarrow \text{arra merőlegesen} \quad v(x) = p(x) \cdot \sin(\alpha(x)). \quad (2.77)$$

E képletek szerint, amennyiben az α szög állandó, a vetületeket leíró függvények jellege azonos lesz a ferde megoszló erőt leíró függvényekével, hiszen csupán egy skálátényezőben különböznek egymástól (a bezárt szög koszinuszával, illetve szinuszával szorzunk). Ekkor az egyenletesen megoszló ferde erő vetületei is egyenletesen megoszló erők lesznek, a lineárisan megoszló ferde erő pedig lineárisan megoszló összetevőkkel adható meg.

A 2.21. ábrán például egy olyan rudat látunk, amelyet a jobb oldalán mereven befogva rögzítettünk, és amelyet egy p intenzitású egyenletesen megoszló erő terhel, de az egy bizonyos α szöget zár be a rúd tengelyével. E megoszló erőt a $h(x) = p \cdot \cos \alpha$ intenzitású vízszintes és a $v(x) = p \cdot \sin \alpha$ nagyságú függőleges összetevőivel, tehát két egyenletesen megoszló összetevővel helyettesítjük, így egy összetett terhelést kapunk. A rúd reakciói az összetett terhelést alkotó komponenseknek megfelelő reakciók összegeként számíthatók ki.

A függőleges összetevőből származó reakciók:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_{B1} = 0, \quad (2.78)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_1 - V_{B1} = 0 \Rightarrow V_{B1} = R_1 = p \cdot l \cdot \sin \alpha, \quad (2.79)$$

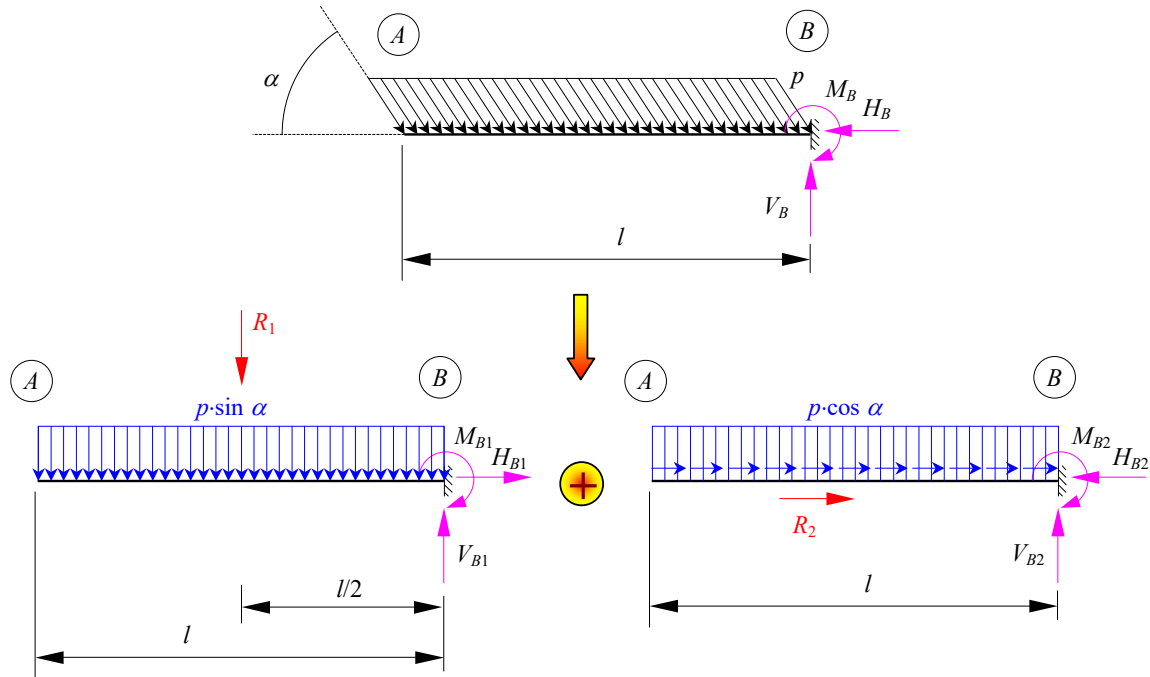
$$\sum M_{z,B} = 0 \Rightarrow -\frac{l}{2} \cdot R_1 + M_{B1} = 0 \Rightarrow M_{B1} = \frac{l}{2} \cdot R_1 = \frac{p \cdot l^2}{2} \cdot \sin \alpha. \quad (2.80)$$

A vízszintes összetevőből származó reakciók:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -H_{B2} + R_2 = 0 \Rightarrow H_{B2} = R_2 = p \cdot l \cdot \cos \alpha, \quad (2.81)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_{B2} = 0, \quad (2.82)$$

$$\sum M_{z,B} = 0 \Rightarrow M_{B2} = 0. \quad (2.83)$$



2.21. ábra. Ferde megoszló erővel terhelt, az egyik végén befogott rúd

A rúd reakciói tehát összesen:

$$H_B = -H_{B1} + H_{B2} = p \cdot l \cdot \cos \alpha, \quad (2.84)$$

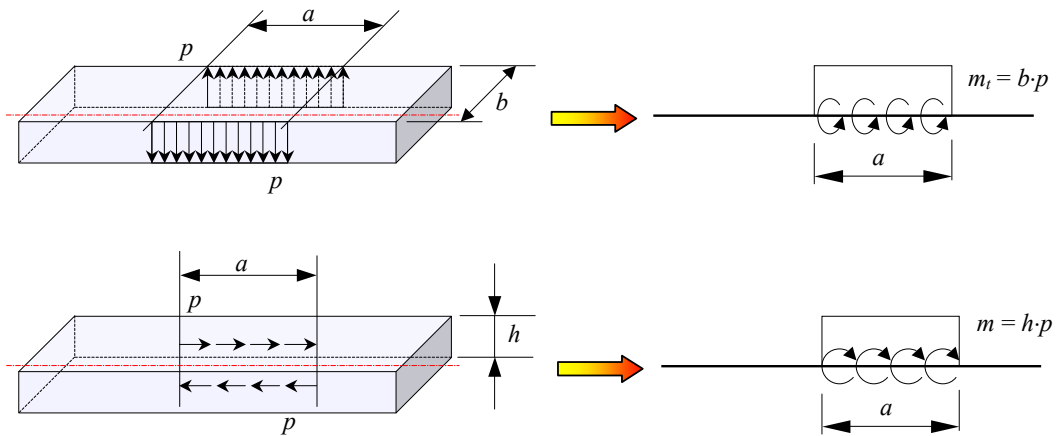
$$V_B = V_{B1} + V_{B2} = p \cdot l \cdot \sin \alpha, \quad (2.85)$$

$$M_B = M_{B1} + M_{B2} = \frac{p \cdot l^2}{2} \cdot \sin \alpha. \quad (2.86)$$

Mivel az α szög állandó, ezt a példát aránylag egyszerűbben megoldhattuk volna másként is: először kiszámítjuk a megoszló erő eredőjét, amelynek a nagysága a diagram területével azonos és az szintén α szöget zár be a rúd tengelyével, majd ezt az eredőt, mint koncentrált ferde erőt bontjuk fel a rúd tengelyére eső és arra merőleges összetevőkre. Az igénybevételi ábrák megrajolásakor azonban szükségünk van a megoszló erő vetületeire, ezért nem tudjuk elkerülni 2.76.-2.77. összetevők megállapítását.

2.16. példa. Megoszló nyomatékkal terhelt tartók

Nemcsak az erő, hanem a nyomaték-terhelés is lehet megoszló. A koncentrált erőt mint idealizált fogalmat vezettük be: ez a valóságban egy kellőképpen kis tartományon (felületen, térfogaton) megoszló erőt jelent. A koncentrált nyomaték egy koncentrált erópár nyomatéka. Ha a terhelés egy nagyobb kiterjedésű tartományon oszlik meg, akkor azt a számításokban is megoszló terhelésként kell tekintenünk: ha a rúdon ható terhelés egy megoszló erópárt alkot, akkor azt megoszló nyomatékként modellezhetjük. A megoszló erópár két, egymással ellentétes irányú megoszló erőből áll, amelyek $p(x)$ intenzitása csak előjelben különbözik. Ha ez a megoszló erópár tengelyirányú, akkor megoszló hajlítónyomatékról, ha pedig tengelyre merőleges irányú, akkor megoszló csavarónyomatékról beszélünk (2.22. ábra).



2.22. ábra. Megoszló csavarónyomaték és megoszló hajlítónyomaték

E megoszló nyomatékok lehetnek egyenletesen megoszlóak (amikor az erőpár tagjai is egyenletesen megoszló erők), lineárisan megoszlóak (amikor az erőpár tagjai lineárisan megoszló erők), vagy valamilyen más törvény szerint megoszló nyomatékok. A reakciók kiszámításakor ezeket az eredőjükkel helyettesítjük. Ez az eredő egy koncentrált hajlító- vagy koncentrált csavarónyomaték:

$$M = \int_{x_1}^{x_2} m(x) dx, \quad (2.87)$$

$$M_t = \int_{x_1}^{x_2} m_t(x) dx. \quad (2.88)$$

2.17. példa. Ferde támaszú tartó reakciói

Az előző példákban a kéttámaszú rúd egyszerű támasza a koordináta-irányokhoz igazodott. Ez azonban nem mindig van így. A 2.23. ábrán egy olyan rúd látható, amelynek egyszerű támaszának normálisa a vízszintes tengellyel egy bizonyos α szöget zár be. A valóságban ez azt jelenti, hogy a rúd bal oldalát egy olyan felületre támasztottuk fel, amelynek a normálisa α szöget zár be a vízszintes síkhoz képest. Az ideális támaszokban nincs súrlódás, emiatt az egyszerű támaszokban fellépő kényszererő is az említett normális irányában fog fellépni.

A ferde reakcióerőt vetületekre bontjuk. A függőleges reakciókat a nyomaték-egyenletekből a szokásos módon számíthatjuk ki; a példánkat megoldva a függőleges támaszú rúdra kapott 2.12. és a 2.13. képletekhez, $V_A = F \cdot b/l$ és $V_B = F \cdot a/l$ kifejezéséhez jutunk. A vízszintes reakcióerők kiszámításához felírt vetületi egyenlet azonban a 2.10. relációtól eltérően most két ismeretlent tartalmaz:

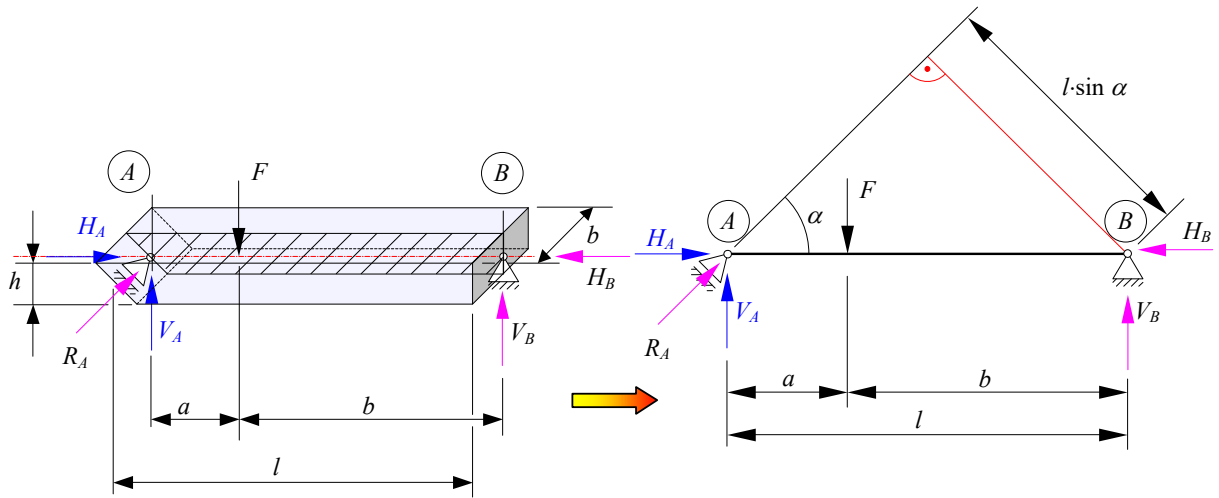
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A - H_B = 0, \quad (2.89)$$

de a H_A vetület kiszámítható a nyomatékegyenletekből (2.13.) kapott V_A vetületből. Mindkettő ugyanannak az R_A reakcióerőnek a vetülete:

$$\begin{aligned} V_A &= R_A \cdot \sin \alpha, \\ H_A &= R_A \cdot \cos \alpha, \end{aligned} \quad (2.90)$$

tehát $H_A = V_A \cdot \operatorname{ctg} \alpha$. Ezzel, a 2.89. egyenletből

$$H_A = H_B = V_A \cdot \operatorname{ctg} \alpha = F \cdot \frac{b}{l} \cdot \operatorname{ctg} \alpha. \quad (2.91)$$



2.23. ábra. Ferde támaszú rúd

Ezt a feladatot megoldhatjuk másként is: ha figyelembe vesszük azt a tényt, hogy az R_A reakcióerő nem függőleges, akkor az B pontra felírt nyomatékegyenletből R_A egyszerűen kiszámítható. R_A erőkarja a B pontra nézve a támasztóegyenesére emelt, B ponton átmenő merőlegesen mérhető, az most $l \cdot \sin \alpha$:

$$\sum M_{z,A} = 0 \Rightarrow -b \cdot F + l \cdot \sin \alpha \cdot R_A = 0 \Rightarrow R_A = F \cdot \frac{b}{l \cdot \sin \alpha}. \quad (2.92)$$

Ennek vetületeit a 2.90. képletekkel határozhatjuk meg.

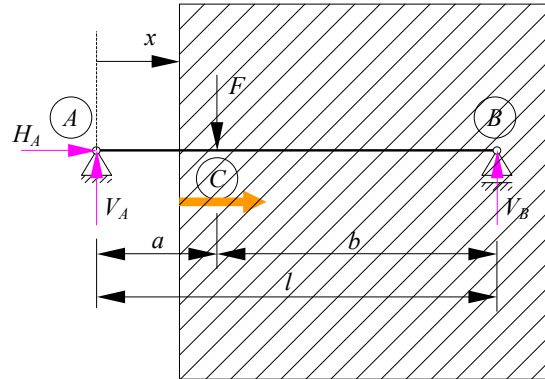
Észrevehetjük, hogy zéróhoz közelítő α szög esetén, amikor az egyszerű támasz közel vízszintes lenne és egy nagyon nagy, közel vízszintes reakcióerő jelenne meg ebben a támaszban. Amennyiben az egyszerű támasz teljesen vízszintes lenne ($\alpha = 0$), akkor a V_A vetület eltűnne, a H_A pedig meghatározhatatlanná válna: ez a rúd nem lenne sztatikailag determinált szerkezet.

2.2.2. A keresztmetszeti igénybevételek kiszámításának analitikus módszere

A keresztmetszeti igénybevételeket a reakcióerők kiszámítását követően, a 2.1. ábrával illusztrált elv alapján (a részek egyensúlyának elve alapján) határozzuk meg. Ezeket az igénybevételeket egy képzeletbeli keresztmetszeten számoljuk ki, amelyet annak x koordinátája lokalizál. A számítás a lemetszett részek valamelyikén (például a bal oldalin) ható eredő terhelés vetületeinek és az eredő nyomaték vetületeinek megállapításából áll. Ehhez egy intuitív eszközhöz fordulhatunk: egy papírlappal letakarjuk a rudat, majd a papírt a rúd tengelye mentén végighúzával figyeljük az alóla előbukkanó terhelés-összetevőket. Ezeknek az összetevőknek kell kiszámítsuk az eredőjét, illetve az eredő nyomatékát, a papírlap bal oldali szélére nézve.

2.18. példa. *A merőleges koncentrált erővel terhelt kéttámaszú tartó igénybevételei*

Első példaként tekintünk a 2.5. ábrán látható rúd esetét: a 2.24. ábrán a papír széle (a tekintett keresztmetszet) x távolságra van a rúd bal oldali kezdőpontjától, ahol a használt koordináta-rendszer origója van.



2.24. ábra. *A keresztmetszeti igénybevételek kiszámítása (AC szakasz)*

A kezdetben, míg el nem jutunk a koncentrált terhelőerő „C”-vel jelölt támadáspontjáig, a papírlap alól csak a H_A és a V_A reakcióerők látszanak ki, azaz a lementszett darabon ez a két erő hat. Könnyen beláthatjuk, hogy ezek szerint az origótól és az attól x távolságra felvett keresztmetszetig terjedő szakaszon ható terhelések eredőjeként, illetve nyomatékként

$$AC, x \in [0, a]: \begin{cases} N(x) = H_A = 0 \\ T_y(x) = V_A = F \cdot \frac{b}{l} \\ M_z(x) = V_A \cdot x = F \cdot \frac{b}{l} \cdot x \\ M_t(x) = 0, \end{cases} \quad (2.93)$$

ahol az előjeleket a 2.3. ábrán bemutatott egyezmény szerint vettük fel.

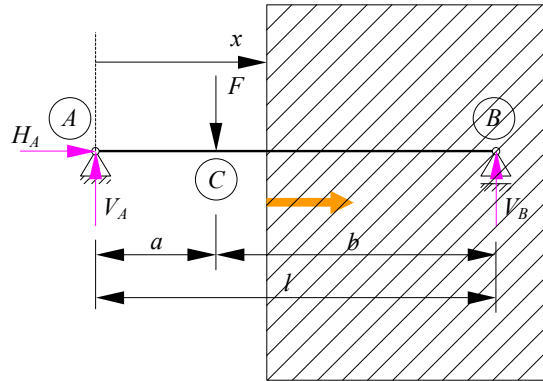
Azt is könnyen beláthatjuk, hogy e képletek csak a C pontig lehetnek érvényesek, hiszen ott megjelenik az F függőleges terhelőerő is. A CB szakaszon a következő képleteket írhatjuk fel (2.25. ábra):

$$CB, x \in [a, l]: \begin{cases} N(x) = H_A = 0 \\ T_y(x) = V_A = F \cdot \frac{b}{l} - F = -F \cdot \frac{l-b}{l} = -F \cdot \frac{a}{l} = -V_B \\ M_z(x) = V_A \cdot x - F \cdot (x-a) = F \cdot \frac{b}{l} \cdot x - F \cdot (x-a) = V_B \cdot (x-l) \\ M_t(x) = 0. \end{cases} \quad (2.94)$$

A 2.93. és a 2.94. képletekből az derül ki, hogy a rúd keresztmetszetét igénybe vevő nyíróerő szakaszonként állandó, a C pontban értéke lépcsőszerűen változik meg (ott egy ugrás van): a nyíró igénybevétel tengely menti (x szerinti) változását tehát matematikailag egy lépcsős függvény írja le.

A képleteket megvizsgálva azt is megállapíthatjuk, hogy a hajlító igénybevétel lineárisan változik, az A pontban értéke zéró, a C pontig növekedik, majd onnan csökken és a B pontban megint zéróra esik vissza. Matematikailag ezt tehát egy szakaszonként értelmezett lineáris függvény írja le, amely a szakaszokat elválasztó C pontban folytonos.

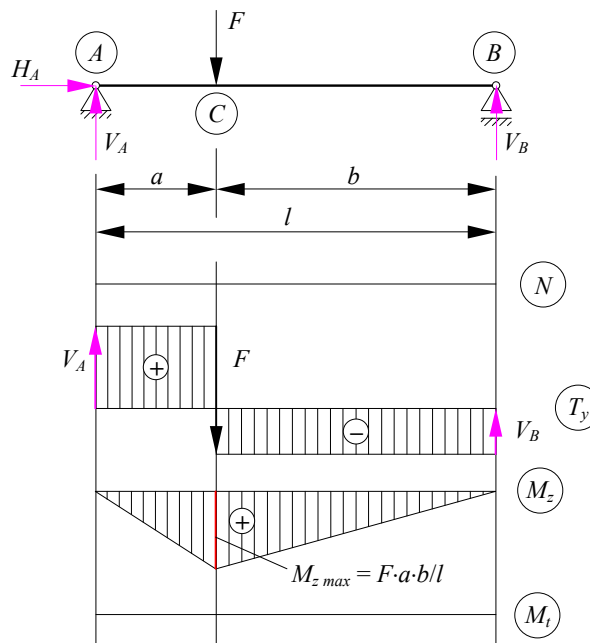
A rúd csuklóval vagy egyszerű támasszal megtámasztott végén, hacsak ott nincs egy koncentrált nyomaték formájú terhelés, nem jelenhet meg hajlító igénybevétel (hajlítónyomaték). Ezek a kényszerek ugyanis nem vesznek át és nem adnak át nyomatékokat.



2.25. ábra. A keresztmetszeti igénybevételek kiszámítása (CB szakasz)

Példánkban tengely irányú igénybevétel és csavarónyomaték nem lép fel.

E tényeket, az igénybevételek tengely menti változását a függvények grafikonjával szemléltetjük, hiszen azt könnyebben ki tudjuk értékelni és értelmezni, mint a felírt képleteket. Az N , T_y , M_z és M_t mennyiségeket tehát grafikusán ábrázoljuk a rúd tengelye mentén, az így kapott, a 2.26. ábrán látható diagramok pedig a rúd igénybevételi ábrái.



2.26. ábra. A megrajzolt igénybevételi ábrák

Ezek megrajzolásához először is a rúd „jellegzetes” pontjaiból (a rúd végei, támaszok, koncentrált terhelő erők és nyomatékok támadópontja, megoszló terhelés kezdő és végpontjai) függőlegeseket húzunk, ezekhez igazolva rajzoljuk meg a diagramokat. A diagramokat bevonalkázzuk és előjellel látjuk el. Egyezményesen a pozitív mennyiségeket a zérus értéket jelölő vízszintes vonal fölé rajzoljuk, ez alól a hajlítónyomaték kivétel ahol a pozitív mennyiségek a vonal alatt vannak. A hajlítónyomaték esetében tulajdonképpen az egyezmény másként szól: azt pontosabban a hajlítás miatt bekövetkező alakváltozás miatt megnyújtott, tehát a domború oldalra kell felrajzolni, azonban ha nem tudjuk egyből átlátni, hogy melyik is az a nyújtott oldal, akkor jobb, ha a kiszámított nyomaték előjeléhez igazodunk. A hajlító igénybevétel diagramjáról az előjel gyakran hiányzik.

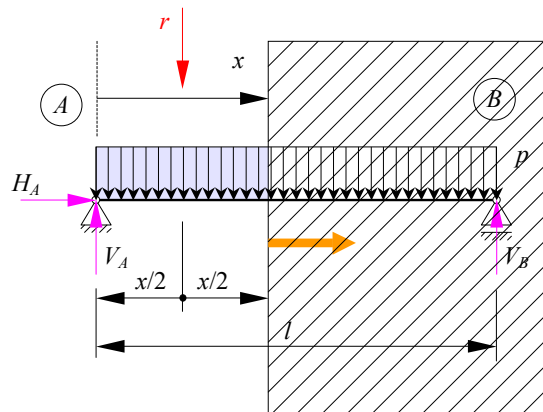
Az, hogy melyik diagram milyen igénybevételre vonatkozik, a jobb oldalon látható, karikába írt betűjel mutatja.

A nyíró igénybevétel diagramjára berajzoljuk a rúdra ható koncentrált erőket: észrevehetjük, hogy a diagram a bal oldalon zérus értékről ugrik fel az ott ható reakcióerőnek (koncentrált erőnek) köszönhetően, a C pontban ható F erő egy lépcsős ugrást okoz lefele (amerre a vektor mutat), majd a jobb oldali koncentrált reakcióerő visszavisz a zérus értékhez, a 2.93. és a 2.94. képleteknek megfelelően.

Ugyanezen képleteknek és az említett előjel-egyezménynek megfelelően rajzoljuk meg a hajlító igénybevétel diagramját is. Mivel e példánkban a kapott képletek szerint ez az x koordinátának lineáris függvénye, a nyomaték értékeit elegendő a szakaszok végpontjaiban kiszámítani majd a kapott pontokat összekötni. E kiszámított értékeket (most csak a C pontról van szó) felírjuk a diagramra is.

Ha valamelyik szakaszon a diagramot egy nemlineáris függvény (például egy magasabb fokú polinom) írja le, akkor megtörténhet, hogy azon a szakaszon az illető igénybevételnek szélsőértéke (maximuma vagy minimuma) van. Ebben az esetben meg kell állapítanunk az igénybevétel szélsőértékét és annak helyét is. Ezt illusztrálja a következő példa.

2.19. példa. Az egyenletesen megoszló erővel terhelt kéttámaszú tartó igénybevételei



2.27. ábra. A keresztmetszeti igénybevételek kiszámítása egyenletesen megoszló terhelés esetén

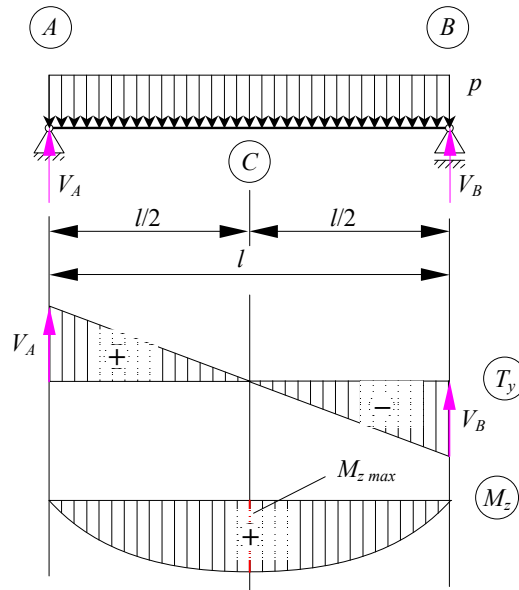
A 2.27. ábrán a 2.3. példában szereplő tartót láthatjuk. A reakcióerők kiszámításakor a megoszló erőt az eredőjével, a rúd közepén támadó R koncentrált erővel helyettesítettük: most ezt csak a megoszló terhelés papírlap alól előbukkanó részével kell megtegyük. Másképpen: ha az igénybevételeket egy adott x koordinátájú pontban szeretnénk kiszámítani, akkor a megoszló terhelésnek csak az illető pont bal oldalán ható részét kell számításba venni.

A példánkban, amikor a papírlap széle x távolságra van, akkor az előbukkanó egyenletes terhelés eredője $r = p \cdot x$, annak támadáspontja pedig a papírlap szélétől $x/2$ távolságra van.

Az igénybevételeket tehát most a következőképpen kapjuk:

$$AB, x \in [0, l]: \begin{cases} N(x) = H_A = 0 \\ T_y(x) = V_A - p \cdot x = \frac{p \cdot l}{2} - p \cdot x \\ M_z(x) = V_A \cdot x - (p \cdot x) \cdot \frac{x}{2} = \frac{p \cdot l}{2} \cdot x - \frac{p}{2} \cdot x^2 \\ M_t(x) = 0, \end{cases} \quad (2.95)$$

mely képletek a rúd teljes hosszán értelmezettek. Ezeket megvizsgálva kitűnik, hogy a nyíró igénybevételt egy lineáris (elsőfokú) polinom írja le, míg a hajlító igénybevétel diagramja egy másodfokú parabola lesz. Ha az x koordinátának a végpontoknak megfelelő értékeit helyettesítjük be (az A pontban $x = 0$, a B -ben pedig $x = l$, akkor a nyíró igénybevétel értékére a reakcióerőket kapjuk (a jobb oldalon ez a használt előjel-egyezmény miatt negatív lesz), a csuklóban és a támaszban pedig most sem jelenik meg nyomaték.



2.28. ábra. Az egyenletesen megoszló erővel terhelt kéttámaszú tartó igénybevételei

A hajlítónyomatékot megadó képlet egy másodfokú polinom, amelynek az AB szakaszon szélsőértéke lehet (ebben a példában ez egészen biztos, hiszen mindkét oldalon zérus értéke van). Egy függvény szélsőértékeinek helyét a koordináta szerinti deriválással, és a kapott derivált nulla értékéhez vezető koordináták kiszámításával határozhatjuk meg:

$$\frac{\partial M_z(x)}{\partial x} = \frac{p \cdot l}{2} - p \cdot x = 0 \Rightarrow x = \frac{l}{2}, \quad (2.96)$$

a szélsőértéket pedig a kapott koordináták behelyettesítésével kapjuk, a 2.28. ábrán levő C pontban.

E szélsőérték lehet egy maximum, egy minimum, vagy akár egy inflexió pont a függvény grafikonján. Mibenlétét a függvény második deriváltja adja, amely a grafikon görbületéhez köthető:

- ha a második derivált pozitív, akkor a szélsőérték egy minimumot jelent. A grafikon görbülete pozitív, a grafikon a szélsőérték közelében homorú, \cup alakú;
- ha a második derivált negatív, akkor a szélsőérték egy maximum lesz. A görbület negatív, a grafikon pedig domború, \cap alakú;
- ha a második derivált zéró, akkor a görbület is zéró. Ha a függvény nem konstans, akkor a grafikonja \curvearrowright vagy \curvearrowleft alakú.

Esetünkben $\frac{\partial^2 M_z(x)}{\partial x^2} = -p < 0$, tehát a hajlító igénybevételnek maximuma van:

$$M_{z_{max}} = M_z(x=l/2) = \frac{p \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{p}{2} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{p \cdot l^2}{8}. \quad (2.97)$$

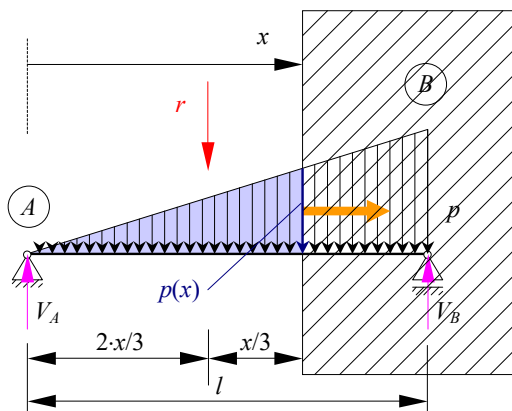
A derivált nulla értéke azt jelenti, hogy a szélsőértékeknek megfelelő pontokban a diagramnak vízszintes érintője lesz. Az ezekkel az észrevételekkel megrajzolt igénybevételi diagramok a 2.28 ábrán láthatók (a végig nulla igénybevételeket nem kell ábrázolni).

2.20. példa. Lineárisan, háromszög szerint megoszló erővel terhelt kéttámaszú tartó igénybevételei

A 2.29. ábrán a 2.6. feladatban szereplő kéttámaszú tartó látható. Ennek terhelése lineárisan oszlik meg, zérótól növekedik a 2.37. függvény szerint, ahol $x_1 = 0$, $x_2 = l$:

$$p(x) = \frac{p}{l} \cdot x. \quad (2.98)$$

Amikor az igénybevételeket az x koordinátájú pontban számítjuk ki, akkor a terhelésnek csak az illető pontig ható részét kell számításba veyük. Tehát ha a papírlapunk széle x távolságra van a koordináta-rendszer origójától, vagyis a rúd bal oldali végpontjától, akkor a terhelésdiagramból a lap alól csak a satírozott háromszög fog előbukkanni. Ennek eredője a satírozott idom területe, tehát $r = p(x) \cdot x / 2$. Az eredő a satírozott idom geometriai középpontjában hat, esetünkben a papírlap szélétől mért $x/3$ távolságra.



2.29. ábra. A keresztmetszeti igénybevételek kiszámítása lineárisan megoszló terhelés esetén

A zérótól különböző igénybevételek tehát, a 2.6. feladatban kiszámolt reakcióerőkkel:

$$AB, x \in [0, l]: \begin{cases} T_y(x) = V_A - \frac{p(x) \cdot x}{2} = \frac{p \cdot l}{6} - \frac{p}{2 \cdot l} \cdot x^2 \\ M_z(x) = V_A \cdot x - \frac{p(x) \cdot x}{2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{p \cdot l}{6} \cdot x - \frac{p}{6 \cdot l} \cdot x^3. \end{cases} \quad (2.99)$$

A nyíró igénybevételt egy másodfokú, a hajlító igénybevételt pedig egy harmadfokú polinom írja le. Az AB szakaszon mindkettőnek lehet maximuma: hogy van-e vagy sem, azt az előbbi példában ismertetett eljárással tudjuk megállapítani.

A nyíró igénybevételt adó polinomot a koordináta szerint deriválva a következőkhöz jutunk:

$$\frac{\partial T_y(x)}{\partial x} = -\frac{p}{l} \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0, \quad (2.100)$$

mely koordinátát behelyettesítvén $T_y(x)$ képletébe annak szélsőértékéhez jutunk. Mivel $T_y(x)$ második deriváltja negatív, $\frac{\partial^2 T_y(x)}{\partial x^2} = -\frac{p}{l} < 0$, a nyíró igénybevételnek a rúd bal oldali kezdetén maximuma van:

$$T_{y \max} = T_y(x=0) = \frac{p \cdot l}{6}. \quad (2.101)$$

A hajlító igénybevételt harmadfokú polinom írja le, deriváltja egy másodfokú polinom lesz. A másodfokú polinomnak két valós gyöke is lehet, így a mi esetünkben is:

$$\frac{\partial M_z(x)}{\partial x} = \frac{p \cdot l}{6} - \frac{p}{2 \cdot l} \cdot x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{l}{\sqrt{3}}, \quad (2.102)$$

de ezek közül csak a pozitív gyök, $x = l/\sqrt{3}$ jelent megoldást, hiszen a negatív a rúd hosszán kívül van. A hajlító igénybevétel második deriváltja ebben a C pontban negatív: $\frac{\partial^2 M_z(x)}{\partial x^2} = -\frac{p}{l} \cdot x < 0$, tehát az igénybevételnek itt maximuma van, amelyet az $x = l/\sqrt{3}$ koordinátának $M_z(x)$ 2.99.-es képletébe való behelyettesítésével kapunk:

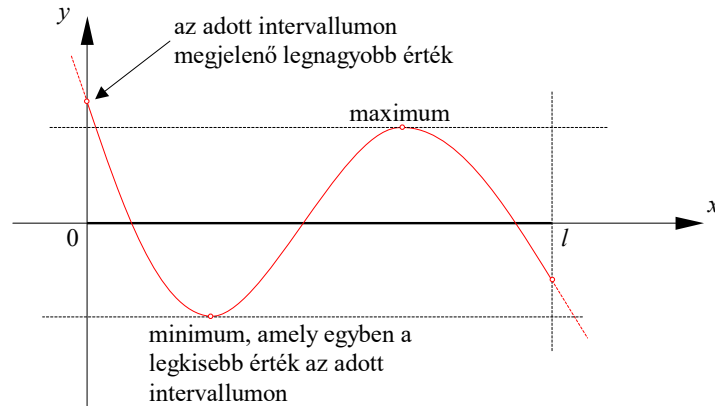
$$M_{z \max} = M_z(l/\sqrt{3}) = \frac{p \cdot l}{6} \cdot \frac{l}{\sqrt{3}} - \frac{p}{6 \cdot l} \cdot \frac{l^3}{3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{p \cdot l^2}{9 \cdot \sqrt{3}}. \quad (2.103)$$

Az ábrázoláshoz meg kell határozzuk a tengely-metszeteket is (azoknak a pontoknak a helyét, ahol az igénybevétel grafikonja metszi az x tengelyt, tehát ahol zérus igénybevételünk van). Ehhez meg kell oldani a $T_y(x)=0$ és az $M_z(x)=0$ egyenleteket. A „használható” (tehát a rúd tartományára eső) gyökök a következők:

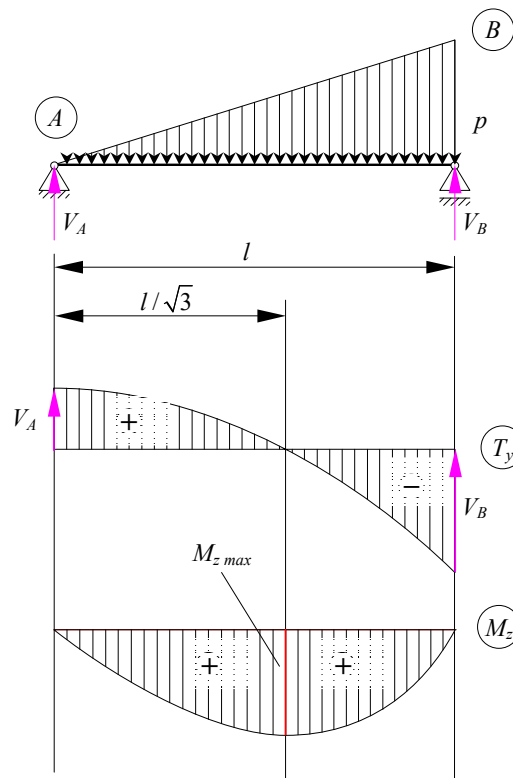
$$T_y(x) = \frac{p \cdot l}{6} - \frac{p}{2 \cdot l} \cdot x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{l}{\sqrt{3}}, \quad (2.104)$$

$$M_z(x) = \frac{p \cdot l}{6} \cdot x - \frac{p}{6 \cdot l} \cdot x^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = l. \quad (2.105)$$

Az első egyenletnek egyébként lenne egy $x = -l/\sqrt{3}$, a másodiknak pedig egy $x = -l$ gyöke is, amelyek kívül esnek a rúd hosszára (tehát az igénybevételi ábrák görbéinek értelmezési tartományán).



2.30. ábra. A szélsőértékek nem minden esetben azonosak a legnagyobb vagy a legkisebb értékekkel



2.31. ábra. A zérótól lineárisan növekedő megoszló erővel terhelt kéttámaszú tartó igénybevételei

Ki kell számolnunk az igénybevételeket a végpontokban is, amelyeket a 2.99. képletekkel, az $x = 0$, illetve az $x = l$ koordináták behelyettesítésével oldhatunk meg. Az előbbi példában tett

észrevételekkel összhangban kijelenthetjük, hogy a végpontokban hajlító igénybevételünk most sincs, ugyanis sem a csuklóban, sem az egyszerű támaszban nem jelenik meg hajlítónyomaték, és ott koncentrált nyomaték formájú terhelésünk sincs. Ezekben a pontokban a nyíró igénybevétel nagysága az ott ható függőleges reakcióerővel azonos. Megfigyelhetjük, hogy a B pontban a nyíró igénybevétel nagysága $V_B = p \cdot l/3$, tehát kétszer akkora, mint a 2.101. képlettel megadott maximum: itt nincs tévedés, ugyanis az a maximum a görbe egy lokális szélsőértékét jelenti, a B pontban pedig a rúd hosszának megfelelő intervallum peremén számolt értékről van szó (2.30. ábra), amely egyébként most egy negatív mennyiség. A nyíró igénybevételt ebben a feladatban egy másodfokú parabola írja le, amelynek két szára a végtelenbe nyúlik. Minket a parabolának csak a rúd hosszán értelmezett szakasza, az ott megjelenő legnagyobb abszolút érték érdekel. A rúd méretezésekor tehát az igénybevételi ábrából ki kell majd keresnünk a legnagyobb, és esetleg a legkisebb értéket, amelyek nem minden esetben szélsőértékek.

A fentiek alapján a 2.31. ábrán látható igénybevételi diagramokhoz jutunk.

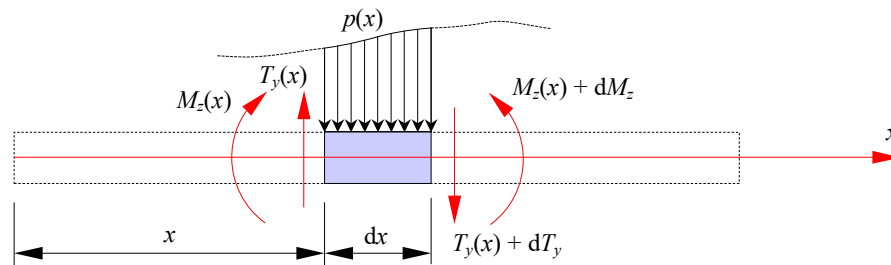
2.2.3. A keresztmetszeti igénybevételek és a terhelés közötti összefüggések

Az előbbi két feladatban szélsőértékeket kerestünk, amelyhez a nyíró igénybevételt, illetve a hajlító igénybevételt leíró görbe analitikus kifejezését deriváltuk. Észrevehetjük, hogy a hajlító igénybevétel deriváltja azonos a nyíró igénybevételt megadó képlettel. A hajlító igénybevétel deriváltját az egyenletesen megoszló terhelés esetében a 2.96, a lineárisan megoszló terhelés esetében pedig a 2.102. képlet írja le, a nyíró igénybevétel függvényeit pedig a 2.95, illetve a 2.99. képletek között találhatjuk meg.

Azt is észrevehetjük, hogy a nyíró igénybevételt adó képlet deriváltja csak előjelben különbözik a megoszló merőleges terhelés analitikus kifejezésétől. Ha az egyenletesen megoszló terhelés esetén a 2.95. képletek között megadott $T_y(x)$ kifejezést deriváljuk, akkor a $\partial T_y / \partial x = -p$ összefüggést kapjuk, amely előjelben különbözik a terhelést megadó 2.26. függvényétől. A lineárisan megoszló terhelés esetében pedig a 2.100. képlettel megadott derivált és a terhelés 2.98. kifejezése között szintén csak egy előjel-különbséget látunk.

Feltevődik egy kérdés, hogy vajon, ezek az összefüggések csak az előbbi két feladatban érvényesek-e, vagy pedig általánosak lennének? Ugyanis ez utóbbi esetben megspórolhatnánk a deriváltak kiszámítását, hiszen azok már eleve adottak lennének.

A dolgok tisztázása végett tekintsünk egy infinitezimálisan rövid kis rúd-darabkát (2.32. ábra), amelyen egy tetszőleges törvény szerint megoszló $p(x)$ terhelés hat. Ha a darabka bal oldalán a nyíró igénybevétel értéke $T_y(x)$ és a hajlító igénybevétel $M_z(x)$, akkor a darabkára ható $p(x) \cdot dx$ terhelés és a támadáspontok dx távolsággal való eltolódásának hatására a jobb oldalon ezek dT_y , illetve dM_z mennyiséggel fognak megváltozni.



2.32. ábra. Az igénybevételek és a terhelés közötti összefüggések levezetéséhez

Ha felírjuk az infinitezimális hosszúságú rész egyensúlyát, akkor a következő egyenletekhez jutunk:

→ a függőleges (rúdra merőleges) erők egyensúlyából:

$$-T_y(x) + p(x) \cdot dx + [T_y(x) + dT_y] = 0 \Rightarrow \frac{dT_y(x)}{dx} = -p(x); \quad (2.106)$$

→ a nyomatékoknak a jobb oldali végre felírt egyensúlyi egyenletéből pedig:

$$M_z(x) + T_y(x) \cdot dx - \frac{p(x) \cdot dx^2}{2} - [M_z(x) + dM_z] = 0 \Rightarrow \frac{dM_z(x)}{dx} = T_y(x); \quad (2.107)$$

ahol a megoszló terhelést a tekintett szakaszon állandónak vettük és a második egyenletben elhanyagoltuk a másodrendűen kicsiny infinitezimális tagot (amelyben dx^2 szerepel).

E két egyenlet kombinációjaként felírható a nyomaték második deriváltjára vonatkozó

$$\frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} = \frac{dT_y(x)}{dx} = -p(x) \quad (2.108)$$

összefüggés is.

Sejtésünk tehát igazolást nyert, nemcsak az egyenletesen és a lineárisan megoszló terhelés esetén léteznek az említett azonosságok.

Az egyensúlyi egyenletek felírásával a 2.106.-hoz hasonló összefüggéseket kapunk az egyéb irányú megoszló terhelésekre is. Könnyen beláthatjuk, hogy a 2.14. példában szereplő tengely irányú megoszló $p(x)$ erő esetében (2.20. ábra)

$$\frac{dN(x)}{dx} = -p(x), \quad (2.109)$$

a 2.16. példában szereplő megoszló $m_t(x)$ csavarónyomaték esetében (2.22. ábra)

$$\frac{dM_t(x)}{dx} = -m_t(x), \quad (2.110)$$

és ha a rudat egy megoszló $m(x)$ hajlítónyomaték is terheli, akkor a 2.107. alatti egyensúlyi egyenletet ki kell egészítenünk a dx hosszúságon ható $m(x) \cdot dx$ taggal is, ahonnan

$$\frac{dM_z(x)}{dx} = T_y(x) - m(x). \quad (2.111)$$

Ez utóbbi esetben a 2.108. egyenlet is érvényét veszti, ekkor

$$\frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} = -p(x) - \frac{dm(x)}{dx}. \quad (2.112)$$

2.2.4. A terület-módszer

Az igénybevételi ábrák megrajzolásának terület-módszere az előbbi két fejezetben tett észrevételekre és az igénybevételi függvények közötti összefüggésekre alapoz, és akkor használható hatékonyan, amikor a terhelést alacsony fokú polinomokkal adjuk meg.

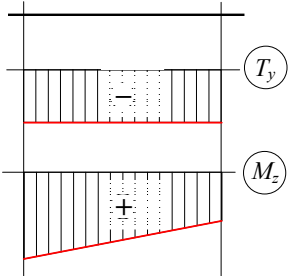
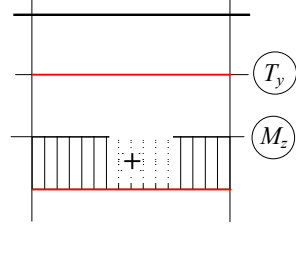
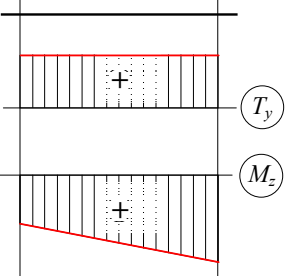
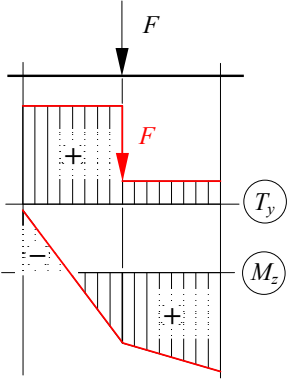
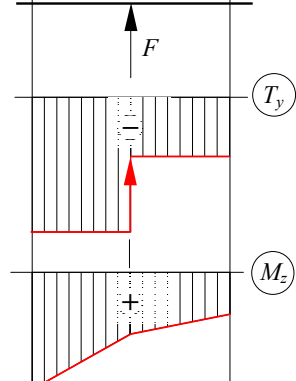
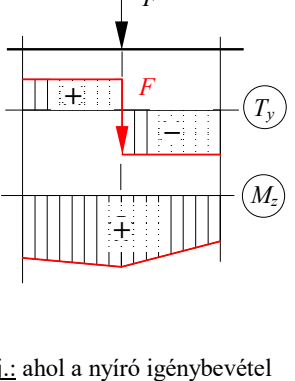
A terület-módszer alkalmazásakor a terhelésfüggvényből indulunk ki. A reakcióerők meghatározása után a függvények közötti összefüggések ismeretében az igénybevételi ábrákat

szerkesztéssel kapjuk, számítások nélkül. Az egyedüli elvégzendő számítások a szélsőértékek helyére és nagyságára vonatkoznak.

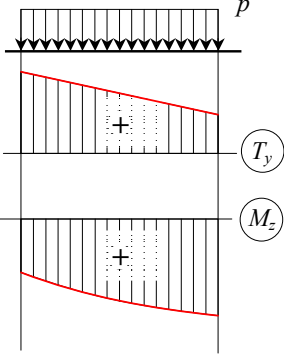
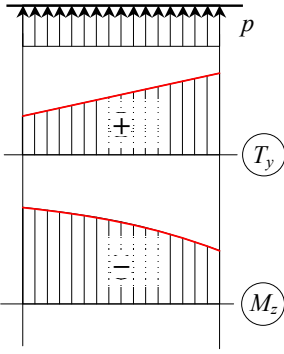
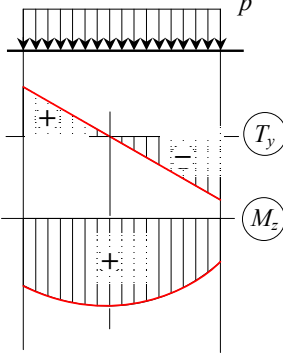
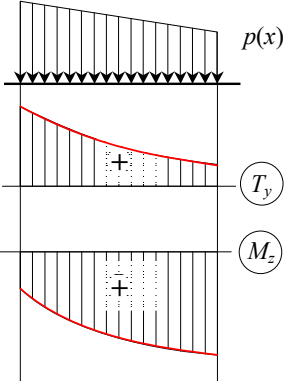
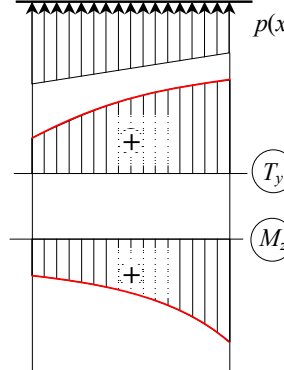
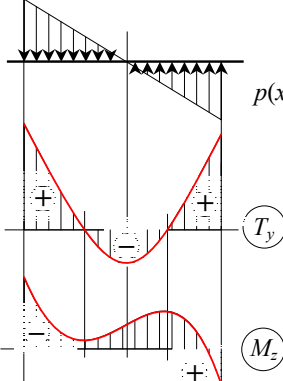
A terület-módszerrel kapcsolatos, a nyíró igénybevételre és a hajlító igénybevételre vonatkozó alapvető összefüggéseket a következő (2.1.) táblázat foglalja össze. Az egyéb igénybevételek esetén a nyíró igénybevétel analógiáját használhatjuk (2.109, 2.110. képletek).

A táblázatban felsorolt ábrák példák, amelyek a görbék alakját hivatottak megállapítani és nem az igénybevételek előjelét. Így például ahol a rúd egy szakaszán nincs terhelés és ott az állandó nyíró igénybevételt negatívnak kapjuk, ott a hajlító igénybevételt egy emelkedő egyenes szakasszal kell ábrázolnunk. Ez a szakasz lehet az M_z diagram alapvonala felett vagy alatt, vagy pedig metszheti azt, de mindig emelkedik, ami csökkenő hajlító igénybevételt jelent.

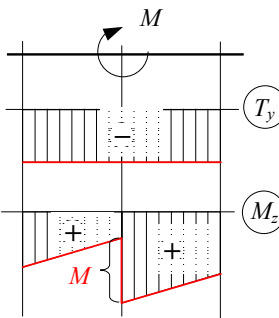
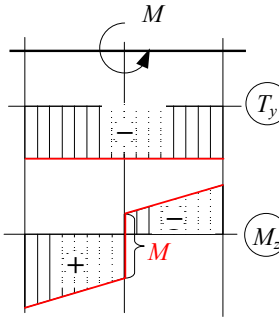
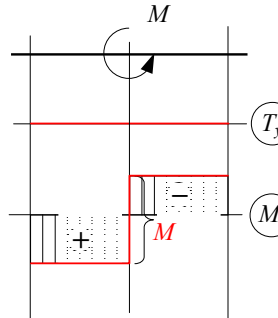
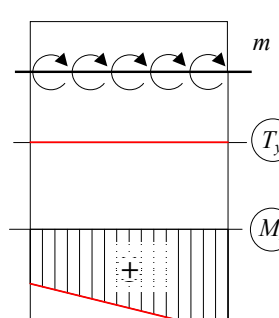
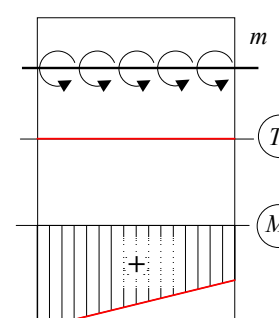
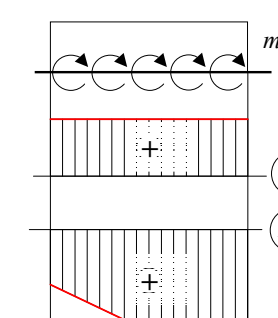
2.1. táblázat. A terület-módszer alapvető összefüggései

A terhelés típusa	Hatása a nyíró igénybevételre	Hatása a hajlító igénybevételre
<p>Nincs terhelés egy adott szakaszon</p> <p>– ha $T_y < 0$, akkor $M_z(x)$ egy emelkedő egyenes szakasz;</p>  <p><i>Megj.:</i> a nyomaték lehet pozitív, negatív, előjelet válthat</p>	<p>T_y nem változik az adott szakaszon</p> <p>– ha $T_y = 0$, akkor $M_z(x) = \text{áll.}$ egy vízszintes egyenes szakasz;</p>  <p><i>Megj.:</i> a nyomaték lehet pozitív, negatív vagy zérus</p>	<p>M_z lineárisan változik</p> <p>– ha $T_y > 0$, akkor $M_z(x)$ egy ereszkedő egyenes szakasz.</p>  <p><i>Megj.:</i> a nyomaték lehet pozitív, negatív, előjelet válthat</p>
<p>Koncentrált erő egy adott pontban</p> <p>– ha $F > 0$, akkor T_y csökken; – ha $T_y > 0$, akkor M_z meredeksége csökken, ellenben növekszik;</p>  <p><i>Megj.:</i> a nyíró igénybevétel diagramjában megjelenő ugrás nagysága és iránya a koncentrált erő nagyságával és irányával azonos.</p>	<p>T_y az adott pontban ugrás-szerűen változik</p> <p>– ha $F < 0$, akkor T_y növekszik; – ha $T_y > 0$, akkor M_z meredeksége növekszik, ellenben csökken.</p>  <p><i>Megj.:</i> a hajlító igénybevétel előjele nincs közvetlen kapcsolatban a nyíró igénybevételével.</p>	<p>Az adott pontban megváltozik az M_z grafikon meredeksége</p> <p>– ha T_y előjelet vált, akkor M_z trendje megváltozik;</p>  <p><i>Megj.:</i> ahol a nyíró igénybevétel diagramja előjelet vált, ott a hajlító igénybevétel diagramján egy szélsőérték (konkáv vagy konvex szöglet) van.</p>

2.1. táblázat (folytatás). A terület-módszer alapvető összefüggései

A terhelés típusa	Hatása a nyíró igénybevételre	Hatása a hajlító igénybevételre
<p>Egyenletesen megoszló erő egy adott szakaszon</p> <p>- ha $p > 0$, akkor T_y csökken, M_z domború;</p>  <p><i>Megj.:</i> a hajlító igénybevétel előjele nincs közvetlen kapcsolatban a nyíró igénybevételével, sem a terhelésével.</p>	<p>T_y lineárisan változik</p> <p>- ha $p < 0$, akkor T_y növekszik, M_z homorú;</p> 	<p>M_z másodfokú parabola szerint változik</p> <p>- ha $T_y > 0$, akkor M_z növekszik; - ha $T_y < 0$, akkor M_z csökken; - ahol $T_y = 0$, ott M_z-nek szélsőértéke van</p> 
<p>Lineárisan megoszló erő egy adott szakaszon</p> <p>- ahol $p(x) > 0$, ott T_y csökken és M_z domború;</p>  <p><i>Megj.:</i> a hajlító igénybevétel előjele nincs közvetlen kapcsolatban a nyíró igénybevételével, sem a terhelésével.</p>	<p>T_y másodfokú parabola szerint változik</p> <p>- ahol $p(x) < 0$, ott T_y növekszik és M_z homorú;</p> 	<p>M_z harmadfokú parabola szerint változik</p> <p>- ahol $p(x) = 0$, ott T_y-nak szélsőértéke, M_z-nek pedig inflexióspontja van;</p> 

2.1. táblázat (folytatás). A terület-módszer alapvető összefüggései

A terhelés típusa	Hatása a nyíró igénybevételre	Hatása a hajlító igénybevételre
<p>Koncentrált nyomaték egy adott pontban</p> <p>- ha $M > 0$, akkor M_z növekszik;</p>  <p>Megj.: a hajlító igénybevétel előjele nincs közvetlen kapcsolatban a nyíró igénybevételével.</p>	<p>Nincs hatása a nyíró igénybevételre</p> <p>- ha $M < 0$, akkor M_z csökken.</p> 	<p>M_z az adott pontban ugrás-szerűen változik</p> 
<p>Egyenletesen megoszló nyomaték egy adott szakaszon</p> <p>- ha $m > 0$ és $T_y = 0$, akkor M_z növekszik;</p>  <p>Megj.: a hajlító igénybevétel előjele nincs közvetlen kapcsolatban a nyíró igénybevételével sem és a megoszló nyomaték előjelével sem.</p>	<p>Nincs hatása a nyíró igénybevételre</p> <p>- ha $m < 0$ és $T_y = 0$, akkor M_z csökken;</p> 	<p>M_z lineárisan változik</p> <p>- M_z változása T_y-tól is függ, a 2.111. képlet értelmében.</p> 

Tekintsünk néhány példát.

2.21. példa. Az egyenletesen megoszló erővel részben terhelt kéttámaszú tartó igénybevételei
A 2.33. ábrán a 2.4. feladatban szereplő kéttámaszú tartó látható. Ennek terhelése egyenletesen oszlik meg a rúd hosszának egy részén, a CB szakaszon, az AC szakasz pedig terheletlen.

A terület-módszer alapelvei szerint az A pontban a nyíró igénybevételünk hirtelen felugrik és annak az AC szakaszon egy pozitív és állandó értéke lesz, amelynek nagysága az A pontban kiszámított függőleges reakcióerő nagyságával azonos. Az igénybevétel ábrája az AB szakaszon

tehát egy vízszintes vonal lesz. A CB szakaszon pedig a nyíró igénybevétel az egyenletesen megoszló terhelés miatt lineárisan fog csökkenni egy negatív értékig, amelynek nagysága a B pontban kiszámított reakcióerő nagyságával azonos (az előjelek a 2.3. ábrán bemutatott egyezményekből erednek), a diagram pedig egy hirtelen ugrással fog zárulni. A CB szakaszon az igénybevétel ábrája egy ferde ereszkedő egyenes lesz. A C pontban a nyíró igénybevétel függvénye és diagramja folytonos (tehát ott nincs ugrás), hiszen ott nincs koncentrált erő, a CB szakaszon pedig valahol kell legyen egy olyan pont, ahol a diagram metszi a tengelyt, vagyis ahol nincs nyíró igénybevétel.

A hajlító igénybevétel diagramja az A pontban zérus értékkel indul, mivel ott nincs koncentrált hajlítónyomaték. Az AB szakaszon a nyíró igénybevétel állandó és pozitív, tehát a hajlító igénybevétel lineárisan növekszik, amely az ábrán egy ereszkedő egyenes szakaszt eredményez (a hajlító igénybevétel ábráján a pozitív értékek a tengely alatt vannak, a növekedés iránya tehát lefele mutat). A CB szakaszon a nyíró igénybevétel lineárisan változik, a hajlító igénybevétel ábrája tehát egy másodfokú parabola-ív kell legyen. Ennek a megrajzolásához figyelembe vesszük a következő támpontokat:

- a C pontban a diagram folytonos kell legyen, hiszen ott nincs koncentrált hajlítónyomaték, ami ugrást okozna;
- a C pontban a diagram sima kell legyen, vagyis a ponttól jobbra és balra fekvő szakaszoknak közös érintőjük kell legyen, mert a nyíró igénybevétel diagramja ott folytonos. $T_y(x)$ ugyanis $M_z(x)$ deriváltja, és így $T_y(x)$ folytonossága $M_z(x)$ jobb és bal oldali deriváltjainak azonosságát eredményezi, tehát a jobbról és a balról húzott érintők meredeksége azonos (ez egyébként akkor is igaz, ha egy koncentrált nyomaték miatt az adott pontban $M_z(x)$ nem folytonos);
- a parabolának csúcsa van abban a pontban, ahol a nyíró igénybevétel zérus;
- a másodfokú parabola szimmetrikus a csúcson keresztülmenő függőleges egyenesre nézve;
- a parabola homorú, \cup alakú, mert a megoszló terhelés lefele mutat (itt a nyomatéknak maximuma van);
- a parabolaív a B pontban zérus értékkel záródik (mert ott sincs koncentrált hajlítónyomaték).

Mindezen észrevételekkel, bármiféle egyéb számítás nélkül megszerkeszthetjük tehát a 2.33. ábrán látható igénybevételi diagramokat, amelyek teljességéhez azonban szükséges a hajlító igénybevétel maximumának a meghatározása és annak lokalizálása.

A maximum helyét, amennyiben nincs szükség az igénybevételi függvények analitikus megállapítására, mértani összefüggések alapján is megállapíthatjuk: a CB szakaszon a $T_y(x)$ diagram egy, az x tengelyt metsző ferde egyenes, amely két derékszögű háromszöget határoz meg. E két derékszögű háromszög hasonló, hiszen egy-egy szögük (amely nem derékszög) csúcshög. A háromszögek oldalainak

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{c}{d} \quad (2.113)$$

arányából, ahol $d = b - c$, megkapjuk a maximum C ponttól mért távolságát:

$$c = b \cdot \frac{V_A}{V_A + V_B}. \quad (2.114)$$

A hajlító igénybevétel maximumát az e ponttól jobbra vagy balra fekvő terhelés nyomatékként kapjuk, akképpen, ahogy az előző példákban a papírlap szélére vonatkoztatott nyomatékokat kaptuk. Az eddigi példákban mindig a tekintett ponttól balra fekvő terheléssel

számoltunk, a papírlapot balról jobbra húztuk végig az ábrán. Azonban ha e ponttól jobbra kevesebb erő és nyomaték hat, mint annak a bal oldalán, akkor egyszerűbb a jobb oldalon fekvő terheléssel számolnunk, de ne feledjük, hogy ezen az oldalon az óramutató járásával ellentétes irányban forgató nyomaték pozitív. Az oldalak tetszőleges megválasztását az teszi lehetővé, hogy az egyensúlyban levő rúd bármely pontjára nézve a teljes terhelés eredő nyomatéka zérus: a valamely oldalon számított nyomatékot a másik oldalon számítható, az előzőtől csak előjelben különböző nyomaték egyensúlyozza ki.

A példánkban végső soron mindegy, hogy melyik oldalon számítunk, a bal oldalon ható erőkkel például:

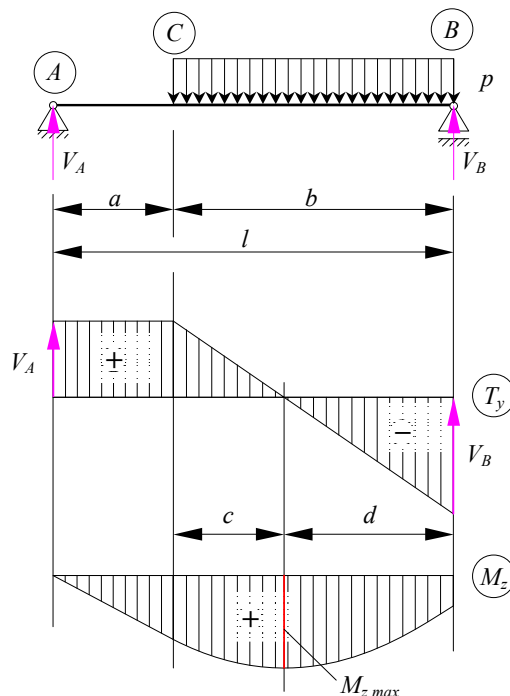
$$M_{z_{max}} = V_A \cdot (a + c) - \frac{p \cdot c^2}{2}. \quad (2.115)$$

Ide be kell helyettesítenünk c -t a 2.114-es képlet szerint, amely a 2.4. feladatban kiszámolt, a 2.31. és a 2.32. képletekkel megadott reakcióerőkkel:

$$c = b \cdot \frac{V_A}{V_A + V_B} = b \cdot \frac{\frac{p \cdot b}{l} \cdot \frac{b}{2}}{\frac{p \cdot b}{l} \cdot \frac{b}{2} + \frac{p \cdot b}{l} \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right)} = \frac{b^2}{2 \cdot l}, \quad (2.116)$$

ahol $a + b = l$; valamint a V_A reakcióerőt is. Ezekkel a hajlító igénybevétel maximuma:

$$M_{z_{max}} = \frac{p \cdot b}{l} \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(a + \frac{b^2}{2 \cdot l}\right) - \frac{p}{2} \cdot \left(\frac{b^2}{2 \cdot l}\right)^2 = \frac{p \cdot b^2}{8 \cdot l^2} \cdot (4 \cdot a \cdot l + b^2). \quad (2.117)$$



2.33. ábra. Egyenletesen megoszló erővel részben terhelt kéttámaszú tartó igénybevételei

Bizonyos esetekben szükségünk lehet az igénybevételi függvényekre is. Ha az x tengely origóját az A pontban vesszük fel, akkor az analitikus eljárással a következő függvényekhez jutunk:

$$AC, x \in [0, a]: \begin{cases} T_y(x) = V_A = \frac{p \cdot b^2}{2 \cdot l} \\ M_z(x) = V_A \cdot x = \frac{p \cdot b^2}{2 \cdot l} \cdot x, \end{cases} \quad (2.118)$$

$$CB, x \in [a, l]: \begin{cases} T_y(x) = V_A - (x - a) \cdot p = p \cdot \left(\frac{b^2}{2 \cdot l} + a \right) - p \cdot x \\ M_z(x) = V_A \cdot x - p \cdot \frac{(x - a)^2}{2} = -\frac{p \cdot a^2}{2} + p \cdot \left(\frac{b^2}{2 \cdot l} + a \right) \cdot x - \frac{p}{2} \cdot x^2. \end{cases} \quad (2.119)$$

Ellenőrzésképpen kiszámíthatjuk a nyíró és a hajlító igénybevétel értékeit a C pontban (mindkét függvény folytonos, tehát ugyanazokat az értékeket kell kapjuk):

$$T_y^{AC}(x = a) = T_y^{CB}(x = a) = \frac{p \cdot b^2}{2 \cdot l}, \quad (2.120)$$

$$M_z^{AC}(x = a) = M_z^{CB}(x = a) = \frac{p \cdot a \cdot b^2}{2 \cdot l}, \quad (2.121)$$

valamint a végpontokban is:

$$T_{yA} = T_y^{AC}(x = 0) = V_A = \frac{p \cdot b^2}{2 \cdot l}, \quad T_{yB} = T_y^{CB}(x = l) = -V_B = -\frac{p \cdot (2 \cdot ab + b^2)}{2 \cdot l}, \quad (2.122)$$

$$M_{zA} = M_z^{AC}(x = 0) = 0, \quad M_{zB} = M_z^{CB}(x = l) = 0. \quad (2.123)$$

Amennyiben az analitikus eljárást használjuk, a hajlító igénybevétel maximumának lokalizálásához a 2.119. első képletével megoldjuk a $T_y(x) = 0$ egyenletet, ahonnan az

$$x = a + \frac{b^2}{2 \cdot l} \quad (2.124)$$

koordinátához jutunk, majd ezt behelyettesítjük a 2.119. második képletébe és így a 2.117. maximumot kapjuk.

2.22. példa. Az egyenletesen megoszló erővel részben terhelt kéttámaszú konzolos tartó igénybevételei

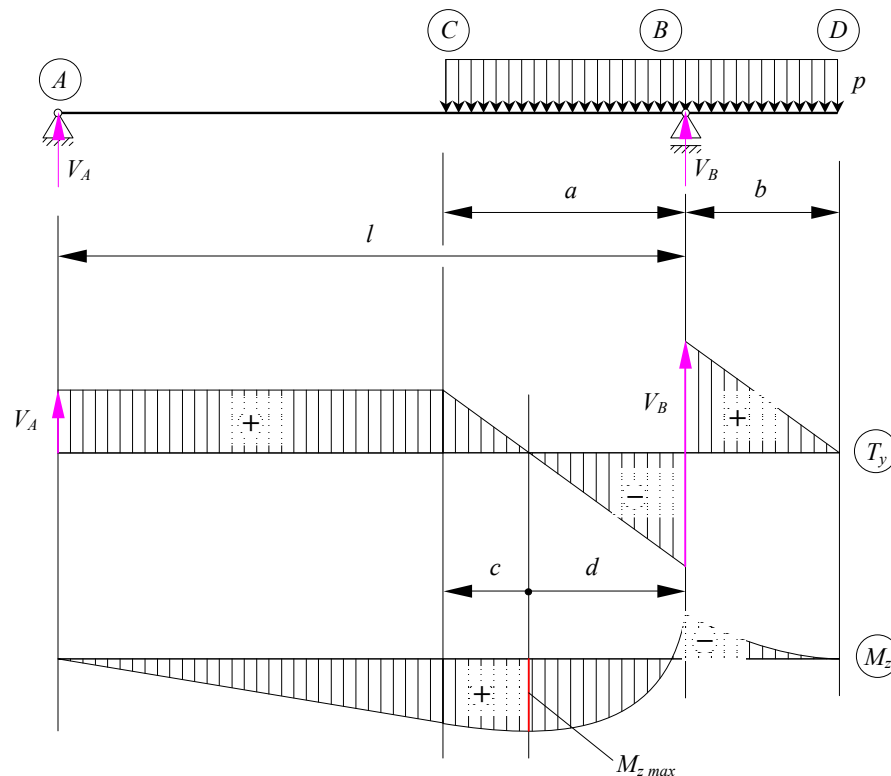
A 2.34. ábrán a 2.5. feladatban szereplő tartó igénybevételi diagramjait látjuk, az $a > b$ esetre. A terület-módszert az előző feladathoz hasonlóan alkalmazzuk: az egyetlen lényeges különbség az, hogy az egyszerű támasz nem a rúd végpontjában van. Ennek következtében a reakcióerő támadáspontja eltolódik és ebben a pontban (B) a nyíró igénybevétel diagramján egy ugrás lesz. E pont környezetében, annak jobb és bal oldalán, a megoszló terhelés intenzitása nem változik (p), tehát a $T_y(x)$ függvény meredeksége az ugrás ellenére sem fog megváltozni. Példánkban a CB és a BD szakaszokon a függvény ábrázolása két párhuzamos egyenest eredményez. A rúd szabad végén, a D pontban, nincs koncentrált terhelés, tehát a nyíró igénybevétel ott zérus, a diagram pedig a tengelyen záródik.

A nyíró igénybevételben történő ugrás a hajlító igénybevételre nincs kihatással, az $M_z(x)$ függvény a B pontban folytonos lesz, de mivel ott a nyíró igénybevétel értéke ugrás-szerűen változik, a függvény nem lesz sima: a CB és a BD szakaszokon a hajlító igénybevétel diagramját két, egymással bizonyos szögben illeszkedő másodfokú parabolaívből állítjuk össze. A parabola csúcsa ott van, ahol a nyíró igénybevétel zérus. Mivel $V_B > V_A$, van egy ilyen pont a CB szakaszon, a másik ilyen hely pedig a D pontban található. Az előbbi lokalizálásához az előbbi feladatban bemutatott, a háromszögek hasonlóságán alapuló eljárást alkalmazhatjuk és a most alkalmazott jelölésekkel ($d = a - c$) a következő képlethez jutunk:

$$c = a \cdot \frac{V_A}{V_A + (V_B - p \cdot b)}. \quad (2.125)$$

A nevezőben a $p \cdot b$ szorzat a B pont jobb oldalán ható nyíró igénybevételt (a diagram tengely fölötti részét) jelenti, a $V_B - p \cdot b$ különbség pedig a B pont bal oldalán ható nyíró igénybevétellel egyenlő. Ezeket a mennyiségeket, akárcsak a hajlító igénybevétel szélső értékét, az adott pontra felírt egyensúlyi egyenletekből lehet meghatározni.

Mindkét parabolaív homorú (\cup alakú): ezeket csak úgy tudjuk összekötni, ha feltételezzük, hogy a CB szakaszon $M_z(x)$ előjelet vált és a B pontban az negatív értékkel rendelkezik. Az egyszerű támasz helyén a rúdban tehát hajlító igénybevétel jelentkezik, annak dacára, hogy maga a támasz nem vesz át hajlító-nyomatékot. A negatív előjel arra utal, hogy a terhelés alatt meghajló rúd domború oldala a felső lesz.



2.34. ábra. Egyenletesen megoszló erővel részben terhelt kéttámaszú konzolos tartó igénybevételei

Az ábra csak akkor lesz teljes, ha meghatározzuk a hajlító igénybevétel értékét a B és a C pontokban is. Megtörténhet, hogy a legnagyobb igénybevétel a támasznál, a B pontban jelenik meg. Bizonyos számítások elvégzését tehát most sem mellőzhetjük.

Az igénybevételi ábrák analitikus módszerrel való megállapítása a szokásos módon történik.

A 2.5. feladatban meghatározott $V_A = \frac{p}{l} \cdot \left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} \right)$ és $V_B = \frac{p}{l} \cdot \left(a \cdot l - \frac{a^2}{2} + b \cdot l + \frac{b^2}{2} \right)$ reakcióerőkkel:

$$AC, x \in [0, l-a]: \begin{cases} T_y(x) = V_A = \frac{p}{l} \cdot \left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} \right) \\ M_z(x) = V_A \cdot x = \frac{p}{l} \cdot \left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} \right) \cdot x, \end{cases} \quad (2.126)$$

$$CB, x \in [l-a, l]: \begin{cases} T_y(x) = V_A - p \cdot (x-l+a) = \frac{p}{l} \cdot \left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} + l^2 - a \cdot l \right) - p \cdot x \\ M_z(x) = V_A \cdot x - p \cdot \frac{(x-l+a)^2}{2} = \\ = -\frac{p}{2} \cdot (l-a)^2 + \frac{p}{l} \cdot \left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} + l^2 - a \cdot l \right) \cdot x - \frac{p}{2} \cdot x^2, \end{cases} \quad (2.127)$$

$$BD, x \in [l, l+b]: \begin{cases} T_y(x) = V_A - p \cdot (x-l+a) + V_B = p \cdot (b+l) - p \cdot x \\ M_z(x) = V_A \cdot x - p \cdot \frac{(x-l+a)^2}{2} + V_B \cdot (x-l) = \\ = -\frac{p}{2} \cdot (l+b)^2 + p \cdot (l+b) \cdot x - \frac{p}{2} \cdot x^2. \end{cases} \quad (2.128)$$

A fenti képletekkel, a nyíró igénybevételnek az intervallumok végén kiszámolt értékei:

$$\begin{aligned} T_{yA} &= T_y^{AC}(x=0) = \frac{p}{l} \cdot \left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} \right) \\ T_{yC}^{bal} &= T_y^{AC}(x=l-a) = \frac{p}{l} \cdot \left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} \right) \\ T_{yC}^{jobb} &= T_y^{CB}(x=l-a) = \frac{p}{l} \cdot \left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} \right) \\ T_{yB}^{bal} &= T_y^{CB}(x=l) = \frac{p}{l} \cdot \left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} - a \cdot l \right) \\ T_{yB}^{jobb} &= T_y^{BD}(x=l) = p \cdot b \\ T_{yD} &= T_y^{BD}(x=l+b) = 0. \end{aligned} \quad (2.129)$$

Észrevehetjük, hogy a C pontban a jobb és a bal oldali értékek azonosak (a függvény ott folytonos), B pontban pedig a jobb és a bal oldali értékek közötti különbség a V_B reakcióerővel egyenlő. A szabad végén nincs nyíró igénybevétel (ott nincs koncentrált erő).

A hajlító igénybevétel értékeire a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned}
 M_{zA} &= M_z^{AC}(x=0) = 0 \\
 M_{zC}^{bal} &= M_z^{AC}(x=l-a) = \frac{p}{l} \cdot \left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} \right) \cdot (l-a) \\
 M_{zC}^{jobb} &= M_z^{CB}(x=l-a) = \frac{p}{l} \cdot \left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} \right) \cdot (l-a) \\
 M_{zB}^{bal} &= M_z^{CB}(x=l) = -\frac{p \cdot b^2}{2} \\
 M_{zB}^{jobb} &= M_z^{BD}(x=l) = -\frac{p \cdot b^2}{2} \\
 M_{zD} &= M_z^{BD}(x=l+b) = 0.
 \end{aligned} \tag{2.130}$$

A hajlító igénybevétel tehát végig folytonos és a két végpontban zéró (ott nincs koncentrált nyomaték). A BC szakaszon maximuma van, a $T_y^{BC} = 0$ helyen, mely pont a koordinátája az egyenlet megoldásával

$$x = \frac{a^2}{2 \cdot l} - \frac{b^2}{2 \cdot l} + l - a. \tag{2.131}$$

Ez a mennyiség azonos a $l-a+c$ -vel, ahol c a 2.125. képlettel kiszámolt távolság. Ezt behelyettesítvén M_z^{CB} egyenletébe a keresett maximum:

$$M_{zmax} = \frac{p}{l} \cdot \left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} \right) \cdot \left(l - a + \frac{a^2}{4 \cdot l} - \frac{b^2}{4 \cdot l} \right). \tag{2.132}$$

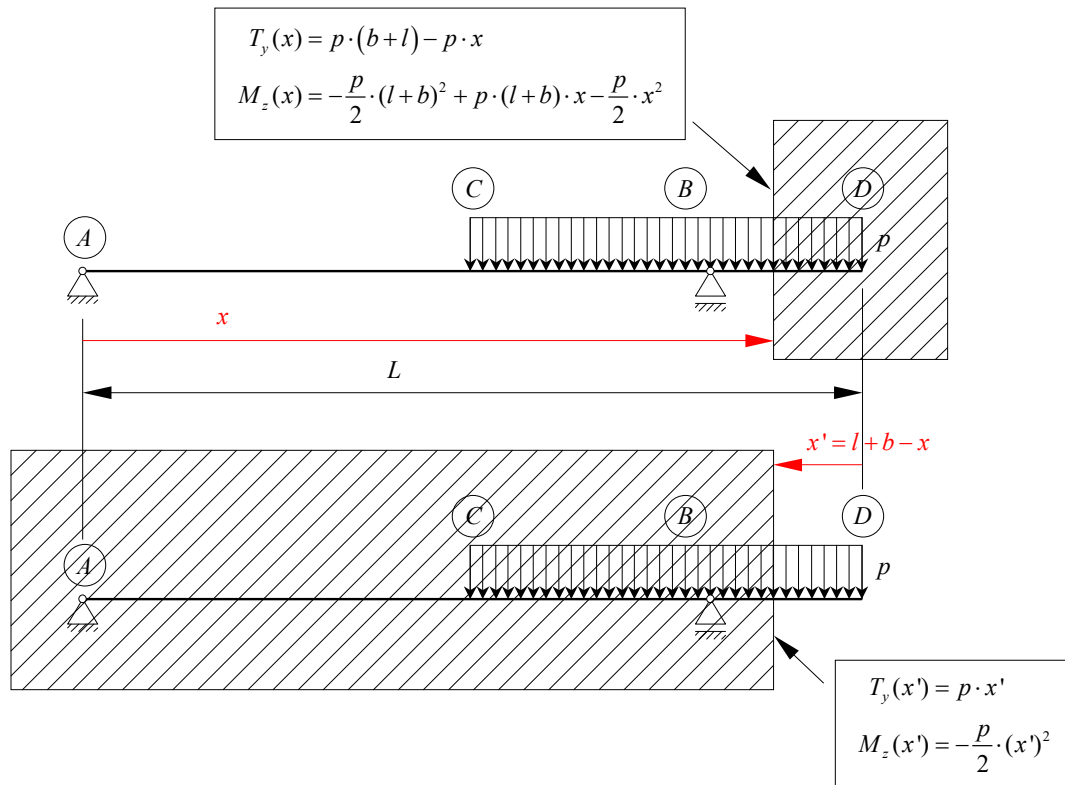
Mivel $a > b$, ez az érték biztos nagyobb a C pontban kiszámítottnál, azonban konkrét adatok hiányában azt nem lehet megállapítani, hogy meghaladja-e a B pontban kiszámított igénybevétel abszolút értékét vagy sem.

A B pontban a T_y nyíró és az M_z hajlító igénybevételre kapott képletek: $T_{yB}^{jobb} = p \cdot b$, illetve $M_{zB}^{jobb} = -\frac{p \cdot b^2}{2}$, azt sugallják, hogy a papírlapot a jobb oldal felől a bal oldal fele is húzhattuk volna; ekkor ezeket a mennyiségeket kevesebb számítással is felírhattuk volna. Bonyolultabb terhelés esetében ezt bátran használhatjuk, mert jelentősen egyszerűsítheti a számításokat. Amennyiben az analitikus eljárás során is a jobb oldali rész egyensúlyából indulunk ki, figyelembe kell veyük azt, hogy a koordináta-rendszerünk origója a bal oldali végpontban marad! Amennyiben az x' koordinátát ekkor a jobb oldali végpont felől mérjük, akkor az így kapott kifejezéseket az $x' = L - x$ koordináta-transzformációval tudjuk átírni az eredeti koordináta-rendszerünkre. E transzformációban L a két origó (a két végpont) közötti távolság (2.35. ábra).

2.23. példa. Trapéz szerint megoszló erővel terhelt kéttámaszú tartó igénybevételei

A 2.36. ábrán a 2.7. feladatban szereplő tartó igénybevételeit láthatjuk. A reakcióerők kiszámításakor a terhelést összetettnek tekintettük: azt egy egyenletesen megoszló erőre és egy háromszög szerint megoszló erőre bontottuk. Az igénybevételi ábrák megrajzolásakor is megtehetjük ezt az összetevőkre való bontást, a 2.36. ábra diagramjait értelmezhetjük az egyenletesen megoszló erőre a 2.19. feladatban, illetve a háromszög szerint megoszló erőre a 2.20.

feladatban megrajzolt diagramok összegeként. Ugyanezt az összegzést elvégezhetjük az analitikusan kiszámolt képletekkel is.



2.35. ábra. Koordináta-rendszerek közötti megfeleltetés

A diagramok megrajzolását megoldhatjuk a terhelés felbontása nélkül is. Mivel a terhelés lineárisan oszlik meg, a területmódszerben a nyíró igénybevétel diagramját egy másodfokú parabola-ívként kell ábrázolnunk. A terhelés mindvégig pozitív (sehol sem nulla), tehát a parabola-ívnek a rúd hosszán nincs szélsőérték-pontja. A hajlító igénybevétel ábrája egy harmadfokú parabola-ív kell legyen, amelynek a maximuma ott van, ahol a nyíró igénybevétel másodfokú parabolája metszi a tengelyt. E maximumnak a helyét csak a $T_y(x) = 0$ egyenlet megoldásával tudjuk meghatározni, ezúttal tehát a nyíró igénybevételt leíró függvényt a terület-módszerben is meg kell állapítani, mert nem alkalmazhatunk egyszerű geometriai összefüggéseket.

Ha az analitikus módszert a terhelés felbontása nélkül szeretnénk használni, akkor a trapéz szerint megoszló terhelésre a 2.7. feladatban megállapított képleteket kell használnunk:

→ egy adott x koordináta esetén meg kell állapítanunk a terhelés nagyságát, a 2.44. képlettel (példánkban $x_1 = 0$, $x_2 = x$):

$$p(x) = p_1 + x \cdot \frac{p_2 - p_1}{l}; \quad (2.133)$$

→ meg kell határozzuk a terhelés-diagram az e ponttól balra fekvő részének eredőjét (területét). Erre a 2.47. képletéhez hasonlóan a következő összefüggést állapíthatjuk meg:

$$R(x) = \frac{(p_1 + p(x)) \cdot x}{2}; \quad (2.134)$$

→ meg kell határozzuk e terhelés-diagram rész eredőjének támadáspontját (geometriai középpontjának helyzetét). A 2.54. képlet felhasználásával:

$$x_G(x) = \frac{x}{3} \cdot \frac{p_1 + 2 \cdot p(x)}{p_1 + p(x)}; \quad (2.135)$$

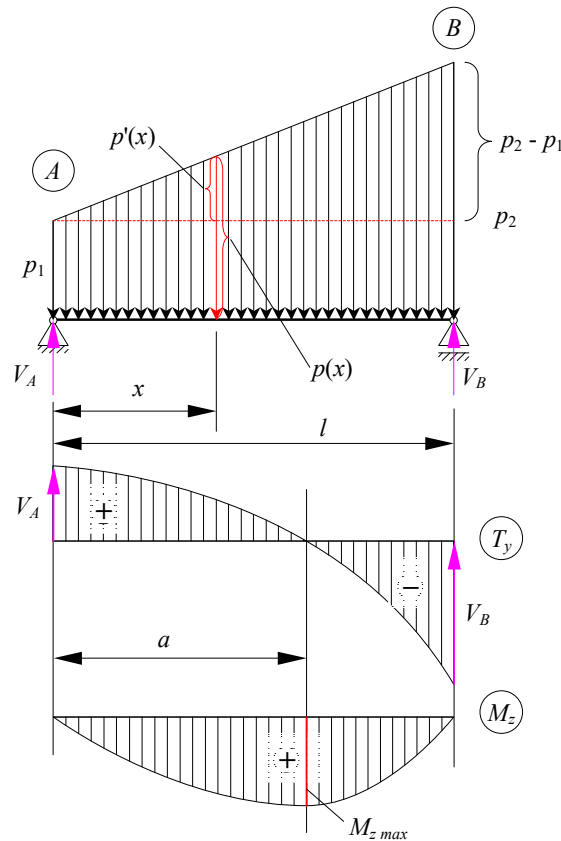
→ a nyíró igénybevétel ekkor:

$$T_y(x) = V_A - R(x), \quad (2.136)$$

→ a hajlító igénybevétel pedig:

$$M_z(x) = V_A \cdot x - R(x) \cdot x_G(x). \quad (2.137)$$

A képletekben szereplő reakcióerők $V_A = \frac{(2 \cdot p_1 + p_2) \cdot l}{6}$ és $V_B = \frac{(p_1 + 2 \cdot p_2) \cdot l}{6}$, amelyeket a 2.7. feladatban állapítottunk meg.



2.36. ábra. Trapéz szerint megoszló erővel terhelt kéttámaszú tartó igénybevételei

Talán egyszerűbbek a számítások, ha a terhelést a 2.36. ábrán látható módon felbontjuk. Ekkor:

$$p'(x) = x \cdot \frac{p_2 - p_1}{l}; \quad (2.138)$$

$$AB, x \in [0, l]: \begin{cases} T_y(x) = V_A - p_1 \cdot x - \frac{p'(x)}{2} \cdot x = \\ \quad = \frac{2 \cdot p_1 + p_2}{6} \cdot l - p_1 \cdot x - \frac{p_2 - p_1}{2 \cdot l} \cdot x^2 \\ M_z(x) = V_A \cdot x - \frac{p_1}{2} \cdot x^2 - \frac{p'(x)}{6} \cdot x^2 = \\ \quad = \frac{2 \cdot p_1 + p_2}{6} \cdot l \cdot x - \frac{p_1}{2} \cdot x^2 - \frac{p_2 - p_1}{6 \cdot l} \cdot x^3. \end{cases} \quad (2.139)$$

Ellenőrzésképpen, a nyíró igénybevételnek az intervallumok végén kiszámolt értékei a reakcióerőkkel megegyeznek:

$$\begin{aligned} T_{yA} &= T_y^{AB}(x=0) = \frac{(2 \cdot p_1 + p_2) \cdot l}{6} = V_A \\ T_{yB} &= T_y^{AB}(x=l) = -\frac{(p_1 + 2 \cdot p_2) \cdot l}{6} = -V_B, \end{aligned} \quad (2.140)$$

a hajlító igénybevétel pedig e pontokban nulla:

$$\begin{aligned} M_{zA} &= M_z^{AB}(x=0) = 0 \\ M_{zB} &= M_z^{AB}(x=l) = 0. \end{aligned} \quad (2.141)$$

A $T_y^{AC} = 0$ másodfokú egyenlet megoldásával a maximum koordinátájára a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-(-p_1) \pm \sqrt{(-p_1)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{p_2 - p_1}{2 \cdot l}\right) \cdot \left(\frac{2 \cdot p_1 + p_2}{6} \cdot l\right)}}{2 \cdot \left(-\frac{p_2 - p_1}{2 \cdot l}\right)} = \\ &= \frac{-p_1 \mp \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{p_1^2 + p_1 \cdot p_2 + p_2^2}}{p_2 - p_1} \cdot l. \end{aligned} \quad (2.142)$$

Mivel a negatív gyök a rúd hosszának tartományán kívül esik, a keresett mennyiség csak

$$a = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{p_1^2 + p_1 \cdot p_2 + p_2^2} - p_1}{p_2 - p_1} \cdot l \quad (2.143)$$

lehet. Észrevehetjük, hogy ha $p_1 = 0$, akkor ez a 2.20. feladatban a háromszög szerint megoszló terhelésre kapott $l/\sqrt{3}$ -as értékhez vezet. Ha pedig $p_1 \rightarrow p_2$ -re a fenti mennyiséget ábrázoljuk (a nevező miatt a $p_1 = p_2$ értéket behelyettesíteni nem lehet), vagy pedig a $p_1 = p_2 - \Delta$, $\Delta \rightarrow 0$ jelöléssel a $\lim_{\Delta \rightarrow 0} a$ határértéket kiszámoljuk, akkor a 2.19. feladatban az egyenletesen megoszló terhelésre kapott $l/2$ értéket kapjuk. A határérték kiszámítása a következőképpen történik:

$$\begin{aligned}
\lim_{p_1 \rightarrow p_2} \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{p_1^2 + p_1 \cdot p_2 + p_2^2} - p_1}{p_2 - p_1} \cdot l &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{(p_2 - \Delta)^2 + (p_2 - \Delta) \cdot p_2 + p_2^2}{3}} - p_2 + \Delta}{p_2 - p_2 + \Delta} \cdot l = \\
&= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{p_2^2 - 2 \cdot p_2 \cdot \Delta + \Delta^2 + p_2^2 - p_2 \cdot \Delta + p_2^2}{3}} - p_2 + \Delta}{\Delta} \cdot l = \\
&= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{3 \cdot p_2^2 - 3 \cdot p_2 \cdot \Delta + \Delta^2}{3}} - p_2 + \Delta}{\Delta} \cdot l = p_2 \cdot \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \frac{\Delta}{p_2} + \frac{\Delta^2}{3 \cdot p_2^2}} - 1 + \frac{\Delta}{p_2}}{\Delta} \cdot l = \\
&= p_2 \cdot \left[\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \frac{\Delta}{p_2} + \frac{\Delta^2}{3 \cdot p_2^2}} - 1}{\Delta} + \frac{\Delta}{p_2 \cdot \Delta} \right] \cdot l = p_2 \cdot \left[\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\Delta}{p_2} + \frac{\Delta^2}{3 \cdot p_2^2} - 1}{\Delta \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{\Delta}{p_2} + \frac{\Delta^2}{3 \cdot p_2^2}} + 1 \right)} + \frac{1}{p_2} \right] \cdot l = \\
&= p_2 \cdot \left[\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{p_2} + \frac{\Delta}{3 \cdot p_2^2}}{\sqrt{1 - \frac{\Delta}{p_2} + \frac{\Delta^2}{3 \cdot p_2^2}} + 1} + \frac{1}{p_2} \right] \cdot l = p_2 \cdot \left(\frac{-\frac{1}{p_2}}{\sqrt{1+1}} + \frac{1}{p_2} \right) \cdot l = \frac{l}{2}. \tag{2.144}
\end{aligned}$$

Az $M_{z_{max}}$ értékét a hajlító igénybevételt megadó 2.139. függvény adja, a 2.143. koordináta behelyettesítésével.

2.24. példa. Koncentrált ferde erővel terhelt kéttámaszú tartó igénybevételei

A 2.2. feladatban szereplő tartó igénybevételeit a rúd tengelyével α szöget bezáró F erővektor okozza. Ezt az erőt a 2.15. képletek szerint két összetevőre bontottuk fel, amelyek közül a V merőleges komponens nyíró és hajlító igénybevétel megjelenéséhez vezet, míg a rúd tengelyére eső H komponens tengely irányú (e példában nyomó) igénybevételt okoz. A terhelés tehát összetett, de az összetevők más-másfajta igénybevételek megjelenéséhez vezetnek:

$$AC, x \in [0, a): \begin{cases} N(x) = -H_A = -H = -F \cdot \cos \alpha \\ T_y(x) = V_A = V \cdot \frac{b}{l} = F \cdot \frac{b}{l} \cdot \sin \alpha \\ M_z(x) = V_A \cdot x = F \cdot \frac{b}{l} \cdot \sin \alpha \cdot x, \end{cases} \tag{2.145}$$

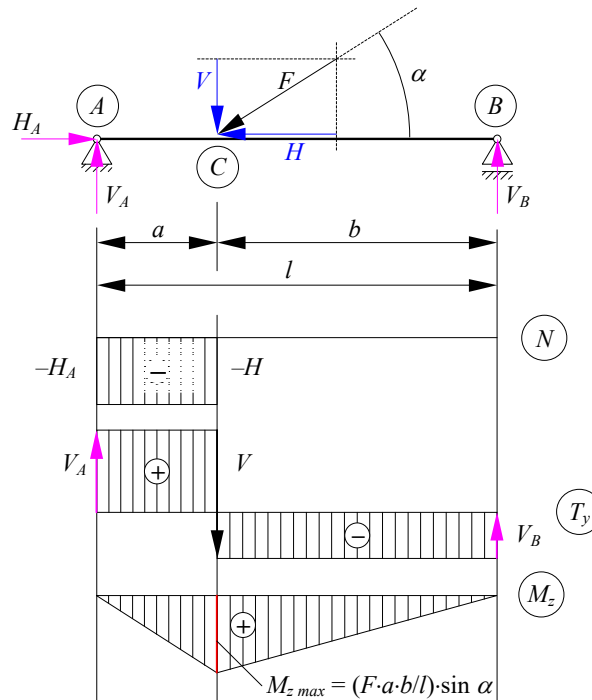
$$CB, x \in [a, l]: \begin{cases} N(x) = 0 \\ T_y(x) = V_A - V = V \cdot \frac{b}{l} - V = F \cdot \left(\frac{b}{l} - 1 \right) \cdot \sin \alpha = -F \cdot \frac{a}{l} \cdot \sin \alpha \\ M_z(x) = V_A \cdot x - V \cdot (x - a) = -F \cdot \frac{a}{l} \cdot \sin \alpha \cdot x + F \cdot a \cdot \sin \alpha. \end{cases} \tag{2.146}$$

A tengelyirányú és a nyíró igénybevételt szakaszonként konstans függvények írják le, a hajlítónyomaték diagramja pedig lineárisan változik.

Ellenőrzésképpen, a végpontokban a reakcióerőket és zérus nyomatékokat kell kapjunk, a hajlítónyomaték diagramja pedig a C pontban folytonos kell legyen:

$$\begin{aligned}
 T_{yA} &= T_y^{AC}(x=0) = V_A \\
 T_{yB} &= T_y^{CB}(x=l) = V_A - V = -V_B \\
 M_{zA} &= M_z^{AC}(x=0) = 0 \\
 M_{zB} &= M_z^{CB}(x=l) = 0 \\
 M_{zC} &= M_z^{AC}(x=a) = F \cdot \frac{a \cdot b}{l} \cdot \sin \alpha \\
 M_{zC} &= M_z^{CB}(x=a) = F \cdot a \cdot \left(1 - \frac{a}{l}\right) \cdot \sin \alpha = F \cdot \frac{a \cdot b}{l} \cdot \sin \alpha.
 \end{aligned} \tag{2.147}$$

A hajlító igénybevételnek a C pontban kiszámított értéke annak maximumát jelenti. A megrajzolt igénybevételi diagramokat a 2.37. ábrán láthatjuk.



2.37. ábra. Koncentrált ferde erővel terhelt kéttámaszú tartó igénybevételei

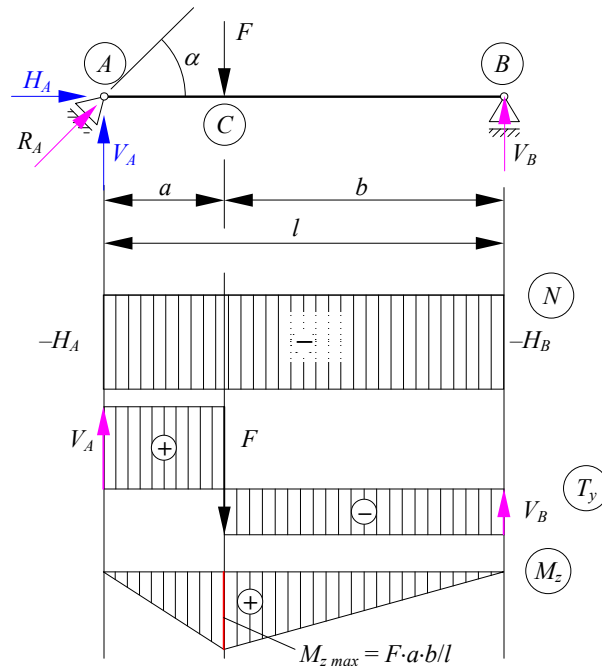
2.25. példa. Koncentrált erővel terhelt ferde támaszú tartó igénybevételei

A 2.17. feladatban a tartó bal oldali támasza a rúd tengelyével egy bizonyos α szöget zár be, s ennek következtében a tartóban fellépő R_A reakcióerő is ferdén hat a rúd tengelyére. Ezt a ferde reakcióerőt a V_A merőleges és a H_A tengelyirányú vetületeivel adtuk meg. A 2.18. feladatban ez a szög derékszög volt – ekkor $\alpha = 90^\circ$, a 2.91. képlet szerint a reakcióerő tengely irányú összetevője eltűnik. A ferde támasz tehát a rúd tengelyében megjelenő igénybevételhez vezet, és mivel ebben a

feladatban a rudat más tengelyirányú terhelés nem éri, ez az igénybevétel a két támasz között állandó intenzitású lesz:

$$AC, x \in [0, a]: \begin{cases} N(x) = -H_A = -F \cdot \frac{b}{l} \cdot \text{ctg } \alpha \\ T_y(x) = V_A = F \cdot \frac{b}{l} \\ M_z(x) = V_A \cdot x = F \cdot \frac{b}{l} \cdot x, \end{cases} \quad (2.148)$$

$$CB, x \in [a, l]: \begin{cases} N(x) = -H_A = -F \cdot \frac{b}{l} \cdot \text{ctg } \alpha \\ T_y(x) = V_A - F = F \cdot \left(\frac{b}{l} - 1 \right) = -F \cdot \frac{a}{l} \\ M_z(x) = V_A \cdot x - F \cdot (x - a) = -F \cdot \frac{a}{l} \cdot x + F \cdot a. \end{cases} \quad (2.149)$$



2.38. ábra. Koncentrált erővel terhelt ferde támaszú tartó igénybevételei

Ellenőrzésképpen:

$$\begin{aligned}
 T_{yA} &= T_y^{AC}(x=0) = V_A \\
 T_{yB} &= T_y^{CB}(x=l) = V_A - F = -V_B \\
 M_{zA} &= M_z^{AC}(x=0) = 0 \\
 M_{zB} &= M_z^{CB}(x=l) = 0 \\
 M_{zC} &= M_z^{AC}(x=a) = F \cdot \frac{a \cdot b}{l} \\
 M_{zC} &= M_z^{CB}(x=a) = F \cdot a \cdot \left(1 - \frac{a}{l}\right) = F \cdot \frac{a \cdot b}{l}.
 \end{aligned} \tag{2.150}$$

A hajlító igénybevételnek a C pontban kiszámított értéke annak maximumát jelenti. Az igénybevételi diagramok a 2.38. ábrán láthatók.

2.26. példa. *Megoszló tengelyirányú erővel terhelt kéttámaszú tartó igénybevételei*

A 2.14. feladatban a tartót csak a tengelyének irányában terheltük, ennek következtében csak a csuklóban jelent meg reakcióerő, amely szintén tengelyirányú. Ebben a rúdban tehát nyíró vagy hajlító igénybevétel nem jelenik meg.

A tengely irányú terhelés megoszló, az igénybevétel kiszámításakor a rúdra merőleges megoszló terhelés esetében alkalmazott eljárást kell használnunk: valamely pontban (keresztmetszeten) a tengely irányú igénybevételt az attól balra, vagy pedig jobbra eső tengely irányú terhelés eredője adja, az előjel-szabály figyelembe vételével. A CB szakaszon az adott x koordinátának megfelelő $p(x)$ terhelést a 2.23. feladatban bemutatott eljárás szerint határozzuk meg:

$$p(x) = p_1 + p'(x) = p_1 + (x-a) \cdot \frac{p_2 - p_1}{b}. \tag{2.151}$$

$$AC, x \in [0, a]: \begin{cases} N(x) = H_A = \frac{(p_1 + p_2) \cdot b}{2} \\ T_y(x) = 0 \\ M_z(x) = 0, \end{cases} \tag{2.152}$$

$$CB, x \in [a, l]: \begin{cases} N(x) = H_A - \frac{(p_1 + p(x)) \cdot (x-a)}{2} = \\ = \frac{(p_1 + p_2) \cdot b^2 - (p_2 - p_1) \cdot a^2 + 2 \cdot p_1 \cdot a \cdot b}{2 \cdot b} - \\ - \frac{p_1 \cdot b - (p_2 - p_1) \cdot a}{b} \cdot x - \frac{p_2 - p_1}{2 \cdot b} \cdot x^2 \\ T_y(x) = 0 \\ M_z(x) = 0. \end{cases} \tag{2.153}$$

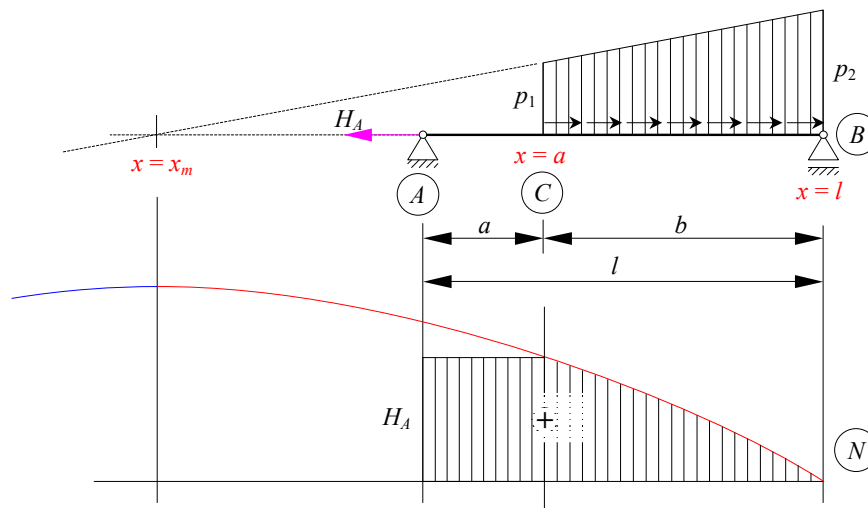
Láthatjuk, hogy a lineárisan megoszló tengely irányú terhelés a másodfokú (parabolikus) igénybevételi függvényhez vezet, a 2.109. összefüggésnek megfelelően. A parabola ábrázolásához meg kell állapítani, hogy merre van a csúcsa, vagyis a 2.153. összefüggések felhasználásával meg kell keresni az $N'(x) = 0$ egyenlet megoldását:

$$N'(x) = -\frac{p_1 \cdot b - (p_2 - p_1) \cdot a}{b} - \frac{p_2 - p_1}{b} \cdot x = 0 \Rightarrow x_m = \frac{p_2 \cdot a - p_1 \cdot l}{p_2 - p_1}. \quad (2.154)$$

Észrevehetjük, hogy ez egy a -nál kisebb mennyiség, tehát az ábrázolandó parabolaívnek a CB szakaszon nincs csúcsa. Ha a terhelés diagramját meghosszabbítanánk, akkor ez a csúcs a 2.109. összefüggés értelmében azon a helyen lenne, ahol a terhelésfüggvényt ábrázoló egyenes metszené a tengelyt (2.39. ábra) – az x_m koordinátát a háromszögek hasonlóságából is kiszámíthatjuk:

$$\frac{a - x_m}{l - x_m} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow x_m = \frac{p_2 \cdot a - p_1 \cdot l}{p_2 - p_1}. \quad (2.155)$$

A megoszló terhelés előjele miatt a parabolának maximuma van (lefele görbül). Megjegyezhetjük, hogy a tengelyre merőleges, lineárisan megoszló terhelés esetében is ugyanígy szerkeszthetjük meg az igénybevételi ábrát.



2.39. ábra. Megoszló tengelyirányú erővel terhelt kéttámaszú tartó igénybevételei

Ellenőrzésképpen, a C pontban a tengely irányú igénybevétel folytonos kell legyen, tehát a 2.153.-as relációba $x = a$ -t behelyettesítve H_A értékéhez kell jussunk, a B pontban ($x = l = a + b$) pedig a tengely irányú igénybevétel zéró kell legyen.

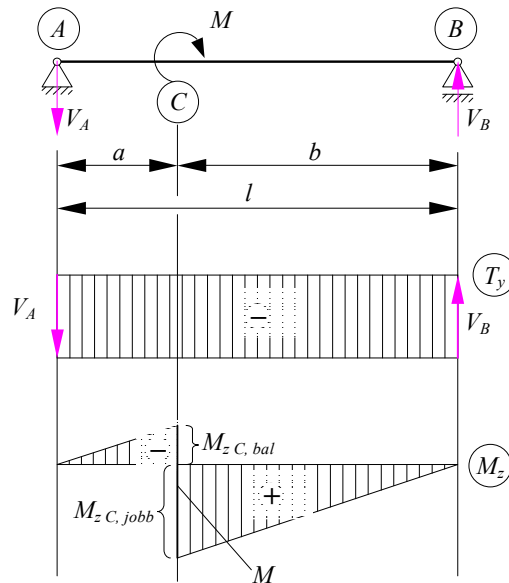
2.27. példa. Koncentrált hajlítónyomatékkal terhelt kéttámaszú tartó igénybevételei

A 2.8. feladatban a kéttámaszú tartót koncentrált nyomaték terhelte, a reakcióerők pedig a terheléssel azonos nagyságú nyomatékú, de ellentétes irányba forgató erőpárt alkottak. Emiatt a nyíró igénybevétel a rúd hossza mentén állandó lesz, a hajlító igénybevétel pedig lineárisan változik. Ez utóbbi a koncentrált nyomaték hatáspontjában ugrás-szerűen változik:

$$AC, x \in [0, a]: \begin{cases} T_y(x) = -V_A = -\frac{M}{l} \\ M_z(x) = -V_A \cdot x = -\frac{M}{l} \cdot x, \end{cases} \quad (2.156)$$

$$CB, x \in [a, l]: \begin{cases} T_y(x) = -V_A = -\frac{M}{l} \\ M_z(x) = -V_A \cdot x + M = M - \frac{M}{l} \cdot x. \end{cases} \quad (2.157)$$

Ellenőrzésképpen: a nyíró igénybevétel a B pontban ($x=l$) a reakcióerővel egyenlő kell legyen: $T_{yB} = -V_B = -M/l$, a hajlító igénybevétel ugyanott zéró.



2.40. ábra. Koncentrált hajlítónyomatékkal terhelt kéttámaszú tartó igénybevételei

Mivel a méretezésnél szükség van az igénybevételek legnagyobb értékére, a C pontban meg kell állapítsuk a hajlítónyomaték bal és jobb oldali határértékét: ebben a pontban, a koncentrált terhelés miatt, az igénybevételei ábrán egy M nagyságú ugrás van. Ezeket a határértékeket a 2.156, illetve a 2.157. képletekkel számítjuk ki, az $x = a$ koordináta behelyettesítésével:

$$M_{zC,bal} = -M \cdot \frac{a}{l} \quad (2.158)$$

$$M_{zC,jobb} = M \cdot \frac{l-a}{l} = M \cdot \frac{b}{l}.$$

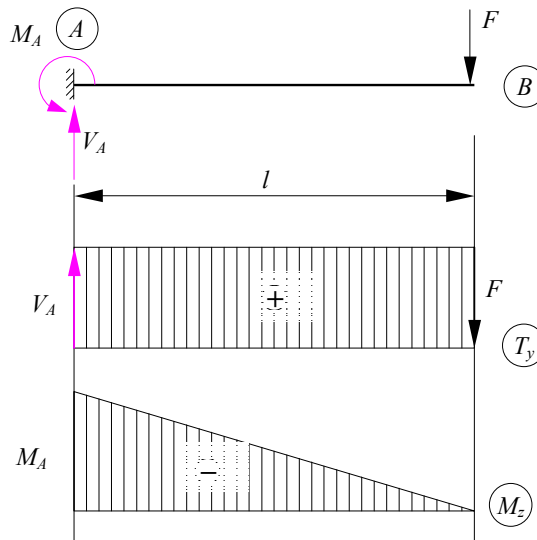
A hajlító igénybevétel maximumát a fenti két mennyiség közül a nagyobbik jelenti, a C pont helyzetének megfelelően.

2.28. példa. *Koncentrált erővel merőlegesen terhelt, egyik végén befogott tartó igénybevételei*
A befogott rúd esetében, a merev befogás pontjában a reakció mint koncentrált erő és mint koncentrált nyomaték jelenik meg (2.9. példa).

Példánkban a nyíró igénybevétel állandó, a hajlító igénybevétel pedig lineárisan változik (2.41. ábra):

$$AB, x \in [0, l]: \begin{cases} T_y(x) = V_A = F \\ M_z(x) = M_A - V_A \cdot x = F \cdot l - F \cdot x. \end{cases} \quad (2.159)$$

Ellenőrzésképpen a rúd szabad végén, a B pontban ($x = l$) a hajlító igénybevétel zéró kell legyen.



2.41. ábra. *Koncentrált erővel merőlegesen terhelt, egyik végén befogott tartó igénybevételei*

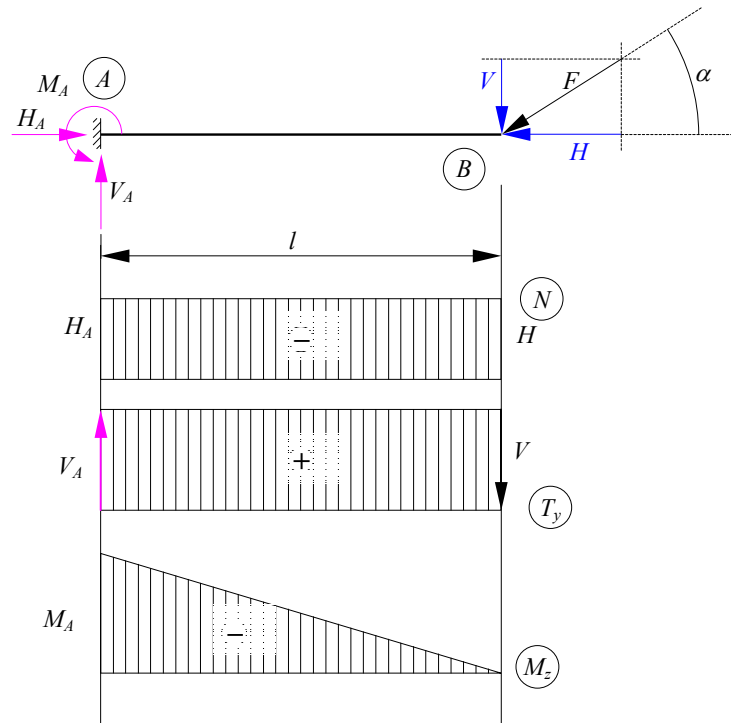
2.29. példa. *Koncentrált erővel ferdén terhelt, egyik végén befogott tartó igénybevételei*
Ebben az esetben (2.10. példa), a terhelés vízszintes összetevője miatt tengely irányú igénybevétel is keletkezik (2.42. ábra):

$$AB, x \in [0, l]: \begin{cases} N(x) = H_A = -F \cdot \cos \alpha \\ T_y(x) = V_A = F \cdot \sin \alpha \\ M_z(x) = M_A - V_A \cdot x = F \cdot \sin \alpha \cdot l - F \cdot \sin \alpha \cdot x. \end{cases} \quad (2.160)$$

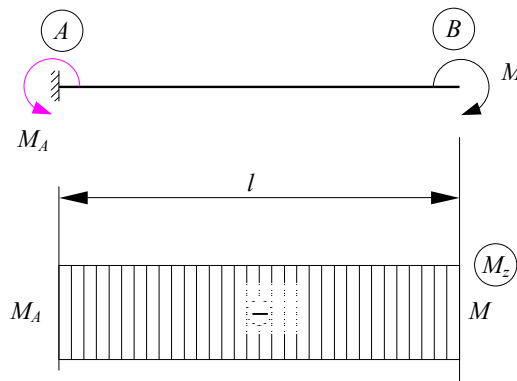
$\alpha = 90^\circ$ -ra visszakapjuk az előbbi feladat, a koncentrált erővel merőlegesen terhelt rúd esetét, míg $\alpha = 0^\circ$ -ra vagy $\alpha = 180^\circ$ -ra csak tengely irányú nyomó, illetve húzó igénybevétel lép fel, nyírás és hajlítás nélkül.

2.30. példa. *Koncentrált hajlítónyomatékkal terhelt, egyik végén befogott tartó igénybevételei*
Mivel a koncentrált nyomatékkal terhelt befogott rúdnak nincsenek reakcióerői és a kényszerben csak egy reakciónyomaték lép fel (2.11. feladat), ez csak hajlító igénybevételnek van kitéve. Ez az igénybevétel a rúd hosszán állandó és a használt előjel-egyezmény értelmében negatív (2.43. ábra):

$$AB, x \in [0, l]: \begin{cases} T_y(x) = 0 \\ M_z(x) = M_A = -M. \end{cases} \quad (2.161)$$



2.42. ábra. Koncentrált erővel ferdén terhelt, egyik végén befogott tartó igénybevételei

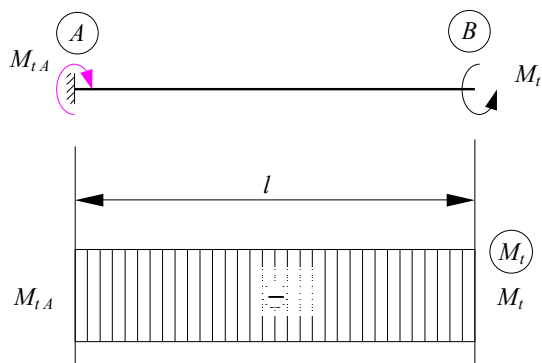


2.43. ábra. Koncentrált hajlítónyomatékkal terhelt, egyik végén befogott tartó igénybevételei

2.31. példa. Koncentrált csavarónyomatékkal terhelt, egyik végén befogott tartó igénybevételei

Akárcsak az előbbi feladatban, a terhelés tiszta igénybevételt idéz elő: a rúd (tengely) teljes hosszán egy állandó csavaró igénybevétel jelenik meg (2.12. példa, 2.44. ábra), amely a használt előjel-egyezménynek megfelelően negatív:

$$AB, x \in [0, l]: \begin{cases} T_y(x) = 0, \\ M_z(x) = 0, \\ M_t(x) = M_{tA} = -M_t. \end{cases} \quad (2.162)$$



2.44. ábra. Koncentrált csavarónyomatékkal terhelt, egyik végén befogott tartó igénybevételei

2.32. példa. Lineárisan megoszló erővel terhelt, egyik végén befogott tartó igénybevételei

A 2.13. példában a reakcióerők kiszámításánál a trapéz szerint megoszló erőt két összetevőre, egy egyenletesen és egy háromszög szerint megoszlóra bontottuk fel. Ugyanezt az eljárást használtuk az igénybevételek kiszámításakor a 2.23. példában is. Figyelembe véve azt, hogy a lineárisan változó összetevőt most kivonjuk az állandó intenzitásúból, egy adott x koordinátájú keresztmetszeten ható megoszló terhelés most a következő lesz:

$$p(x) = p_1 - p'(x) = p_1 - x \cdot \frac{p_1 - p_2}{l}. \quad (2.163)$$

Ezzel a felbontással az igénybevételeket a következőképpen kapjuk:

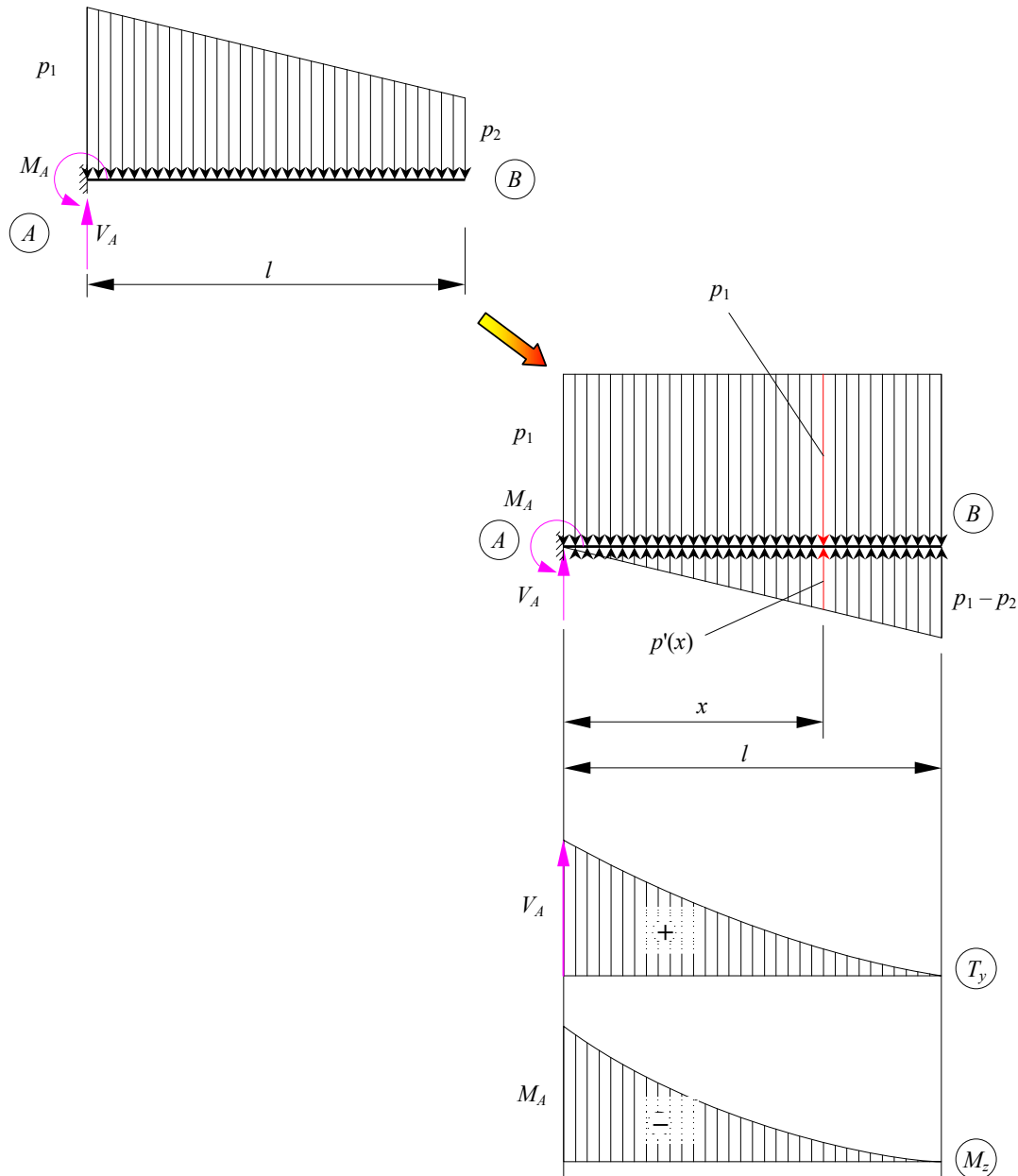
$$AB, x \in [0, l]: \begin{cases} T_y(x) = V_A - p_1 \cdot x + \frac{p'(x)}{2} \cdot x = \\ \quad = \frac{(p_1 + p_2)}{2} \cdot l - p_1 \cdot x + \frac{p_1 - p_2}{2 \cdot l} \cdot x^2 \\ M_z(x) = -M_A + V_A \cdot x - \frac{p_1}{2} \cdot x^2 + \frac{p'(x)}{6} \cdot x^2 = \\ \quad = -\frac{l^2}{6} \cdot (p_1 + 2 \cdot p_2) + \frac{(p_1 + p_2)}{2} \cdot l \cdot x - \frac{p_1}{2} \cdot x^2 + \frac{p_1 - p_2}{6 \cdot l} \cdot x^3. \end{cases} \quad (2.164)$$

Ellenőrzésképpen, a rúd szabad végén, ahol $x = l$, a nyíró igénybevétel is és a hajlító igénybevétel is nulla kell legyen.

Észrevehetjük, hogy a 2.163. képlet azonos a 2.133. relációval, amelyet a 2.23. példa lineárisan növekedő terhelésére állapítottunk meg (most a terhelés lineárisan csökken az x koordináta növekedésével). Azt is észrevehetjük, hogy a 2.164. igénybevételek képleteiben a megoszló terhelésnek megfelelő tagok szintén azonosak a 2.23. példában szereplőkkel – tehát ezeket a képleteket bármilyen lineárisan megoszló terhelésre fel lehet használni, függetlenül p_1 és p_2 értékétől és azok egymáshoz viszonyított nagyságától.

Az igénybevételi diagramok a 2.45. ábrán láthatók. A nyíró igénybevétel diagramja egy másodfokú parabolaív. Ennek a csúcsa ott lenne, ahol a meghosszabbított terhelésdiagram metszené a rúd tengelyét (tehát az ív egy bizonyos szögben metszi a tengelyt). A hajlítónyomaték diagramja viszont egy harmadfokú parabolaív, amelynek a csúcsa a B pontban van, ugyanis a nyíró igénybevétel ebben a pontban zéró (az ív itt érinti a tengelyt).

Megállapíthatjuk, hogy mindkét igénybevételnek a mereven befogott végen van a legnagyobb értéke.



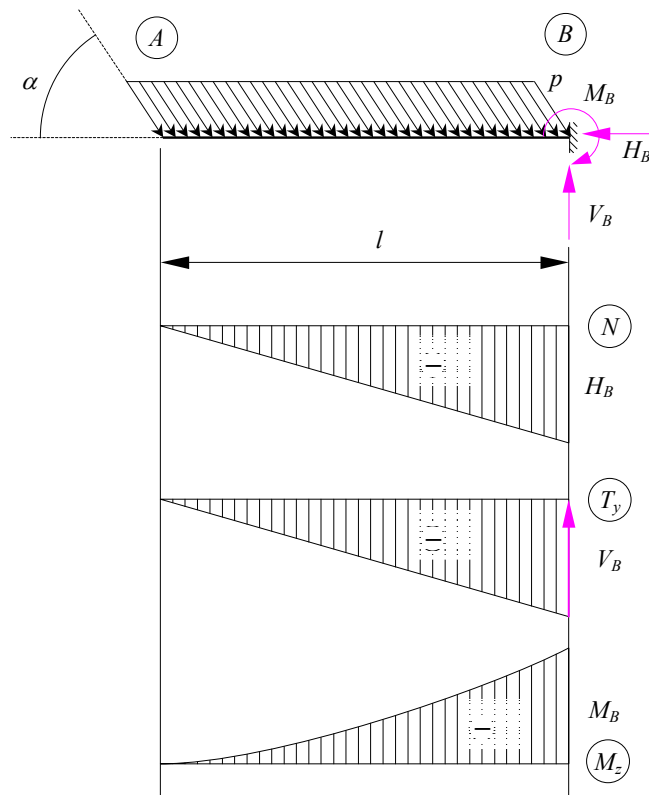
2.45. ábra. Lineárisan megoszló erővel terhelt, egyik végén befogott tartó igénybevételei

2.33. példa. *Megoszló ferde erővel terhelt, egyik végén befogott tartó igénybevételei*

A 2.15. példában a ferde megoszló erőt tengelyirányú és tengelyre merőleges összetevőkre bontottuk: az előbbi, amelynek nagysága $h(x) = p \cdot \cos \alpha$, tengely irányú igénybevételt okoz, az utóbbi, amelynek nagysága pedig $v(x) = p \cdot \sin \alpha$, nyíró és hajlító igénybevétel megjelenéséhez vezet (2.46. ábra):

$$AB, x \in [0, l]: \begin{cases} N(x) = -h(x) \cdot x = -p \cdot \cos \alpha \cdot x \\ T_y(x) = -v(x) \cdot x = -p \cdot \sin \alpha \cdot x \\ M_z(x) = -\frac{v(x)}{2} \cdot x^2 = -\frac{p \cdot \sin \alpha}{2} \cdot x^2. \end{cases} \quad (2.165)$$

Ellenőrzésképpen, a tartó jobb oldali végén (a merev befogásnál, $x = l$) az igénybevételek a megfelelő reakciókkal azonos nagyságúak, de ellentétes irányúak kell legyenek (2.81, 2.79, 2.80. képletek).



2.46. ábra. *Megoszló ferde erővel terhelt, egyik végén befogott tartó igénybevételei*

2.34. példa. *Megoszló hajlítónyomatékkal terhelt kéttámaszú tartó igénybevételei*

A 2.47. ábrán levő tartót egy egyenletesen (állandó intenzitású) megoszló hajlítónyomaték terheli. Az igénybevételek kiszámításához először a tartó reakcióit kell meghatározni. A 2.8. feladathoz hasonlóan, ezt a rudat is csak a hajlítónyomaték terheli, tehát a reakcióerők a terheléssel azonos nagyságú, de ellentétes irányba forgató nyomatékú erőpárt kell alkossanak.

A 2.16. példa értelmében a megoszló terhelés eredője az

$$M = m \cdot b \quad (2.166)$$

koncentrált nyomaték, amellyel tehát a

$$V_A = V_B = \frac{M}{l} = \frac{m \cdot b}{l} \quad (2.167)$$

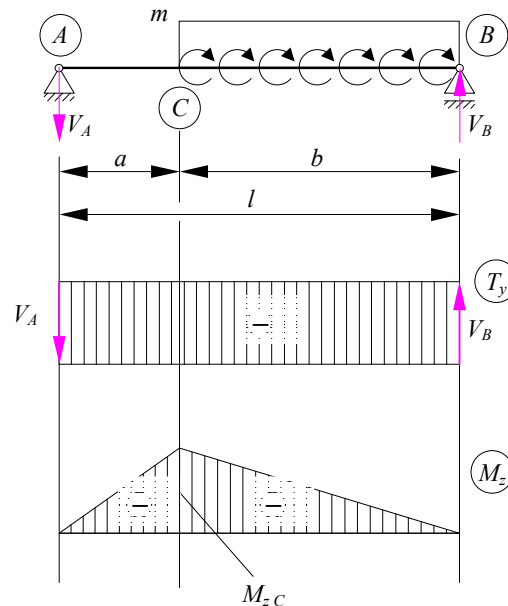
nagyságú erőkből álló erőpár tart egyensúlyt. A reakcióerők nagysága nem függ a terhelés lokalizálásától, csak annak eredőjétől.

Az igénybevételeket a következő összefüggések adják (2.47. ábra; a 2.27. példától eltérően a hajlító igénybevétel diagramján nincs ugrás, mivel a terhelés nem koncentrált):

$$AC, x \in [0, a]: \begin{cases} T_y(x) = -V_A = -\frac{m \cdot b}{l} \\ M_z(x) = -V_A \cdot x = -\frac{m \cdot b}{l} \cdot x, \end{cases} \quad (2.168)$$

$$CB, x \in [a, l]: \begin{cases} T_y(x) = -V_A = -\frac{m \cdot b}{l} \\ M_z(x) = -V_A \cdot x + m \cdot (x - a) = -m \cdot a + m \cdot \left(1 - \frac{b}{l}\right) \cdot x = \\ = -m \cdot a + m \cdot \frac{a}{l} \cdot x. \end{cases} \quad (2.169)$$

Ellenőrzésképpen, a rúd jobb oldali végén, ahol $x = l$, a hajlító igénybevétel zéró kell legyen. A hajlító igénybevétel értékét a C pontban számíthatjuk ($x = a$), ahol $M_{zC} = -m \cdot a \cdot b / l$.



2.47. ábra. Megoszló hajlítónyomatékkal terhelt kéttámaszú tartó igénybevételei

2.35. példa. Megoszló csavarónyomatékkal terhelt, egyik végén befogott tartó igénybevételei

A 2.48. ábrán levő tartót egy egyenletesen megoszló csavarónyomaték terheli. A mereven befogott végén egy, a terhelő megoszló nyomaték eredőjével azonos nagyságú, de ellentétes irányban forgató koncentrált csavarónyomaték jelenik meg, mint reakció:

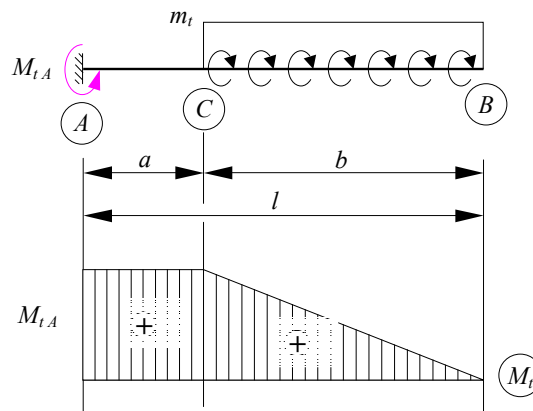
$$M_{t,A} = m_t \cdot b. \quad (2.170)$$

A tartónak egyéb igénybevétele a csavaráson kívül nincsen:

$$AC, x \in [0, a]: M_t(x) = M_{t,A}, \quad (2.171)$$

$$CB, x \in [a, l]: M_t(x) = M_{t,A} - m_t \cdot (x - a). \quad (2.172)$$

Ellenőrzésképpen, a tartó szabad végén (a B pontban, $x = l$) a csavaró igénybevétel zéró kell legyen.

**2.48. ábra.** Megoszló csavarónyomatékkal terhelt, egyik végén befogott tartó igénybevételei**2.36. példa.** Megoszló erővel terhelt, kéttámaszú ferdetengelyű tartó igénybevételei

A ferdetengelyű tartók esetében is, mint amilyen a 2.49. ábrán látható, az igénybevételeket a rúd koordináta-rendszere szerint kell kiszámítanunk, amely az eddigiektől eltérően nem igazodik a vízszintes és függőleges irányokhoz.

Az ábrán szereplő tartó egyszerű támasza függőleges irányban támasztja alá a rúd jobb oldali végét. A terhelés is függőleges irányú. Úgy a támaszban ébredő reakcióerőnek, mint a terhelésnek, van egy tengelyirányú és egy tengelyre merőleges vetülete, így egyszerre fog fellépni a tengelyirányú, a nyíró és a hajlító igénybevétel is.

A terhelés eredőjét a rúd hosszával számítjuk ki, tehát nem a támaszok közötti $l \cdot \cos \alpha$ vízszintes távolsággal:

$$R = p \cdot l; \quad (2.173)$$

viszont a két végponthoz viszonyítva ennek az erőnek az erőkarját a vízszintesen mért $(l/2) \cdot \cos \alpha$ távolság jelenti.

Mivel a B pontra nézve a H_A reakcióerőnek is van nyomatéka (erőkarja $l \cdot \sin \alpha$), először a V_B reakcióerőt számítjuk ki az A pontra felírt nyomaték-egyenletből:

$$\sum M_{z,A} = R \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos \alpha - V_B \cdot l \cdot \cos \alpha = 0 \Rightarrow V_B = \frac{R}{2} = \frac{p \cdot l}{2}. \quad (2.174)$$

A V_A reakcióerőt a legegyszerűbben a függőleges irányú vetületek egyensúlyából kapjuk, a H_A reakció esetleges megjelenése miatt:

$$\sum F_y = R - V_A - V_B = p \cdot l - V_A - \frac{p \cdot l}{2} = \frac{p \cdot l}{2} - V_A = 0 \Rightarrow V_A = \frac{p \cdot l}{2} = \frac{R}{2}, \quad (2.175)$$

a vízszintes vetületek egyensúlyából pedig

$$\sum F_x = H_A = 0. \quad (2.176)$$

A B pontra felírt nyomaték-egyenletet ellenőrzésre használjuk:

$$\begin{aligned} \sum M_{z,B} &= V_A \cdot l \cdot \cos \alpha - H_A \cdot l \cdot \sin \alpha - R \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos \alpha = \\ &= \frac{p \cdot l}{2} \cdot l \cdot \cos \alpha - 0 \cdot l \cdot \sin \alpha - p \cdot l \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos \alpha = 0. \end{aligned} \quad (2.177)$$

A terhelés a rúdra nézve egy egyenletesen megoszló ferde erőt jelent, $p \cdot \cos \alpha$ merőleges és $p \cdot \sin \alpha$ tengelyirányú összetevőkkel (a terhelés ez esetben a rúd tengelyével $90^\circ - \alpha$ szöget zár be). Az igénybevételekhez nemcsak a megoszló erőt, hanem a reakcióerőket is le kell vetítenünk:

$$AB, x \in [0, l]: \begin{cases} N(x) = -H_A \cdot \cos \alpha - V_A \cdot \sin \alpha + p \cdot x \cdot \sin \alpha = p \cdot \left(x - \frac{l}{2}\right) \cdot \sin \alpha \\ T_y(x) = -H_A \cdot \sin \alpha + V_A \cdot \cos \alpha - p \cdot x \cdot \cos \alpha = p \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right) \cdot \cos \alpha \\ M_z(x) = -H_A \cdot x \cdot \sin \alpha + V_A \cdot x \cdot \cos \alpha - \frac{p \cdot x^2 \cdot \cos \alpha}{2} = \\ = -\frac{p}{2} \cdot (x^2 - l \cdot x) \cdot \cos \alpha. \end{cases} \quad (2.178)$$

A rúd két végén az igénybevételek a kényszerekben fellépő reakcióerőkkel tartanak egyensúlyt:

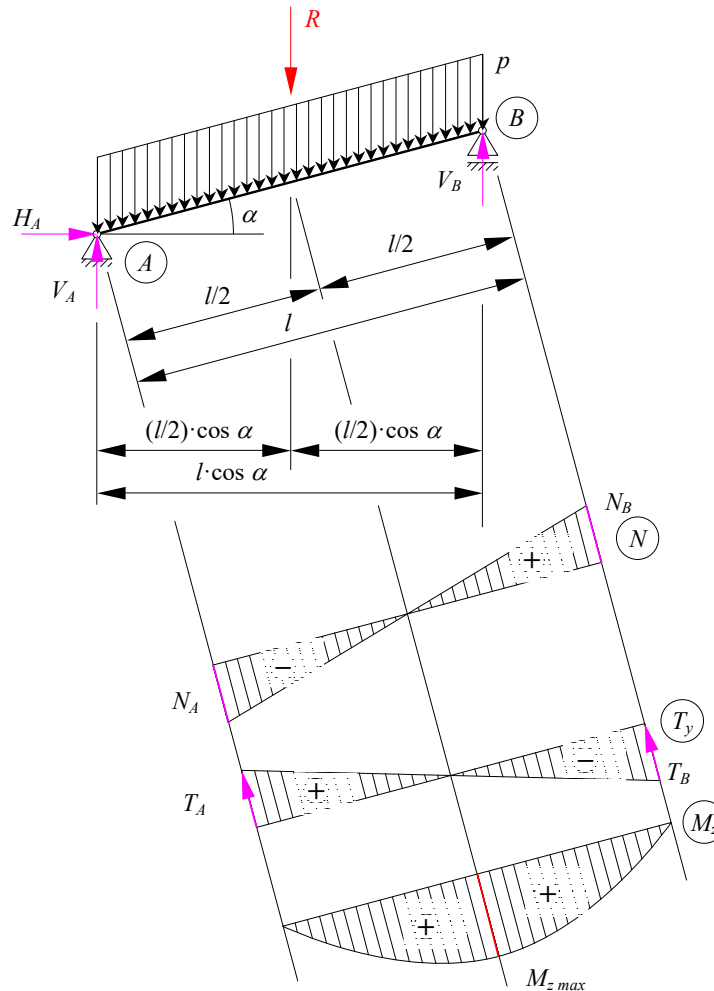
$$\begin{aligned} N_A &= N(x=0) = -\frac{p \cdot l}{2} \cdot \sin \alpha = -H_A \cdot \cos \alpha - V_A \cdot \sin \alpha \\ N_B &= N(x=l) = \frac{p \cdot l}{2} \cdot \sin \alpha = V_B \cdot \sin \alpha \\ T_{yA} &= T_y(x=0) = \frac{p \cdot l}{2} \cdot \cos \alpha = -H_A \cdot \sin \alpha + V_A \cdot \cos \alpha \\ T_{yB} &= T_y(x=l) = -\frac{p \cdot l}{2} \cdot \cos \alpha = -V_B \cdot \cos \alpha \\ M_{zA} &= M_z(x=0) = 0 \\ M_{zB} &= M_z(x=l) = 0. \end{aligned} \quad (2.179)$$

A nyomaték maximumának a helyét a nyíró igénybevétel diagramjából állapíthatjuk meg:

$$T_y(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{l}{2}, \quad (2.180)$$

amellyel

$$M_{z_{max}} = M_z(x = l/2) = \frac{p \cdot l^2}{2} \cdot \cos \alpha. \quad (2.181)$$



2.49. ábra. Ferde tengelyű tartó igénybevételei

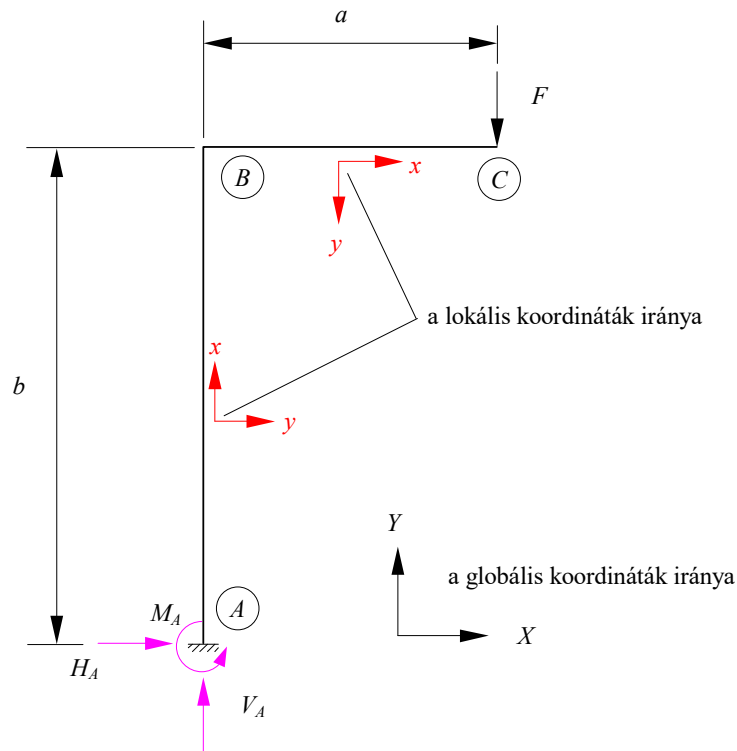
2.3. A törtvonalú tartók

A törtvonalú tartók tengelye egyenes szakaszokból áll, amelyek egy bizonyos szög alatt illeszkednek egymáshoz. A szakaszok lehetnek egy síkban, de alkothatnak egy térbeli szerkezetet is. Az egyszerűség kedvéért itt csak a sík törtvonalú tartókat példázzuk, de az ismertett eljárások könnyen kiterjeszthetők a térbeli törtvonalú tartók esetére is.

A sztatikailag determinált sík tartók esetében, amennyiben a terhelés is a tartó tengelyvonalának a síkjában hat, a reakcióerőket a felírható egyensúlyi egyenletekből állapíthatjuk meg. Mivel sík esetben csak három ilyen egyenletet tudunk felírni, a determináltsághoz három kényszerre van szükségünk, pont úgy, mint az egyenes tartók esetében. Ezeket a reakcióerőket egy, a teljes tartóhoz rendelt XYZ „globális” koordináta-rendszerben adjuk meg, általában a vízszintes és függőleges irányokhoz igazodva. Az igénybevételeket viszont a tartó tengelyéhez igazodó xyz „lokális” koordináta-rendszerben kell kiszámítanunk, amely szakaszonként irányt vált.

2.37. példa. Egy mereven befogott törtvonalú tartó reakcióinak és igénybevételeinek kiszámítása

Legyen a 2.50. ábrán látható, az A pontjában mereven befogott törtvonalú tartó, amelyet a C szabad végén egy koncentrált erő terhel. A tartó két, egymásra merőleges darabból áll, amelyek közül a vízszintes darab hossza a , a függőleges pedig b .



2.50. ábra. Mereven befogott tört vonalú tartó

Mivel a tartó mereven befogott, a reakcióerőket az X és az Y irány szerint felírt egyensúlyi egyenletekből, a reakciónyomatékok pedig a mereven befogott A pontra felírt, az ábra síkjára merőleges Z tengely körül forgató nyomatékok egyensúlyi egyenletéből számíthatjuk ki. Beláthatjuk, hogy az X tengely irányában nem hat terhelés és emiatt $H_A = 0$, Y irányban csak az F terhelő erő hat és emiatt $V_A = F$, s mivel ez utóbbinak az erőkarja az A pontra nézve a hosszúságú, a reakciónyomaték $M_A = F \cdot a$ lesz.

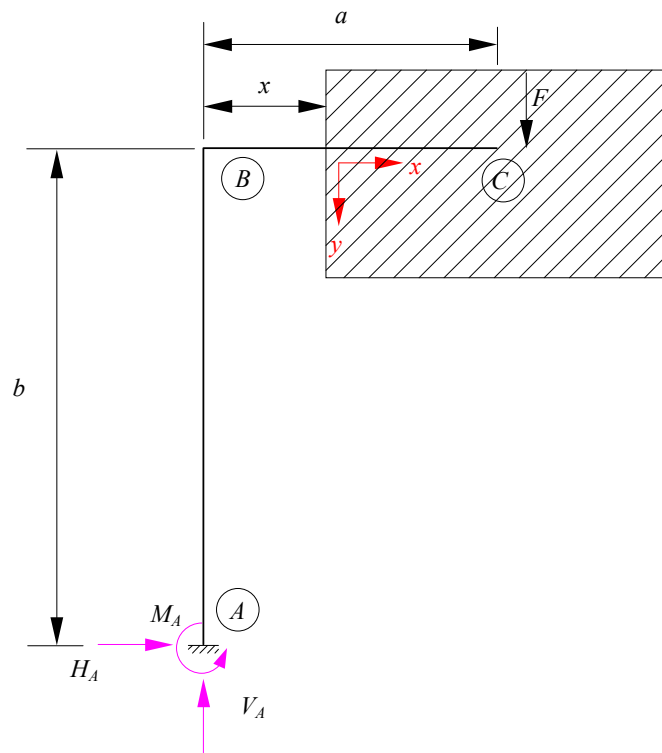
Az igénybevételek kiszámítását szakaszonként végezzük el, az előbbi fejezetben ismertetett módszerek alapján járhatunk el. Az igénybevételek a tartó egy adott keresztmetszeten az illető keresztmetszet valamelyik oldalán ható külső erőkkel tartanak egyensúlyt, az egyensúlyi egyenleteket pedig az adott szakasz lokális koordinátái szerint kell felírunk. Ezt a keresztmetszetet a kezdőponttól a végpontig csúsztatva, az x koordináta függvényeként rajzoljuk meg az igénybevételi ábrákat.

Példánkban az AB szakaszon, az A ponttól a B fele haladva azt konstatáljuk, hogy itt egy állandó tengely irányú igénybevételünk van, amelyet a V_A reakcióerő idéz elő. Mivel $H_A = 0$, nyíró igénybevétel itt nem lép fel és a hajlító igénybevétel állandó, M_A nagyságú. Az igénybevételek

előjelét az eddig alkalmazott egyezmény szerint állapítjuk meg, amely szerint a tengely irányú is és a hajlító is negatív előjelű kell legyen, ha a lokális tengelyek az ábrán látható irányba mutatnak:

$$AB, x \in [0, b]: \begin{cases} N(x) = -V_A = -F \\ T_y(x) = 0 \\ M_z(x) = -M_A = -F \cdot a. \end{cases} \quad (2.182)$$

A B pontban a lokális x tengely derékszögben irányt vált, a BC szakaszon a H_A reakcióerő, ha létezne, tengely irányú igénybevételt okozna, a V_A reakcióerő pedig nyíróerőként hat. Ez utóbbinak nyomatéka is van; az igénybevételeket a 2.51. ábra szerint tudunk meghatározni.



2.51. ábra. Az igénybevételek kiszámítása a BC szakaszon

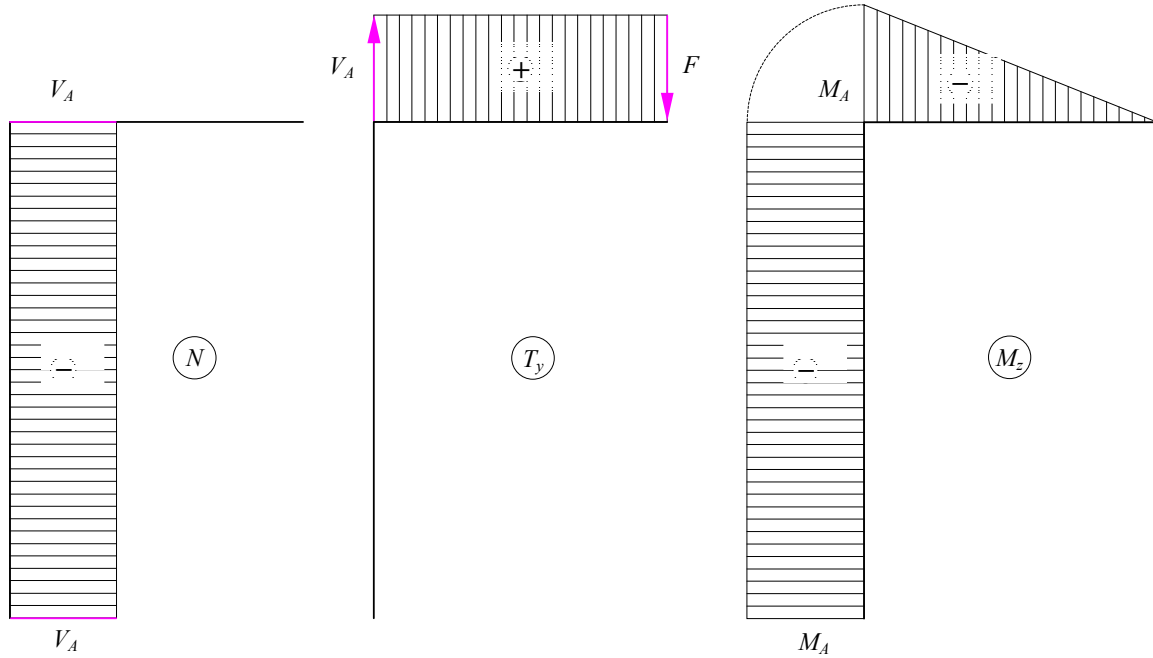
Az ábra alapján:

$$BC, x \in [0, a]: \begin{cases} N(x) = 0 \\ T_y(x) = V_A = F \\ M_z(x) = -M_A + F \cdot x = F \cdot (x - a). \end{cases} \quad (2.183)$$

Észrevehetjük, hogy mivel a két szakasz egymásra merőleges, a B ponton áthaladva a tengelyirányú és a nyíró igénybevétel „helyet cserél”, az egyezménynek megfelelő előjellel. Ez az észrevétel csak az egymásra merőleges szakaszokra érvényes, amennyiben az illeszkedési pontban nem hat koncentrált erő!

Ugyanakkor észrevehetjük azt is, hogy a B ponton áthaladva a hajlítón igénybevételnek sem a nagysága, sem az előjele nem változik meg: ez az észrevétel akkor érvényes, ha az illeszkedési pontban nem hat koncentrált nyomaték.

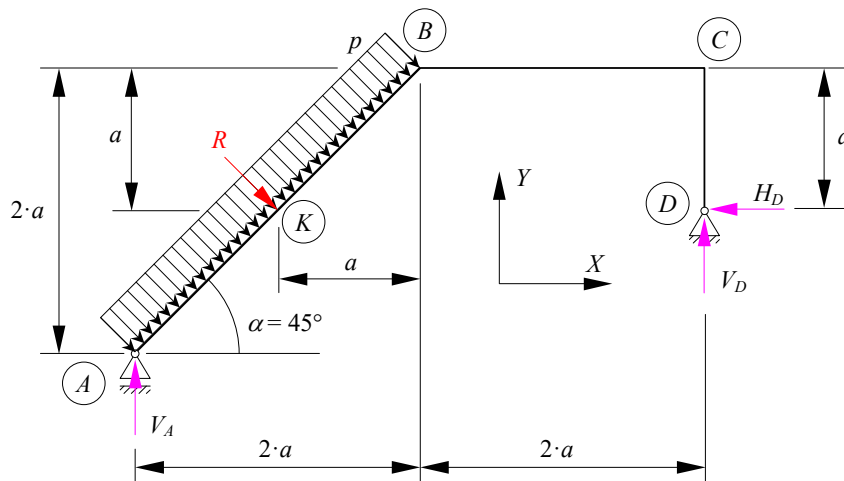
A koordináták behelyettesítésével megkapjuk a szakaszok végein érvényes igénybevételeket, amelyekkel a 2.52. ábrán látható igénybevételi diagramokhoz jutunk.



2.52. ábra. A törtvonalú tartó igénybevételi ábrái

2.38. példa. Egy kéttámaszú törtvonalú tartó reakcióinak és igénybevételeinek kiszámítása

Tekintsük a 2.53. ábrán látható tartót. Az előbbtől eltérően ez kéttámaszú, vannak egymáshoz nem derékszögben illeszkedő részei, a ferde oldalán pedig egy megoszló terhelés hat. A ferde oldal 45° -os szöget zár be a vízszintessel.



2.53. ábra. Kéttámaszú törtvonalú tartó

A reakcióerők kiszámításához szükségünk van az AB szakaszt terhelő egyenletesen megoszló erő eredőjére. Ennek a szakasznak a hossza. $l_{AB} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot a$. A megoszló erő tengelyre merőleges

irányú, így annak $R = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot p \cdot a$ eredője is merőleges lesz az AB szakaszra és annak a közepén, a K pontban támad. A megoszló terhelés valamely pontra vonatkoztatott eredő nyomatékához ismernünk kell az erőkar hosszát is, vagyis az R tartóegyenese és az illető pont közötti távolságot. Ennek a távolságnak a kiszámítása az A pontra nézve egyszerű (az AB szakasz hosszának a fele), de például a D pontra nézve nem, egy síkmértan-feladatot kellene megoldanunk. Ezt elkerülhetjük, ha nem az R eredővel, hanem annak a vízszintes és a függőleges globális irányokra eső vetületeivel dolgozunk. Belátható, hogy a vízszintes vetület nagysága

$$R_X = R \cdot \sin \alpha = p \cdot l_{AB} \cdot \sin \alpha = p \cdot l_{ABY}, \quad (2.184)$$

a függőlegesé pedig

$$R_Y = R \cdot \cos \alpha = p \cdot l_{AB} \cdot \cos \alpha = p \cdot l_{ABX}, \quad (2.185)$$

ahol $l_{ABX} = l_{AB} \cdot \cos \alpha = 2 \cdot a$ és $l_{ABY} = l_{AB} \cdot \sin \alpha = 2 \cdot a$ az AB szakasz hosszúságának a vetületei a globális X , illetve Y irányokra.

Az előbbi képletek szerint az eredő vetületét úgy is ki lehet számítani, mint a megoszló erő által terhelt vonal vetületére merőlegesen ható, az eredetivel azonos intenzitású erő eredőjét.

Amennyiben a megoszló erő tengelyirányú lenne (jelöljük azt n -nel), az

$$R_X = R \cdot \cos \alpha = n \cdot l_{AB} \cdot \cos \alpha = n \cdot l_{ABX}, \quad (2.186)$$

$$R_Y = R \cdot \sin \alpha = n \cdot l_{AB} \cdot \sin \alpha = n \cdot l_{ABY} \quad (2.187)$$

képletekhez jutnánk. Ez a két észrevétel bármely tetszőleges függvény szerint megoszló terhelésre igaz, amennyiben az a tartó tengelyére merőleges vagy azzal párhuzamos irányú.

A reakcióerőket az egyensúlyi egyenletekből kapjuk:

$$\sum F_X = R_X - H_D = 0 \Rightarrow H_D = R_X = 2 \cdot p \cdot a, \quad (2.188)$$

$$\sum M_{Z,D} = -V_A \cdot 4 \cdot a + R_Y \cdot 3 \cdot a = 0 \Rightarrow V_A = \frac{3 \cdot R_Y}{4} = \frac{3 \cdot p \cdot a}{2}, \quad (2.189)$$

$$\sum M_{Z,A} = V_D \cdot 4 \cdot a + H_D \cdot a - R_X \cdot a - R_Y \cdot a = 0 \Rightarrow V_D = \frac{R_X + R_Y - H_D}{4} = \frac{p \cdot a}{2} \quad (2.190)$$

(a D pontra nézve a H_D reakcióerőnek nincsen nyomatéka, a Z tengely pedig a lap síkjára merőleges és felfele mutat). Ellenőrzésképpen:

$$\sum F_Y = V_A - R_Y + V_D = \frac{3 \cdot p \cdot a}{2} - 2 \cdot p \cdot a + \frac{p \cdot a}{2} = 0. \quad (2.191)$$

Az igénybevételek kiszámítása szakaszonként történik. Az A pont felől a D fele haladva:

$$AB, x \in [0, 2 \cdot \sqrt{2} \cdot a]: \begin{cases} N(x) = -V_A \cdot \sin \alpha = -\frac{3}{2} \cdot p \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4} \cdot p \cdot a \\ T_y(x) = V_A \cdot \cos \alpha - p \cdot x = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4} \cdot p \cdot a - p \cdot x \\ M_z(x) = V_A \cdot \cos \alpha \cdot x - p \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4} \cdot p \cdot a \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2}; \end{cases} \quad (2.192)$$

$$BC, x \in [0, 2 \cdot a]: \begin{cases} N(x) = -R_X = -2 \cdot p \cdot a \\ T_y(x) = V_A - R_Y = \frac{3}{2} p \cdot a - 2 \cdot p \cdot a = -\frac{1}{2} p \cdot a \\ M_z(x) = V_A \cdot (x + 2 \cdot a) - R_X \cdot (x + a) - R_Y \cdot a = \\ = \frac{3}{2} \cdot p \cdot a \cdot (x + 2 \cdot a) - 2 \cdot p \cdot a \cdot (x + a) - 2 \cdot p \cdot a \cdot a = \\ = -p \cdot a^2 - \frac{p \cdot a}{2} \cdot x; \end{cases} \quad (2.193)$$

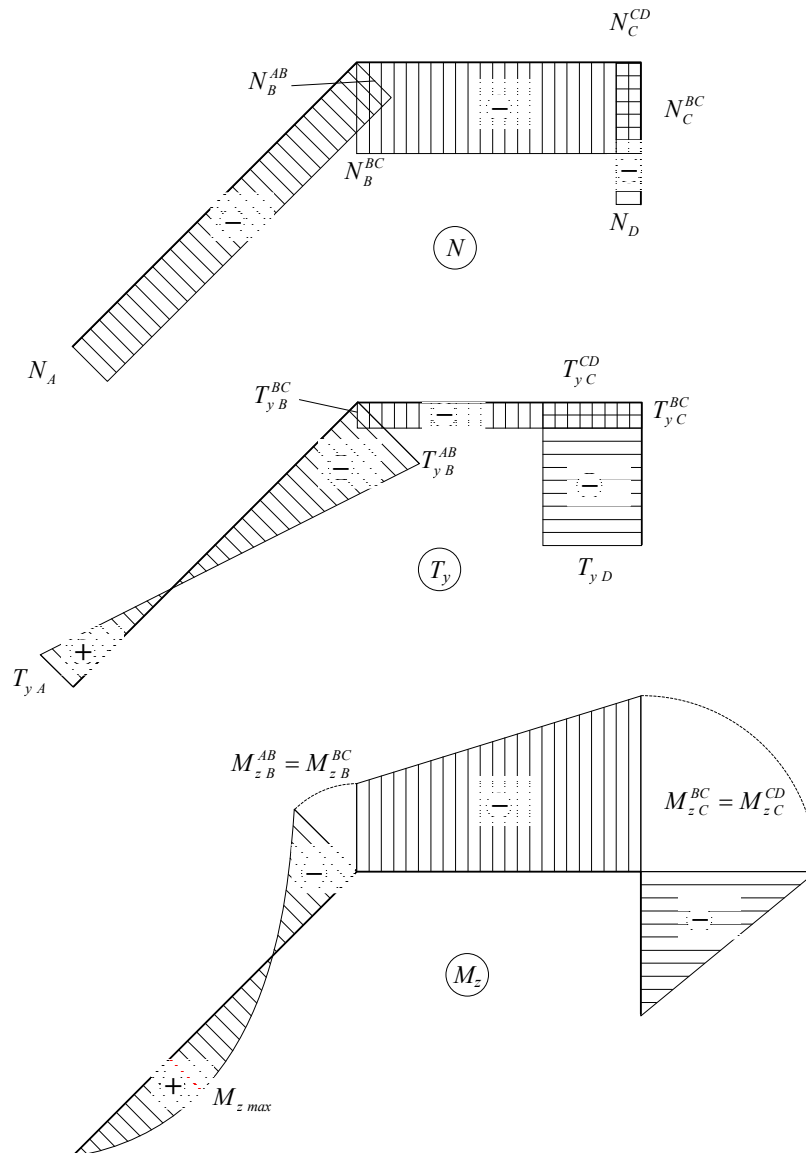
$$CD, x \in [0, a]: \begin{cases} N(x) = V_A - R_Y = \frac{3}{2} \cdot p \cdot a - 2 \cdot p \cdot a = -\frac{1}{2} \cdot p \cdot a \\ T_y(x) = R_X = 2 \cdot p \cdot a \\ M_z(x) = V_A \cdot 4 \cdot a + R_X \cdot (x - a) - R_Y \cdot 3 \cdot a = \\ = \frac{3}{2} \cdot p \cdot a \cdot 4 \cdot a + 2 \cdot p \cdot a \cdot (x - a) - 2 \cdot p \cdot a \cdot 3 \cdot a = \\ = -2 \cdot p \cdot a^2 + 2 \cdot p \cdot a \cdot x. \end{cases} \quad (2.194)$$

A képletek ellenőrzéséhez és az ábrázoláshoz kiszámítjuk a végpontokban ható igénybevételeket:

$$\begin{aligned} N_A &= N_B^{AB} = -\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4} \cdot p \cdot a = -V_A \cdot \sin \alpha \\ N_B^{BC} &= N_C^{BC} = -2 \cdot p \cdot a \\ N_C^{CD} &= N_D = -\frac{1}{2} \cdot p \cdot a = -V_D \\ T_{yA} &= T_y^{AB}(x=0) = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4} \cdot p \cdot a = V_A \cdot \cos \alpha \\ T_{yB}^{AB} &= T_y^{AB}(x=2 \cdot \sqrt{2} \cdot a) = -\frac{5 \cdot \sqrt{2}}{4} \cdot p \cdot a \\ T_{yB}^{BC} &= T_{yC}^{BC} = -\frac{1}{2} \cdot p \cdot a \\ T_{yC}^{CD} &= T_{yD} = 2 \cdot p \cdot a = H_D \\ M_{zA} &= M_z^{AB}(x=0) = 0 \\ M_{zB}^{AB} &= M_z^{AB}(x=2 \cdot \sqrt{2} \cdot a) = -p \cdot a^2 \\ M_{zB}^{BC} &= M_z^{BC}(x=0) = -p \cdot a^2 = M_{zB}^{AB} \\ M_{zC}^{BC} &= M_z^{BC}(x=2 \cdot a) = -2 \cdot p \cdot a^2 \\ M_{zC}^{CD} &= M_z^{CD}(x=0) = -2 \cdot p \cdot a^2 = M_{zC}^{BC} \\ M_{zD} &= M_z^{CD}(x=a) = 0. \end{aligned} \quad (2.195)$$

A hajlító igénybevételt az AB szakaszon másodfokú függvény írja le: Szélsőértékének megkereséséhez a $T_y^{AB}(x) = 0$ egyenlet megoldásával helyét az $x = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4} \cdot a$ pontban lokalizálhatjuk. E koordinátának az $M_z^{AB}(x)$ kifejezésébe való behelyettesítésével a keresett szélsőérték:

$$M_{z \max} = \frac{9 \cdot p \cdot a^2}{16}. \quad (2.196)$$



2.54. ábra. A kéttámaszú törtvonalú tartó igénybevételi ábrái

2.4. Íves tartók

Az íves tartók (másképpen: ívtartók) tengelyvonala egy sík- vagy térbeli görbe. Mivel a tartó tengelyének az iránya pontról pontra változik, az igénybevételek között az egyenes tengelyű tartókra fennálló összefüggések érvényüket veszítik. A sík íves tartókra azokat a következőképpen vezethetjük le: ha annak görbült tengelye mentén kiragadunk egy dS hosszúságú ívelemet, akkor annak a két végén és az ívelem hosszán ható erők között (2.55. ábra) az

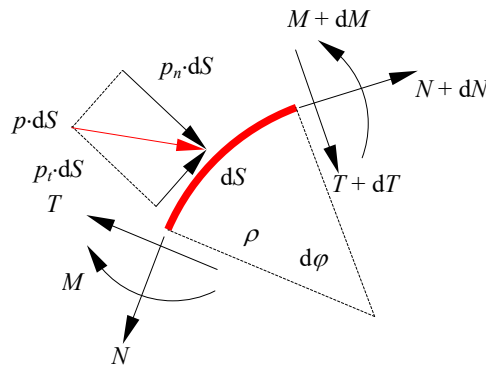
$$N + dN - N \cdot \cos d\varphi - T \cdot \sin d\varphi + p_t \cdot dS \cdot \cos \frac{d\varphi}{2} + p_n \cdot dS \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} = 0, \quad (2.197)$$

$$T + dT - T \cdot \cos d\varphi + N \cdot \sin d\varphi + p_n \cdot dS \cdot \cos \frac{d\varphi}{2} - p_t \cdot dS \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} = 0, \quad (2.198)$$

$$M - M + dM + T \cdot \rho \cdot \sin d\varphi - N \cdot \rho \cdot (1 - \cos d\varphi) + p_t \cdot dS \cdot \rho \cdot \left(1 - \cos \frac{d\varphi}{2}\right) - p_n \cdot dS \cdot \rho \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} = 0 \quad (2.199)$$

egyensúlyi egyenleteket írhatjuk fel, ahol feltételeztük, hogy a $d\varphi$ szög kicsinysége miatt a terhelés p_n normális irányú és p_t tangenciális összetevőinek iránya és nagysága a dS hosszúságon elhanyagolható. Az egyenleteket az ívelem jobb oldali keresztmetszetére írtuk fel.

A terhelést rendszerint valamilyen „globális” koordináta-rendszerben adjuk meg, amelyben az ívtartó tengelyét jelentő görbét is leírjuk annak egyenletével. Az ívre ható terhelést nemcsak a globális irányok szerint lehet felbontani, azt megadhatjuk a normális és a tangenciális komponensekkel is. A terhelés normális komponense az ív tengelyvonalára merőleges irányú vetületet jelenti, a tangenciális pedig az érintőlegest.



2.55. ábra. Kiragadott ívelem

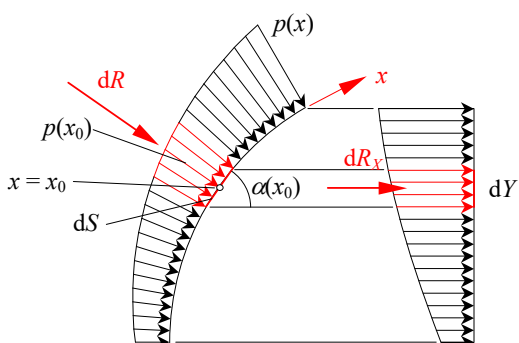
Az ábrán látható $d\varphi$ szög általános esetben a görbe folyton változó görbületével adható meg. Differenciál-geometriából tudjuk, hogy a görbe görbületi sugara (ρ) annak valamely pontjában az abban a pontban megrajzolt simulókör sugarával egyenlő. A simulókör a simulósíkban van és a görbe egymáshoz nagyon közeli három pontjával adhatjuk meg (a simulókört e három ponton keresztül húzzuk meg). A görbe görbületa a görbületi sugár reciproka: $k = 1/\rho$. Végző soron tehát $d\varphi = dS / \rho = k \cdot dS$.

Mivel a felírt egyensúlyi egyenletekben a $d\varphi$ szög nagyon kicsi, $\sin d\varphi \approx d\varphi$ és $\cos d\varphi \approx 1$, a végtelen kis tagokat (pl. a $dS \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{dS \cdot d\varphi}{2} \approx 0$ szorzatot) elhanyagolván pedig a következő egyszerűbb összefüggésekhez jutunk (felhasználjuk, hogy $dS = \rho \cdot d\varphi$):

$$\frac{dN}{dS} = -p_t + \frac{T}{\rho}, \quad \frac{dT}{dS} = -p_n - \frac{N}{\rho}, \quad \frac{dM}{dS} = T. \quad (2.200)$$

Ezek az összefüggések az ívtartó igénybevételei közötti relációkat jelentik. Az egyenes tartó esetében $dS = dx$ és $\rho = \infty$, amelyekkel visszkapjuk a már ismert összefüggéseket (2.106. - 2.108).

A számításokban szükség van a megoszló erők eredőjére. A törtvonalú tartó esetéhez hasonló módon az eredő valamely irányra eső vetületét a tengely vetületét terhelő megoszló erő eredőjeként is meg lehet határozni. A 2.56. ábra a vízszintes irányú összetevő kiszámítását illusztrálja.



2.56. ábra. A megoszló erő vízszintes vetületének kiszámítása

A tartó tengelyének egy adott x_0 koordinátájú pontja közvetlen környékén, egy dS hosszúságú szakaszon, a megoszló erőt állandó $p(x_0)$ intenzitásúnak tekinthetjük. Ez a megoszló erő egy $dR = p(x_0) \cdot dS$, a tartó tengelyére merőleges eredővel rendelkezik, amelynek a vízszintes vetülete $dR_x = p(x_0) \cdot dS \cdot \sin \alpha(x_0)$, ahol $dS \cdot \sin \alpha(x_0) = dY$, amely a dS hosszúságú szakasznak függőleges tengelyre eső vetületével azonos. A 2.184. összefüggéssel analóg módon $dR_x = p(x_0) \cdot dY$, ahonnan integrálással

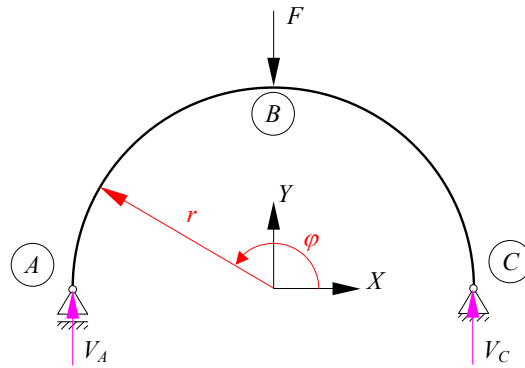
$$R_x = \int_l dR_x = \int_{Y_1}^{Y_2} p(x(Y)) \cdot dY, \quad (2.201)$$

ahol a megoszló erő változását a globális Y koordinátával kell megadnunk. A másik összetevőt hasonlóképpen kapjuk:

$$R_y = \int_l dR_y = \int_{X_1}^{X_2} p(x(X)) \cdot dX. \quad (2.202)$$

2.39. példa. Koncentrált erővel terhelt kéttámaszú íves tartó

Legyen a 2.57. ábrán látható íves tartó, amelyet a legmagasabb pontjában, a tartó szimmetria-tengelyében egy függőleges koncentrált erő terhel. A tartó tengelye egy 180° -os körív, a támaszok pedig egy vízszintes vonalon vannak.



2.57. ábra. Koncentrált erővel terhelt kéttámaszú íves tartó

A szimmetria miatt mindkét függőleges reakcióerő a terhelés fele lesz:

$$V_A = V_C = \frac{F}{2}. \quad (2.203)$$

A könnyebb „tájékozódás” érdekében a globális rendszert az ív középpontjában vesszük fel, az ábrán látható módon. Ekkor az ív valamely pontjának helyzetét az origóból húzott helyzetvektor φ szöge egyértelműen megadja. Ennek a helyzetvektornak a hossza r , az ív bármely pontjában, mivel körívről van szó.

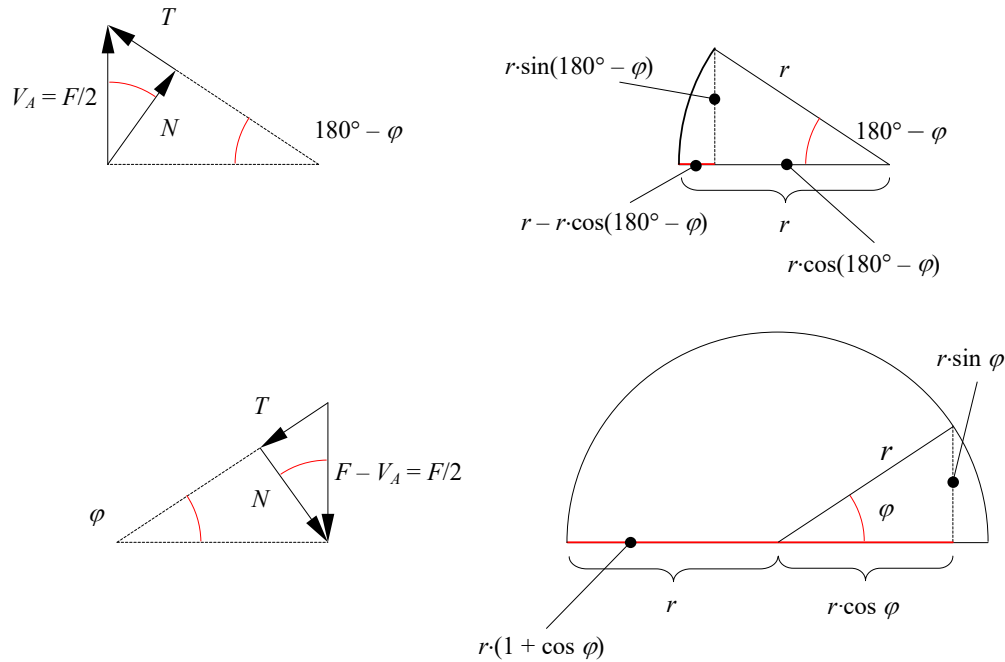
Az igénybevételi ábrák megrajzolását kezdjük a bal oldali A pontban. Belátható, hogy e pontban a terhelést jelentő reakcióerő csak tangenciális komponenst fog adni, ebben a pontban tehát $N_A = N(\varphi = 180^\circ) = -V_A = F/2$ és $T_A = T(\varphi = 180^\circ) = 0$; és mivel ebben a pontban az ívtartó egyszerű támasszal illeszkedik az alaphoz, ebben a pontban hajlító igénybevételünk sincs: $M_A = M(\varphi = 180^\circ) = 0$. Hasonló eszmefuttatással, a jobboldali C pontban, ahol $\varphi = 0$, ugyanezeket az értékeket kapjuk.

Ahogy az AB íven haladunk, úgy a tanulmányozott keresztmetszet fokozatosan elfordul és ezáltal – bár e szakaszon az ívet nem terheli semmi – az említett három mennyiség a 2.200. összefüggések értelmében folyamatosan változik. Az adott összefüggéseket nehéz lenne használni, hiszen N és T esetében egy differenciál-egyenletrendszerrel van szó. Éppen ezért az igénybevételeket adó függvényeket analitikusan írjuk fel, egy tetszőleges φ szögnek megfelelő pontban, például annak bal oldalán található rész egyensúlyi egyenleteként. A példánkban ezekből az egyenletekből az következik, hogy az adott pontban a tengelyirányú és a nyíró igénybevételt a V_A reakcióerő megfelelő vetületei adják, a hajlító igénybevétel pedig e reakcióerő nyomatékával azonos. Az igénybevételekre vonatkozó előjel-egyezmény megegyezik az egyenes rúdnál használttal.

Az AB szakaszon tehát:

$$AB, \varphi \in [90^\circ, 180^\circ]: \begin{cases} N(\varphi) = -V_A \cdot \cos(180^\circ - \varphi) = \frac{F}{2} \cdot \cos \varphi \\ T(\varphi) = -V_A \cdot \sin(180^\circ - \varphi) = \frac{F}{2} \cdot \sin \varphi \\ M(\varphi) = V_A \cdot r \cdot [1 - \cos(180^\circ - \varphi)] = \frac{F \cdot r}{2} \cdot (1 + \cos \varphi), \end{cases} \quad (2.204)$$

ahol a vetületek és az erőkar a 2.58. ábra alapján számítható ki. φ -t trigonometriai irányban mérjük.



2.58. ábra. A vetületek és az erőkar kiszámítása

A BC szakaszon a diagramokat számítások elvégzése nélkül, a szimmetriára hivatkozva is megrajzolhatjuk (N és M szimmetrikus, T antiszimmetrikus). Analitikus kifejezésükhöz, ha továbbra is a bal oldali rész egyensúlyát írjuk fel (előnyösebb lenne a jobb oldaliét), akkor az F terhelő erő vetületeit és nyomatékait is be kell számítsuk:

$$BC, \varphi \in [0^\circ, 90^\circ]: \begin{cases} N(\varphi) = -(F - V_A) \cdot \cos \varphi = -\frac{F}{2} \cdot \cos \varphi \\ T(\varphi) = -(F - V_A) \cdot \sin \varphi = -\frac{F}{2} \cdot \sin \varphi \\ M(\varphi) = V_A \cdot r \cdot (1 + \cos \varphi) - F \cdot r \cdot \cos \varphi = \frac{F \cdot r}{2} \cdot (1 - \cos \varphi). \end{cases} \quad (2.205)$$

A B pontban, ahol $\varphi = 90^\circ$, az N és az M folytonos, a T diagramon az ív tengelyére merőleges koncentrált erő miatt egy ugrás van. Ebben a pontban a hajlító igénybevételnek maximuma van, a szög behelyettesítésével

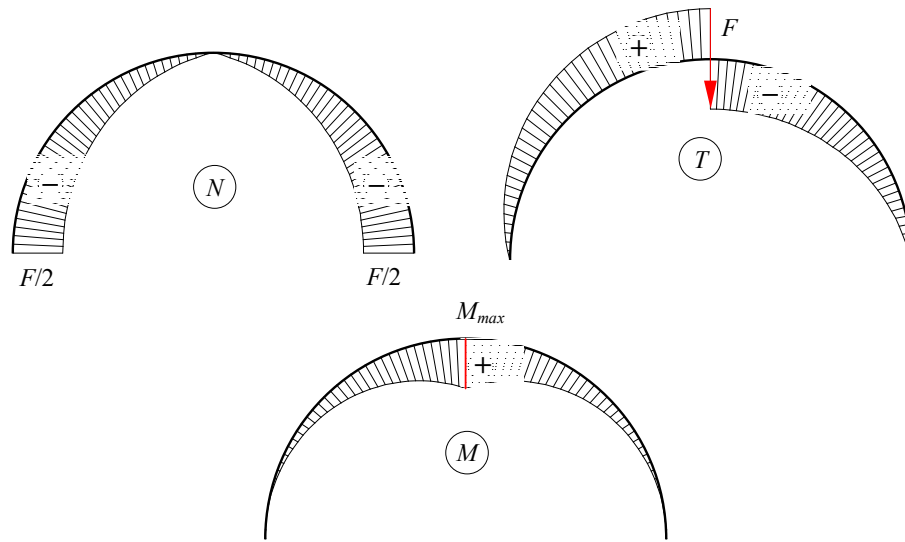
$$M_{max} = \frac{F \cdot r}{2}. \quad (2.206)$$

Az előbbi összefüggések felhasználásával megszerkesztett igénybevételi diagramokat a 2.59. ábrán láthatjuk.

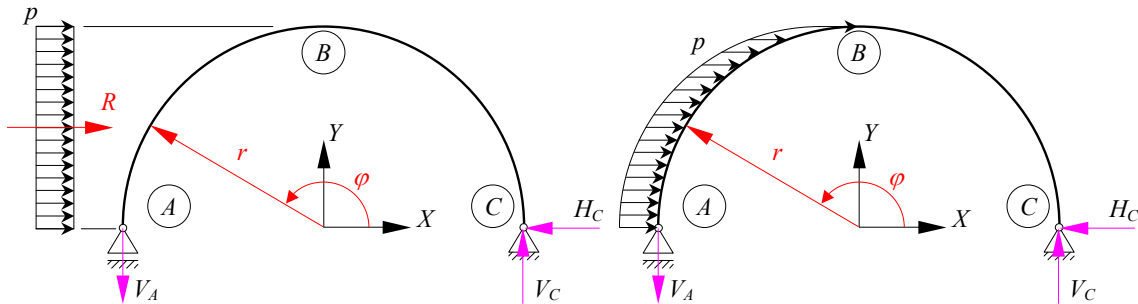
2.40. példa. Megoszló erővel terhelt kéttámaszú íves tartó

A 2.60. ábrán az előbbi példában szereplő íves tartó látható, amelyet egy egyenletesen megoszló erő terhel. Ez az erő vízszintes (az például a szél nyomásából származhat) és azt

kétféleképpen is ábrázolhatjuk. A bal oldalon azt egy függőleges vonal mentén ábrázoltuk – így egyszerűbb és átláthatóbb –, míg a jobb oldalon az ív tengelyén.



2.59. ábra. A koncentrált erővel terhelt kéttámaszú íves tartó igénybevételei



2.60. ábra. Megoszló erővel terhelt kéttámaszú íves tartó

A megoszló terhelés eredője a diagram területe ($R = p \cdot r$), a támadásvonala pedig a diagram geometriai középpontjának megfelelően az ív magasságának felénél van ($Y = r/2$). A reakcióerőket az egyensúlyi egyenletekből határozzuk meg:

$$\sum F_x = R - H_c = p \cdot r - H_c = 0 \Rightarrow H_c = R = p \cdot r, \quad (2.207)$$

$$\sum M_{z,A} = V_c \cdot 2 \cdot r - R \cdot \frac{r}{2} = V_c \cdot 2 \cdot r - \frac{p \cdot r^2}{2} = 0 \Rightarrow V_c = \frac{p \cdot r}{4}, \quad (2.208)$$

$$\sum M_{z,C} = -V_A \cdot 2 \cdot r + R \cdot \frac{r}{2} = -V_A \cdot 2 \cdot r + \frac{p \cdot r^2}{2} = 0 \Rightarrow V_A = \frac{p \cdot r}{4}; \quad (2.209)$$

ellenőrzésképpen:

$$\sum F_Y = -V_A + V_C = -\frac{p \cdot r}{4} + \frac{p \cdot r}{4} = 0. \quad (2.210)$$

A két függőleges reakcióerő egyenlő nagyságú és ellentétes irányítású, tehát egy zérus eredőjű és $p \cdot r^2 / 2$ nyomatékú erőpárt alkot (az erőkar a félkörív átmérője, tehát $2 \cdot r$ $2 \cdot R$); a vízszintes reakcióerő és a terhelésvonal eredője pedig szintén egy zérus eredőjű erőpárt alkot, amelynek az előbbivel megegyező nagyságú nyomatéka van, csak hogy az ellentétes irányba forog (itt az erőkar az ív magasságának fele, azaz $r/2$).

Az AB szakaszon azonban az előbbi példától eltérően egy vízszintes megoszló erő hat. E szakaszon egy bizonyos φ szögnek megfelelő pont függőleges koordinátája a 2.58. ábra szerint $Y(\varphi) = r \cdot \sin(180^\circ - \varphi)$, amellyel az illető pontig terjedő szakaszon ható megoszló erő eredője $p \cdot r \cdot \sin(180^\circ - \varphi)$, amely vízszintesen hat és amelynek az erőkarja $Y(\varphi) / 2 = [r \cdot \sin(180^\circ - \varphi)] / 2$. Az igénybevételek kiszámításához a reakcióerő és a megoszló erő hatását összegezzük:

$$AB, \varphi \in [90^\circ, 180^\circ]: \left\{ \begin{array}{l} N(\varphi) = V_A \cdot \cos(180^\circ - \varphi) - p \cdot r \cdot \sin(180^\circ - \varphi) \cdot \sin(180^\circ - \varphi) = \\ \quad = -\frac{p \cdot r}{4} \cdot \cos \varphi - p \cdot r \cdot \sin^2 \varphi \\ T(\varphi) = -V_A \cdot \sin(180^\circ - \varphi) - p \cdot r \cdot \sin(180^\circ - \varphi) \cdot \cos(180^\circ - \varphi) = \\ \quad = -\frac{p \cdot r}{4} \cdot \sin \varphi + p \cdot r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \\ M(\varphi) = -V_A \cdot r \cdot [1 - \cos(180^\circ - \varphi)] - p \cdot r \cdot \sin(180^\circ - \varphi) \cdot \frac{r \cdot \sin(180^\circ - \varphi)}{2} = \\ \quad = -\frac{p \cdot r^2}{4} \cdot (1 + \cos \varphi + 2 \cdot \sin^2 \varphi). \end{array} \right. \quad (2.211)$$

Ha valamely BC szakaszon felvett pontban a bal oldali rész egyensúlyi egyenleteit írjuk fel, akkor az AB szakaszt terhelő megoszló erő eredőjével kell számolnunk. Mivel a támadásvonala vízszintes és $Y = r/2$ magasságban van, az eredő erőkarja, a 2.58. ábra szerint, $r \cdot (1 - \sin \varphi) - r/2 = r \cdot (1 - 2 \cdot \sin \varphi) / 2$ hosszúságú lesz:

$$BC, \varphi \in [0^\circ, 90^\circ]: \left\{ \begin{array}{l} N(\varphi) = -V_A \cdot \cos \varphi - R \cdot \sin \varphi = -\frac{p \cdot r}{4} \cdot \cos \varphi - p \cdot r \cdot \sin \varphi \\ T(\varphi) = -V_A \cdot \sin \varphi + R \cdot \cos \varphi = -\frac{p \cdot r}{4} \cdot \sin \varphi + p \cdot r \cdot \cos \varphi \\ M(\varphi) = -V_A \cdot r \cdot (1 + \cos \varphi) + R \cdot \frac{r \cdot (1 - 2 \cdot \sin \varphi)}{2} = \\ \quad = \frac{p \cdot r^2}{4} \cdot (1 - 4 \cdot \sin \varphi - \cos \varphi). \end{array} \right. \quad (2.212)$$

Ellenőrzésképpen, a B pontban ($\varphi = 90^\circ$) mindhárom diagram folytonos kell legyen:

$$N_B^{AB} = -\frac{p \cdot r}{4} \cdot \cos 90^\circ - p \cdot r \cdot \sin^2 90^\circ = -p \cdot r$$

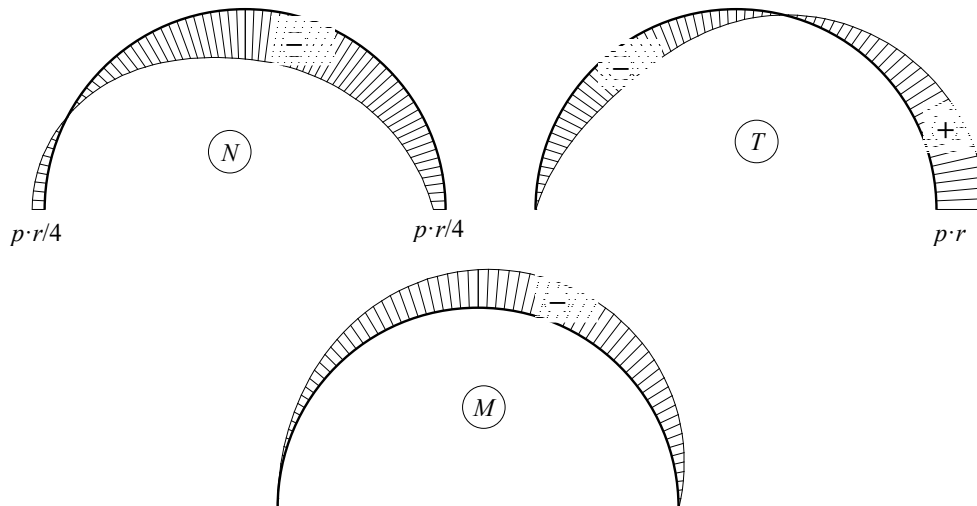
$$N_B^{BC} = -\frac{p \cdot r}{4} \cdot \cos 90^\circ - p \cdot r \cdot \sin 90^\circ = -p \cdot r$$

$$\begin{aligned}
T_B^{AB} &= -\frac{p \cdot r}{4} \cdot \sin 90^\circ + p \cdot r \cdot \sin 90^\circ \cdot \cos 90^\circ = -\frac{p \cdot r}{4} \\
T_B^{BC} &= -\frac{p \cdot r}{4} \cdot \sin 90^\circ + p \cdot r \cdot \cos 90^\circ = -\frac{p \cdot r}{4} \\
M_B^{AB} &= -\frac{p \cdot r^2}{4} \cdot (1 + \cos 90^\circ + 2 \cdot \sin^2 90^\circ) = -\frac{3 \cdot p \cdot r^2}{4} \\
M_B^{BC} &= \frac{p \cdot r^2}{4} \cdot (1 - 4 \cdot \sin 90^\circ - \cos 90^\circ) = -\frac{3 \cdot p \cdot r^2}{4},
\end{aligned} \tag{2.213}$$

a két végpontban pedig ($\varphi = 0^\circ$, ill. $\varphi = 180^\circ$) N és T nagyságaként a megfelelő reakcióerőket kell kapjuk, M pedig nulla:

$$\begin{aligned}
N_A &= -\frac{p \cdot r}{4} \cdot \cos 180^\circ - p \cdot r \cdot \sin^2 180^\circ = \frac{p \cdot r}{4} = V_A \\
N_C &= -\frac{p \cdot r}{4} \cdot \cos 0^\circ - p \cdot r \cdot \sin 0^\circ = -\frac{p \cdot r}{4} = -V_C \\
T_A &= -\frac{p \cdot r}{4} \cdot \sin 180^\circ + p \cdot r \cdot \sin 180^\circ \cdot \cos 180^\circ = 0 \\
T_B &= -\frac{p \cdot r}{4} \cdot \sin 0^\circ + p \cdot r \cdot \cos 0^\circ = p \cdot r = H_C \\
M_A &= -\frac{p \cdot r^2}{4} \cdot (1 + \cos 180^\circ + 2 \cdot \sin^2 180^\circ) = 0 \\
M_B &= \frac{p \cdot r^2}{4} \cdot (1 - 4 \cdot \sin 0^\circ - \cos 0^\circ) = 0.
\end{aligned} \tag{2.214}$$

Az igénybevételi diagramok a 2.61. ábrán láthatók.



2.61. ábra. A megoszló erővel terhelt kéttámaszú íves tartó igénybevételei

Az igénybevételek maximumának megállapításához azok képletét φ szerint deriváljuk, vagy pedig (ahol nincs megoszló terhelés) felhasználjuk a 2.200. összefüggéseket.

Az AB szakaszon, ahol $\varphi \in [90^\circ, 180^\circ]$:

$$N'(\varphi) = \frac{p \cdot r}{4} \cdot \sin \varphi - 2 \cdot p \cdot r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{p \cdot r}{4} \cdot \sin \varphi \cdot (1 - 8 \cdot \cos \varphi) = 0, \quad (2.215)$$

amelynek gyökei $\varphi = \arcsin 0 = 180^\circ$, illetve $\varphi = \arccos \frac{1}{8} \approx 82.819^\circ$. A második megoldás a tartományon kívül esik, így ezen a szakaszon a tengely irányú igénybevétel maximuma az A pontban van, aminek az értékét már kiszámítottuk (az $0.25 \cdot p \cdot r$).

A BC szakaszon, ahol $\varphi \in [0^\circ, 90^\circ]$:

$$N'(\varphi) = \frac{p \cdot r}{4} \cdot \sin \varphi - p \cdot r \cdot \cos \varphi = -\frac{p \cdot r}{4} \cdot (\sin \varphi - 4 \cdot \cos \varphi) = 0 \quad (2.216)$$

(a 2.200. összefüggések alapján, mivel itt nincs megoszló terhelés, ez $T(\varphi)$ -vel azonos), ahonnan $\cos \varphi$ -vel való osztás után $\varphi = \arctg 4 = 75.964^\circ$. Ezt a megfelelő képletbe behelyettesítve a szélsőértékre az

$$N_{max} = N(\varphi = 75.964^\circ) \approx -1.031 \cdot p \cdot r. \quad (2.217)$$

Az AB szakaszon

$$T'(\varphi) = -\frac{p \cdot r}{4} \cdot \cos \varphi + p \cdot r \cdot \cos^2 \varphi - p \cdot r \cdot \sin^2 \varphi = \frac{p \cdot r}{4} \cdot (8 \cdot \cos^2 \varphi - \cos \varphi - 4) = 0, \quad (2.218)$$

a zárójelben levő másodfokú egyenletet $\cos \varphi$ -ben megoldva két gyököt kapunk, amelyeknek a 39.443° -os és a 130.343° -os szögek felelnek meg. Az előbbi nincs a tartományon, az utóbbinak pedig a $T(\varphi = 130.343^\circ) \approx -0.684 \cdot p \cdot r$ érték felel meg.

A BC szakaszon a

$$T'(\varphi) = -\frac{p \cdot r}{4} \cdot \cos \varphi - p \cdot r \cdot \sin \varphi = \frac{p \cdot r}{4} \cdot (4 \cdot \sin \varphi + \cos \varphi) = 0 \quad (2.219)$$

egyenletből $\varphi = \arctg(-1/4) = -14.036^\circ$, ami kívül esik a tartományon. Ha figyelembe vesszük a végpontokban kiszámított értékeket, akkor észrevehetjük, hogy a legnagyobb nyíró igénybevétel a C pontban jelenik meg:

$$T_{max} = T(\varphi = 0^\circ) = p \cdot r. \quad (2.220)$$

Az AB szakaszon

$$M'(\varphi) = r \cdot \left(-\frac{p \cdot r}{4} \cdot \sin \varphi + p \cdot r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \right) = -\frac{p \cdot r^2}{4} \cdot \sin \varphi \cdot (1 - 4 \cdot \cos \varphi) = 0 \quad (2.221)$$

(a 2.200. összefüggések alapján ez $r \cdot T$), amelynek gyökei $\varphi = \arcsin 0 = 180^\circ$, illetve $\varphi = \arccos(1/4) \approx 75.522^\circ$, mely utóbbi nincs a tartományon. A lehetséges gyököknek megfelelő érték az A támasznál érvényes zérus hajlító igénybevétel.

A BC szakaszon

$$M'(\varphi) = r \cdot \left(-\frac{p \cdot r}{4} \cdot \sin \varphi + p \cdot r \cdot \cos \varphi \right) = -\frac{p \cdot r^2}{4} \cdot (\sin \varphi - 4 \cdot \cos \varphi) = 0 \quad (2.222)$$

amelynek gyöke $\varphi = \arctg 4 \approx 75.964^\circ$, aminek az $M(\varphi = 75.964^\circ) \approx -0.781 \cdot p \cdot r$. A legnagyobb hajlító igénybevétel tehát

$$M_{max} = M(\varphi = 75.964^\circ) \approx -0.781 \cdot p \cdot r. \quad (2.223)$$

Az előbbi két példában az ív körív volt. Ez a geometria bizonyos egyszerűsítésekhez vezet. Ekkor ugyanis a tartó tengelyének görbülete állandó és a görbületi sugara a körív sugarával egyenlő. A körív normálisa minden pontban sugárirányú. Ezen sajátosságok tették lehetővé azt, hogy a feladatokat egyetlen geometriai változó (a φ szög) segítségével, parametrikusan oldottuk meg.

Előfordulhat, hogy a tartó nem körív alakú. Egy tetszőleges sík-görbe esetén az ív valamely pontját az (X, Y) koordináta-pár írja le. Ezek közül Y -t ki lehet fejezni X függvényeként (az $Y(X)$ függvény az illető görbe explicit egyenlete), vagy pedig a koordinátákat parametrikusan is megadhatjuk az $X = X(t)$ és az $Y = Y(t)$ függvényekkel (ezek a görbe parametrikus egyenletei). Tehát ekkor is csak egy független változóval dolgozunk, az pedig vagy az X koordináta, vagy a t paraméter.

A görbe pontjaiban szükségünk van a normális és a tangenciális irány ismeretére (ezekből elegendő egyet kiszámítani, mert a másik az előbbire merőleges). Az érintő egy egyenes, amelynek az egyenlete a következő:

$$\frac{X - X(t)}{X'(t)} = \frac{Y - Y(t)}{Y'(t)}. \quad (2.224)$$

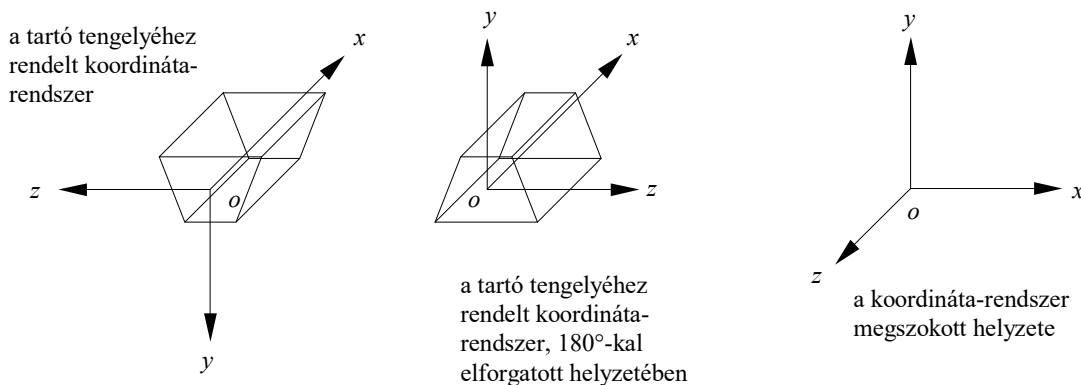
Ennek az egyenesnek az m iránytényezőjét meghatározván az $\arctg m$ szög az érintő dőlését (a vízszintessel bezárt szögét) fogja adni, a normális irány pedig erre merőleges lesz.

Tehát ez esetben az ív valamely kurrens pontjában meghatározzuk az e ponttól balra levő erők és nyomatékok eredőit (az erőket nyilván a tengelyekre eső vetületeikkel adjuk meg), majd ezeknek az erőknek megkeressük a normális és a tangenciális irányra eső vetületeit. E vetületek összege adja N és T értékét az adott d pontban, az eredő nyomaték pedig a keresett M hajlítónyomatékkal azonos.

3. KERESZTMETSZETI JELLEMZŐK

3.1. Keresztmetszeti jellemzők

Az előbbi fejezetben kiszámítottuk a keresztmetszeti igénybevételeket: ezek koncentrált erők és nyomatékok, amelyek a tartó keresztmetszetén hatnak. A végső cél azonban nem az igénybevételek, hanem az igénybevételek által előidézett feszültségek megállapítása lenne, mely problémával a következő fejezetekben fogunk foglalkozni. Ezekre a feszültségekre bizonyos képleteket fogunk kapni, amelyekben a tartó keresztmetszetének geometriájától függő, tehát geometriai jellegű mennyiségek is szerepelnek. Ebben a fejezetben ezekről a mennyiségekről lesz szó. A megszokott xy koordináta-rendszer helyett ezeket a tartó keresztmetszetéhez rendelt yz koordináta-síkban kell definiálnunk (2.2. ábra). Az x tengely irányába tekintve z vízszintesen balra, y pedig függőlegesen lefele mutat. Ezt a koordináta-síkot 180° -kal elfordítjuk, így a tengelyek a szokásos xy elrendezésnek megfelelőek lesznek, s az egyszerűség kedvéért a szöveget a z tengelytől az y tengely irányában mérjük (3.1. ábra; valójában, ha betartanánk az egyezményes trigonometriai irányt, ennek pont fordítva kellene történnie).



3.1. ábra. A keresztmetszeti jellemzők kiszámításában használt koordináta-rendszer

3.2. A keresztmetszet területe

3.2.1. Az egyszerű idomok területe

A keresztmetszetet alkotó síkidom területét a legáltalánosabb módon az

$$A = \int_D dA \quad (3.1)$$

formában adhatjuk meg, ahol D a síkidom tartománya, $dA = dy \cdot dz$ (3.2.a. ábra). E képlet szerint a területet az idomot lefedő dA infinitezimális terület-elemek nagyságának az összege adja (3.2. ábra). Mértékegysége m^2 vagy mm^2 . Ez egy kettős integrál, amely egy egyváltozós határozott integrállá (Riemann-integrállá), vagy azok algebrai összegévé alakítható át, például az

$$A = \int_D dA = \int_a^b \int_0^{y(z)} dy \cdot dz = \int_a^b y(z) dz \quad (3.2)$$

formában. Tekinthejtük ez utóbbi képletet úgy is, hogy az elemi felületet egy $y(z)$ szélességű és dz magasságú téglalap formájúnak tekintjük: $dA = y(z) \cdot dz$, ahogyan azt a 3.2.b. ábrán látjuk.

Megjegyzendő, hogy a 3.2. képlet csak akkor adja vissza helyesen a terület nagyságát, amikor az $y(z)$ az $[a,b]$ intervallumon végig a tengely felett van, ugyanis a tengely alatti terület negatív előjelű lesz. Emiatt ezt helyesebb a következőképpen használnunk:

$$A = \int_a^b |y(z)| dz. \quad (3.3)$$

3.1. példa. *A téglalap területe*

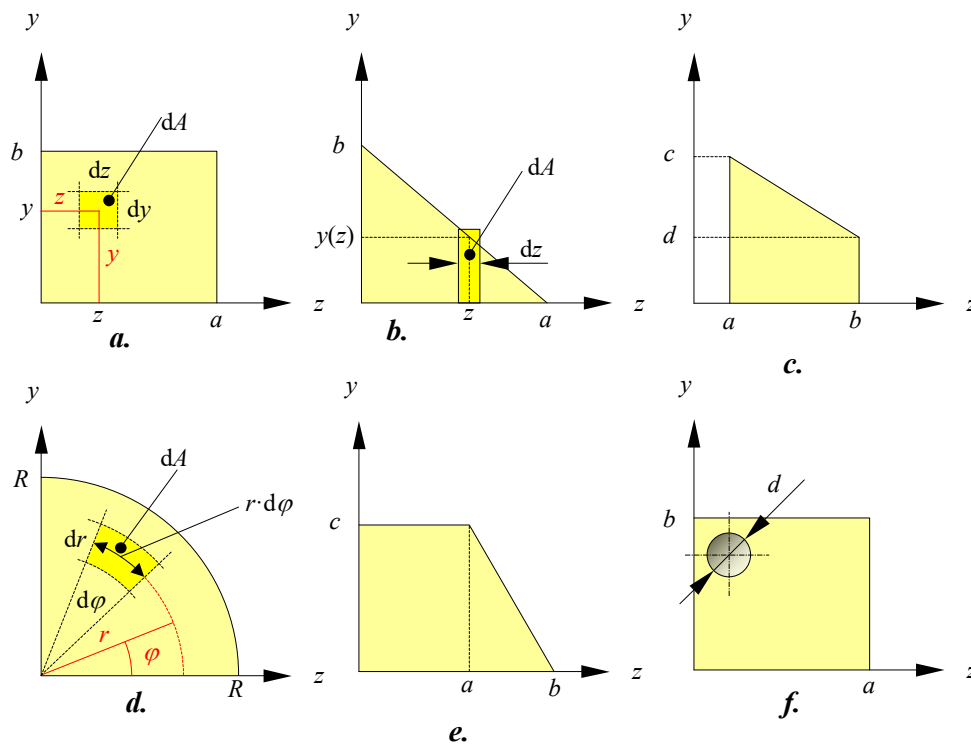
A 3.2.a. ábrán a téglalapot határoló felső vízszintes vonal egyenlete $y(z) = b$, amellyel a téglalap területe

$$A = \int_0^a b dz = b \cdot z \Big|_0^a = a \cdot b. \quad (3.4)$$

3.2. példa. *A háromszög területe*

A 3.2.b. ábrán a háromszöget lehatároló ferde vonal egyenlete, amely a háromszögek hasonlóságából is megállapítható, $y(z) = \frac{b}{a} \cdot (a - z)$, amellyel a háromszög területe

$$A = \int_0^a \frac{b}{a} \cdot (a - z) dz = \frac{b}{a} \cdot \left(a \cdot z - \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^a = \frac{a \cdot b}{2}. \quad (3.5)$$



3.2. ábra. Idomok területe

3.3. példa. A trapéz területe

A c. ábrán levő trapéz ferde oldalának egyenlete, a pontok koordinátaival $y(z) = (b-z) \cdot \frac{c-d}{b-a} + d$, a területe pedig

$$A = \int_a^b \left[(b-z) \cdot \frac{c-d}{b-a} + d \right] dz = \left[\left(b \cdot z - \frac{z^2}{2} \right) \cdot \frac{c-d}{b-a} + d \cdot z \right]_a^b = \frac{(b-a) \cdot (c+d)}{2}. \quad (3.6)$$

3.4. példa. A körcikk területe

A d. ábrán látható negyed kör egyenlete $y(z) = \sqrt{r^2 - z^2}$, amellyel a negyed kör területe

$$\begin{aligned} A &= \int_0^R \sqrt{R^2 - z^2} dz = R \cdot \int_0^R \sqrt{1 - \left(\frac{z}{R}\right)^2} dz = R \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \cdot R \cdot \cos \varphi d\varphi = \\ &= R^2 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = R^2 \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2 \cdot \varphi)}{2} d\varphi = R^2 \cdot \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2 \cdot \varphi)}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi \cdot R^2}{4}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ez utóbbi számításban felhasználtuk a $z = R \cdot \sin \varphi \Rightarrow dz = R \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi$ változó-cserét.

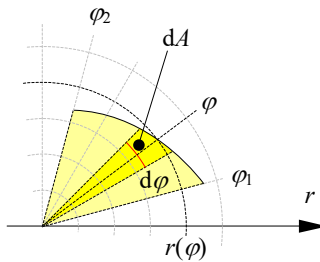
A negyed kör és általában, egy körcikk területét az $r\varphi$ poláris koordináták segítségével könnyebben ki lehet számolni. Ebben a koordináta-rendszerben a terület-elem $dA = r \cdot d\varphi \cdot dr$. Ezzel

$$A = \int_D dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^R r \cdot dr \cdot d\varphi = \int_0^{\pi/2} \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^R d\varphi = \frac{R^2}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{R^2}{2} \cdot \varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi \cdot R^2}{4}. \quad (3.8)$$

A körcikk esetében a felső határérték a körcikk α középponti szöge kell legyen $\pi/2$ helyett. Ha a Descartes-koordinátákat használnánk, a tetszőleges középponti szögű körcikk területét csak összetett idom területeként tudnánk kiszámítani.

Még egyszerűbben, a terület kiszámításakor a poláris koordinátákban megadott $r(\varphi)$ függvénnyel leírt görbék esetében a dA terület-elemet tekinthetjük egy $d\varphi$ középponti szögű körcikként is (3.3. ábra), ekkor a 3.8. alapján $dA = r^2(\varphi) \cdot d\varphi / 2$ és

$$A = \int_D dA = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi. \quad (3.9)$$



3.3. ábra. Poláris koordinátákkal megadott idom

3.2.2. Az összetett idomok területe

Az összetett idomok területét egyszerű idomokra bontással számítjuk ki: ha egy egyszerű idom területe A_i , akkor az összetett idom területét az alkotó idomok területeinek összege alkotja, $A = \sum_i A_i$. Mivel az egészet a részek összegeként határozhatjuk meg, a területről azt mondjuk, hogy *additív* mennyiség. Az anyaggal kitöltött terület pozitív mennyiség, a koordináta-rendszerben való elhelyezkedésétől függetlenül, a hiányzó részek, lyukak területét azonban az összegzésnél negatívnak vesszük (a hiányzó rész területét kivonjuk).

3.5. példa. A trapéz, mint összetett idom

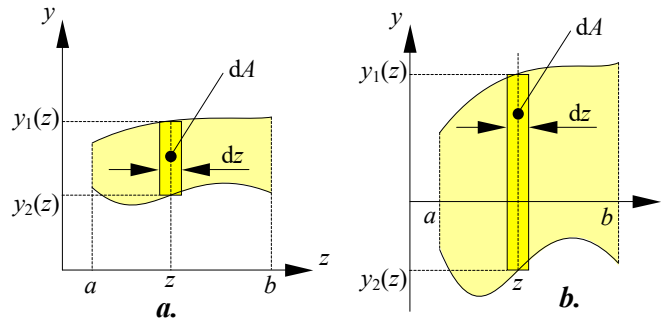
A 3.2.e. ábrán látható trapézt lehatároló tört vonalat, mint függvényt, két intervallumon tudjuk definiálni. A trapéz területét e két függvény integráljának összege, egy téglalap és egy háromszög területének összege adja:

$$A_{\text{Trapéz}} = A_{\text{Téglalap}} + A_{\text{Háromszög}} = c \cdot a + \frac{c \cdot (b-a)}{2} = \frac{c \cdot (a+b)}{2}. \quad (3.10)$$

3.6. példa. Egy kilyukasztott idom

Az f. ábrán egy kilyukasztott téglalapot látunk. Az előbbi példában az összetett idom területét összegzéssel kaptuk meg. Ebben az esetben a hiányzó területet negatívnak tekintjük, tehát:

$$A_{\text{Idom}} = A_{\text{Téglalap}} - A_{\text{Kör}} = a \cdot b - \frac{\pi \cdot d^2}{4}. \quad (3.11)$$



3.4. ábra. Összetett idomok területe

A 3.4. ábrán is két összetett idomot látunk, mindkettő esetében a kiszámítandó terület két függvény, $y_1(z)$ és $y_2(z)$ grafikonja között terül el. Az ilyen formájú idom a matematikai analízisben egy *normál tartományt* definiál, s ekkor a 3.1. integrált az

$$A = \int_a^b \int_{y_2(z)}^{y_1(z)} dy \cdot dz = \int_a^b (y_1(z) - y_2(z)) dz \quad (3.12)$$

formában lehet átírni, ahol

$$dA = (y_1(z) - y_2(z)) \cdot dz. \quad (3.13)$$

Az a. ábrán látható idom területe a felső grafikon alatti terület és az alsó grafikon alatti terület különbsége, a b. ábrán levő idom területét pedig az első grafikon alatti, a z tengelyig számított terület, valamint a második grafikon fölötti, szintén a z tengely számított terület összegeként értelmezhetjük.

3.3. Az elsőrendű nyomatékok és a geometriai középpont

3.3.1. Az elsőrendű (sztatikai) nyomatékok

Bizonyos képletekben, nem csak a szilárdságtaniakban, valamely koordináta

$$\begin{aligned} S_z &= \int_D y \, dA, \\ S_y &= \int_D z \, dA \end{aligned} \quad (3.14)$$

formájú integráljaival találkozhatunk. Ezek egy síkidom, keresztmetszet sztatikai nyomatékai.

Egyenletes vastagságú homogén lemezből kivágott, vízszintes síkban fekvő idomok esetében az előbbi képletekkel kiszámított mennyiségek a lemez tengelyekre vonatkozó sztatikai nyomatékában jelennek meg: a kiszámításukhoz az integrált a lemez egységnyi súlyával kell beszorozni. Ha a mechanikában szereplő sztatikai nyomatékok képletéből töröljük a lemez egységnyi súlyát, akkor tisztán geometriai mennyiségekhez jutunk, amelyek megtartották az eredeti elnevezésüket. Ezeket pontosabban a síkidom elsőrendű nyomatékainak nevezünk, mert a koordináták első hatványának az integráljairól van szó.

A valamely tengelyre vonatkoztatott elsőrendű nyomatékot a 3.14. képletek szerint úgy kapjuk, hogy a dA terület-elemek nagyságát megszorozzuk azoknak az illető tengelytől mért előjeles távolságával, s az így képzett szorzatokat összegezzük a teljes idomra (3.2.a. ábra). Az elsőrendű nyomaték tehát additív mennyiség, amely lehet pozitív, negatív vagy nulla, attól függően, hogy az idom területe a tengelyhez viszonyítva hogyan oszlik meg. Mértékegysége m^3 vagy mm^3 .

Azokban az esetekben, amelyekben az idom területét a 3.2. összefüggéssel számíthatjuk, a 3.14. képleteket az

$$\begin{aligned} S_z &= \int_D y \, dA = \int_a^b \int_0^{y(z)} y \, dy \cdot dz = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b y^2(z) \, dz, \\ S_y &= \int_D z \, dA = \int_c^d \int_0^{z(y)} z \, dz \cdot dy = \frac{1}{2} \cdot \int_c^d z^2(y) \, dy \end{aligned} \quad (3.15)$$

Riemann-féle integrálokká alakíthatjuk át, amelyeket a matematikai analízis tankönyvekből ismerhetünk. A négyzetre emelés eltűnteti a koordináta előjelét, emiatt megfelelőbb a

$$\begin{aligned} S_z &= \frac{1}{2} \cdot \int_a^b y(z) \cdot |y(z)| \, dz = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b \operatorname{sgn}(y) \cdot y^2(z) \, dz, \\ S_y &= \frac{1}{2} \cdot \int_c^d z(y) \cdot |z(y)| \, dy = \frac{1}{2} \cdot \int_c^d \operatorname{sgn}(z) \cdot z^2(y) \, dy \end{aligned} \quad (3.16)$$

formulák használata.

3.7. példa. A téglalap elsőrendű nyomatékai

Az előbbi képletekkel a 3.2.a. ábrán látható téglalagra

$$\begin{aligned} S_z &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^a b^2 \, dz = \frac{a \cdot b^2}{2}, \\ S_y &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^b a^2 \, dy = \frac{a^2 \cdot b}{2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.8. példa. *A háromszög elsőrendű nyomatékai*

A 3.2.b. ábrán levő háromszögre

$$S_z = \frac{1}{2} \cdot \int_0^a \left[\frac{b}{a} \cdot (a-z) \right]^2 dz = \frac{b^2}{2 \cdot a^2} \cdot \left(a^2 \cdot z - 2 \cdot a \cdot \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{a \cdot b^2}{6},$$

$$S_y = \frac{1}{2} \cdot \int_0^b \left[\frac{a}{b} \cdot (b-y) \right]^2 dy = \frac{a^2}{2 \cdot b^2} \cdot \left(b^2 \cdot y - 2 \cdot b \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^b = \frac{a^2 \cdot b}{6},$$
(3.18)

ahol a második egyenletben, az ábrán levő háromszögek hasonlóságából, $z(y) = \frac{a}{b} \cdot (b-y)$.

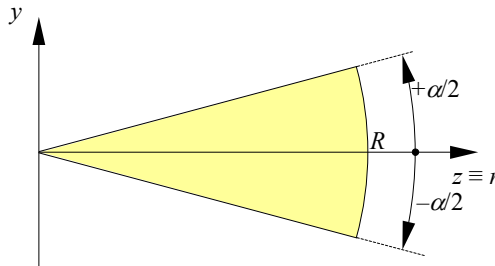
3.9. példa. *A körcikk elsőrendű nyomatékai*

Poláris koordináta-rendszerben a 3.2.d. ábrán látható terület-elemmel kell dolgoznunk. Ekkor az r tengellyel egybeeső z tengelyre, valamint az arra merőleges irányú y tengelyre a következőket kapjuk:

$$S_z = \int_D r \cdot \sin \varphi \, dA = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^{r(\varphi)} r^2 \cdot \sin \varphi \, dr \, d\varphi,$$

$$S_y = \int_D r \cdot \cos \varphi \, dA = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^{r(\varphi)} r^2 \cdot \cos \varphi \, dr \, d\varphi$$
(3.19)

(mivel $z = r \cdot \cos \varphi$ és $y = r \cdot \sin \varphi$).

**3.5. ábra.** *Körcikk*

A 3.2.d. ábrán látható negyed körre e képletek az

$$S_z = \int_0^{\pi/2} \int_0^R r^2 \cdot \sin \varphi \, dr \, d\varphi = \frac{R^3}{3} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \, d\varphi = -\frac{R^3}{3} \cdot \cos \varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{R^3}{3},$$

$$S_y = \int_0^{\pi/2} \int_0^R r^2 \cdot \cos \varphi \, dr \, d\varphi = \frac{R^3}{3} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi = \frac{R^3}{3} \cdot \sin \varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{R^3}{3}$$
(3.20)

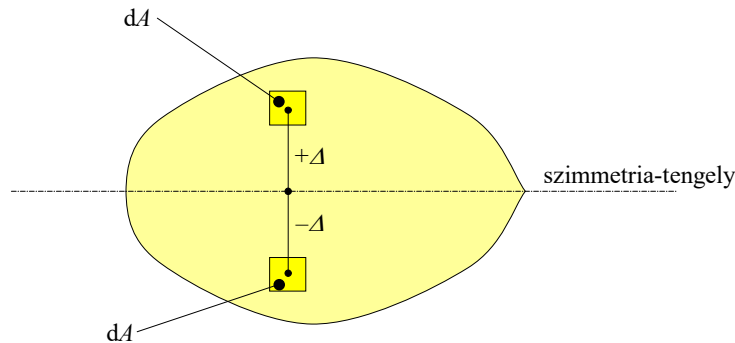
értékekhez vezetnek (a szimmetriára hivatkozva elegendő lett volna a kettő közül csak az egyiket kiszámítani); a 3.5. ábrán látható körcikkre, ahol a z tengely a körcikk szimmetria-tengelye, a megfelelő integrálási határokat behelyettesítve pedig

$$\begin{aligned}
 S_z &= \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} \int_0^R r^2 \cdot \sin \varphi \, dr \, d\varphi = \frac{R^3}{3} \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} \sin \varphi \, d\varphi = -\frac{R^3}{3} \cdot \cos \varphi \Big|_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} = 0, \\
 S_y &= \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} \int_0^R r^2 \cdot \cos \varphi \, dr \, d\varphi = \frac{R^3}{3} \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} \cos \varphi \, d\varphi = \frac{R^3}{3} \cdot \sin \varphi \Big|_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} = \frac{2 \cdot R^3 \cdot \sin(\alpha/2)}{3}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

(itt felhasználtuk azt, hogy a koszinusz páros, a szinusz viszont páratlan függvény: $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$).

3.3.2. A geometriai középpont (súlypont)

Észrevehetjük, hogy a körcikk szimmetria-tengelyére számított elsőrendű nyomaték zéró lett. A sztatikában ez azt jelenti, hogy az illető *súlyvonal* mentén megtámasztott lemez egyensúlyban van, az nem billen el. Könnyen beláthatjuk, hogy az idom szimmetria-tengelyei súlyvonalak: a rájuk számított elsőrendű nyomaték a szimmetria miatt biztos nulla lesz, mert bármely dA elemi felület esetében létezik egy, az illető tengelyre nézve szimmetrikusan elhelyezkedő párja. Mivel bármely ilyen pár esetében a koordináták csak előjelben különböznek egymástól, az eredő elsőrendű nyomatékuk zéró lesz (3.6. ábra).



3.6. ábra. Szimmetrikus idom

A szimmetria-vonalak az idom területét megfeleleztik, mivel az idom két fele egymás tükörképe. A súlyvonalakra ez nem általánosan igaz, viszont a súlyvonallal elmetezett keresztmetszet két felének az elsőrendű nyomatéka csak előjelben különbözhet egymástól (mivel a kettő összege nulla kell legyen).

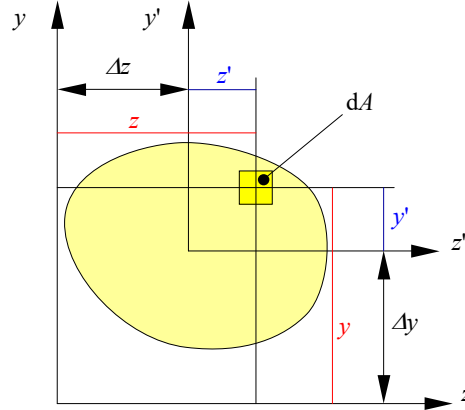
Felvetődik az a kérdés, hogy miként tudjuk meghatározni a nem-szimmetrikus idomok súlyvonalainak a helyzetét. Tegyük fel, hogy a tengelyekkel párhuzamos súlyvonalakat keressük, amelyeket azoknak az illető a tengelyektől mért Δy , illetve Δz távolságának kiszámításával lokalizálhatunk (3.7. ábra). Ha a z koordináta-tengelyt a Δy és az y -t pedig a Δz távolságra toljuk el, akkor az új $z'y'$ koordináta-rendszerünk origója az eredeti zy rendszerben a $(\Delta z, \Delta y)$ koordinátákkal rendelkezik. Mindkét koordináta, vagyis a Δz és a Δy távolságok, előjeles mennyiségek. Ekkor a koordináta- transzformációt a

$$\begin{aligned}
 z' &= z - \Delta z \\
 y' &= y - \Delta y
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

relációk írják le.

A 3.14. definíciók értelmében, az eltolt koordináta-rendszerben

$$\begin{aligned}
 S_{z'} &= \int_D y' \, dA = \int_D (y - \Delta y) \, dA = \int_D y \, dA - \Delta y \cdot \int_D dA = S_z - \Delta y \cdot A, \\
 S_{y'} &= \int_D z' \, dA = \int_D (z - \Delta z) \, dA = \int_D z \, dA - \Delta z \cdot \int_D dA = S_y - \Delta z \cdot A.
 \end{aligned}
 \tag{3.23}$$



3.7. ábra. Az elsőrendű nyomaték változása a tengelyek eltolásának esetében

Ha a tengelyekkel párhuzamos súlyvonalak helyzetét keressük, akkor a fenti két mennyiség nulla kell legyen:

$$\begin{aligned}
 S_{z'} = 0 &\Rightarrow \Delta y = y_G = \frac{S_z}{A}, \\
 S_{y'} = 0 &\Rightarrow \Delta z = z_G = \frac{S_y}{A}.
 \end{aligned}
 \tag{3.24}$$

E képletek értelmében bármelyik idomnak csak egy adott irányú súlyvonala lehet (nem lehet két párhuzamos súlyvonala). Ha két súlyvonalunk van (például az idom szimmetria-tengellyel rendelkezik), akkor az elsőrendű nyomaték mindkettőre nézve zéró lesz és a két tengely metszéspontja az idom *súlypontja*, az előbbi képletek pedig ennek a pontnak a koordinátáit adják meg. Megjegyzendő, hogy a súlyvonal és a súlypont sztatikából átvett fogalmak. A tényleges súlypont csak egy homogén és egyenletes vastagságú lemez esetében esik a 3.24. képletekkel meghatározott pontra, éppen ezért ez utóbbit helyesebben *geometriai középpont*nak kellene nevezzük.

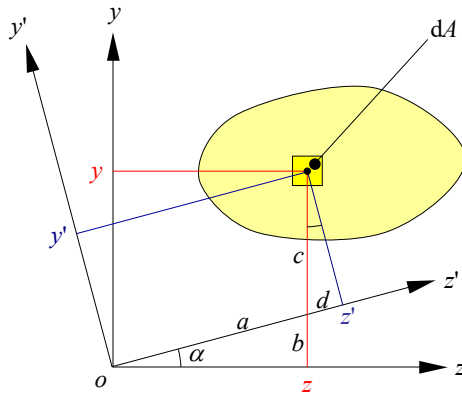
A zy koordináta-rendszer helyzete tetszőleges lehet: vizsgáljuk meg, mi történik az elsőrendű nyomatékokkal, ha a koordináta-rendszert elfordítjuk az origója körül, egy tetszőleges α szöggel (3.8. ábra). Az elforgatás egy nemlineáris transzformáció, amelyet a következőképpen adhatunk meg:

$$\begin{aligned}
 z' &= z \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha \\
 y' &= -z \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha,
 \end{aligned}
 \tag{3.25}$$

mivel $z' = a + d$ és $y' = c \cdot \cos \varphi$, ahol $a = z / \cos \varphi$, $b = z \cdot \operatorname{tg} \alpha = z \cdot \sin \alpha / \cos \alpha$, $c = y - b$, $d = c \cdot \sin \alpha$ és felhasználtuk a $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ összefüggést. Az α szöveget a z tengely felől az y fele mérjük; szigorúan véve ez egy negatív irányú forgatás. Ha e képleteket át akarjuk írni tényleges pozitív irányú elforgatásra, akkor $-\alpha$ behelyettesítésével a szinuszos tagok előjele megváltozik.

A 3.14. definíciók és a 3.25. transzformáció felhasználásával az elforgatott koordináta-rendszerben

$$\begin{aligned}
 S_{z'} &= \int_D y' \, dA = \int_D (-z \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha) \, dA = -\sin \alpha \cdot \int_D z \, dA + \cos \alpha \cdot \int_D y \, dA = \\
 &= S_z \cdot \cos \alpha - S_y \cdot \sin \alpha, \\
 S_{y'} &= \int_D z' \, dA = \int_D (z \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha) \, dA = \cos \alpha \cdot \int_D z \, dA + \sin \alpha \cdot \int_D y \, dA = \\
 &= S_z \cdot \sin \alpha + S_y \cdot \cos \alpha.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$



3.8. ábra. Az elsőrendű nyomaték változása a tengelyek elforgatásának esetében

Ebből az következik, hogy bármely olyan tengelyre nézve, amelyik a geometriai középponton áthalad, az elsőrendű nyomaték zéró lesz. Mivel nem lehet két párhuzamos súlyvonalunk, ebből az is következik, hogy csak egyetlen súlypontunk létezhet. A koordináta-transzformációk alapján leszűrhető még az is, hogy ha három vagy több szimmetria-tengelyünk van, azok ugyanabban a pontban (a geometriai középpontban) metszik egymást.

3.10. példa. A téglalap geometriai középpontja

Az egyszerű idomok esetében a geometriai középpont koordinátái viszonylag könnyen kiszámíthatók. A 3.24. képletek és az eddig kiszámított mennyiségek alapján, a 3.2. ábrán látható téglalap geometriai középpontja az alap, illetve a magasság felénél van:

$$\begin{aligned}
 z_G &= \frac{\frac{a^2 \cdot b}{2}}{a \cdot b} = \frac{a}{2}, \\
 y_G &= \frac{\frac{a \cdot b^2}{2}}{a \cdot b} = \frac{b}{2}.
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

3.11. példa. A háromszög geometriai középpontja

A 3.2. ábra derékszögű háromszöge (és általában minden háromszög) súlypontja az alap felett, a magasság harmadánál van:

$$z_G = \frac{\frac{a^2 \cdot b}{a \cdot b}}{\frac{2}{a \cdot b}} = \frac{a}{3},$$

$$y_G = \frac{\frac{a \cdot b^2}{a \cdot b}}{\frac{2}{a \cdot b}} = \frac{b}{3}.$$
(3.28)

3.12. példa. A körcikk geometriai középpontja

A 3.2. ábrán szereplő negyed körre

$$z_G = y_G = \frac{\frac{R^3}{3}}{\frac{\pi \cdot R^2}{4}} = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi},$$
(3.29)

a 3.5. ábrán látható körcikkre pedig

$$z_G = \frac{\frac{2 \cdot R^3 \cdot \sin(\alpha/2)}{3}}{\frac{\alpha \cdot R^2}{2}} = \frac{4 \cdot R \cdot \sin(\alpha/2)}{3 \cdot \alpha},$$

$$y_G = 0.$$
(3.30)

3.3.3. Összetett idomok elsőrendű nyomatékai és geometriai középpontja

A 3.24. képleteket megfordíthatjuk: ha ismerjük egy idom területét és a geometriai középpontjának a helyzetét, akkor az elsőrendű nyomatékait a 3.14. integrálok kiszámítása nélkül, az

$$S_z = y_G \cdot A,$$

$$S_y = z_G \cdot A$$
(3.31)

szorzatokkal is megadhatjuk.

Egy összetett idom esetében, mivel az elsőrendű nyomaték additív, a teljes idom nyomatékait az őt alkotó elemi idomok nyomatékainak összegeként kapjuk. A lyukas idomoknál a lyuk elsőrendű nyomatékait fordított előjellel kell venni:

$$S_z = \sum_i S_{z,i} = \sum_i (y_{G,i} \cdot A_i) = y_G \cdot A,$$

$$S_y = \sum_i S_{y,i} = \sum_i (z_{G,i} \cdot A_i) = z_G \cdot A,$$
(3.32)

ahol az előbbi alfejezet értelmében

$$A = \sum_i A_i.$$
(3.33)

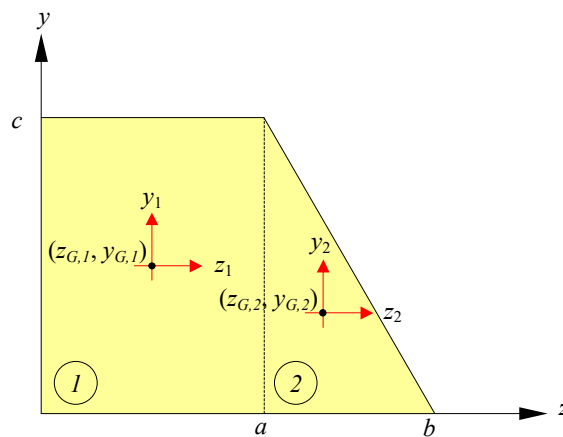
Az összetett idom geometriai középpontjának koordinátái tehát

$$z_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_i S_{y,i}}{\sum_i A_i} = \frac{\sum_i (z_{G,i} \cdot A_i)}{\sum_i A_i},$$

$$y_G = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum_i S_{z,i}}{\sum_i A_i} = \frac{\sum_i (y_{G,i} \cdot A_i)}{\sum_i A_i}.$$
(3.34)

3.13. példa. A derékszögű trapéz geometriai középpontja

A 3.2.c. és e. ábrákon látható derékszögű trapézokra egyszerűbb lesz ezt az elvet alkalmazni, mint az elsőrendű nyomatékok integrállal való kiszámítását megcélózni. Példaként vegyük az e. ábrán levőt, amelyet egy téglalpra (1) és egy háromszögre (2) bontunk fel (3.9. ábra).



3.10. ábra. Derékszögű trapéz, mint összetett idom

A téglalap geometriai középpontjának koordinátái

$$z_{G,1} = \frac{a}{2},$$

$$y_{G,1} = \frac{c}{2},$$
(3.35)

a háromszögé pedig

$$z_{G,2} = a + \frac{b-a}{3} = \frac{2 \cdot a + b}{3},$$

$$y_{G,2} = \frac{c}{3}.$$
(3.36)

A téglalap területe

$$A_1 = a \cdot c,$$
(3.37)

a háromszögé pedig

$$A_2 = \frac{(b-a) \cdot c}{2}.$$
(3.38)

E mennyiségekkel a téglalap elsőrendű nyomatékai

$$\begin{aligned} S_{z,1} &= y_{G,1} \cdot A_1 = \frac{c}{2} \cdot a \cdot c = \frac{a \cdot c^2}{2}, \\ S_{y,1} &= z_{G,1} \cdot A_1 = \frac{a}{2} \cdot a \cdot c = \frac{a^2 \cdot c}{2}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

a háromszögé pedig

$$\begin{aligned} S_{z,2} &= y_{G,2} \cdot A_2 = \frac{c}{3} \cdot \frac{(b-a) \cdot c}{2} = \frac{(b-a) \cdot c^2}{6}, \\ S_{y,2} &= z_{G,2} \cdot A_2 = \frac{2 \cdot a + b}{3} \cdot \frac{(b-a) \cdot c}{2} = \frac{(-2 \cdot a^2 + b^2 + a \cdot b) \cdot c}{6}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

A trapéz elsőrendű nyomatékai tehát

$$\begin{aligned} S_z &= S_{z,1} + S_{z,2} = \frac{a \cdot c^2}{2} + \frac{(b-a) \cdot c^2}{6} = \frac{(2 \cdot a + b) \cdot c^2}{6}, \\ S_y &= S_{y,1} + S_{y,2} = \frac{a^2 \cdot c}{2} + \frac{(-2 \cdot a^2 + b^2 + a \cdot b) \cdot c}{6} = \frac{(a^2 + b^2 + a \cdot b) \cdot c}{6}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

a teljes területe pedig

$$A = A_1 + A_2 = a \cdot c + \frac{(b-a) \cdot c}{2} = \frac{(a+b) \cdot c}{2}. \quad (3.42)$$

A trapéz geometriai középpontjának koordinátái tehát

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{(a^2 + b^2 + a \cdot b) \cdot c}{6}}{\frac{(a+b) \cdot c}{2}} = \frac{a^2 + b^2 + a \cdot b}{3 \cdot (a+b)}, \\ y_G &= \frac{S_z}{A} = \frac{\frac{(2 \cdot a + b) \cdot c^2}{6}}{\frac{(a+b) \cdot c}{2}} = \frac{(2 \cdot a + b) \cdot c}{3 \cdot (a+b)}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

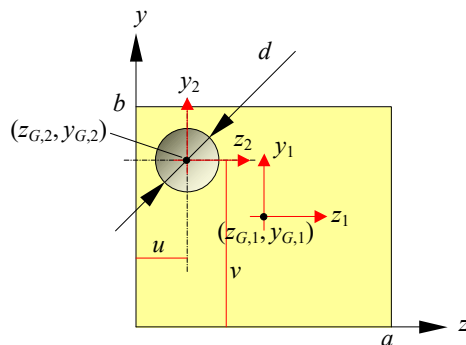
3.14. példa. Egy lyukas idom geometriai középpontja

A 3.2.f.-3.11. ábrákon látható lyukas idommal is hasonlóképpen járunk el, ezt egy téglalap és egy kör különbségének tekintjük. A téglalap geometriai középpontjának a koordinátái

$$\begin{aligned} z_{G,1} &= \frac{a}{2}, \\ y_{G,1} &= \frac{b}{2}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

a kör középpontjáé, ami annak a geometriai középpontja,

$$\begin{aligned} z_{G,2} &= u, \\ y_{G,2} &= v. \end{aligned} \quad (3.45)$$



3.11. ábra. Lyukas téglalap

A téglalap területe

$$A_1 = a \cdot b, \quad (3.46)$$

a köré pedig

$$A_2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4}. \quad (3.47)$$

A téglalap elsőrendű nyomatékai

$$S_{z,1} = y_{G,1} \cdot A_1 = \frac{b}{2} \cdot a \cdot b = \frac{a \cdot b^2}{2}, \quad (3.48)$$

$$S_{y,1} = z_{G,1} \cdot A_1 = \frac{a}{2} \cdot a \cdot b = \frac{a^2 \cdot b}{2},$$

a köré pedig

$$S_{z,2} = y_{G,2} \cdot A_2 = v \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}, \quad (3.49)$$

$$S_{y,2} = z_{G,2} \cdot A_2 = u \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}.$$

A trapéz elsőrendű nyomatékai tehát

$$S_z = S_{z,1} - S_{z,2} = \frac{a \cdot b^2}{2} - v \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}, \quad (3.50)$$

$$S_y = S_{y,1} - S_{y,2} = \frac{a^2 \cdot b}{2} - u \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4},$$

ahol a hiánynak megfelelő mennyiséget fordított előjellel vettük. Hasonló eljárással, az idom teljes területe:

$$A = A_1 - A_2 = a \cdot b + \frac{\pi \cdot d^2}{4}. \quad (3.51)$$

Amennyiben a lyukas téglalap geometriai középpontját keressük, akkor az előbbi mennyiségek megfelelő hányadosaival

$$z_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{a^2 \cdot b}{2} - u \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}}{a \cdot b + \frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{2 \cdot a^2 \cdot b - \pi \cdot u \cdot d^2}{4 \cdot a \cdot b + \pi \cdot d^2},$$

$$y_G = \frac{S_z}{A} = \frac{\frac{a \cdot b^2}{2} - v \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}}{a \cdot b + \frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{2 \cdot a \cdot b^2 - \pi \cdot v \cdot d^2}{4 \cdot a \cdot b + \pi \cdot d^2}.$$
(3.52)

3.4. A másodrendű nyomatékok és azok főértékei

3.4.1. A másodrendű (tehetetlenségi) nyomatékok

A koordináták

$$I_z = \int_D y^2 \, dA,$$

$$I_y = \int_D z^2 \, dA,$$

$$I_{yz} = I_{zy} = \int_D z \cdot y \, dA$$
(3.53)

formájú integráljait a keresztmetszet tehetetlenségi nyomatékainak nevezzük. Akárcsak a „sztatikai nyomaték”, ezek is a mechanikából átvett fogalmak: az első kettő egy sík, egységnyi négyzetméter-tömegű lemez tengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka, a harmadik meg ugyanennek a centrifugális nyomatéka. Ezek a szimmetrikus inercia- avagy tehetetlenségi-mátrix tagjai, két dimenzióban, az általunk használt tengely-jelölésekkel:

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} I_z & I_{zy} \\ I_{yz} & I_y \end{bmatrix}.$$
(3.54)

Az

$$I_p = \int_D r^2 \, dA = \int_D (z^2 + y^2) \, dA = I_z + I_y$$
(3.55)

mennyiséget poláris tehetetlenségi nyomatéknak nevezzük.

A fenti képletek valójában geometriai mennyiségeket jelölnek, ezeket *másodrendű nyomatékok*nak nevezzük (tengelyre vonatkoztatottnak, illetve vegyesnek).

Az eddig felsorolt geometriai jellemzőket általánosan az

$$I = \int_D z^n \cdot y^m \, dA$$
(3.56)

formulával adhatjuk meg, ahol n és m pozitív egész számok. Ha azok $n + m$ összege 0, akkor a terület képletéhez jutunk, amely a nulladrendű nyomaték lenne (ekkor $n = 0$ és $m = 0$). Ha az összeg 1, ami az $n = 1$, $m = 0$, vagy pedig az $n = 0$, $m = 1$ kombinációknak felel meg, akkor az elsőrendű nyomatékok képleteihez jutunk, azok tehát az elsőrendű nyomatékok. Ha az összeg 2, akkor a 3.53. tehetetlenségi nyomatékokat kapjuk, amelyek a másodrendű nyomatékok.

A definíciójukból fakadóan a tengelyre vonatkoztatott másodrendű nyomatékok pozitív, nemnulla mennyiségek: pozitívak, mert a koordináták második hatványát integráljuk, és csak akkor

lehetnének nullák, ha minden egyes dA terület-elem távolsága az illető tengelytől zéró lenne – véges kiterjedésű idomokra ez nem áll fenn.

A vegyes másodrendű nyomaték viszont, az idom tengelyekhez viszonyított elhelyezkedésétől függően, lehet pozitív, negatív vagy nulla, akár csak az elsőrendű nyomaték.

Mértékegységük m^4 vagy mm^4 .

A kiszámításuk az elsőrendű nyomatékokhoz hasonlóan történik. Amikor az idom területét a 3.2. összefüggéssel számíthatjuk, a 3.53. képleteket a következőképpen írhatjuk át:

$$\begin{aligned} I_z &= \int_D y^2 dA = \int_a^b \int_0^{y(z)} y^2 dy \cdot dz = \frac{1}{3} \cdot \int_a^b y^3(z) dz, \\ I_y &= \int_D z^2 dA = \int_c^d \int_0^{z(y)} z^2 dz \cdot dy = \frac{1}{3} \cdot \int_c^d z^3(y) dy, \\ I_{zy} &= \int_D z \cdot y dA = \int_c^d y \cdot \int_0^{z(y)} z dz \cdot dy = \frac{1}{2} \cdot \int_c^d y \cdot \operatorname{sgn}(z) \cdot z^2(y) dy = \\ &= \int_a^b z \cdot \int_0^{y(z)} y dy \cdot dz = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b z \cdot \operatorname{sgn}(y) \cdot y^2(z) dz. \end{aligned} \quad (3.57)$$

3.15. példa. A téglalap másodrendű nyomatékai

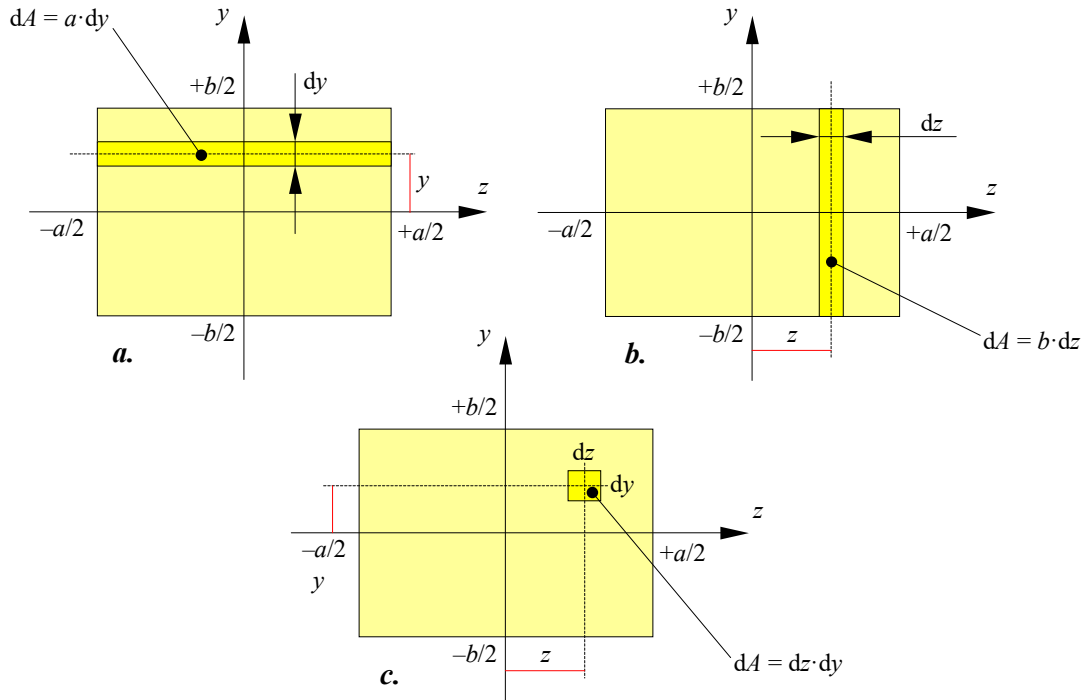
A 3.2.a. ábra téglalapjára például, ahol $y(z) = b$ és $z(y) = a$,

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{1}{3} \cdot \int_0^a y^3(z) dz = \frac{1}{3} \cdot \int_0^a b^3 dz = \frac{a \cdot b^3}{3}, \\ I_y &= \frac{1}{3} \cdot \int_c^d z^3(y) dy = \frac{1}{3} \cdot \int_0^b a^3 dz = \frac{a^3 \cdot b}{3}, \\ I_{zy} &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^a z \cdot \operatorname{sgn}(y) \cdot y^2(z) dz = \frac{1}{2} \cdot \int_0^a z \cdot b^2 dz = \frac{a^2 \cdot b^2}{4}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

A szilárdságtanban azonban a másodrendű nyomatékokat nem tetszőleges tengelyekre számítjuk ki: ezeket egy *centrális* koordináta-rendszerben kell megadnunk, amelynek az origója a geometriai középpontban van és a tengelyei súlyvonalak. A téglalap centrális rendszere a 3.12. ábrán látható. A 3.57. képleteket ebben a koordináta-rendszerben csak közvetett módon használhatnánk fel, mert a téglalapot itt nem lehet egyetlen függvénnyel leírni és azt összetett keresztmetszetnek kell tekintenünk: az I_z mennyiséget például a tengely feletti és a tengely alatti területek ($b/2$ magasságú téglalapok) z tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékainak összegeként tudnánk meghatározni. A fél téglalapra a 3.58. képletekből ez a nyomaték $a \cdot b^3 / 24$, az egészre pedig $I_z = a \cdot b^3 / 12$.

Egyszerűbbek a számítások, ha a terület-elemet egy dy magasságú keskeny téglalaplak tekintjük, amelynek a szélessége az idomnak az y magasságban mért $b(y)$ szélessége: $dA = b(y) \cdot dy$ (3.12.a. ábra), és az y magasság szerint integrálunk. A téglalapunk esetében $b(y) = a$, bármilyen magasságban, tehát

$$I_z = \int_{-b/2}^{+b/2} y^2 \cdot b(y) dy = a \cdot \int_{-b/2}^{+b/2} y^2 \cdot dy = a \cdot \left. \frac{y^3}{3} \right|_{-b/2}^{+b/2} = \frac{a \cdot b^3}{12}. \quad (3.59)$$



3.12. ábra. Téglalap másodrendű nyomatékai

Hasonlóképpen, az I_y másodrendű nyomaték kiszámításakor a terület-elemet egy dz szélességű és $h(z)$ magasságú téglalapként vehetjük fel, ahol $h(z)$ az idom z koordinátának megfelelő magassága (3.12.b. ábra). Ekkor a z szélesség szerint integrálunk. Esetünkben:

$$I_y = \int_{-a/2}^{+a/2} z^2 \cdot h(z) dz = b \cdot \int_{-a/2}^{+a/2} z^2 \cdot dz = b \cdot \frac{z^3}{3} \Big|_{-a/2}^{+a/2} = \frac{a^3 \cdot b}{12}. \quad (3.60)$$

Az I_{zy} vegyes másodrendű nyomaték kiszámításakor a terület-elem $dA = dz \cdot dy$ kell maradjon (3.12.c. ábra). A téglalap esetében ezt a mennyiséget a következő kettős integrállal lehet kiszámítani, a terület kiszámításánál is használt átalakítással (3.12. képlet):

$$I_{zy} = \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-b/2}^{+b/2} z \cdot y \cdot dy \cdot dz = \int_{-a/2}^{+a/2} \left(z \cdot \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{-b/2}^{+b/2} dz = 0 \quad (3.61)$$

(a téglalap felső és alsó vonalainak egyenlete $y(z) = \pm b/2$, a megfelelő előjellel). Ezt az eredményt számítások nélkül is megjósolhattuk volna, ugyanis, pont úgy, mint az elsőrendű nyomatékok esetében, a szimmetria miatt a $z \cdot y \cdot dA$ szorzatok a tengely két oldalán csak előjelben különböznek, így az összegük nulla. Az I_{zy} vegyes másodrendű nyomaték tehát minden olyan esetben nulla, amikor a z tengely és az y tengely közül legalább az egyik szimmetria-tengely.

3.4.2. A másodrendű nyomatékok változása a koordináta-rendszer eltolása esetén (a Steiner-tétel)

Bonyolultabb geometria esetében a centrális koordináta-rendszer közvetlen alkalmazása túl sok számításhoz vezethet, egyszerűbb lenne a másodrendű nyomatékokat valamilyen kézenfekvő módon megválasztott koordináta-rendszerben kiszámolni, majd azokat a centrális tengelyekre

átszámolni, ahogyan az elsőrendű nyomatékokat is átszámoltuk. Éppen ezért most pedig vizsgáljuk meg, hogyan változnak a másodrendű nyomatékok a koordináta-rendszer eltolása esetén.

Ha a tengelyeket Δz , illetve Δy távolságokkal toltuk el (amelyek előjeles mennyiségek és a $z'y'$ rendszer origójának a koordinátáit adják a zy rendszerben) a koordináta- transzformációt a 3.22. képletek adják ($z' = z - \Delta z$, $y' = y - \Delta y$). Ezek, valamint a másodrendű nyomatékok 3.53. definíciójának felhasználásával a következő Steiner-képletekhez, Steiner-tételhez jutunk:

$$\begin{aligned}
 I_{z'} &= \int_D y'^2 dA = \int_D (y - \Delta y)^2 dA = \int_D y^2 dA - 2 \cdot \Delta y \cdot \int_D y dA + \Delta y^2 \cdot \int_D dA = \\
 &= I_z - 2 \cdot \Delta y \cdot S_z + \Delta y^2 \cdot A, \\
 I_{y'} &= \int_D z'^2 dA = \int_D (z - \Delta z)^2 dA = \int_D z^2 dA - 2 \cdot \Delta z \cdot \int_D z dA + \Delta z^2 \cdot \int_D dA = \\
 &= I_y - 2 \cdot \Delta z \cdot S_y + \Delta z^2 \cdot A, \\
 I_{z'y'} &= \int_D z' \cdot y' dA = \int_D (z - \Delta z) \cdot (y - \Delta y) dA = \\
 &= \int_D z \cdot y dA - \Delta z \cdot \int_D y dA - \Delta y \cdot \int_D z dA + \Delta z \cdot \Delta y \cdot \int_D dA = \\
 &= I_{zy} - \Delta z \cdot S_z - \Delta y \cdot S_y + \Delta z \cdot \Delta y \cdot A.
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

Amennyiben a kiindulási zy koordináta-rendszer centrális volt, az elsőrendű nyomatékok nullák és elhagyhatók, s ekképpen a Steiner-képletek egyszerűbb formáihoz jutunk:

$$\begin{aligned}
 I_{z'} &= I_z + \Delta y^2 \cdot A, \\
 I_{y'} &= I_y + \Delta z^2 \cdot A, \\
 I_{z'y'} &= I_{zy} + \Delta z \cdot \Delta y \cdot A.
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

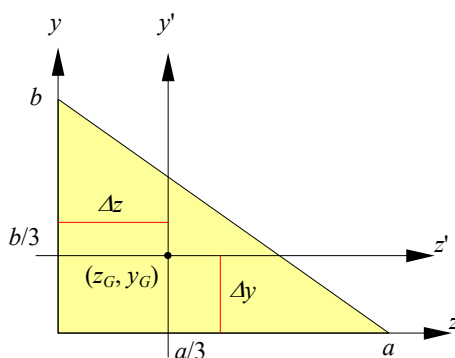
3.16. példa. A derékszögű háromszög másodrendű nyomatékai

Példaként alkalmazzuk ezeket a 3.2.b - 3.13. ábrán látható derékszögű háromszögre. Ezt a zy koordináta-rendszerben az $y(z) = \frac{b}{a} \cdot (a - z)$ vagy a $z(y) = \frac{a}{b} \cdot (b - y)$ egyenlettel megadott vonal határolja le, amellyel a háromszögnek a 3.57. képletekkel számított másodrendű nyomatékai a következők lesznek:

$$\begin{aligned}
 I_z &= \int_D y^2 dA = \int_0^a \int_0^{y(z)} y^2 dy \cdot dz = \frac{1}{3} \cdot \int_0^a \left[\frac{b}{a} \cdot (a - z) \right]^3 dz = \frac{a \cdot b^3}{12}, \\
 I_y &= \int_D z^2 dA = \int_0^b \int_0^{z(y)} z^2 dz \cdot dy = \frac{1}{3} \cdot \int_0^b \left[\frac{a}{b} \cdot (b - y) \right]^3 dy = \frac{a^3 \cdot b}{12}, \\
 I_{zy} &= \int_D z \cdot y dA = \int_0^a z \cdot \int_0^{y(z)} y dy \cdot dz = \frac{1}{2} \cdot \int_0^a z \cdot \left[\frac{b}{a} \cdot (a - z) \right]^2 dz = \frac{a^2 \cdot b^2}{24}.
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

A Steiner-képletekben szereplő mennyiségeket már kiszámoltuk: $A = a \cdot b / 2$ (3.5), $S_z = a \cdot b^2 / 6$ és $S_y = a^2 \cdot b / 6$ (3.18), $z_G = a / 3$ és $y_G = b / 3$ (3.28). Mivel nem centrális rendszerből indulunk ki, a teljesebb, 3.62. Steiner-képleteket kell használnunk, ahol $\Delta z = z_G$ és $\Delta y = y_G$:

$$\begin{aligned}
I_z &= I_z - 2 \cdot \Delta y \cdot S_z + \Delta y^2 \cdot A = \frac{a \cdot b^3}{12} - 2 \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{a \cdot b^2}{6} + \left(\frac{b}{3}\right)^2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = \\
&= \frac{a \cdot b^3}{36}, \\
I_y &= I_y - 2 \cdot \Delta z \cdot S_y + \Delta z^2 \cdot A = \frac{a^3 \cdot b}{12} - 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot b}{6} + \left(\frac{a}{3}\right)^2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = \\
&= \frac{a^3 \cdot b}{36}, \\
I_{z'y'} &= I_{zy} - \Delta z \cdot S_z - \Delta y \cdot S_y + \Delta z \cdot \Delta y \cdot A = \\
&= \frac{a^2 \cdot b^2}{24} - \frac{a}{3} \cdot \frac{a \cdot b^2}{6} - \frac{b}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot b}{6} + \frac{a}{3} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{a \cdot b}{2} = -\frac{a^2 \cdot b^2}{72}.
\end{aligned} \tag{3.65}$$



3.13. ábra. Derékszögű háromszög másodrendű nyomatékai

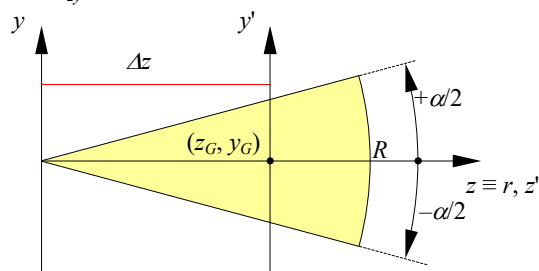
Megjegyzendő, hogy ebben a példában, mivel a $z'y'$ rendszer centrális, a 3.63. képletek megfordításával is boldogulhattunk volna (ez kevesebb adatot és számítást igényel), így például a z' tengelyre vonatkoztatott másodrendű nyomaték számítási képlete $I_{z'} = I_z - \Delta y^2 \cdot A$ lenne.

3.17. példa. A körcikk másodrendű nyomatékai

A körcikk (3.5. - 3.14. ábrák) esetében is jobban járunk, ha nem a centrális koordináta-rendszerből indulunk ki és ha a poláris koordinátákat is bevetjük:

$$\begin{aligned}
I_z &= \int_D y^2 \, dA = \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} \int_0^R (r \cdot \sin \varphi)^2 \cdot r \, dr \cdot d\varphi = \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} \frac{R^4}{4} \cdot \sin^2 \varphi \, d\varphi = \\
&= \frac{R^4}{4} \cdot \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} \frac{1 - \cos(2 \cdot \varphi)}{2} \, d\varphi = \frac{R^4}{8} \cdot \left(\varphi - \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot \varphi) \right) \Big|_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} = \frac{R^4}{8} \cdot (\alpha - \sin \alpha), \\
I_y &= \int_D z^2 \, dA = \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} \int_0^R (r \cdot \cos \varphi)^2 \cdot r \, dr \cdot d\varphi = \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} \frac{R^4}{4} \cdot \cos^2 \varphi \, d\varphi = \\
&= \frac{R^4}{4} \cdot \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} \frac{1 + \cos(2 \cdot \varphi)}{2} \, d\varphi = \frac{R^4}{8} \cdot \left(\varphi + \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot \varphi) \right) \Big|_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} = \frac{R^4}{8} \cdot (\alpha + \sin \alpha), \\
I_{zy} &= \int_D z \cdot y \, dA = 0
\end{aligned} \tag{3.66}$$

(mivel z szimmetria-tengely, I_{zy} számítás nélkül is nulla).



3.14. ábra. Körcikk másodrendű nyomatékai

A körcikk területe $A = \alpha \cdot R^2 / 2$, a geometriai középpont koordinátái pedig $\Delta z = z_G = [(4 \cdot R \cdot \sin(\alpha/2)) / (3 \cdot \alpha)]$, $\Delta y = y_G = 0$ (3.30. képlet), és mivel centrális koordináta-rendszerbe transzformálunk, a 3.63. Steiner-képletek megfordításával

$$\begin{aligned}
 I_z &= I_z - \Delta y^2 \cdot A = \frac{R^4}{8} \cdot (\alpha - \sin \alpha), \\
 I_{y'} &= I_y - \Delta z^2 \cdot A = \frac{R^4}{8} \cdot (\alpha + \sin \alpha) - \left(\frac{4 \cdot R \cdot \sin(\alpha/2)}{3 \cdot \alpha} \right)^2 \cdot \frac{\alpha \cdot R^2}{2} = \\
 &= \frac{R^4}{8} \cdot (\alpha + \sin \alpha) - \frac{8 \cdot R^4}{9 \cdot \alpha} \cdot \sin^2(\alpha/2), \\
 I_{z'y'} &= I_{zy} - \Delta z \cdot \Delta y \cdot A = 0.
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

3.4.3. A másodrendű nyomatékok változása a koordináta-rendszer elforgatása esetén

A másodrendű nyomatékok nagysága függ a koordináta-tengelyek helyzetétől: vizsgáljuk most meg azt, hogy miképpen változnak ezek a mennyiségek a koordináta-rendszer origó körüli elforgatásakor (3.8. ábra; a 3.25. képletek szerint a transzformáció egyenletei $z' = z \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha$, $y' = -z \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha$):

$$\begin{aligned}
 I_{z'} &= \int_D y'^2 dA = \int_D (-z \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha)^2 dA = \\
 &= \int_D y^2 dA \cdot \cos^2 \alpha + \int_D z^2 dA \cdot \sin^2 \alpha - 2 \cdot \int_D z \cdot y dA \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \\
 &= I_z \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \sin^2 \alpha - 2 \cdot I_{zy} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \\
 I_{y'} &= \int_D z'^2 dA = \int_D (z \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha)^2 dA = \\
 &= \int_D y^2 dA \cdot \sin^2 \alpha + \int_D z^2 dA \cdot \cos^2 \alpha + 2 \cdot \int_D z \cdot y dA \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \\
 &= I_z \cdot \sin^2 \alpha + I_y \cdot \cos^2 \alpha + 2 \cdot I_{zy} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \\
 I_{z'y'} &= \int_D z' \cdot y' dA = \int_D (z \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha) \cdot (-z \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha) dA = \\
 &= \left(\int_D y^2 dA - \int_D z^2 dA \right) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \int_D z \cdot y dA \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \\
 &= (I_z - I_y) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + I_{zy} \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha).
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

Észrevehetjük, hogy

$$\begin{aligned} I_{p'} &= I_{z'} + I_{y'} = I_z \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \sin^2 \alpha - 2 \cdot I_{zy} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \\ &+ I_z \cdot \sin^2 \alpha + I_y \cdot \cos^2 \alpha + 2 \cdot I_{zy} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = (I_z + I_y) \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = I_p, \end{aligned} \quad (3.69)$$

tehát a poláris másodrendű nyomaték nem változik meg (invariáns) a koordináta-rendszer elforgatása esetén.

3.4.4. A másodrendű nyomatékok főirányai és főértékei

Feltevődik az a kérdés, hogy a tengelyekre vonatkoztatott másodrendű nyomatékoknak mekkorák a szélsőértékei? E mennyiségek definíciójából eredendően a felső határérték végtelen, így a szélsőérték a minimumot jelentheti. A 3.62. Steiner-képletekből, deriválással kereshetjük a minimumnak megfelelő koordináta-tengelyeket, például a $\partial I_{z'}/\partial(\Delta y) = 0$ feltételből, ami a $-2 \cdot S_z + 2 \cdot \Delta y \cdot A = 0$ egyenlethez vezet, ahonnan $\Delta y = S_z / A$ megoldás a geometriai középpont megfelelő koordinátája. Ugyanerre a következtetésre jutunk a $\partial I_{y'}/\partial(\Delta z) = 0$ feltétel vizsgálatával is. A minimumot tehát egy centrális koordináta-rendszerben kell keresni.

Most pedig vizsgáljuk meg a tengelyek elforgatásának hatását. Trigonometriai összefüggések felhasználásával a 3.68. transzformációkat átírhatjuk:

$$\begin{aligned} I_{z'} &= I_z \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \sin^2 \alpha - 2 \cdot I_{zy} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \\ &= I_z \cdot \frac{1 + \cos(2 \cdot \alpha)}{2} + I_y \cdot \frac{1 - \cos(2 \cdot \alpha)}{2} - I_{zy} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) = \\ &= \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha) - I_{zy} \cdot \sin(2 \cdot \alpha), \\ I_{y'} &= I_z \cdot \sin^2 \alpha + I_y \cdot \cos^2 \alpha + 2 \cdot I_{zy} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \\ &= I_z \cdot \frac{1 - \cos(2 \cdot \alpha)}{2} + I_y \cdot \frac{1 + \cos(2 \cdot \alpha)}{2} + I_{zy} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) = \\ &= \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha) + I_{zy} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) = \\ &= \frac{I_z + I_y}{2} - \left(\frac{I_z - I_y}{2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha) - I_{zy} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) \right), \\ I_{z'y'} &= (I_z - I_y) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + I_{zy} \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \\ &= \frac{I_z - I_y}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) + I_{zy} \cdot \frac{1 + \cos(2 \cdot \alpha) - 1 + \cos(2 \cdot \alpha)}{2} = \\ &= \frac{I_z - I_y}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) + I_{zy} \cdot \cos(2 \cdot \alpha). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Ha a tengelyekre vonatkoztatott másodrendű nyomatékok szélső értékeit keressük, akkor $I_{z'}$ vagy $I_{y'}$ kifejezését $2 \cdot \alpha$ -val kell deriválnunk és a derivált gyökeit kell megkeresnünk. E szögeket visszahelyettesítve a 3.68. vagy a 3.70. képletekbe megkapjuk a nyomatékok legnagyobb és legkisebb értékét. A 3.68. képletek alapján megállapíthatjuk, hogy

$$\frac{\partial I_{z'}}{\partial(2 \cdot \alpha)} = -\frac{\partial I_{y'}}{\partial(2 \cdot \alpha)} = -\left(\frac{I_z - I_y}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) + I_{zy} \cdot \cos(2 \cdot \alpha) \right) = -I_{z'y'}, \quad (3.71)$$

a szög keresett értékeit pedig a

$$\frac{I_z - I_y}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) + I_{zy} \cdot \cos(2 \cdot \alpha) = 0 \quad (3.72)$$

egyenlet megoldásával kapjuk (ez megegyezik $I_{z'y'}$ 3.70-es kifejezésével – ebből az derül ki, hogy a keresett irányoknak megfelelő vegyes másodrendű nyomaték nulla lesz):

$$\operatorname{tg}(2 \cdot \alpha) = -\frac{2 \cdot I_{zy}}{I_z - I_y} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot I_{zy}}{I_z - I_y} + n \cdot \frac{\pi}{2}, \quad (3.73)$$

ahol n egész szám, mivel a tg és az arctg függvények páratlanok és az előbbi periódusa π . A megoldások tehát egymásra merőleges irányokat adnak. Ezek közül kettőt tekinthetünk különbözőnek, egyet, amelyik a $[0, \pi/2]$ intervallumra esik, a másik pedig éppen merőleges erre.

$\operatorname{tg}(2 \cdot \alpha)$ -t a 3.70. relációkba visszahelyettesítve kapjuk. Itt felhasználjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sin(2 \cdot \alpha) &= \frac{\operatorname{tg}(2 \cdot \alpha)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2 \cdot \alpha)}} = \frac{-\frac{2 \cdot I_{zy}}{I_z - I_y}}{\sqrt{1 + \frac{4 \cdot I_{zy}^2}{(I_z - I_y)^2}}} = -\frac{2 \cdot I_{zy}}{\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4 \cdot I_{zy}^2}}, \\ \cos(2 \cdot \alpha) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2 \cdot \alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4 \cdot I_{zy}^2}{(I_z - I_y)^2}}} = \frac{I_z - I_y}{\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4 \cdot I_{zy}^2}}, \end{aligned} \quad (3.74)$$

s ekképpen

$$\begin{aligned} &\frac{I_z - I_y}{2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha) - I_{zy} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) = \\ &= \frac{I_z - I_y}{2} \cdot \frac{I_z - I_y}{\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4 \cdot I_{zy}^2}} + I_{zy} \cdot \frac{2 \cdot I_{zy}}{\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4 \cdot I_{zy}^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(I_z - I_y)^2 + 4 \cdot I_{zy}^2}{\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4 \cdot I_{zy}^2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4 \cdot I_{zy}^2}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Végül a keresett szélsőértékek

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4 \cdot I_{zy}^2}, \\ I_2 &= \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4 \cdot I_{zy}^2}, \end{aligned} \quad (3.76)$$

amelyeket a tengelyre vonatkoztatott másodrendű nyomatékok *főértékeinek* nevezünk. Ezek közül egyezményesen az első a nagyobb: $I_1 \geq I_2$. Azt a tengelyt, amelynek az I_1 másodrendű nyomaték felel meg, az *első főiránynak*, a másikat pedig a *második főiránynak* nevezzük.

Beláthatjuk, hogy a két főérték összege, a 3.69. észrevétellel összhangban, a tengelyre vonatkoztatott másodrendű nyomatékok összegét, a poláris nyomatékot adja:

$$I_1 + I_2 = I_z + I_y = I_p. \quad (3.77)$$

Ugyanakkor azt is beláthatjuk, hogy mivel az összes lehetséges érték közül I_1 a legnagyobb, I_2 a legkisebb,

$$I_z, I_y \in [I_2, I_1]. \quad (3.78)$$

Mivel a főirányok egymásra merőlegesek, azok egy centrális koordináta-rendszert alkotnak, ahol a vegyes másodrendű nyomaték a 3.72. egyenlet és a 3.73. reláció értelmében nulla lesz. Ennek alapján kijelenthetjük, hogy ha valamely koordináta-rendszerben az I_{zy} vegyes másodrendű nyomaték nulla, akkor az illető rendszer tengelyei a főtengelyek. Következésképpen a szimmetria-tengelyek főtengelyek.

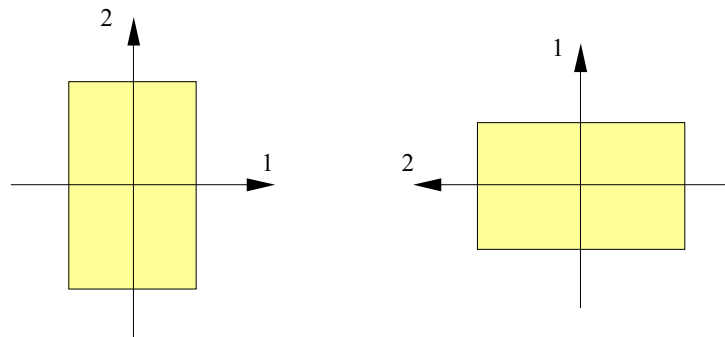
Ha három vagy több szimmetria-tengelyünk van, akkor a geometriai középponton keresztül menő egyenesek mindegyike főtengely kell legyen és a tengelyre vonatkoztatott másodrendű nyomaték mindegyikre nézve azonos. Ekkor ugyanis a 3.70. transzformáció, az $I_{z',y'} = 0.5 \cdot (I_z - I_y) \cdot \sin(2 \cdot \alpha) + I_{zy} \cdot \cos(2 \cdot \alpha)$ egyenlőség, ahol $I_{zy} = I_{z',y'} = 0$, egy olyan α -ra is igaz kell legyen, amely nem a derékszög egész számú többszöröse, s ez csak akkor lehetséges, ha $I_z = I_y = I_1 = I_2$. E megjegyzés értelmében a kör, a körgyűrű és bármely szabályos sokszög középpontján átmenő tengely főtengely, a tengelyre vonatkoztatott másodrendű nyomaték pedig invariáns annak elforgatása esetén.

Ugyanakkor, ha a $I_1 = I_2$, akkor a 3.70. összefüggések értelmében bármely, tetszőleges α szöggel elforgatott tengelyre a reá vonatkoztatott másodrendű nyomaték ugyanaz és a vegyes másodrendű nyomaték zéró.

Azt, hogy a 3.73.-as szögek által adott irányok közül melyik az első főirány, azt egy aránylag egyszerű intuitív szabállyal lehet megállapítani: a két egymásra merőleges irány közül az az első, amelyik kisebb szöget zár be azzal a tengellyel, amelyre a nagyobbik tengelyre vonatkoztatott másodrendű nyomatékot számoltuk.

Pontosabban, az első főirány hollétét az I_{zy} előjele dönti el. Ehhez elegendő megvizsgálunk azt, hogy az első negyedben, ahol $\alpha \in [0, \pi/2]$, a szög függvényében miképpen alakul a 3.68. relációval megadott I_z nyomaték. Ebben a negyedben $\sin \alpha$ és $\cos \alpha$ pozitív mennyiségek, tehát ha $I_{zy} < 0$, akkor a z tengelyt elforgatva a reá vonatkoztatott másodrendű nyomaték növekedni fog, tehát az első negyeden átmenő egyenes az első főirányt rögzíti (ellenkező esetben a másodikat).

3.18. példa. A téglalap főirányai és főértékei



3.15. ábra. Téglalapok főtengelyei

A téglalap két szimmetria-tengellyel rendelkezik, emiatt a főirányok adottak. A tengelyekre vonatkoztatott másodrendű nyomatékokat a 3.59. - 3.60. képletek adják; ezek közül a nagyobbik lesz az első főérték és az annak megfelelő tengely a főirány. A képletekben szereplő harmadik hatvány miatt a téglalap rövid oldalával párhuzamos tengelyre számítva kapjuk a nagyobbik értéket, tehát ez lesz az első főirány (3.15. ábra).

3.19. példa. A körcikk főirányai és főértékei

A körcikknek egy szimmetria-tengelye van (3.14. ábra), ez tehát az egyik főtengely. A másik főtengely pedig erre merőleges és centrális. Azt, hogy melyik az első és a második főirány, a 3.67. képletekkel kiszámított I_z és I_y értékek összehasonlításával tudjuk eldönteni. Az $I_z - I_y = 0$ egyenlet gyökei adják azokat a szögeket, ahol a különbség előjelet vált. Ha a két másodrendű nyomaték képletét ide behelyettesítjük, akkor a nevezőben megjelenő α miatt egy transzcendens egyenletet kapunk, amelyet csak numerikusan tudunk megoldani. A két kapott gyök $\alpha_1 = 1.1419 \text{ rad} = 65.4297^\circ$ és $\alpha_2 = 2 \cdot \pi \text{ rad} = 360^\circ$.

Míg a körcikk középponti szöge α_1 alatt van, addig a különbség negatív, $I_y > I_z$, a függőleges az első főirány.

Ha a középponti szög éppen α_1 , akkor a két nyomaték egyenlő és azok egyben a főértékek, minden irány főirány, még akkor is, ha egyik főtengely sem esik egybe a szimmetria-tengellyel.

Ha $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$, akkor $I_z > I_y$ és a vízszintes az első főirány.

Az α_2 érték a teljes körnek felel meg, ahol szintén minden irány főirány és szimmetria-tengely is.

3.20. példa. A derékszögű háromszög főirányai és főértékei

A 3.16. példában kapott eredmények alapján a főértékek a következőképpen számítjuk ki:

$$\frac{I_z + I_y}{2} = \frac{\frac{a \cdot b^3}{36} + \frac{a^3 \cdot b}{36}}{2} = \frac{a \cdot b \cdot (a^2 + b^2)}{72}, \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4 \cdot I_{zy}^2} &= \sqrt{\left(\frac{a \cdot b^3}{36} - \frac{a^3 \cdot b}{36}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{a^2 \cdot b^2}{72}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2 \cdot b^2 \cdot (a^2 - b^2)^2 + (a^2 \cdot b^2)^2}{36^2}} = \frac{a \cdot b \cdot \sqrt{a^4 - a^2 \cdot b^2 + b^4}}{36}, \end{aligned} \quad (3.80)$$

amelyekkel a főértékek

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4 \cdot I_{zy}^2} = \frac{a \cdot b \cdot (a^2 + b^2)}{72} + \frac{a \cdot b \cdot \sqrt{a^4 - a^2 \cdot b^2 + b^4}}{72} = \\ &= \frac{a \cdot b \cdot \left[a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 - a^2 \cdot b^2 + b^4} \right]}{72}, \\ I_2 &= \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4 \cdot I_{zy}^2} = \frac{a \cdot b \cdot (a^2 + b^2)}{72} - \frac{a \cdot b \cdot \sqrt{a^4 - a^2 \cdot b^2 + b^4}}{72} = \\ &= \frac{a \cdot b \cdot \left[a^2 + b^2 - \sqrt{a^4 - a^2 \cdot b^2 + b^4} \right]}{72} \end{aligned} \quad (3.81)$$

lesznek.

A főirányokhoz

$$\operatorname{tg}(2 \cdot \alpha) = -\frac{2 \cdot I_{zy}}{I_z - I_y} = -\frac{2 \cdot \left(-\frac{a^2 \cdot b^2}{72} \right)}{\frac{a \cdot b^3}{36} - \frac{a^3 \cdot b}{36}} = \frac{a \cdot b}{b^2 - a^2}, \quad (3.82)$$

ahonnan

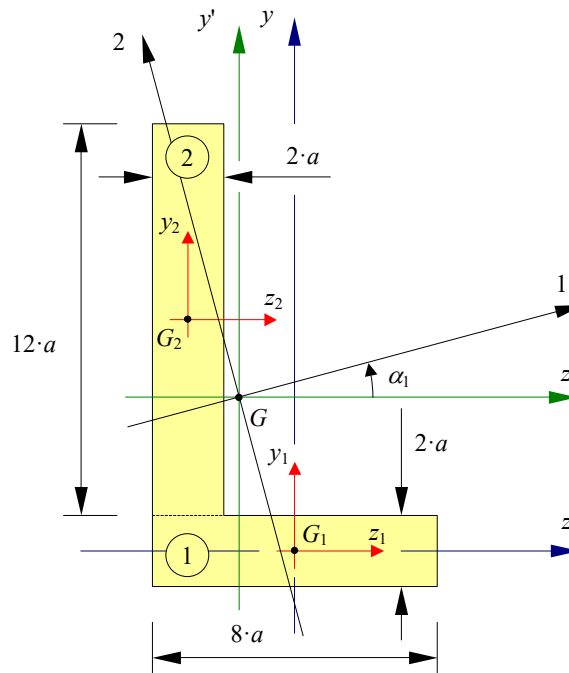
$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{a \cdot b}{b^2 - a^2} + n \cdot \frac{\pi}{2}. \quad (3.83)$$

Itt észrevehetjük, hogy ha a derékszögű háromszögünk egyenlő szárú, akkor $a = b$ és az előbbi tört nevezője nulla. Az $\operatorname{arctg} \infty$ érték a derékszögnek felel meg, ekkor a főirányok a 3.16. példában használt centrális rendszer szögfelezői.

Mivel az I_{zy} vegyes másodrendű nyomaték negatív, az első főtengely mindig az első negyedre esik, a és b értékétől függetlenül.

3.21. példa. Szimmetria-tengelyek nélküli összetett idom

Legyen a 3.16. ábrán levő összetett idom. Ezt két egyszerű idomra, két téglalpra bonthatjuk fel.



3.16. ábra. Szimmetria-tengelyek nélküli összetett idom

A számítások első lépéseként kiszámítjuk az idom területét:

$$\begin{aligned}
A_1 &= 8 \cdot a \cdot 2 \cdot a = 16 \cdot a^2, \\
A_2 &= 12 \cdot a \cdot 2 \cdot a = 24 \cdot a^2, \\
A &= A_1 + A_2 = 16 \cdot a^2 + 24 \cdot a^2 = 40 \cdot a^2.
\end{aligned} \tag{3.84}$$

A számításokat egy tetszőlegesen megválasztott koordináta-rendszerben kezdjük el. Ahhoz, hogy minél könnyebben el tudjuk végezni a számításokat, ennek tengelyei, ha lehet, az egyszerű idomokhoz kell igazodjanak olyanképpen, hogy minél több egyszerű idom geometriai középpontja a választott tengelyekre essék. Ekkor ugyanis az elsőrendű nyomatékok egy része nulla lesz. Legyen a kiindulási koordináta-rendszerünk az első idom centrális rendszere. Ekkor

$$\begin{aligned}
z_{G1} &= 0, & y_{G1} &= 0, \\
z_{G2} &= -3 \cdot a, & y_{G2} &= 7 \cdot a.
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Az előbbiekkal:

$$\begin{aligned}
S_{z1} &= y_{G1} \cdot A_1 = 0, \\
S_{y1} &= z_{G1} \cdot A_1 = 0, \\
S_{z2} &= y_{G2} \cdot A_2 = 7 \cdot a \cdot 24 \cdot a^2 = 168 \cdot a^3, \\
S_{y2} &= z_{G2} \cdot A_2 = (-3 \cdot a) \cdot 24 \cdot a^2 = -72 \cdot a^3, \\
S_z &= S_{z1} + S_{z2} = 0 + 168 \cdot a^3 = 168 \cdot a^3, \\
S_y &= S_{y1} + S_{y2} = 0 - 72 \cdot a^3 = -72 \cdot a^3.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Az idom geometriai középpontjának koordinátái tehát

$$\begin{aligned}
z_G &= \frac{S_y}{A} = \frac{-72 \cdot a^3}{40 \cdot a^2} = -1.8 \cdot a, \\
y_G &= \frac{S_z}{A} = \frac{168 \cdot a^3}{40 \cdot a^2} = 4.2 \cdot a,
\end{aligned} \tag{3.87}$$

amelyekkel megrajzoljuk az idom $z'y'$ centrális koordináta-rendszerét.

Az elemi idomok, téglalapok saját centrális koordináta-rendszerükben számított másodrendű nyomatékai a következők:

$$\begin{aligned}
I_{z1} &= \frac{8 \cdot a \cdot (2 \cdot a)^3}{12} = 5.3333 \cdot a^4, \\
I_{y1} &= \frac{(8 \cdot a)^3 \cdot 2 \cdot a}{12} = 85.3333 \cdot a^4, \\
I_{zy1} &= 0, \\
I_{z2} &= \frac{2 \cdot a \cdot (12 \cdot a)^3}{12} = 288 \cdot a^4, \\
I_{y2} &= \frac{(2 \cdot a)^3 \cdot 12 \cdot a}{12} = 8 \cdot a^4, \\
I_{zy2} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.88}$$

A koordináta-rendszerek eltolásának mértéke az origó, az egyszerű idom geometriai középpontjának koordinátája a $z'y'$ rendszerben:

$$\begin{aligned}
\Delta z_1 &= z_G - z_{G1} = -1.8 \cdot a - 0 = -1.8 \cdot a, \\
\Delta y_1 &= y_G - y_{G1} = 4.2 \cdot a - 0 = 4.2 \cdot a, \\
\Delta z_2 &= z_G - z_{G2} = -1.8 \cdot a - (-3 \cdot a) = 1.2 \cdot a, \\
\Delta y_2 &= y_G - y_{G2} = 4.2 \cdot a - 7 \cdot a = -2.8 \cdot a.
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Az egyszerű idomok másodrendű nyomatékai a $z'y'$ rendszerben Steiner tételének alkalmazásával:

$$\begin{aligned}
I_{z'1} &= I_{z1} + \Delta y_1^2 \cdot A_1 = 5.3333 \cdot a^4 + (4.2 \cdot a)^2 \cdot 16 \cdot a^2 = 287.5733 \cdot a^4, \\
I_{y'1} &= I_{y1} + \Delta z_1^2 \cdot A_1 = 85.3333 \cdot a^4 + (-1.8 \cdot a)^2 \cdot 16 \cdot a^2 = 137.1733 \cdot a^4, \\
I_{z'y'1} &= I_{zy1} + \Delta z_1 \cdot \Delta y_1 \cdot A_1 = 0 + (-1.8 \cdot a) \cdot (4.2 \cdot a) \cdot 16 \cdot a^2 = -120.96 \cdot a^4, \\
I_{z'2} &= I_{z2} + \Delta y_2^2 \cdot A_2 = 288 \cdot a^4 + (-2.8 \cdot a)^2 \cdot 24 \cdot a^2 = 476.16 \cdot a^4, \\
I_{y'2} &= I_{y2} + \Delta z_2^2 \cdot A_2 = 8 \cdot a^4 + (1.2 \cdot a)^2 \cdot 24 \cdot a^2 = 42.56 \cdot a^4, \\
I_{z'y'2} &= I_{zy2} + \Delta z_2 \cdot \Delta y_2 \cdot A_2 = 0 + (1.2 \cdot a) \cdot (-2.8 \cdot a) \cdot 24 \cdot a^2 = -80.64 \cdot a^4,
\end{aligned} \tag{3.90}$$

a teljes idomra pedig

$$\begin{aligned}
I_{z'} &= I_{z'1} + I_{z'2} = 287.5733 \cdot a^4 + 476.16 \cdot a^4 = 763.7333 \cdot a^4, \\
I_{y'} &= I_{y'1} + I_{y'2} = 137.1733 \cdot a^4 + 42.56 \cdot a^4 = 179.7333 \cdot a^4, \\
I_{z'y'} &= I_{z'y'1} + I_{z'y'2} = -120.96 \cdot a^4 - 80.64 \cdot a^4 = -201.6 \cdot a^4.
\end{aligned} \tag{3.91}$$

A főértékek kiszámításához

$$\begin{aligned}
\frac{I_{z'} + I_{y'}}{2} &= \frac{763.7333 \cdot a^4 + 179.7333 \cdot a^4}{2} = \\
&= 471.7333 \cdot a^4, \\
\frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_{z'} - I_{y'})^2 + 4 \cdot I_{z'y'}^2} &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(763.7333 \cdot a^4 - 179.7333 \cdot a^4)^2 + 4 \cdot (-201.6 \cdot a^4)^2} = \\
&= 354.8331 \cdot a^4,
\end{aligned} \tag{3.92}$$

amelyekkel

$$\begin{aligned}
I_1 &= 471.7333 \cdot a^4 + 354.8331 \cdot a^4 = 826.5664 \cdot a^4, \\
I_2 &= 471.7333 \cdot a^4 - 354.8331 \cdot a^4 = 116.9002 \cdot a^4.
\end{aligned} \tag{3.93}$$

A főirányok szögeinek kiszámításához

$$\operatorname{tg}(2 \cdot \alpha) = -\frac{2 \cdot I_{z'y'}}{I_{z'} - I_{y'}} = -\frac{2 \cdot (-201.6 \cdot a^4)}{763.7333 \cdot a^4 - 179.7333 \cdot a^4} = 0.6904109589, \tag{3.94}$$

ahonnan

$$\begin{aligned}
2 \cdot \alpha &= \arctg 0.6904109589 = 0.604261 + n \cdot \pi \text{ rad}, \\
\alpha &= 0.302131 + n \cdot \pi / 2 \text{ rad}.
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Mivel $I_{z'y'} < 0$, az első főirány az első negyedtet metszi:

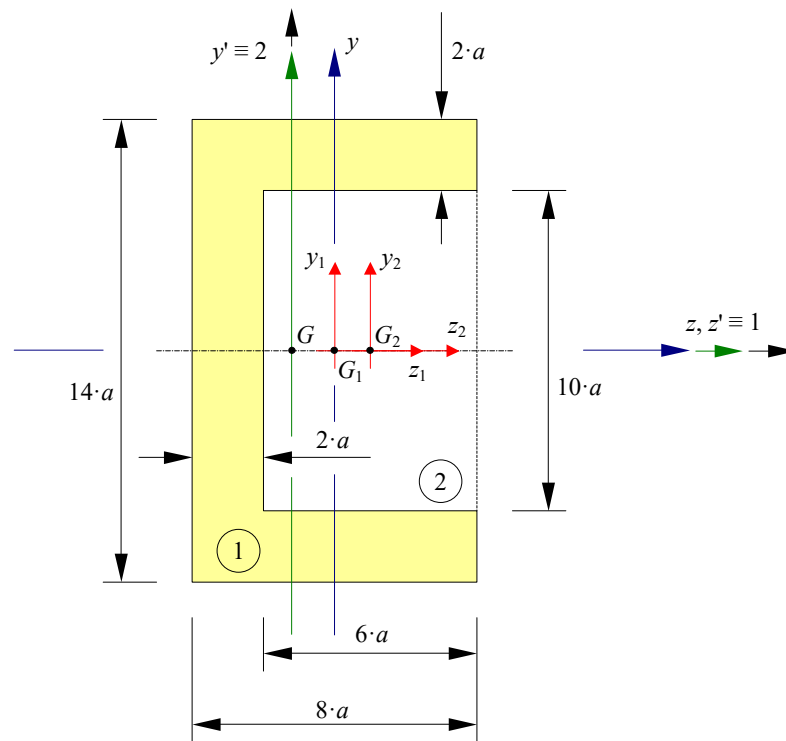
$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 0.302131 + 0 \cdot \pi / 2 \text{ rad} = 0.302131 \text{ rad} = 17.31^\circ, \\ \alpha_2 &= 0.302131 + 1 \cdot \pi / 2 \text{ rad} = 1.872927 \text{ rad} = 107.31^\circ.\end{aligned}\quad (3.96)$$

A főirányokat felrajzoljuk az ábrára, a főténgelyek irányát pedig úgy rajzoljuk meg, hogy az 12 koordináta-rendszer jobbos legyen.

3.22. példa. Egy szimmetria-tengellyel rendelkező összetett idom

A 3.17. ábrán látható idomot többféleképpen is fel lehetne bontani. Azt felbonthatjuk két vízszintes és egy függőleges téglalagra, de ezt az idomot tekinthetjük úgy is, hogy egy nagyobb, $8 \cdot a \times 14 \cdot a$ téglalabból kivágunk egy kisebb, $6 \cdot a \times 10 \cdot a$ méretű téglalapot. Ekkor ugyanis nem három, hanem csak két idommal kell dolgoznunk. Ez utóbbi téglalap, a hiányzó rész területét és a tengelyekre vonatkoztatott másodrendű nyomatékait a számításokban negatívnak kell vennünk, az elsőrendű nyomatékainak és a vegyes másodrendű nyomatékának az előjelét pedig meg kell fordítanunk.

Ennek az idomnak van egy vízszintes szimmetriatengelye: az egyszerűsített a síkidom egyik főténgelye, tehát az első lépésben a geometriai középpontnak csak a vízszintes koordinátáját (a függőleges főténgely helyzetét) kell meghatározni. A kiindulási koordináta-rendszerünk az első idom centrális rendszere, amelynek a vízszintes tengelye a szimmetria-tengellyel egybeesik.



3.17. ábra. Egy szimmetria-tengellyel rendelkező összetett idom

Az idom területe tehát:

$$\begin{aligned}A_1 &= 8 \cdot a \cdot 14 \cdot a = 112 \cdot a^2, \\ A_2 &= 6 \cdot a \cdot 10 \cdot a = 60 \cdot a^2, \\ A &= A_1 - A_2 = 112 \cdot a^2 - 60 \cdot a^2 = 52 \cdot a^2.\end{aligned}\quad (3.97)$$

A választott zy koordináta-rendszerünkben

$$\begin{aligned} z_{G1} &= 0, & y_{G1} &= 0, \\ z_{G2} &= a, & y_{G2} &= 0, \end{aligned} \quad (3.98)$$

az elsőrendű nyomatékok közül pedig a szimmetria miatt csak az y tengelyre vonatkoztatottakat kell kiszámolni (e példában a z tengelyre vonatkoztatottak az idom geometriájának felosztása miatt nullák lennének, de ez általánosan nem igaz):

$$\begin{aligned} S_{y1} &= z_{G1} \cdot A_1 = 0, \\ S_{y2} &= z_{G2} \cdot A_2 = a \cdot 60 \cdot a^2 = 60 \cdot a^3, \\ S_y &= S_{y1} - S_{y2} = 0 - 60 \cdot a^3 = -60 \cdot a^3. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Az idom geometriai középpontjának vízszintes koordinátája tehát kiszámítható, a függőleges pedig a szimmetria miatt adott:

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{S_y}{A} = \frac{-60 \cdot a^3}{52 \cdot a^2} = -1.1538 \cdot a, \\ y_G &= 0, \end{aligned} \quad (3.100)$$

amelyek rögzítik az idom $z'y'$ centrális koordináta-rendszerét, amelynek tengelyei a főirányokra esnek.

Az összetett idomot alkotó téglalapok saját centrális koordináta-rendszerükben számított másodrendű nyomatékai:

$$\begin{aligned} I_{z1} &= \frac{8 \cdot a \cdot (14 \cdot a)^3}{12} = 1829.3333 \cdot a^4, \\ I_{y1} &= \frac{(8 \cdot a)^3 \cdot 14 \cdot a}{12} = 597.3333 \cdot a^4, \\ I_{zy1} &= 0, \\ I_{z2} &= \frac{6 \cdot a \cdot (10 \cdot a)^3}{12} = 500 \cdot a^4, \\ I_{y2} &= \frac{(6 \cdot a)^3 \cdot 10 \cdot a}{12} = 180 \cdot a^4, \\ I_{zy2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.101)$$

A koordináta-rendszerek eltolásának mértéke a geometriai középpontoknak a $z'y'$ rendszerben megadott koordinátaival:

$$\begin{aligned} \Delta z_1 &= z_G - z_{G1} = -1.1538 \cdot a - 0 = -1.1538 \cdot a, \\ \Delta y_1 &= y_G - y_{G1} = 0, \\ \Delta z_2 &= z_G - z_{G2} = -1.1538 \cdot a - a = -2.1538 \cdot a, \\ \Delta y_2 &= y_G - y_{G2} = 0. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Az idom szimmetrikus, tehát a vegyes másodrendű nyomatéka nulla lesz. Mivel a geometriai középpontok mindegyike a z' tengelyen van, a Steiner-tételt csak az y' tengelyre vonatkoztatott másodrendű nyomatékokra kell alkalmazni (ugyanis ekkor $I_{z'1} = I_{z1}$ és $I_{z'2} = I_{z2}$):

$$\begin{aligned}
 I_{y'1} &= I_{y1} + \Delta z_1^2 \cdot A_1 = 597.3333 \cdot a^4 + (-1.1538 \cdot a)^2 \cdot 112 \cdot a^2 = 746.4338 \cdot a^4, \\
 I_{y'2} &= I_{y2} + \Delta z_2^2 \cdot A_2 = 180 \cdot a^4 + (-2.1538 \cdot a)^2 \cdot 60 \cdot a^2 = 458.3313 \cdot a^4.
 \end{aligned}
 \tag{3.103}$$

A hiányzó résznek megfelelő másodrendű nyomatékokat ki kell vonnunk:

$$\begin{aligned}
 I_{z'} &= I_{z'1} - I_{z'2} = 1829.3333 \cdot a^4 - 500 \cdot a^4 = 1329.3333 \cdot a^4, \\
 I_{y'} &= I_{y'1} - I_{y'2} = 746.4338 \cdot a^4 - 458.3313 \cdot a^4 = 288.1025 \cdot a^4, \\
 I_{z'y'} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.104}$$

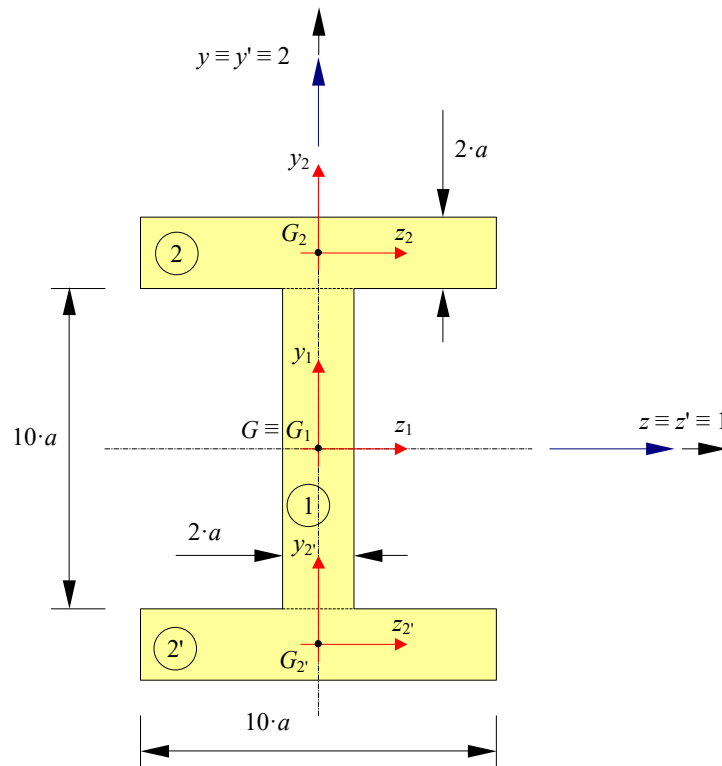
Mivel a $z'y'$ koordináta-rendszer tengelyei fő tengelyek (az egy olyan centrális rendszer, amelynek egyik tengelye szimmetria-tengely), a fenti mennyiségek a másodrendű nyomatékok főértékei. Csökkenő nagyság szerinti sorrendbe állítva

$$\begin{aligned}
 I_1 &= I_{z'} = 1329.3333 \cdot a^4, \\
 I_2 &= I_{y'} = 288.1025 \cdot a^4,
 \end{aligned}
 \tag{3.105}$$

tehát az első fő tengely a z' , a második pedig az y' tengellyel azonos.

3.23. példa. Két szimmetria-tengellyel rendelkező összetett idom

A 3.18. ábrán egy olyan összetett idom látható, amelynek két szimmetria-tengelye van. Ez a két szimmetria-tengely jelentős megtakarítást jelent a számításokban, ugyanis azok a fő tengelyeket rögzítik, s így csak a másodrendű nyomatékokat kell kiszámítanunk.



3.18. ábra. Két szimmetria-tengellyel rendelkező összetett idom

Az idomot három téglalapra bontottuk fel, a szimmetria megőrzésével: ekkor a 2-es idomra és a 2' idomra érvényes geometriai mennyiségek legfennebb csak előjelben különböznek egymástól, így elegendő azokat csak az egyikre kell kiszámolnunk azokat.

Ezen észrevételekkel az idom területe tehát:

$$\begin{aligned} A_1 &= 2 \cdot a \cdot 10 \cdot a = 20 \cdot a^2, \\ A_2 &= A_2' = 10 \cdot a \cdot 2 \cdot a = 20 \cdot a^2, \\ A &= A_1 + 2 \cdot A_2 = 20 \cdot a^2 + 2 \cdot 20 \cdot a^2 = 60 \cdot a^2. \end{aligned} \quad (3.106)$$

A zy koordináta-rendszerben, ami egybeesik az előbbi feladatokban használt $z'y'$ rendszerrel,

$$\begin{aligned} z_{G1} &= 0, & y_{G1} &= 0, \\ z_{G2} &= 0, & y_{G2} &= 6 \cdot a, \end{aligned} \quad (3.107)$$

s a teljesség kedvéért, bár ez nem szükséges $z_{G2'} = 0$ és $y_{G2'} = -6 \cdot a$.

Az elsőrendű nyomatékokra most nincs szükségünk, mert a G geometriai középpont adott, a másodrendű nyomatékok pedig

$$\begin{aligned} I_{z1} &= \frac{2 \cdot a \cdot (10 \cdot a)^3}{12} = 166.6667 \cdot a^4, \\ I_{y1} &= \frac{(2 \cdot a)^3 \cdot 10 \cdot a}{12} = 6.6667 \cdot a^4, \\ I_{zy1} &= 0, \\ I_{z2} &= I_{z2'} = \frac{10 \cdot a \cdot (2 \cdot a)^3}{12} = 6.6667 \cdot a^4, \\ I_{y2} &= I_{y2'} = \frac{(10 \cdot a)^3 \cdot 2 \cdot a}{12} = 166.6667 \cdot a^4, \\ I_{zy2} &= I_{zy2'} = 0. \end{aligned} \quad (3.108)$$

A Steiner-tételt csak a vízszintes téglalapokra és csak a z tengelyre kell alkalmaznunk. Ehhez

$$\Delta y_2 = y_G - y_{G2} = 0 - 6 \cdot a = -6 \cdot a \quad (3.109)$$

(és hasonló módon $\Delta y_{2'} = 6 \cdot a$), amivel

$$I_{z'2} = I_{z2'} = I_{z2} + \Delta y_2^2 \cdot A_2 = 6.6667 \cdot a^4 + (-6 \cdot a)^2 \cdot 20 \cdot a^2 = 726.6667 \cdot a^4. \quad (3.110)$$

A centrális, $z'y' \equiv zy$ rendszerben tehát

$$\begin{aligned} I_{z'} &= I_{z'1} + 2 \cdot I_{z'2} = I_{z1} + 2 \cdot I_{z2} = 166.6667 \cdot a^4 + 2 \cdot 726.6667 \cdot a^4 = 1620 \cdot a^4, \\ I_{y'} &= I_{y'1} + 2 \cdot I_{y'2} = I_{y1} + 2 \cdot I_{y2} = 6.6667 \cdot a^4 + 2 \cdot 166.6667 = 340 \cdot a^4, \\ I_{z'y'} &= 0. \end{aligned} \quad (3.111)$$

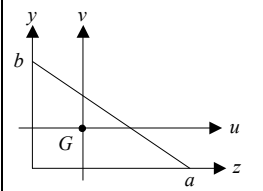
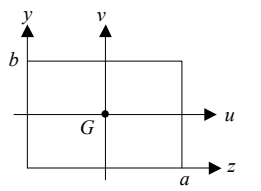
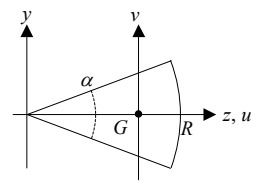
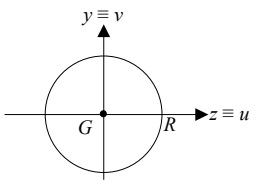
Beláthatjuk, hogy

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{z'} = 1620 \cdot a^4, \\ I_2 &= I_{y'} = 340 \cdot a^4, \end{aligned} \quad (3.112)$$

az első főtengely tehát egybeesik a z tengellyel, a második pedig az y -nal.

3.5. Összefoglaló

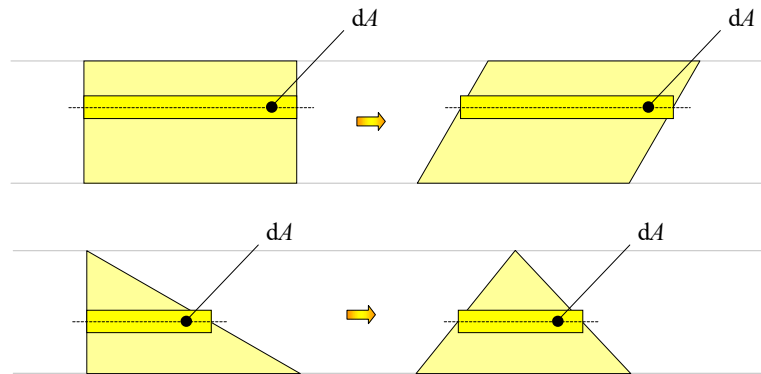
Az alábbi táblázat a fontosabb egyszerű síkidomok jellemző geometriai mennyiségeit foglalja össze:

Idom				
A	$\frac{a \cdot b}{2}$	$a \cdot b$	$\frac{\alpha \cdot R^2}{2}$	$\pi \cdot R^2$
z_G	$\frac{a}{3}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{4 \cdot R \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{3 \cdot \alpha}$	0
y_G	$\frac{b}{3}$	$\frac{b}{2}$	0	0
S_z	$\frac{a \cdot b^2}{6}$	$\frac{a \cdot b^2}{2}$	0	0
S_y	$\frac{a^2 \cdot b}{6}$	$\frac{a^2 \cdot b}{2}$	$\frac{2 \cdot R^3 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{3}$	0
I_z	$\frac{a \cdot b^3}{12}$	$\frac{a \cdot b^3}{3}$	$\frac{R^4}{8} \cdot (\alpha - \sin \alpha)$	$\frac{\pi \cdot R^4}{4}$
I_y	$\frac{a^3 \cdot b}{12}$	$\frac{a^3 \cdot b}{3}$	$\frac{R^4}{8} \cdot (\alpha + \sin \alpha)$	$\frac{\pi \cdot R^4}{4}$
I_{zy}	$\frac{a^2 \cdot b^2}{24}$	$\frac{a^2 \cdot b^2}{4}$	0	0
I_u	$\frac{a \cdot b^3}{36}$	$\frac{a \cdot b^3}{12}$	$\frac{R^4}{8} \cdot (\alpha - \sin \alpha)$	$\frac{\pi \cdot R^4}{4}$
I_v	$\frac{a^3 \cdot b}{36}$	$\frac{a^3 \cdot b}{12}$	$\frac{R^4}{8} \cdot (\alpha + \sin \alpha) - \frac{8 \cdot R^4}{9 \cdot \alpha} \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$	$\frac{\pi \cdot R^4}{4}$
I_{uv}	$-\frac{a^2 \cdot b^2}{72}$	0	0	0

3.1. táblázat. Egyszerű idomok összefoglaló táblázata

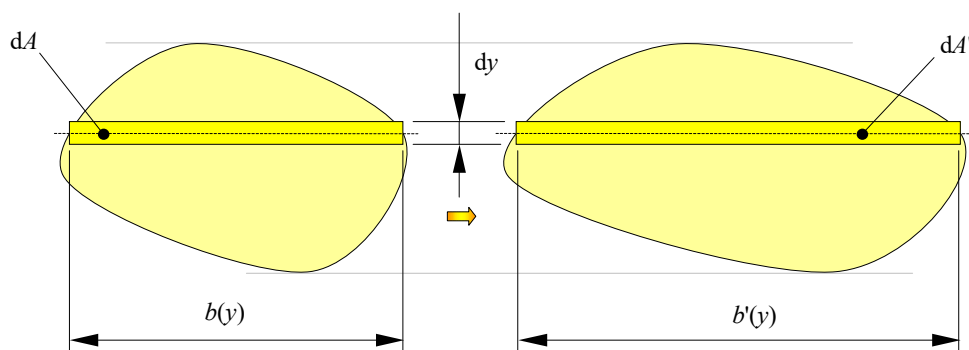
Bizonyos idomok jellemzőinek egy részét a fenti adatok és az *elmozdítási tétel*nek is nevezett észrevétel felhasználásával meg tudjuk adni. E tétel szerint pl. az $y^n \cdot dA$ szorzat nagysága nem változik meg, ha a dA területet z irányában is eltoljuk, így annak a z tengelyre számított

nyomatékai nem változnak. Emiatt a 3.19. ábrán levő idomok területe és a bármely vízszintes tengelyre vonatkoztatott nyomatéka páronként egyenlő.



3.19. ábra. Az elmozdítási tétel

Egy másik észrevétel – nevezhetnénk *skálázási tétel*-nek is – szerint ha az idom valamely tengellyel párhuzamos méreteit valamilyen tetszőleges k léptéktényezővel beszorozzuk, akkor az ilyen módon széthúzott vagy összenyomott idomnak az illető tengelyre vonatkoztatott geometriai nyomatékai is k -szor lesznek nagyobbak az eredeti idoménál. Ez annak tulajdonítható, hogy például a 3.20. ábrán látható bal oldali idom egy $dA = b(y) \cdot dy$ területeleme a z tengely menti méretek megváltoztatása után ugyan megváltozik, az $dA' = b'(y) \cdot dy = k \cdot b(y) \cdot dy = k \cdot dA$ lesz, de annak a geometriai középpontja függőleges irányban nem mozdul el. Emiatt az $y^n \cdot dA' = k \cdot y^n \cdot dA$ szorzatok nagysága is csak a léptéktényezőben fog különbözni az eredeti értékektől. Tehát a skálázott idom területe $A' = k \cdot A$, elsőrendű nyomatéka $S_z' = k \cdot S_z$, a másodrendű nyomatéka pedig $I_z' = k \cdot I_z$. Ezek következményeként az idom geometriai középpontja függőleges irányban nem mozdul el, hiszen $S_z / A = S_z' / A'$.



3.20. ábra. A skálázási tétel

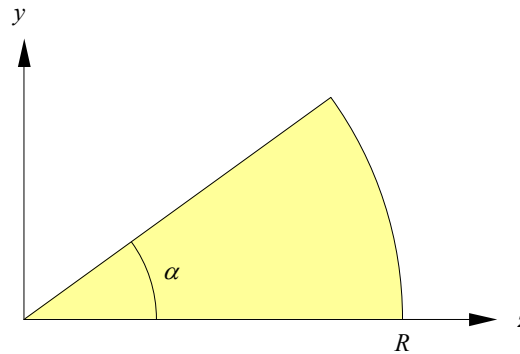
A második táblázatban azok a képletek szerepelnek, amelyeket a geometriai jellemzők kiszámításához használunk.

Mennyiség	Képlet	
Terület	$A = \int_D dA$	Összetett idomokra $A = \sum_i A_i$
Tengelyekre vonatkoztatott elsőrendű (sztatikai) nyomatékok	$S_z = \int_D y \, dA$	Összetett idomokra $S_z = \sum_i S_{z,i}$
	$S_y = \int_D z \, dA$	Összetett idomokra $S_y = \sum_i S_{y,i}$
Az elsőrendű nyomatékok változása a tengelyek eltolásakor	$S_{z'} = S_z - \Delta y \cdot A$	$z' = z - \Delta z$
	$S_{y'} = S_y - \Delta z \cdot A$	$y' = y - \Delta y$
Az elsőrendű nyomatékok változása a tengelyek elforgatásakor	$S_{z'} = S_z \cdot \cos \alpha - S_y \cdot \sin \alpha$	$z' = z \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha$
	$S_{y'} = S_z \cdot \sin \alpha + S_y \cdot \cos \alpha$	$y' = -z \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha$
A geometriai középpont koordinátái	$z_G = \frac{S_y}{A}$	
	$y_G = \frac{S_z}{A}$	
Tengelyekre vonatkoztatott másodrendű (tehetetlenségi) nyomatékok	$I_z = \int_D y^2 \, dA$	Összetett idomokra $I_z = \sum_i I_{z,i}$
	$I_y = \int_D z^2 \, dA$	Összetett idomokra $I_y = \sum_i I_{y,i}$
Vegyes másodrendű (centrifugális) nyomaték	$I_{zy} = I_{yz} = \int_D z \cdot y \, dA$	Összetett idomokra $I_{zy} = \sum_i I_{zy,i}$
Poláris nyomaték	$I_p = \int_D r^2 \, dA = I_z + I_y$	

3.2. táblázat. A geometriai jellemzőket adó relációk összefoglaló táblázata

A másodrendű nyomatékok változása a tengelyek eltolásakor	$I_{z'} = I_z - 2 \cdot \Delta y \cdot S_z + \Delta y^2 \cdot A$
	$I_{y'} = I_y - 2 \cdot \Delta z \cdot S_y + \Delta z^2 \cdot A$
	$I_{z'y'} = I_{zy} - \Delta z \cdot S_z - \Delta y \cdot S_y + \Delta z \cdot \Delta y \cdot A$
A másodrendű nyomatékok változása a tengelyek elforgatásakor	$I_{z'} = I_z \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \sin^2 \alpha - 2 \cdot I_{zy} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$,
	$I_{y'} = I_z \cdot \sin^2 \alpha + I_y \cdot \cos^2 \alpha + 2 \cdot I_{zy} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
	$I_{z'y'} = (I_z - I_y) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + I_{zy} \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$
A főirányok szögei	$\alpha = -\frac{1}{2} \cdot \arctg \frac{2 \cdot I_{zy}}{I_z - I_y} + n \cdot \frac{\pi}{2}$
A másodrendű nyomatékok főértékei	$I_1 = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4 \cdot I_{zy}^2}$
	$I_2 = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4 \cdot I_{zy}^2}$

3.2. táblázat. A geometriai jellemzőket adó relációk összefoglaló táblázata (folytatás)



3.21. ábra. Az oldalán fekvő körcikk

A 3.2. táblázatban foglaltak alapján, a 3.21. ábrán látható, az oldalán fekvő körcikkre (amely talán gyakrabban fordul elő, mint a vízszintes vagy függőleges szimmetria-tengelyű körcikk) a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned}
 I_z &= \frac{R^4}{8} \cdot \left(\alpha - \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) \right), \\
 I_y &= \frac{R^4}{8} \cdot \left(\alpha + \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) \right), \\
 I_{zy} &= -\frac{R^4}{8} \cdot \sin^2 \alpha.
 \end{aligned} \tag{3.113}$$

A korábbi feladatokban szereplő negyed körre ($\alpha = \pi / 2$):

$$I_z = I_y = \frac{\pi \cdot R^4}{16}, \quad I_{zy} = -\frac{R^4}{8}, \tag{3.114}$$

a félkörre pedig ($\alpha = \pi$)

$$I_z = I_y = \frac{\pi \cdot R^4}{8}, \quad I_{zy} = 0. \tag{3.115}$$

3.6. Tömeg, tömegközéppont, sztatikus és tehetetlenségi nyomatékok

Az eddigiekben a szilárdságtan különféle képleteiben előforduló geometriai jellegű mennyiségekkel foglalkoztunk. E mennyiségek a mechanikában is megjelennek: ha egy homogén, egyenletes vastagságú lemez tömegközéppontjának kiszámításáról, vagy pedig annak a tehetetlenségi nyomatékairól van szó, akkor a képletek csak egy konstans szorzóban különböznek a megfelelő geometriai mennyiségeket adó képletektől. A geometriai mennyiségek közvetlen skálázása ekkor fizikai jelentéssel bíró mennyiségekhez vezet. Azonban ha a lemez nem homogén, akkor a geometriai képletek közvetlen skálázása nem vezet eredményhez. E fejezet ezekkel a fizikai jellegű mennyiségekkel foglalkozik, egy aránylag sajátos, de gyakorlati fontossággal bíró esettel: a tartományonként állandó minőségű lemezre állapítja meg azokat. A fő cél nem, vagy nemcsak a mechanika tudás gyarapítása: az itt megállapított összefüggéseket az összetett keresztmetszetű rúd igénybevételeinek elemzése során alkalmazhatjuk.

3.6.1. Tömeg

Egy V térfogatú, ρ sűrűségű homogén test tömege $m = \rho \cdot V$. Ha ez a test egy egyenletes t vastagságú lemez, akkor a sűrűsége helyett definiálhatjuk annak fajlagos tömegét, amely az egységnyi területű lemez tömege: $\mu = \rho \cdot t \cdot 1 \text{ m}^2$; e mennyiség mértékegysége kg/m^2 . Ezzel az A területű lemez tömege

$$m = \mu \cdot A. \quad (3.116)$$

Ha a lemez inhomogén és/vagy a vastagsága nem egyenletes, akkor is definiálhatunk egy fajlagos tömeget, amellyel

$$m = \int_A \mu \, dA. \quad (3.117)$$

Ha a fajlagos tömeg az A_i területű tartományon egy állandó μ_i értékkel rendelkezik, akkor

$$m = \sum \left(\int_{A_i} \mu_i \, dA \right) = \sum \left(\mu_i \cdot \int_{A_i} dA \right) = \sum (\mu_i \cdot A_i). \quad (3.118)$$

3.6.2. Sztatikus nyomatékok

Ha a vízszintesen fekvő lemez síkjában felvesszünk egy tetszőleges yz koordináta-rendszert, akkor a lemez súlya, amely egy $G = m \cdot g$ nagyságú és a lemez síkjára merőleges vektor, a tengelyek körül az

$$\begin{aligned} M_z &= g \cdot \int_D \mu \cdot y \, dA, \\ M_y &= g \cdot \int_D \mu \cdot z \, dA \end{aligned} \quad (3.119)$$

nyomatékokkal forgatna. Ha ezekből a képletekből elhagyjuk a gravitációs gyorsulást, akkor az

$$\begin{aligned} S_z^* &= \int_D \mu \cdot y \, dA, \\ S_y^* &= \int_D \mu \cdot z \, dA \end{aligned} \quad (3.120)$$

sztatikus nyomatékokhoz jutunk. Amennyiben μ állandó, akkor

$$\begin{aligned} S_z^* &= \mu \cdot \int_D y \, dA = \mu \cdot S_z, \\ S_y^* &= \mu \cdot \int_D z \, dA = \mu \cdot S_y, \end{aligned} \quad (3.121)$$

tehát a sztatikus nyomaték (ami egy mechanikai mennyiség) és az idom elsőrendű nyomatéka (ami egy geometriai mennyiség) csak egy állandóban különbözik egymástól – ezzel az észrevétellel magyarázhatjuk azt, hogy az idomok elsőrendű nyomatékait gyakran sztatikus nyomatékoknak nevezzük. Ha μ nem állandó, akkor a két mennyiség között nincs egyértelmű megfeleltetés.

Gyakorlati szempontból fontos az az eset, amikor μ_i az A_i területű tartományon állandó:

$$S^*_{z'} = \sum \left(\mu_i \cdot \int_{D_i} y \, dA \right) = \sum (\mu_i \cdot S_{z'i}),$$

$$S^*_{y'} = \sum \left(\mu_i \cdot \int_{D_i} z \, dA \right) = \sum (\mu_i \cdot S_{y'i}).$$
(3.122)

A továbbiakban ezzel az esettel foglalkozunk.

3.6.3. A sztatikus nyomatékok változása a tengelyek eltolása során

Vizsgáljuk meg, mi történik ezekkel a nyomatékokkal a koordináta-rendszer megváltoztatása esetén. Ha a tengelyeket önmagukkal párhuzamosan a Δy , Δz távolságokra eltoljuk (a koordináta-transzformációt a 3.22. képletek adják), akkor a 3.23. levezetést követve

$$S^*_{z'} = \sum \mu_i \cdot \int_{D_i} y' \, dA = \sum (\mu_i \cdot S_{z'i}) = \sum (\mu_i \cdot (S_{z'i} - \Delta y \cdot A_i)) = S^*_{z'} - \Delta y \cdot m,$$

$$S^*_{y'} = \sum \mu_i \cdot \int_{D_i} z' \, dA = \sum (\mu_i \cdot S_{y'i}) = \sum (\mu_i \cdot (S_{y'i} - \Delta z \cdot A_i)) = S^*_{y'} - \Delta z \cdot m.$$
(3.123)

3.6.4. A tömegközéppont

Ha a tengelyek azon pozíciója érdekel, amelyekre a sztatikus nyomatékok nullák, akkor az új koordináta-rendszer origójának a helyzetét a következő mennyiségek adják:

$$y_C = \frac{S^*_z}{m},$$

$$z_C = \frac{S^*_y}{m}.$$
(3.124)

E koordináta-rendszer origója a „tömegközéppont”, más néven „súlypont”. Tartományonként állandó minőségű lemezre bővebben kifejtve a súlypont koordinátái

$$y_C = \frac{\sum \mu_i \cdot S_{z'i}}{\sum \mu_i \cdot A_i},$$

$$z_C = \frac{\sum \mu_i \cdot S_{y'i}}{\sum \mu_i \cdot A_i}.$$
(3.125)

E képletekből leszűrhetjük azt a következtetést, hogy ha μ nem állandó, akkor a tömegközéppont csak legfennebb sajátságos esetekben esik egybe a geometriai középponttal, ugyanis egyszerűsítéssel nem lehet e mennyiségeket a 3.24. formára hozni.

3.6.5. A sztatikus nyomatékok változása a tengelyek elforgatásakor

Tegyük fel, hogy a koordináta-rendszerünket elforgatjuk egy bizonyos α szöggel az origója körül: a koordináta-transzformációt a 3.25. képletek adják. Ekkor, a 3.26. levezetését követően:

$$\begin{aligned}
S_{z'}^* &= \sum \left(\mu_i \cdot \int_{D_i} y' \, dA \right) = \sum \left(\mu_i \cdot \int_{D_i} (-z \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha) \, dA \right) = \sum (\mu_i \cdot S_{z'}) = \\
&= S_{z'}^* \cdot \cos \alpha - S_{y'}^* \cdot \sin \alpha, \\
S_{y'}^* &= \sum \left(\mu_i \cdot \int_{D_i} z' \, dA \right) = \sum \left(\mu_i \cdot \int_{D_i} (z \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha) \, dA \right) = \sum (\mu_i \cdot S_{y'}) = \\
&= S_{z'}^* \cdot \sin \alpha + S_{y'}^* \cdot \cos \alpha.
\end{aligned} \tag{3.126}$$

Ezek szerint a tömegközéppont körüli forgatáskor a sztatikus nyomatékok a szögtől függetlenül nullák maradnak. Következésképpen: bármely, a tömegközépponton keresztülmenő tengelyre, a sztatikus nyomaték nulla.

3.6.6. Tehetetlenségi nyomatékok

Egy test forgatással szemben kifejtett tehetetlenségét a mechanikában a tehetetlenségi-mátrixszal szokták leírni. Ez egy szimmetrikus mátrix, amelyet egy anyagi pontok rendszeréből álló testre a következő:

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum (m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2)) & -\sum (m_i \cdot x_i \cdot y_i) & -\sum (m_i \cdot x_i \cdot z_i) \\ -\sum (m_i \cdot y_i \cdot x_i) & \sum (m_i \cdot (x_i^2 + z_i^2)) & -\sum (m_i \cdot y_i \cdot z_i) \\ -\sum (m_i \cdot z_i \cdot x_i) & -\sum (m_i \cdot z_i \cdot y_i) & \sum (m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2)) \end{bmatrix}. \tag{3.127}$$

Ha ez a test az yz síkban elhelyezkedő, két dimenzióval leírható struktúra, amelyet tartományonként állandó μ_i fajlagos tömegű lemezekből álló rendszernek tekinthetünk és amely nem forog a síkjára merőleges x tengely körül, akkor ezt a tehetetlenségi mátrixot a következő formára hozhatjuk:

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} I_y & I_{yz} \\ I_{zy} & I_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \left(\mu_i \cdot \int_{D_i} z_i^2 \, dA \right) & -\sum \left(\mu_i \cdot \int_{D_i} y_i \cdot z_i \, dA \right) \\ -\sum \left(\mu_i \cdot \int_{D_i} z_i \cdot y_i \, dA \right) & \sum \left(\mu_i \cdot \int_{D_i} y_i^2 \, dA \right) \end{bmatrix}. \tag{3.128}$$

Ahhoz, hogy a geometriai másodrendű nyomatékokat ne keverjük össze a mechanikai tehetetlenségi nyomatékokkal, vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned}
I_{y'}^* &= \sum \left(\mu_i \cdot \int_{D_i} z_i^2 \, dA \right) = \sum (\mu_i \cdot I_{y_i}), \\
I_{z'}^* &= \sum \left(\mu_i \cdot \int_{D_i} y_i^2 \, dA \right) = \sum (\mu_i \cdot I_{z_i}), \\
I_{z'y'}^* &= I_{y'z'}^* = \sum \left(\mu_i \cdot \int_{D_i} z_i \cdot y_i \, dA \right) = \sum (\mu_i \cdot I_{zy_i}),
\end{aligned} \tag{3.129}$$

mely összefüggések összekötik a két fogalmat, a negatív előjel elhagyásával. Akárcsak a sztatikus nyomatékok esetében, homogén lemezekre a két mennyiség csak egy konstansban különbözik

egymástól, emiatt nevezik gyakran az idomok másodrendű nyomatékait tehetetlenségi nyomatékoknak.

3.6.7. A tehetetlenségi nyomatékok változása a tengelyek eltolása során

A 3.22. koordináta-transzformációval, a 3.62. levezetések alapján a következőkhöz jutunk:

$$\begin{aligned}
 I_{z'}^* &= \sum \left(\mu_i \cdot \int_{D_i} y'^2 \, dA \right) = \sum (\mu_i \cdot I_{z'}) = I_{z'}^* - 2 \cdot \Delta y \cdot S_z^* + \Delta y^2 \cdot m, \\
 I_{y'}^* &= \sum \left(\mu_i \cdot \int_{D_i} z'^2 \, dA \right) = \sum (\mu_i \cdot I_{y'}) = I_{y'}^* - 2 \cdot \Delta z \cdot S_y^* + \Delta z^2 \cdot m, \\
 I_{z'y'}^* &= \sum \left(\int_{D_i} z' \cdot y' \, dA \right) = \sum (\mu_i \cdot I_{z'y'}) = I_{zy}^* - \Delta z \cdot S_z^* - \Delta y \cdot S_y^* + \Delta z \cdot \Delta y \cdot m.
 \end{aligned} \tag{3.130}$$

3.6.8. A tehetetlenségi nyomatékok változása a tengelyek elforgatásakor

A koordináta-transzformációt a 3.25. képletek adják, a 3.68. levezetést követve pedig

$$\begin{aligned}
 I_{z'}^* &= \sum \left(\mu_i \cdot \int_{D_i} y'^2 \, dA \right) = \sum (\mu_i \cdot I_{z'}) = \\
 &= I_z^* \cdot \cos^2 \alpha + I_y^* \cdot \sin^2 \alpha - 2 \cdot I_{zy}^* \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \\
 I_{y'}^* &= \sum \left(\mu_i \cdot \int_{D_i} z'^2 \, dA \right) = \sum (\mu_i \cdot I_{y'}) = \\
 &= I_z^* \cdot \sin^2 \alpha + I_y^* \cdot \cos^2 \alpha + 2 \cdot I_{zy}^* \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \\
 I_{z'y'}^* &= \sum \left(\mu_i \cdot \int_{D_i} z' \cdot y' \, dA \right) = \sum (\mu_i \cdot I_{z'y'}) = \\
 &= (I_z^* - I_y^*) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + I_{zy}^* \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha).
 \end{aligned} \tag{3.131}$$

3.6.9. A tehetetlenségi nyomatékok főirányai és főértékei

A tehetetlenségi mátrix szimmetrikus, tehát az egy megfelelő transzformációval (forgatással) diagonális formára hozható:

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \leftrightarrow [\mathbf{J}'] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}. \tag{3.132}$$

Matematikailag ez a sajátérték-feladat megoldása, amely a tehetetlenségi mátrix $[\mathbf{J}] = [\mathbf{Q}] \cdot [\mathbf{J}'] \cdot [\mathbf{Q}]^{-1}$ formájú felbontását célozza meg (ahol, $[\mathbf{J}]$ szimmetriájából fakadóan, $[\mathbf{Q}]^{-1} = [\mathbf{Q}]^T$). A felbontásból származó $[\mathbf{Q}]$ „modális” mátrix oszlopai a sajátvektorokat tartalmazzák, amelyek az új koordináta-rendszer tengelyeinek az iránytényezőit adják meg, $[\mathbf{J}']$ pedig a $[\mathbf{J}]$ mátrix sajátértékeit tartalmazó „spektrális” mátrix. Ez az átalakítás, a matematikai szempontokon túlmenően azért is érdekes, mert a centrális koordináta-tengelyeknek egy olyan

elrendezéséhez vezet, amelyekre nézve nincsenek vegyes másodrendű nyomatékok. Ebben a koordináta-rendszerben a tengelyre vonatkoztatott másodrendű nyomatékok között megjelenik a lehető legnagyobb és a lehető legkisebb érték is. Az átlón szereplő értékeket csökkenő sorrendbe szokták állítani ($I_1 \geq I_2 \geq I_3$) és azokat fő tehetetlenségi nyomatékoknak nevezik, az új koordináta-irányokat pedig főirányoknak mondják. Ugyanez az észrevétel érvényes a tehetetlenségi mátrix kétdimenziós változatára is.

A 3.4.4. fejezetben, miután megállapítottuk, hogy a tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatékok lehető legkisebb értéke egy centrális koordináta-rendszerben keresendő, a főértékeket szélsőértékeként kerestük, a koordináta-rendszer α elforgatási szögének függvényében. Ehhez kiszámítottuk az elforgatott koordináta-rendszerben érvényes másodrendű nyomatékok $2 \cdot \alpha$ szerinti deriváltjait (mert ezeket egyszerűbb volt kiszámítani, mint az α szerinti deriváltakat), a kapott 3.71. összefüggés szerint pedig ezeknek a deriváltaknak az abszolút értéke a vegyes másodrendű nyomaték abszolút értékével azonos. A keresett szélsőértékek tehát egy olyan centrális koordináta-rendszerben jelennek meg, amelyben $I_{xy} = 0$, ami a 3.132. diagonális formához vezet. Az $I_{xy}(\alpha) = 0$ egyenletet $\text{tg}(2 \cdot \alpha)$ -ban megoldva a főirányok szögeihez jutottunk (3.73.): mivel a $\text{tg}(2 \cdot \alpha)$ függvény periódusa π , ezek az irányok merőlegesek egymásra. Végül a főirányokkal meghatároztuk a főértékeket is (3.76).

Észrevehetjük, hogy a geometriai fogalmak és a mechanikai fogalmak között tökéletes az analógia: a területeknek a tömegek felelnek meg ($A_i \leftrightarrow m_i$), a G geometriai középpontnak a C tömegközéppont, az elsőrendű nyomatékoknak a sztatikus nyomatékok (pl. $S_z \leftrightarrow S_z^*$), a másodrendű nyomatékoknak pedig a tehetetlenségi nyomatékok (pl. $I_z \leftrightarrow I_z^*$). Emiatt levezetés nélkül is átvehetjük a képleteket: a tehetetlenségi nyomatékok főirányait a

$$\text{tg}(2 \cdot \alpha) = -\frac{2 \cdot I_{xy}^*}{I_z^* - I_y^*} \quad (3.133)$$

összefüggésből határozhatjuk meg, a főértékeket pedig a

$$I_{1/2}^* = \frac{I_z^* + I_y^*}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_z^* - I_y^*)^2 + 4 \cdot I_{xy}^{*2}} \quad (3.134)$$

képlet adja.

4. HÚZÓ ÉS NYOMÓ IGÉNYBEVÉTEL

4.1. Egyszerű és összetett igénybevételek

Amikor a rudat (vagy általában, egy alkatrészt) csak a 2. fejezetben ismertetett igénybevételek egyike terheli, akkor azt mondjuk, hogy az illető rúd egyszerű igénybevételéről van szó. Az egyszerű igénybevétel lehet

- tengelyirányú (húzó, nyomó),
- nyíró,
- hajlító vagy
- csavaró

igénybevétel, aszerint, hogy a rúd hosszán melyik igénybevétel jelenik meg (N , T_z vagy T_y , M_z vagy M_y , illetve M_t). Megjegyzendő, hogy olyan rúd, amely csak nyíró igénybevételnek van kitéve, nem létezik.

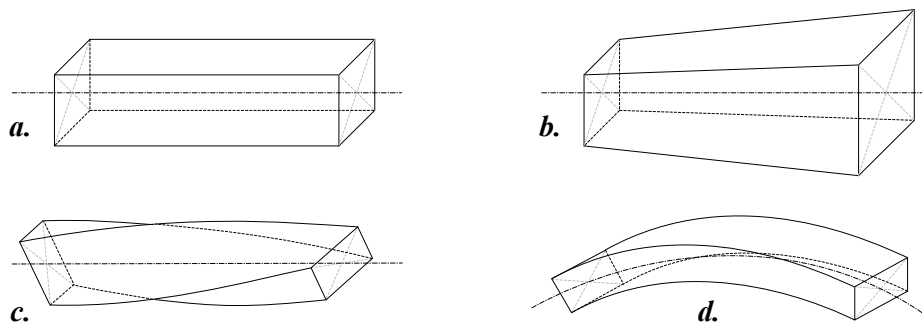
Ha az egyszerű igénybevétel esetén a rúd keresztmetszetén csak egyfajta feszültség jelenik meg, akkor az egyszerű igénybevételt *tisztának* nevezik.

Amikor a rúd hosszán egyszerre több igénybevétel is megjelenik, akkor összetett igénybevételről beszélünk. Az összetett igénybevételek tárgyalása az egyszerű, tiszta igénybevételek alapján történik, azonban az összetett igénybevétel hatását általában nem lehet az egyszerű igénybevételek hatásának összegeként tekinteni, ahhoz további ismeretekre is szükség van.

4.2. Prizmatikus rudak központos húzása és nyomása

4.2.1. Alapvető feltételezések és összefüggések

A szilárdságtan alapkísérletei a tiszta és egyszerű igénybevételeket tanulmányozzák, céljuk az erő és az erő által létrehozott alakváltozás kapcsolatának felderítése. Az első ilyen alapkísérlet az alcímbe szereplő tengely irányú igénybevétel kísérleti tanulmányozása: a kísérlet tárgya egy prizmatikus (állandó keresztmetszetű és egyenes, 4.1. ábra) rúd, amelynek az anyaga homogén, izotróp és lineárisan rugalmas. A rudat a két végén, tengelyének irányában terheljük olyan módon, hogy a húzó vagy nyomó erő eredője éppen a rúd tengelyében, a keresztmetszet geometriai középpontjában hasson.



4.1. ábra. Prizmatikus (a) és nem-prizmatikus (b - d) rudak

A kísérletezés során azt tapasztalhatjuk, hogy a rúd megterhelése előtt megrajzolt sík és a tengelyre merőleges keresztmetszetek a megterhelést követő alakváltozások után is síkok és a rúd

tengelyére merőlegesek maradnak (ezt Bernoulli hipotézisének nevezzük), legalábbis az erő alkalmazásától kellő távolságra. A rúd két végének közvetlen környezetében, az erő alkalmazásának módjától függő távolságon belül ez a feltételezés nem állja meg a helyét, azonban a modellteremtés céljából elfogadjuk azt az idealizálást, hogy Bernoulli hipotézise a rúd teljes hosszán érvényes.

Amennyiben a megrajzolt keresztmetszetek egyenlő távolságra voltak, akkor az alakváltozást követően is egyenlő távolságra lesznek (4.2. ábra).

A rúd terhelése és megnyúlása között tapasztalt és az első fejezetben már említett

$$N = k \cdot \Delta l \quad (4.1)$$

arányosság a lineárisan rugalmas anyag feltételezéséhez vezet (ez a kijelentés fordítva is igaz).

Amennyiben feltételezzük, hogy a tengely irányú erő egyenletesen oszlik el a rúd tengelyére merőleges keresztmetszeten, egy fajlagos

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (4.2)$$

tengelyirányú feszültséget definiálhatunk, amelyet *normálfeszültség*nek is neveznek, mert a keresztmetszetre merőleges irányú.

Ha feltételezzük, hogy a rúd egyenletesen nyúlik meg az erő hatására, akkor egy másik fajlagos mennyiséget is definiálhatunk, az

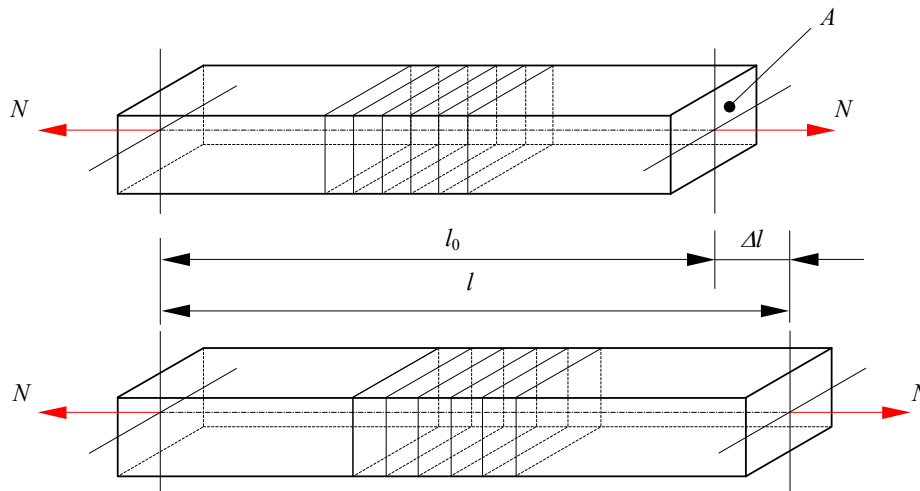
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (4.3)$$

fajlagos alakváltozást, amely ez esetben, pontosabban, *fajlagos nyúlás*.

Az alakváltozás és az erő egyenes arányosságát eredetileg R. Hooke jelentette ki (ut tensio sic vis), mely arányosság az előbbieken bevezetett fajlagosított mennyiségek között is fennáll:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (4.4)$$

s ezt az arányosságot Hooke törvényének nevezzük. A normálfeszültség és a fajlagos nyúlás közötti arányossági tényező az E Young-modulusz.



4.2. ábra. Prizmatikus rúd központos húzása

A 4.2. relációt *sztatikai egyenlet*nek nevezzük: a különféle igénybevételek esetében a sztatikai egyenletek kötik össze az erőket és a belőlük származó feszültségeket, ezek írják le a szilárdságtani feladat sztatikai aspektusát.

A 4.3. reláció a *geometriai egyenlet*: ezek az egyenletek kapcsolják össze az alakváltozásokat és a fajlagos alakváltozásokat. Ezek írják le a szilárdságtani feladat geometriai aspektusát.

Végül, a 4.4. reláció az *anyagegyenlet*: ezek az egyenletek írják le a feszültségek és a fajlagos alakváltozások közötti kapcsolatot, amely a legegyszerűbb esetben lineáris. Ezek írják le a szilárdságtani feladat fizikai aspektusát.

E három egyenlet egyesítéséből a rúd megnyúlása

$$\Delta l = \frac{N \cdot l_0}{E \cdot A}, \quad (4.5)$$

amely összefüggést a 4.1. egyenlettel való összehasonlítva, az utóbbiban szereplő arányossági tényezőt azonosíthatjuk:

$$k = \frac{E \cdot A}{l_0} \quad (4.6)$$

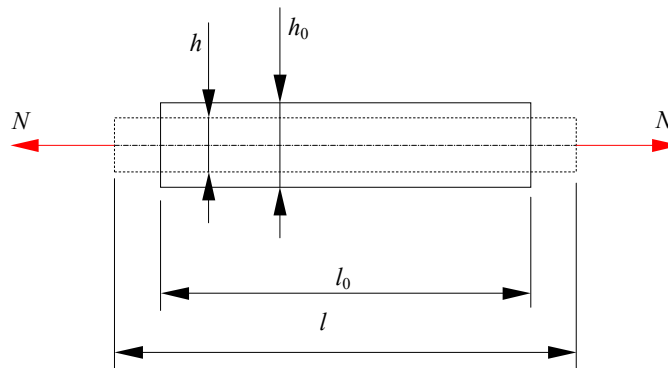
mely mennyiség a rúd húzási merevsége. k számszerűen a rúd egységnyi megnyújtásához szükséges erő nagyságával egyenlő.

4.2.2. A harántirányú alakváltozás

A húzó-nyomó kísérlet során a prizmatikus rúd harántirányú alakváltozását is észlelhetjük, a 4.3. ábrán például, miközben a rúd hosszúsága l_0 -ról l -re nő, a keresztmetszet magassága h_0 -ról h -ra csökken. Ezt a méretváltozást is fajlagosíthatjuk:

$$\varepsilon_t = \frac{h - h_0}{h_0} = \frac{\Delta h}{h_0}, \quad (4.7)$$

ami a harántirányú (tranzverzális) fajlagos alakváltozás.



4.3. ábra. A harántirányú alakváltozás

A tapasztalat szerint, ritka kivételektől eltekintve, a harántirányú alakváltozás előjele a hosszirányúéval fordított és feltételezhetjük, hogy a nagysága ez utóbbiéval egyenesen arányos:

$$\varepsilon_t = -\nu \cdot \varepsilon, \quad (4.8)$$

ahol ν a Poisson-együttható. E és ν a rúd anyagának szilárdságtani (mechanikai) jellemzői, amelyek ugyan nem állandók, mert például a hőmérséklettől is függenek, de a számításokban a különböző anyagokra azokat akként használjuk.

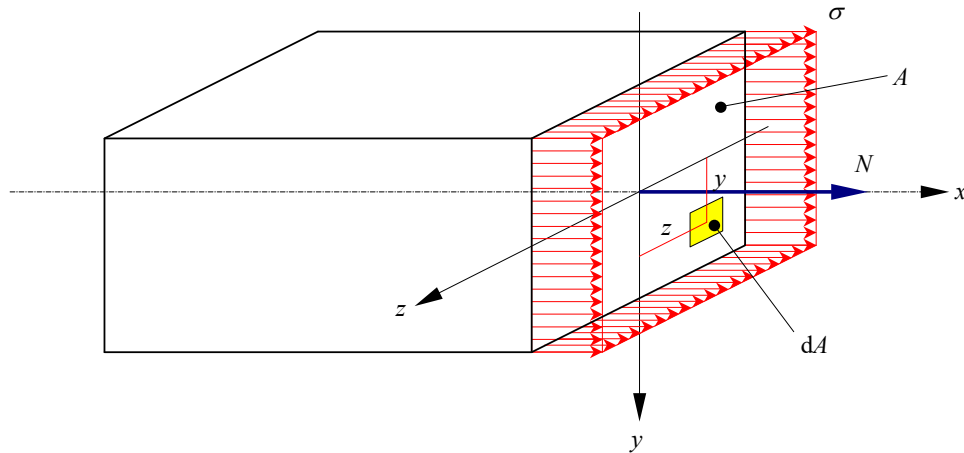
Úgy gondolhatnánk, hogy mivel a mechanikában a szilárd anyagokat összenyomhatatlannak tartjuk, a harántirányú alakváltozás a térfogat megmaradásából eredne. Ha a megnyújtott rúd anyagából kimetszünk egy egységnyi oldalú kockát, aminek a térfogata is egységnyi ($V_0 = 1$), akkor alakváltozás után annak a rúd tengelyével párhuzamos mérete $1 + \varepsilon$ -ra növekedik, a merőleges méretei pedig $1 - \nu \cdot \varepsilon$ -ra csökkennek. Ekkor a kocka térfogata

$$V = (1 + \varepsilon) \cdot (1 - \nu \cdot \varepsilon)^2 \approx 1 + \varepsilon \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \quad (4.9)$$

lesz, az ε hatványait tartalmazó tagok elhanyagolásával (ugyanis a fajlagos alakváltozásokról feltételezzük, hogy azok nagyon kicsik). E képlet szerint, ha $\nu = 0.5$, akkor a térfogat nem változik meg ($V = V_0 = 1$). A Poisson-együttható ezen értéke az idealizált összenyomhatatlan anyagokra érvényes, a fémek esetében pedig általában az kisebb, általában 0.3...0.4 között van, s ekkor a nyújtott rúd anyagának térfogata a 4.9. képlet értelmében megnövekedik.

4.2.3. A húzóerő támadáspontja

A 4.4. ábrán a húzott rúd egy keresztmetszetét látjuk, a feszültség feltételezett egyenletes eloszlásával. Ez azt jelenti, hogy az A keresztmetszet bármely pontjában a σ normál feszültség értéke azonos.



4.4. ábra. Központos húzás

A dA elemi felületen ható feszültség eredője az infinitezimális $dN = \sigma \cdot dA$ tengely irányú erő, amely az elemi felület középpontjában hat. Ennek az erőnek a forgatónyomatéka az y tengelyre előjel-helyesen $dM_y = -z \cdot dN = -\sigma \cdot z \cdot dA$, a z tengelyre nézve pedig $dM_z = y \cdot dN = \sigma \cdot y \cdot dA$. A rúd teljes keresztmetszetén ható feszültség forgatónyomatékai az előbbi mennyiségek eredőjeként

$$\begin{aligned} M_y &= \int_A dM_y = -\sigma \cdot \int_A z \cdot dA = -\sigma \cdot S_y = 0, \\ M_z &= \int_A dM_z = \sigma \cdot \int_A y \cdot dA = \sigma \cdot S_z = 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

amelyek nullák kell legyenek, mivel a tiszta húzó igénybevételről esetét tanulmányozzuk. Ezek az egyensúlyi egyenletek csak akkor teljesülnek, ha a keresztmetszetnek a választott tengelyekre számított elsőrendű nyomatékai nullák, vagyis ha az y és z tengelyek súlyvonalak, a keresztmetszeten felvett koordináta-rendszer pedig centrális (az origója a keresztmetszet geometriai középpontjában van).

Varignon tétele alapján az elemi dN erők rendszerének eredő nyomatéka az erőrendszer eredőjének a nyomatékával egyenlő. Az erőrendszer eredője az

$$N = \int_A dN = \sigma \cdot \int_A dA \quad (4.11)$$

tengely irányú erő. Ha támadáspontjának koordinátáit Δy -nal és Δz -vel jelöljük, akkor e tétel alapján

$$\begin{aligned} M_y &= -N \cdot \Delta z = 0, \\ M_z &= N \cdot \Delta y = 0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

mely feltétel csak akkor teljesül, ha $\Delta y = 0$ és $\Delta z = 0$.

Ezek értelmében a húzó és a nyomó igénybevétel csak akkor tekinthető egyszerű igénybevételnek, ha annak eredője, mint koncentrált erő, a rúd tengelyében hat (ez egyezményesen a keresztmetszet geometriai középpontján megy át). Ezt *központos* húzásnak (nyomásnak) nevezzük.

Amennyiben a tengely irányú erő támadáspontja nem a geometriai középpontra esik, az igénybevételt *külponosnak* nevezzük, amely nem tiszta igénybevétel, mert hajlítással társul (ilyenkor M_y és/vagy M_z nem nulla).

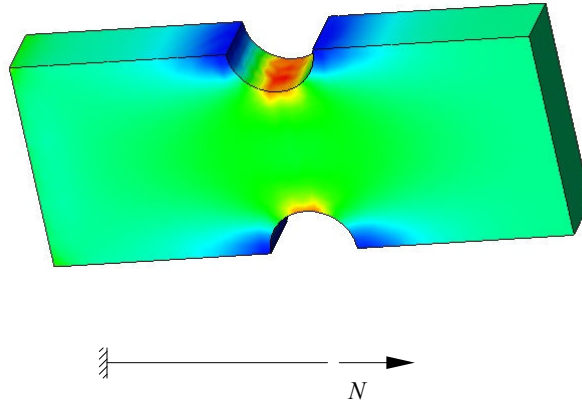
4.2.4. Feszültség-gyűjtő helyek és a de Saint-Venant elv

Amennyiben az egyenes tengelyű rúd hosszán annak keresztmetszete nem állandó (a rúd nem prizmatikus), akkor az előbbiekben elmondottak csak korlátozottan érvényesek. A 4.5. ábrán egy központosan húzott rudat látunk, amelynek a bal oldala mereven befogott, a jobb oldalán pedig a keresztmetszetén egyenletesen megoszló N húzóerővel terhel. A rúd közepét két, szimmetrikusan elhelyezkedő hengeres bemélyedés gyengíti. A szín a tengely irányú feszültséget kódolja, a piros a legnagyobb, a kék pedig a legkisebb σ értékeket jelöli. A feszültségeket numerikus eljárással (végelem-módszerrel) határoztuk meg, de megfelelő kísérleti eljárásokkal is hasonló feszültség-eloszláshoz jutunk.

Amennyiben igaz lenne az eddigiekben alkalmazott hipotézis, amely szerint bármely keresztmetszeten $\sigma = N/A$ és az egyenletesen oszlik meg, akkor bármely tengelyre merőleges keresztmetszeten azonos feszültséget és színt várhatnánk el, a kigyengített keresztmetszeten nagyobb, egyebütt pedig kisebbet. A numerikus eljárásokkal történt modellezés és a kísérleti eredmények viszont mást mutatnak: a kigyengített keresztmetszet közvetlen környezetében a feszültség megoszlása közel sem egyenletes, az erőteljes változást mutat. Az ilyen helyek közelében tehát a feszültség a geometriától függően kisebb-nagyobb mértékben kiugró értékeket mutat, ezért ezeket *feszültség-gyűjtő helyeknek* nevezzük. A bemetszések környékén elhelyezkedő kék színű zónák azt mutatják, hogy ott a rúd anyaga csak kismértékben vesz részt a tengely irányú erő átvételében.

A feszültség-gyűjtő helyeknél fellépő feszültségeket a szilárdságtan egyszerű eljárásaival nem lehet kiszámítani, ehhez numerikus módszereken alapuló eljárások szükségesek, azonban könyvekben, képlet-gyűjteményekben a feszültség eloszlását közelítő diagramokat lehet találni, amely a lekerekítések, furatok gyakrabban előforduló eseteiben használhatók.

A 4.5. ábra a peremfeltételek (a rögzítés és az erő alkalmazási módjának) hatását is illusztrálja: a bal oldalon a keresztmetszet rugalmas alakváltozását – a rúd nyújtásának következményeként fellépő zsugorodását – a merev befogás meggátolja, emiatt a feszültség eloszlása itt sem egyenletes, bár az sokkal kisebb változást mutat, mint a feszültség-gyűjtő hely közelében. A jobb oldalon viszont nem látunk semmiféle változást, ugyanis a modellezésben egyenletesen megoszló tengely irányú erőt alkalmaztunk.



4.5. ábra. Kigyengített keresztmetszetű húzott rúd

A rúd két végén fellépő feszültségi állapot nagymértékben függ az erő alkalmazásának módjától és a kényszerek megvalósításától, azonban a megfigyelés szerint, akárcsak az itt felhozott példában, ez a hatás a távolsággal gyorsan csökken és a számítások szempontjából elhanyagolható. Ezt az észrevételt de Saint-Venant-elv néven ismerjük.

4.2.5. A szakaszonként állandó keresztmetszetű rúd

A 4.6. ábrán levő rúd két prizmatikus szakaszból áll, amelyek tengelye egybeesik: ilyenkor elfogadhatjuk azt a feltételezést, mely szerint a prizmatikus rudakra fennálló összefüggések továbbra is érvényesek maradnak (azaz bármely keresztmetszeten a feszültség ez esetben is állandó): a bal oldali szakaszon

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_1}, \quad (4.13)$$

a jobb oldalon pedig

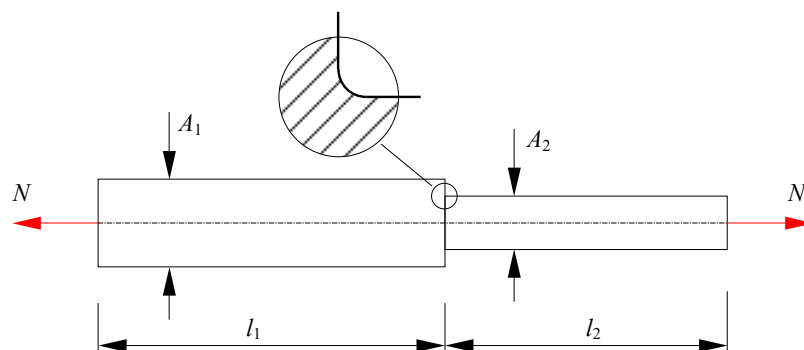
$$\sigma_2 = \frac{N}{A_2}, \quad (4.14)$$

és mivel $A_1 > A_2 \Rightarrow \sigma_1 < \sigma_2$.

A feszültség szakaszonkénti állandósága és egyenletes eloszlása szigorúan véve az illesztési zónára nem igaz, mert az feszültség-gyűjtő helyként viselkedik. Ahhoz, hogy itt ne jelenjenek meg jelentős feszültség-kiugrások, az illesztéseket kerekíteni vagy sarkítani kell.

A rúd hosszának megváltozását az iménti feltételezés alapján a szakaszok hossz-változásának összegeként adhatjuk meg, mintha prizmatikus rudakat kapcsoltunk volna össze sorosan:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{N \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{N \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} = N \cdot \left(\frac{l_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{l_2}{E_2 \cdot A_2} \right). \quad (4.15)$$



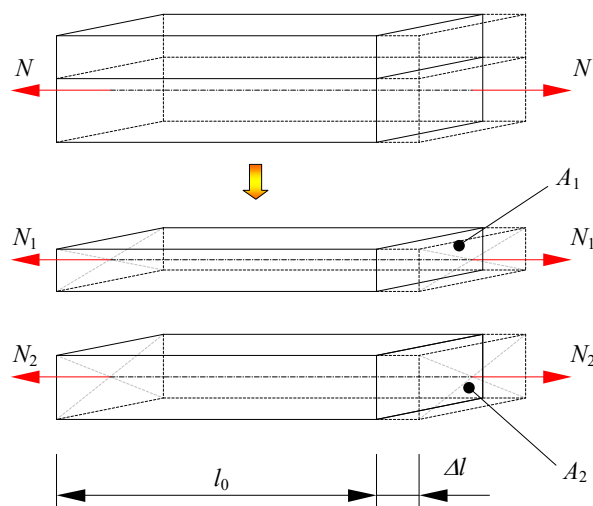
4.6. ábra. Szakaszonként állandó keresztmetszetű húzott rúd

Ha ebben az összefüggésben a zárójelben levő mennyiséget a szakaszonként változó keresztmetszetű rúd húzásra számított merevségével hozzuk kapcsolatban, akkor a 4.6. összefüggés alapján elmondhatjuk, hogy az tulajdonképpen a szakaszok merevségeinek harmonikus átlagaként számítható ki:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}. \quad (4.16)$$

4.2.6. Az összetett keresztmetszetű rúd

Az összetett keresztmetszetű rúd ugyan nem tesz eleget a prizmatikus rúd esetében megfogalmazott homogenitás hipotézisének, de ha a keresztmetszetre anyagoként igazak maradnak az eddigi feltételezések, akkor azt párhuzamosan kapcsolt rudakból álló szerkezetnek tekinthetjük (4.7. ábra).



4.7. ábra. Összetett keresztmetszetű húzott rúd

E párhuzamos rudak együttesen veszik át a terhelést:

$$N = N_1 + N_2, \quad (4.17)$$

azonos hosszúságúak és egyenlő mértékben nyúlnak meg, hiszen azok egy közös testet alkotnak:

$$\Delta l = \Delta l_1 = \Delta l_2, \quad (4.18)$$

ahol

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l}{E_1 \cdot A_1} = \frac{N_1}{k_1} \quad \text{és} \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l}{E_2 \cdot A_2} = \frac{N_2}{k_2}. \quad (4.19)$$

N_1 és N_2 nagyságát egyensúlyi egyenletekből kiszámítani nem lehet, ez tehát egy sztatikailag határozatlant feladat. A kettő viszonyát a megnyúlások egyenlőségéből megadhatjuk:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\frac{E_1 \cdot A_1}{l}}{\frac{E_2 \cdot A_2}{l}} = \frac{k_1}{k_2}, \quad (4.20)$$

tehát a párhuzamos rudak a merevségükkel arányos mértékben veszik át a terhelést. Innen pl. $N_2 = N_1 \cdot k_2 / k_1$, amit a 4.17.-be behelyettesítve megkapjuk a keresett összetevőket:

$$N_1 = N \cdot \frac{k_1}{k_1 + k_2}, \quad \text{illetve} \quad N_2 = N \cdot \frac{k_2}{k_1 + k_2}. \quad (4.21)$$

Az így meghatározott erők valamelyikével, a 4.19. képletek felhasználásával kiszámítható a rúd megnyúlása:

$$\Delta l = \frac{N}{k_1 + k_2} = \frac{N \cdot l}{E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2}, \quad (4.22)$$

s innen levonható az a következtetés, mi szerint az összetett keresztmetszetű, prizmatikusnak tekinthető rúd nyújtással szembeni merevsége az alkotó részek merevségeinek összegével azonos:

$$k = k_1 + k_2$$

A megnyúlások 4.18. azonosságából következik a fajlagos nyúlások azonossága is:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad (4.23)$$

de amennyiben $E_1 \neq E_2$, akkor a

$$\sigma_1 = E_1 \cdot \varepsilon = \frac{N_1}{A_1} \quad \text{és} \quad \sigma_2 = E_2 \cdot \varepsilon = \frac{N_2}{A_2} \quad (4.24)$$

feszültségek nem lesznek egyenlők, azok a Young-moduluszokkal (az anyag merevségével) lesznek egyenesen arányosak:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_1}{E_2}, \quad (4.25)$$

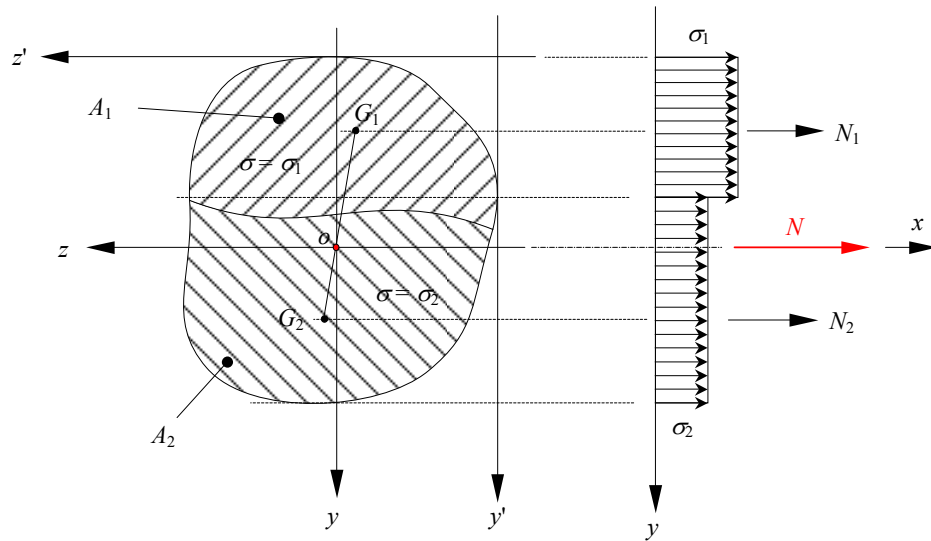
tehát a merevebb (szilárdabb) anyag terhelődik jobban, függetlenül a keresztmetszetek arányától.

Felvetődik az a kérdés, hogy hol kell legyen a tengely irányú erő támadáspontja ahhoz, hogy az összetett keresztmetszetű rúd húzása egyszerű igénybevétel legyen (másként fogalmazva: ne lépjen fel a rúd egyidejű hajlítása is). A válasz nyilvánvaló: abban a pontban, amelyre nézve az N_1 és az N_2 erők eredő nyomatéka nulla.

Ezt a választ, egyenletes feszültség-állapotot feltételezve, bővebben is kifejthetjük. A 4.8. ábrán ez a feltételezett állapotot látható, ahol a feszültségek viszonya $E_1 > E_2$ -nek felel meg. A keresztmetszeten, anyagonként a következő erők jelennek meg:

$$\begin{aligned} N_1 &= \sigma_1 \cdot A_1 = \varepsilon \cdot E_1 \cdot A_1, \\ N_2 &= \sigma_2 \cdot A_2 = \varepsilon \cdot E_2 \cdot A_2, \end{aligned} \quad (4.26)$$

amelyek az összetett keresztmetszetet húzó N erő összetevői, tengely irányú erők, amelyek az A_i keresztmetszetek G_i geometriai középpontjában hatnak.



4.8. ábra. A feszültség megoszlása a rúd keresztmetszetén

Az N erő támadáspontjának koordinátáit Varignon tételének alkalmazásával számíthatjuk ki: tegyük fel, hogy ezt a támadáspontot az ábrán levő, tetszőlegesen felvett $y'z'$ koordináta-rendszerben keressük. Ekkor az N_i erők eredőnek y' és a z' tengelyre számított nyomatékai azonosan kell legyenek az N erőnek ugyanazokra a tengelyekre számított nyomatékaival:

$$\begin{aligned} N_1 \cdot y'_{G1} + N_2 \cdot y'_{G2} &= N \cdot y'_o, \\ N_1 \cdot z'_{G1} + N_2 \cdot z'_{G2} &= N \cdot z'_o, \end{aligned} \quad (4.27)$$

bővebben kifejtve:

$$\begin{aligned} \varepsilon \cdot E_1 \cdot A_1 \cdot y'_{G1} + \varepsilon \cdot E_2 \cdot A_2 \cdot y'_{G2} &= \varepsilon \cdot (E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2) \cdot y'_o, \\ \varepsilon \cdot E_1 \cdot A_1 \cdot z'_{G1} + \varepsilon \cdot E_2 \cdot A_2 \cdot z'_{G2} &= \varepsilon \cdot (E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2) \cdot z'_o, \end{aligned} \quad (4.28)$$

ahonnan, mivel a terhelt rúd esetében $\varepsilon \neq 0$:

$$\begin{aligned} y'_o &= \frac{E_1 \cdot A_1 \cdot y'_{G1} + E_2 \cdot A_2 \cdot y'_{G2}}{E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2}, \\ z'_o &= \frac{E_1 \cdot A_1 \cdot z'_{G1} + E_2 \cdot A_2 \cdot z'_{G2}}{E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

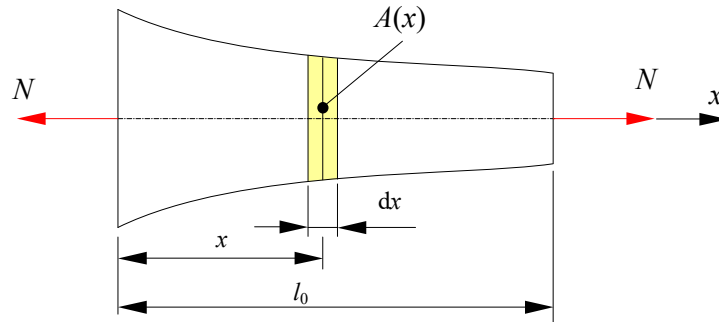
A támadáspont koordinátái tehát a területek Young-modulusokkal súlyozott geometriai középpontjában van – ez a kijelentés akkor is igaz, amikor nem csak két, hanem többfajta összetevő alkotja a teljes keresztmetszetet. E koordinátákat az összetett lemez tömegközéppontjának helyzetét megadó 3.124. összefüggésekkel összehasonlítva, a 3.6. fejezetben megállapítottak alapján kijelenthetjük, hogy az o pont egyfajta „tömegközéppontként” értelmezhető, ha „fajlagos tömegként” a Young-modulusokat tekintjük. Ez csak sajátos esetekben esik egybe a teljes keresztmetszet geometriai középpontjával, tehát általában $o \neq G$. Egy ilyen, a műszaki gyakorlatban sokszor előforduló eset az, amikor a keresztmetszet két tengelyre nézve is szimmetrikus, beleértve az anyag szilárdsági tulajdonságait is.

4.2.7. A folyamatosan változó keresztmetszetű rúd

Amennyiben a rúd keresztmetszete folyamatosan és csak kis mértékben változik és bármely keresztmetszet geometriai középpontja a rúd egyenes tengelyére esik (4.9. ábra), akkor jó közelítéssel elfogadható a

$$\sigma(x) = \frac{N}{A(x)} \quad (4.30)$$

feltételezés, ahol $A(x)$ a rúd változó keresztmetszetét jelenti. E képlet szerint még állandó tengely irányú igénybevétel esetén is a feszültség az x koordináta függvénye lesz.



4.9. ábra. Folyamatosan változó keresztmetszetű rúd

A rúd dx hosszúságú szakaszán a keresztmetszetet állandónak vehetjük, s e szakasz nyúlása a

$$d(\Delta l) = \varepsilon(x) \cdot dx = \frac{\sigma(x)}{E} \cdot dx = \frac{N \cdot dx}{E \cdot A(x)} \quad (4.31)$$

infinitesimalis mennyiség lesz, ami a 4.5. képlettel analóg összefüggés ad. E képlet értelmében a rúd merevsége pontról pontra változik.

A 2.31. mennyiséget a rúd teljes l_0 hosszán integrálva kapjuk annak megnyúlását:

$$\Delta l = \int_{l_0} d(\Delta l) = \int_0^{l_0} \frac{N}{E \cdot A(x)} dx = \frac{N}{E} \cdot \int_0^{l_0} \frac{1}{A(x)} dx. \quad (4.32)$$

Innen a két végén terhelt nyújtott rúd merevségét

$$k = \frac{E}{\int_0^{l_0} \frac{1}{A(x)} dx}. \quad (4.33)$$

formában fejezhetjük ki.

4.2.8. Általánosítás

Tegyük fel, hogy a rúd prizmatikusnak tekinthető, de a hossza mentén a geometriája, az anyaga és az igénybevétele is változik. Ekkor, az előbbi esettel analóg módon, egy adott x koordinátájú pont körül felvett dx hosszúságú szakasz nyúlása

$$d(\Delta l) = \varepsilon(x) \cdot dx = \frac{\sigma(x)}{E(x)} \cdot dx = \frac{N(x) \cdot dx}{E(x) \cdot A(x)}, \quad (4.34)$$

amivel

$$\Delta l = \int_{l_0} d(\Delta l) = \int_0^{l_0} \frac{N(x)}{E(x) \cdot A(x)} dx, \quad (4.35)$$

a két végén terhelt rúd merevsége pedig a

$$k = \frac{1}{\int_0^{l_0} \frac{1}{E(x) \cdot A(x)} dx} \quad (4.36)$$

formában írhatjuk fel.

4.2.9. A hőmérséklet-változás hatása

A tapasztalat szerint a hőmérséklet-változás a testek méreteinek megváltozásához vezet. Egy l_0 hosszúságú rudat egyenletesen melegítve annak hossz-változását az

$$\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta t \quad (4.37)$$

arányossággal írhatjuk le, ahol nem túl nagy Δt hőmérséklet-változás esetén az α *hőtágulási együttható* állandónak tekinthető. Ez utóbbi mértékegysége $1/K$ vagy $1/^\circ C$ és az anyagok többségének esetében az pozitív, vagyis a hőmérséklet növekedése a méretek növekedéséhez vezet. Ezt a megnyúlást, pont úgy, mint a tengely irányú erő által okozottat, fajlagosíthatjuk: az egységnyi hosszúságú rúd hossza az

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \alpha \cdot \Delta t \quad (4.38)$$

mennyiséggel változik. Ezt a fajlagos nyúlást nem követi feszültség megjelenése. Hooke törvényével egyesítve a fajlagos nyúlás teljesebb

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \cdot \Delta t \quad (4.39)$$

képletéhez jutunk. Amennyiben a szabad hőtágulást meggátoljuk, $\varepsilon = 0$ és ekkor a rúdban egy

$$\sigma = -\alpha \cdot E \cdot \Delta t \quad (4.40)$$

feszültség keletkezik, amely a hőmérséklet növekedése esetén nyomó-, ellenben húzó-feszültség.

E képlet alapján, ha egy prizmatikus rúd hőtágulását meggátoljuk, akkor az egy

$$N = \alpha \cdot E \cdot A \cdot \Delta t \quad (4.41)$$

nagyságú erővel fog hatni a kényszereire.

A méretváltozás nem csak a hosszúság irányában lép fel: egy egységnyi területű négyzet oldalai a hőmérséklet-változást követően $1 + \alpha \cdot \Delta t$ hosszúságúak lesznek, s ezáltal az egységnyi terület $1 + 2 \cdot \alpha \cdot \Delta t$ -re változik (mivel α egy nagyon kicsi mennyiség, a hatványait el lehet hanyagolni). Ha az eredeti terület nem egységnyi, hanem A_0 , akkor a változás mértéke arányosan

$$\Delta A = A_0 \cdot 2 \cdot \alpha \cdot \Delta t = \alpha_A \cdot A_0 \cdot \Delta t . \quad (4.42)$$

Hasonlóképpen, a V_0 térfogat változását

$$\Delta V = V_0 \cdot 3 \cdot \alpha \cdot \Delta t = \alpha_V \cdot V_0 \cdot \Delta t . \quad (4.43)$$

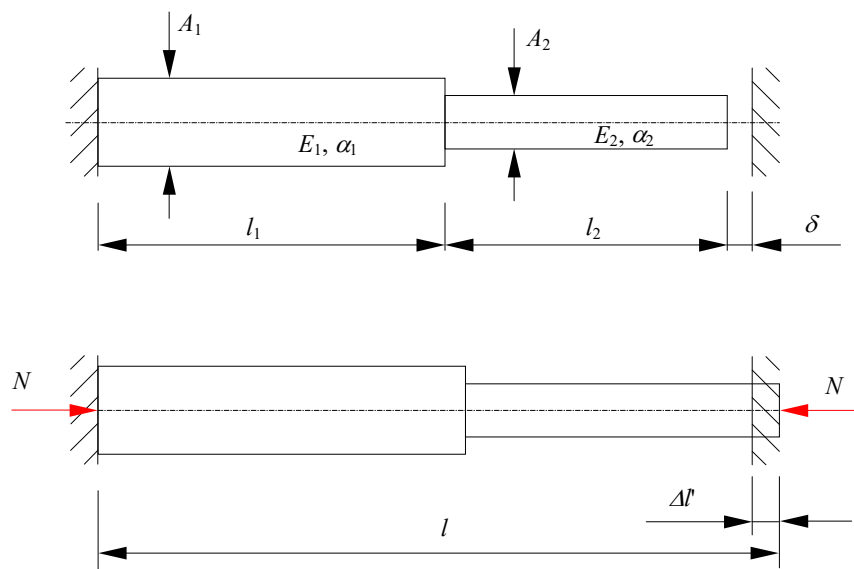
gyanánt számíthatjuk.

A 4.37. képletben szereplő α tényezőt pontosabban vonalas (lineáris) hőtágulási tényezőnek nevezzük. A 4.42. képlet tényezője az előbbi duplája, az $\alpha_A = 2 \cdot \alpha$ felületi (négyzetes) hőtágulási tényező, a 4.43.-é pedig az $\alpha_V = 3 \cdot \alpha$ térfogati (körös) hőtágulási tényező.

Amennyiben egy sztatikailag határozott, homogén anyagú szerkezet belsejében a hőmérsékleti mező egyenletes és a hőmérséklet-változás annak minden pontjában ugyanaz, akkor ez nem okozza a feszültségek megváltozását. Minden más esetben a hőtágulás hatását meg kell vizsgálnunk, ugyanis ha a szerkezet sztatikailag nem határozott, anyaga nem homogén vagy pedig ha a hőmérsékleti mező nem egyenletes, a hőmérséklet-változás által okozott szabad alakváltozás megakadályozása miatt jelentős feszültségek léphetnek fel.

4.1. példa. A meggátolt hőtágulás által okozott feszültség

A 4.10. ábrán szereplő mereven befogott rúd két különböző anyagú darabból áll, amelyet szakaszonként állandó keresztmetszetű rúdnak tekinthetünk. A rúd jobboldali vége szabad, azonban azt csak egy keskeny, δ szélességű rés választja el egy merev faltól.



4.10. ábra. Hőtágulás által előidézett feszültség

Egy bizonyos Δt , egyenletes hőmérséklet-növekedést követően a rúd anyaga kiterjeszkedik, és ha ezt a hőtágulást nem akadályozzuk meg, a rúd hosszának megnövekedése a szakaszonként számolt mennyiségekkel

$$\Delta l = (l_1 \cdot \alpha_1 + l_2 \cdot \alpha_2) \cdot \Delta t \quad (4.44)$$

lenne. Ameddig a rúd szabad vége nem támaszkodik fel a merev falra ($\Delta l \leq \delta$), abban nem jelenik meg feszültség, ellenben a szabadon

$$l = l_1 + l_2 + (l_1 \cdot \alpha_1 + l_2 \cdot \alpha_2) \cdot \Delta t \quad (4.45)$$

hosszúságra kiterjeszkedő rudat a kényszerek

$$l' = l_1 + l_2 + \delta \quad (4.46)$$

hosszúságúra korlátozzák,

$$\Delta l' = l - l' = (l_1 \cdot \alpha_1 + l_2 \cdot \alpha_2) \cdot \Delta t - \delta \quad (4.47)$$

rövidülést okozva, aminek a következményeként a kényszerekben egy reakció-erő lép fel, amely tengely irányú igénybevételt okoz. Ezt a reakció-erőt a szakaszonként állandó keresztmetszetű rúd terhelése és megnyúlása között megállapított 4.15. reláció segítségével számolhatjuk ki:

$$N = \frac{\Delta l'}{\frac{l_1'}{E_1 \cdot A_1} + \frac{l_2'}{E_2 \cdot A_2}} = \frac{(l_1 \cdot \alpha_1 + l_2 \cdot \alpha_2) \cdot \Delta t - \delta}{\frac{l_1 \cdot (1 + \alpha_1 \cdot \Delta t)}{E_1 \cdot A_1} + \frac{l_2 \cdot (1 + \alpha_2 \cdot \Delta t)}{E_2 \cdot A_2}} \approx \frac{(l_1 \cdot \alpha_1 + l_2 \cdot \alpha_2) \cdot \Delta t - \delta}{\frac{l_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{l_2}{E_2 \cdot A_2}}, \quad (4.48)$$

ahol az l' mennyiségek a szabadon kiterjeszkedő szakaszok hosszai.

Ez az erő nyomóerőként hat (tehát negatív előjelű kell legyen) és az általa előidézett feszültség szakaszonként

$$\sigma_1 = \frac{-N}{A_1} = \frac{-N}{A_1 \cdot (1 + 2 \cdot \alpha \cdot \Delta t)} \approx \frac{-N}{A_1}, \text{ illetve } \sigma_2 \approx \frac{-N}{A_2}. \quad (4.49)$$

Az előbbi képletekben a megközelítéseket a kis alakváltozások hipotézise miatt fogadhatjuk el, ugyanis a szilárd anyagok lineáris hőtágulási tényezője 10^{-5} nagyságrendű mennyiség és a műszaki gyakorlatban előforduló hőmérséklet-változások esetén $\alpha \cdot \Delta t \ll 1$.

4.3. Egyéb húzó vagy nyomó igénybevételnek kitett alkatrészek

4.3.1. Láncok, kötelek, kábelek

A műszaki gyakorlatban nem csak egyenes rúd formájú alkatrészek esetében fordulhat elő az az eset, amikor az igénybevételek következtében az alkatrész keresztmetszetén egyenletesen eloszló normál-feszültség lép fel. Klasszikus példa erre az alcímben szereplő kötél-szerű gépelemek és alkatrészek esete, amelyek csak húzó igénybevételt tudnak átvenni (tehát a többi mellett még nyomót sem). Valójában ezeknek az elemek bizonyos mértékben ellenállhatnak az egyéb igénybevételeknek is, azonban a kis alakváltozások hipotézisében ez az ellenállás elhanyagolható a húzással szembeni merevségükhöz viszonyítva.

A kötél-szerű elemek keresztmetszete elhanyagolható a hosszúságukhoz képest, a geometriájukat a középvonaluk és az annak mentén, arra mindig merőlegesen elcsúsztatott keresztmetszetükkel adhatjuk meg. Mivel csak húzással szemben fejtenek ki ellenállást, formájukat a terhelés módja határozza meg.

A két pont között kifeszített kötél alakját, amennyiben azt csak a saját súlya terheli, a 4.11. ábrán látható *láncgörbe* írja le, amelynek az egyenlete a következő:

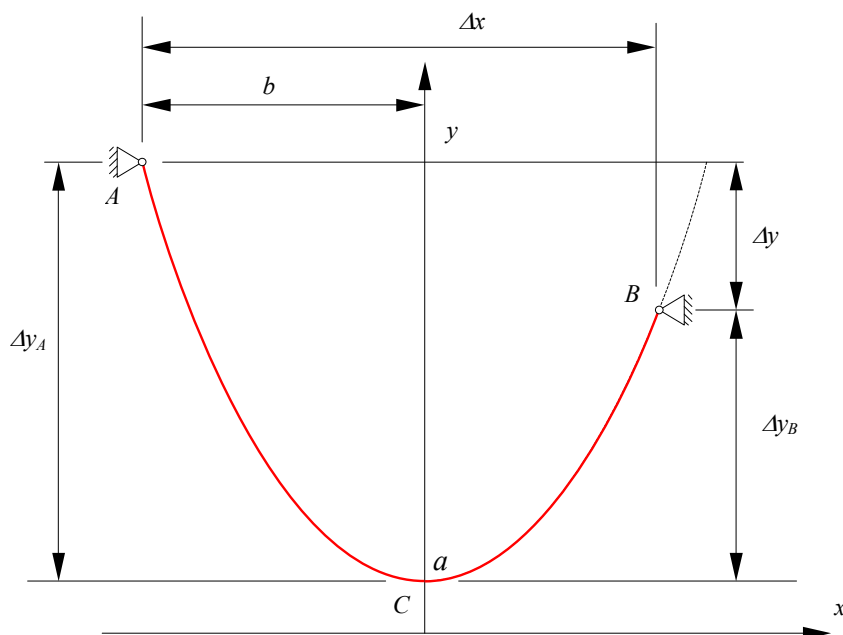
$$y = a \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right) = a \cdot \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}, \quad (4.50)$$

ahol „ch” a koszinusz-hiperbolikus függvény és az

$$a = \frac{T_H}{p} \quad (4.51)$$

paraméter a kötél erő T_H vízszintes összetevőjének és az egységnyi hosszúságú kötél p súlyának hányadosa. Mivel a kötelet csak a saját súlya terheli, a T kötél erő vízszintes összetevőjének nagysága annak bármely pontjában ugyanakkora és egyenlő a felfüggesztésekben fellépő reakcióerők vízszintes összetevőjének nagyságával.

A lánccsík szimmetrikus az y tengelyre nézve és azt az $y = a$ koordinátánál metszi.



4.11. ábra. Felfüggesztett kötél

A matematikai analízisből tudjuk, hogy az $y = f(x)$ függvénnyel leírt görbe ívhosszát az $s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ határozott integrál adja. E képlet felhasználásával a kötélnak a lánccsíkban C csúcsától egy tetszőleges pontjáig számított hossza

$$s = \sqrt{y^2 - a^2}. \quad (4.52)$$

Amennyiben az A és B (nem feltétlenül egy síkban levő) felfüggesztési pontok helyzete ismert és a kötél l hosszúsága adott, akkor a kötél hossza a C és az A, valamint a C és a B pontok közötti ívek hosszának összegével kell azonos legyen:

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{y_A^2 - a^2} + \sqrt{y_B^2 - a^2} = \sqrt{(\Delta y_A + a)^2 - a^2} + \sqrt{(\Delta y_B + a)^2 - a^2} = \\ &= \sqrt{(\Delta y_A + a)^2 - a^2} + \sqrt{(\Delta y_A - \Delta y + a)^2 - a^2}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

E képletben a Δy_A és a Δy_B mennyiségek a kötélt kívánt belógását rögzítik, a felfüggesztési pontoktól mérve, Δy pedig a felfüggesztési pontok közötti szintkülönbség.

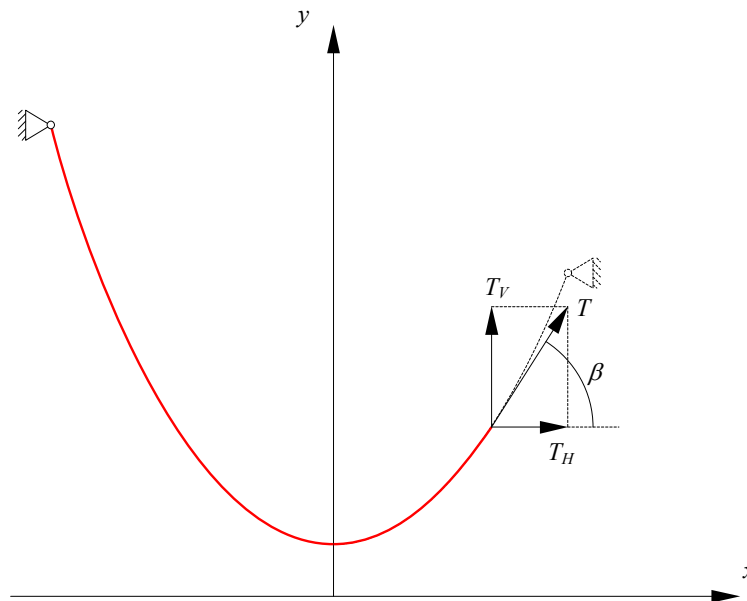
A felfüggesztési pontok a láncgörbén kell legyenek, tehát e pontok koordinátái eleget kell tegyenek a 4.50. egyenletnek. Az A pontban:

$$y_A = a \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{x_A}{a}\right) \Rightarrow \Delta y_A + a = a \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{-b}{a}\right), \quad (4.54)$$

a B -ben pedig

$$y_B = a \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{x_B}{a}\right) \Rightarrow \Delta y_A - \Delta y + a = a \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{\Delta x - b}{a}\right), \quad (4.55)$$

ahol Δx a felfüggesztési pontok közötti vízszintes távolság, b pedig az y tengely helyzetét lokalizálja.



4.12. ábra. A kötél erő vetületei

A 4.53. - 4.55. egyenletek kapcsolatot teremtenek a kötélt felfüggesztési pontjainak relatív helyzete (Δx , Δy), hossza (l), belógása (Δy_A , $\Delta y_B = \Delta y_A - \Delta y$), valamint az a és b paraméterek között. A felfüggesztett kötelekkel kapcsolatos szilárdságtani feladatokban általában a felfüggesztési pontok relatív helyzete ismert, a belógás pedig előírt mennyiség: ilyenkor e három egyenletből az a és b paramétereket kell meghatározni. Az utóbbi a számítások „mellékterméke”, ugyanis csak a koordináta-rendszer lokalizálására szolgál, az előbbiből viszont a 4.51. relációból meg tudjuk határozni a felfüggesztési pontokban fellépő vízszintes reakcióerőt:

$$T_H = p \cdot a, \quad (4.56)$$

amelyről megállapítottuk, hogy a kötélt bármely pontjában a T kötél erő vízszintes vetületével azonos (4.12. ábra).

A kötélt középvonalának dőlését a láncgörbe deriváltja adja:

$$\operatorname{tg} \beta = y' = \operatorname{sh} \left(\frac{x}{a} \right) = \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2}, \quad (4.57)$$

ahonnan az ábrán szereplő β szög meghatározható. Értékével a kötél erő

$$T = \frac{T_H}{\cos \beta}, \quad (4.58)$$

amelyet a kötélmetszettel osztva a kötélt felfűző $\sigma = T / A$ nyújtófeszültséget kapjuk. A kötél erőnek a reakcióerők kiszámításában szerephez jutó függőleges vetülete

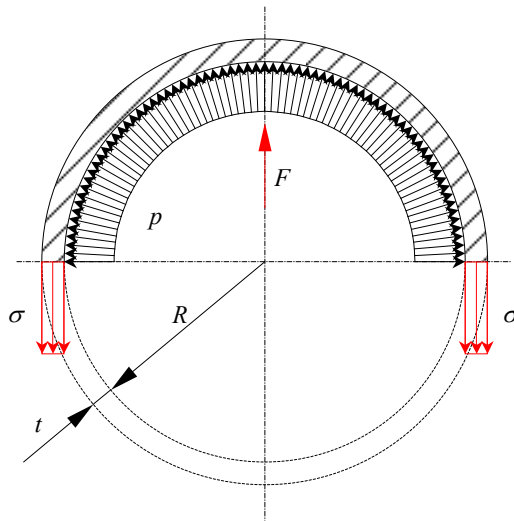
$$T_v = T_H \cdot \operatorname{tg} \beta, \quad (4.59)$$

ahova a reakcióerők kiszámításához β -nak a felfűző pontokban érvényes értékeit kell behelyettesíteni.

E képletek szerint a kötél erő és a függőleges reakcióerő a magasabban fekvő felfűző pontban a legnagyobb, hiszen a görbe ott a legmeredekebb.

4.3.2. Vékonyfalú hengeres tartályok

Legyen egy $D = 2 \cdot R$ belső átmérőjű és $t \ll D$ falvastagságú hengeres tartály, amelyet egy belső p hidrosztatikai nyomás (egy gáz vagy egy folyadék minden pontban azonos nyomása) terhel. A hidrosztatikai nyomásról tudjuk, hogy az általa terhelt felületre, annak minden pontjában, merőleges irányú (4.13. ábra).



4.13. ábra. Vékonyfalú hengeres tartály

Ha ezt a tartályt egy tengely irányú síkkal két részre vágjuk, akkor a fél tartályt egy körív alakú ívtartónak tekinthetjük. E tartó kényszerei lehetővé kell tegyék az ív végpontjainak a tartály alakváltozásával kompatibilis szabad elmozdulását. A körkörös szimmetria miatt a belső nyomással terhelt tartály átmérője megnövekedik, de az hengeres marad, tehát a tartály falának pontjai sugár irányban mozognak el. Az ív kényszerei ezt a sugár irányú elmozdulást lehetővé kell tegyék, így annak mindkét végében egy-egy egyszerű támaszt kell elképzeljünk (ezek vízszintes irányban nem rögzítik az ívet, de a körkörös szimmetria miatt erre nincs is szükség).

A támaszokban fellépő reakcióerő megoszlik a tartály falának metszésfelületén: tételezzük fel, hogy egyenletesen. Ez bármely átmérő mentén igaz kell legyen, a körkörös szimmetria miatt. Ez a megoszló reakció tulajdonképpen egy belső erő, az nem más, mint a tartály falában körkörös megjelenő σ nyújtófeszültség.

E feszültség kiszámításához szükségünk van az ívtartó reakcióinak meghatározásához. A szimmetria miatt, a 2.201. reláció értelmében a tartály belső falát terhelő nyomás eredőjének vízszintes összetevője nincs, a függőlegeset pedig a 2.202. képlet értelmében a terhelt felület vízszintes vetületét terhelő p nyomás eredőjeként határozhatjuk meg. Ha a tartály 1 m vastag szeletére számoljuk (ekkor a 4.13. ábra ívtartójának az ábra síkjára merőleges mérete egységnyi), akkor ez az erő

$$F = p \cdot D \cdot 1 \text{ m} \quad (4.60)$$

és felfele mutat. A σ feszültség a tartály elmozdított falán hat, eredője a két oldalon összesen

$$F' = 2 \cdot \sigma \cdot t \cdot 1 \text{ m}, \quad (4.61)$$

amely egyensúlyban kell legyen a terheléssel. Az $F = F'$ egyensúlyból következően a tartály falában ébredő húzófeszültség

$$\sigma = \frac{p \cdot D}{2 \cdot t} = p \cdot \frac{R}{t}, \quad (4.62)$$

ezt az összefüggést pedig „kazánképlet” néven ismerjük.

4.4. Mérnöki feladatok

4.4.1. Méretezés

A leggyakrabban a méretezést a szilárdság kritériumának szempontjából végezzük el: az első fejezetben ismertetett alapelvek szerint a központos tengely irányú erővel terhelt rúd szilárdsági szempontból akkor felel meg, ha a rúd anyagában ébredő normálfeszültség egy kitűzött határérték alatt van. Ez a határérték rendszerint a σ_a megengedett feszültség, amelynek értéke az ipari anyagokra azok szilárdságtani tulajdonságait és bizonyos biztonsági tényezőket is tekintetbe vevő standardizált érték. σ_a a rugalmas viselkedés tartományának a felső felére esik.

A megengedett normálfeszültség helyett használhatjuk a σ_c folyáshatárt vagy az anyag σ_r szilárdságát, amennyiben a megfelelő határesetekben bekövetkező tönkremenetelre szeretnénk méretezni.

A szilárdságra történő méretezés tehát a feszültség

$$\sigma = \sigma_{lim} \quad (4.63)$$

előírásával történik, ahol $\sigma_{lim} = \sigma_a$, vagy pedig az kivételes esetekben σ_c vagy σ_r , ha valamelyik határállapot a mérvadó szempont.

Esetünkben a tengely irányú igénybevétel által okozott feszültség egyetlen geometriai paramétertől, a keresztmetszet A nagyságától függ. Ha a feszültséget adó 4.2. relációban a 4.63. értelmében előírjuk a $\sigma = \sigma_a$ egyenlőséget, akkor a keresztmetszet szükséges nagyságára az

$$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a} \quad (4.64)$$

képletet kapjuk. Az alkatrész keresztmetszete legalább ekkora kell legyen.

Itt megjegyzendő az, hogy bizonyos anyagok húzásra és nyomásra különbözőképpen viselkednek, ekkor a megengedett σ_a feszültségnek külön értéke van húzásra (jelölje ezt σ_a^+) és nyomásra (σ_a^-), ahol $\sigma_a^+ < \sigma_a^-$. Ekkor a 4.64. képletben az N előjelének megfelelő megengedett feszültséget kell használnunk.

Bizonyos esetekben a méretezés a megengedett alakváltozásra, a merevség kritériumával történik: ekkor a rúd hosszának maximális megváltozása egy bizonyos Δl_a határérték lehet. Ekkor a $\Delta l = \Delta l_a$ egyenlőség előírásával méretezzük a rudat, s ezt a méretezést a megengedett feszültségre való ellenőrzés követi.

4.4.2. Ellenőrzés

Az első lépésben méretezett rudat ellenőrzésnek kell alávetnünk. A megengedett feszültségre történt méretezést követheti a megengedett alakváltozásra történő ellenőrzés (ekkor teljesülnie kell a $\Delta l \leq \Delta l_a$ feltételnek) és fordítva az alakváltozásra történő méretezésnél a feszültséget kell leellenőriznünk (a $\sigma \leq \sigma_a$ feltétel teljesítését).

A nyomott rudak esetében felléphet a kihajlásnak nevezett stabilitás-vesztés: a nyomott rudakat tehát kihajlásra is ellenőrizni kell. Ezzel egy későbbi fejezet foglalkozik.

4.4.3. A teherbíró-képesség megállapítása

A már létező alkatrészek esetében felvetődhet a lehető legnagyobb terhelőerő megállapításának az igénye. Ez az erő az illető alkatrész teherbíró-képessége, amely a szilárdság, a merevség és a stabilitás kritériuma még éppen teljesül. Ha azt a szilárdság kritériuma alapján szeretnénk megállapítani, akkor a legnagyobb tengely irányú igénybevételt az

$$N_{cap} = \sigma_a \cdot A \quad (4.65)$$

erőként tudjuk meghatározni: ez az erő a rúd tengely irányú teherbíró-képessége.

4.2. példa. Tengely irányban lineárisan terhelt rúd méretezése és annak alakváltozása

A 4.14. ábrán egy megoszló tengely irányú erővel részben terhelt kéttámaszú tartó látható.

A 2.14. és a 2.26. feladatokban foglaltakhoz hasonlóan megállapíthatjuk, hogy a csuklóban fellépő vízszintes reakcióerő nagysága

$$H_A = p \cdot b, \quad (4.66)$$

a tengely irányú igénybevétel pedig szakaszonként

$$\begin{aligned} AC, x \in [0, a]: \quad N(x) &= H_A = p \cdot b. \\ CB, x \in [a, l]: \quad N(x) &= H_A - p \cdot (x - a) = p \cdot (a + b - x) = p \cdot (l - x). \end{aligned} \quad (4.67)$$

Amennyiben azt prizmatikus rúdként szeretnénk méretezni, a tengely irányú igénybevétel ábrájából ki kell olvasnunk annak maximumát, amelyet az

$$N_{max} = H_A = p \cdot b \quad (4.68)$$

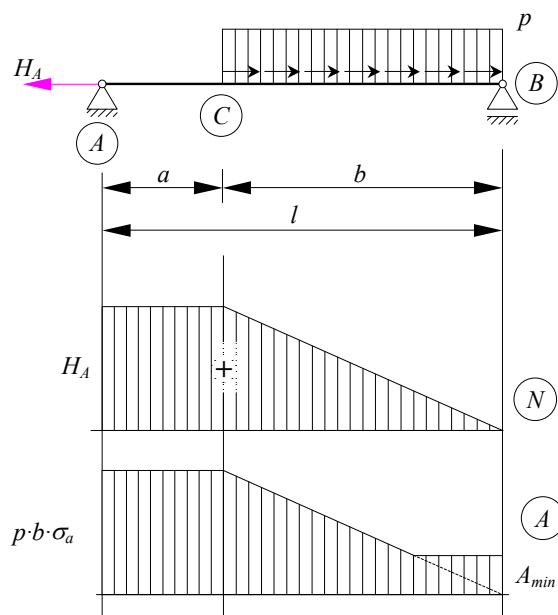
mennyiségként határoztunk meg. A rúd szükséges keresztmetszete tehát

$$A_{nec} = \frac{N_{max}}{\sigma_a} = \frac{p \cdot b}{\sigma_a}. \quad (4.69)$$

Ezzel a keresztmetszettel a rúd alakváltozása a 4.35. képlet alapján a következőképpen számítható

$$\Delta l = \int_0^a \frac{N(x)}{E \cdot A_{nec}} dx + \int_a^l \frac{N(x)}{E \cdot A_{nec}} dx = \frac{1}{E \cdot A_{nec}} \cdot \left(\int_0^a N(x) dx + \int_a^l N(x) dx \right), \quad (4.70)$$

ahol feltételeztük, hogy a rúd hosszán sem a keresztmetszet nagysága, sem az anyag minősége nem változik meg. Az itt szereplő igénybevételi függvényeket a rúd két szakaszán a 4.67. képletek adják.



4.14. ábra. Megoszló tengelyirányú erővel terhelt kéttámaszú tartó

Ezekkel a függvényekkel a rúd megnyúlása

$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{1}{E \cdot A_{nec}} \cdot \left(\int_0^a p \cdot b dx + \int_a^l p \cdot (l-x) dx \right) = \\ &= \frac{p}{E \cdot A_{nec}} \cdot \left(a \cdot b + l \cdot (l-a) - \frac{l^2 - a^2}{2} \right) = \frac{p \cdot (l^2 - a^2)}{2 \cdot E \cdot A_{nec}}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Észrevehetjük, hogy a 4.69. képlet a rudat a *CB* szakaszon túlméretezi, ott a σ feszültség a megengedettnél kisebb lesz, mivel a rúd terhelése ott kisebb annál, mint amire méreteztünk. Felvetődik az a kérdés, hogy a rúd hosszán változó igénybevétel esetén miként használhatjuk ki gazdaságosabban a rúd anyagát: az optimális az lenne, ha a feszültség minden keresztmetszeten a megengedetttel legyen azonos. Ez a feltétel a keresztmetszetet az x koordináta függvényeként adó

$$A_{nec}(x) = \frac{|N(x)|}{\sigma_a} \quad (4.72)$$

képletet vezet, amelynek a grafikonja a tengely irányú igénybevétel nagyságát (modulusát) követi, hiszen azt egy állandóval kell elosztani.

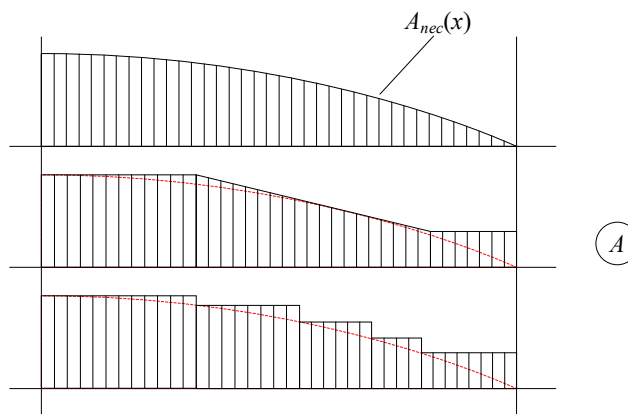
A jelen példában e függvény a rúd jobb végén, ahol nincs igénybevétel, nulla nagyságú keresztmetszethez vezet: ez műszaki szempontból valószínűleg nem jó. Ezeket a szempontokat

figyelembe véve meghatározhatunk egy A_{min} legkisebb kivitelezhető keresztmetszetet, az előbbi képletet pedig a következőképpen módosítjuk:

$$A_{nec}(x) = \max\left(A_{min}, \frac{|N(x)|}{\sigma_a}\right). \quad (4.73)$$

Ennek a függvénynek a grafikonját a 4.14. ábra alján látjuk. Megállapíthatjuk, hogy a példánkban az optimális méretezés két állandó keresztmetszetű és egy azokat egyenletesen változó keresztmetszetű szakaszhoz vezet.

Megtörténhet, hogy a változó keresztmetszetű szakaszon $A_{nec}(x)$ függvénye nem lineáris és emiatt a tartó kivitelezése túlságosan költséges lenne: ekkor a függvényt lineáris szakaszokkal közelíthetjük, de csak olyan módon, hogy bármely pontban a keresztmetszet legalább az ott kiszámított $A_{nec}(x)$ nagyságú legyen. Bizonyos esetekben a lineárisan változó keresztmetszet megvalósítása sem lehetséges, ekkor szakaszonként (lépcsősen) változó keresztmetszetet kell előírnunk (4.15. ábra).



4.15. ábra. Egy görbével leírt keresztmetszet megközelítésének lehetőségei

4.3. példa. Elektromos távvezeték

Legyen egy, a 4.11. ábrán látható módon felfüggesztett elektromos távvezeték, amelynek a két végpontja közötti vízszintes távolság $\Delta x = 200$ m, függőlegesen pedig $\Delta y = 5$ m. A kábel belógása az A ponttól számítva $\Delta y_A = 10$ m lehet.

E kábel szilárdsági méretezéséhez első lépésként a lánccörbe egyenletében szereplő a paramétert kell meghatározni: ismerjük a két végpont (az ábrán A és B) vízszintes és függőleges irányban mért relatív távolságát, valamint a görbe C csúcsának a függőleges irányban mért relatív távolságát. E pontok rajta kell legyenek a 4.50. egyenlettel levő lánccörbén (4.54, 4.55. relációk), mely feltételből, numerikus eljárással megkapjuk a paraméter $a = 687.540$ m közelítő értékét, aminek az $x_A = -117.125$ m, $y_A = 697.540$ m, $x_B = 82.875$ m, $y_B = 692.540$ m koordináták felelnek meg ($b = |x_A|$). Könnyen ellenőrizhető, hogy ezek a koordináták, 1 mm pontossággal, megfelelnek az előírt távolságoknak és a belógásnak.

A 4.53. képlettel ki tudjuk számolni a kábel hosszát: $l = 200.758$ m.

A 4.57. képlet alapján a lánccörbe legnagyobb meredeksége, amelyet az A pontban számíthatunk, $\beta = 0.169536$ rad (ezt mínusz előjellel kapjuk, mert a görbe ebben a pontban ereszkedik).

A 4.58. képlet alapján, felhasználva az a paraméter 4.51. kifejezését is, a kábelben ébredő feszültség

$$\sigma = \frac{T}{A} = \frac{\frac{p \cdot a}{\cos \beta}}{A} = \frac{\rho \cdot g \cdot A \cdot 1 \text{ m} \cdot a}{A \cdot \cos \beta} = \frac{\rho \cdot g \cdot a}{\cos \beta}, \quad (4.74)$$

ahol a kábel méterének a súlyát a kábel anyagának ρ sűrűségével és A keresztmetszetével számoltuk ki, mely utóbbi mennyiség végül leegyszerűsödött. Az elektrotechnikai tisztaságú vörösréz sűrűsége $\rho = 8920 \text{ kg/m}^3$, amivel a távvezetékben ébredő feszültség nagyságára a $\sigma = 61.038 \text{ MPa}$ értéket kapjuk. Ez ugyan meghaladja a réz-vezetésekre ajánlott $\sigma_a = 50 \text{ MPa}$ megengedett feszültséget, de elég távol áll a réz $\sigma_c = 70 \text{ MPa}$ folyáshatárától. A távvezeték egyszerű réz-vezetékkel is megvalósítható lenne, de a megengedett feszültség túllépése miatt azonban azt újra kellene tervezni.

A vezeték felfüggesztési pontjaiban keletkező vízszintes reakcióerő a

$$T_H = p \cdot a = \rho \cdot g \cdot A \cdot 1 \text{ m} \cdot a, \quad (4.75)$$

képlettel számítható, ahol a vezeték A keresztmetszetét nem szilárdságtani, hanem villamosságtani méretezés adja.

Vizsgáljuk meg, mi történik akkor, ha a távvezeték hossza egy $\Delta t = -50 \text{ }^\circ\text{C}$ hőmérséklet-csökkenés miatt megváltozik. Ez a nyáron szerelt kábel esete, amely télen a zsugorodás miatt megfeszül. Ekkor az A és B pontokon átmenő láncgörbe csúcsa a kábel rövidülése miatt megemelkedik, a feladat pedig az a paraméter azon értékének kiszámítása, amely a görbe megváltozott,

$$l' = l \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t) \quad (4.76)$$

hosszúságát adja. A réz lineáris hőtágulási együtthatója $\alpha = 1.65 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. A számításokat elvégezve a vezeték $l' = 200.592 \text{ m}$ hosszát kapjuk, tehát az 0.166 m -rel lett rövidebb a kezdeti állapotához viszonyítva.

A felfüggesztési pontok relatív helyzetének és a kábel hosszának megfelelően ezúttal a paraméter $a' = 792.854 \text{ m}$ értékéhez jutunk, az A felfüggesztési pont új koordinátái pedig $x'_A = -119.765 \text{ m}$, $y'_A = 801.917 \text{ m}$. Megjegyzendő, hogy a felfüggesztési pontok a valóságban nem mozdulnak el, viszont a görbe paraméterezése miatt a koordináta-rendszert mozgatnunk kell.

A kábel rövidülését követően annak belógása csökken, új értéke $y'_A - a = 9.063 \text{ m}$, tehát majdnem egy teljes méterrel kevesebb, mint amennyi eredetileg volt.

A kábelben ébredő feszültség

$$\sigma' = \frac{\rho' \cdot g \cdot a'}{\cos \beta'}, \quad (4.77)$$

ahol a hőmérséklet csökkenése miatt a réz sűrűsége megnövekszik ($\alpha_v = 3 \cdot \alpha$ – a köbös hőtágulási tényező):

$$\rho' = \frac{m}{V'} = \frac{m}{V \cdot (1 + \alpha_v \cdot \Delta t)} = \frac{\rho}{1 + \alpha_v \cdot \Delta t} = 8942 \text{ kg/m}^3; \quad (4.78)$$

a láncgörbe legnagyobb meredeksége $\beta' = 0.150484 \text{ rad}$, s így $\sigma' = 70.345 \text{ MPa}$, ami már meghaladja a réz folyáshatárát is. Ennek következtében az adott feltételeknek a rézből készült kábel

biztosan nem felel meg, vagy acél-erősítésű sodronyt kellene használni, vagy pedig a kábel felfüggesztési pontjainak helyzetén vagy a belógásának mértékén kell módosítani.

A kábel rövidülése miatt a felfüggesztési pontokban ébredő vízszintes reakcióerő is megnő:

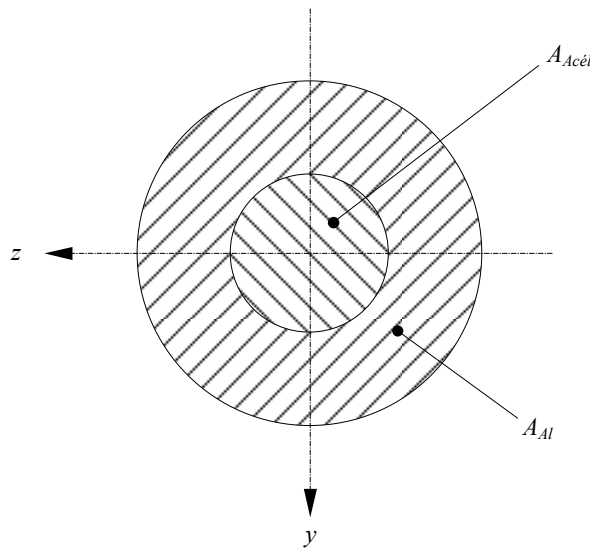
$$\frac{T'_H}{T_H} = \frac{\rho' \cdot g \cdot A' \cdot 1 \text{ m} \cdot a'}{\rho \cdot g \cdot A \cdot 1 \text{ m} \cdot a} = \frac{\frac{\rho}{1 + \alpha_V \cdot \Delta t} \cdot g \cdot A \cdot (1 + \alpha_A \cdot \Delta t) \cdot 1 \text{ m} \cdot a'}{\rho \cdot g \cdot A \cdot 1 \text{ m} \cdot a} \approx \frac{a'}{a} = 1.153 \quad (4.79)$$

(a négyzetes hőtágulási tényező $\alpha_A = 2 \cdot \alpha$), ami az erő 15.3%-os növekedését jelenti. Ezt a vezeték tartóinak méretezésében kell figyelembe venni.

4.4. példa. Összetett keresztmetszetű sodrony teherbíró képessége

Az előbbi feladat távvezetékének anyaga réz volt: a réz jó elektromos vezető, viszont drága és nehéz, éppen ezért a távvezetékeket alumínium vagy alumínium-ötvözet huzalokból készített sodronyokkal szokták megvalósítani. Az alumínium is jó elektromos vezető, könnyebb, de a szilárdsága kisebb. Amikor a nagyobb oszlopköz miatt az alumíniumban ébredő feszültség meghaladná a megengedettet, összetett keresztmetszetű, acél erősítésű sodronyt kell használni: ez egy acél-sodrony köré felcsavart alumínium pászmákból áll, ahol az acélból készült központi rész adja a vezeték szilárdságát és azt körülvevő alumínium pedig az alacsony elektromos ellenállást.

A sodort pászmákból álló szerkezet a vezeték lengéséből származó igénybevételeknek inkább ellenáll és könnyebben kivitelezhető, mint egy tömör felépítésű vezeték. A sodrony, összetett szerkezete miatt, a 4.2.6. alfejezetben bemutatott összetett keresztmetszetű rúdtól némiképpen eltérő viselkedést mutat, de jó közelítéssel modellezhetjük a 4.16. ábrán látható koaxiális felépítésű rúddal. A gyakorlatban az acél-alumínium keresztmetszetek aránya az esetek többségében $n = A_{Acél} / A_{Al} = 1/6$ szokott lenni, erősebb igénybevételek esetében pedig ennél nagyobb.



4.16. ábra. Acél-alumínium sodrony

A 4.25. arányosság alapján a két anyag Young-moduluszából az acélban ($E_{Acél} = 210 \text{ GPa}$) és az alumíniumban ($E_{Al} = 60 \text{ GPa}$) ébredő feszültségek

$$\frac{\sigma_{Acél}}{\sigma_{Al}} = \frac{210}{60} = 3.5 \quad (4.80)$$

arányához vezet. A megengedett feszültségek aránya ($\sigma_{a\text{ Acél}} = 150 \text{ MPa}$, alumínium vezetékekre pedig $\sigma_{a\text{ Al}} = 30 \text{ MPa}$) ennél nagyobb:

$$\frac{\sigma_{a\text{ Acél}}}{\sigma_{a\text{ Al}}} = \frac{150}{30} = 5, \quad (4.81)$$

így ha a sodronyt az acél megengedett feszültségére méreteznénk, az alumíniumban ébredő feszültség meghaladná annak szakítószilárdságát. Emiatt a

$$\sigma_{\text{Acél}} \leq 3.5 \cdot \sigma_{a\text{ Al}} = 105 \text{ MPa} \quad (4.82)$$

feltételnek teljesülnie kell.

Tegyük fel, hogy a sodrony keresztmetszete $A = 50 \text{ mm}^2$ és $n = A_{\text{Acél}} / A_{\text{Al}} = 1/6$: ekkor $A_{\text{Acél}} = 7.14 \text{ mm}^2$ és $A_{\text{Al}} = 42.86 \text{ mm}^2$, a sodrony teherbíró-képessége pedig a legnagyobb feszültségekkel kiszámított

$$\begin{aligned} N_{\text{cap}} &= A_{\text{Acél}} \cdot \sigma_{\text{max Acél}} + A_{\text{Al}} \cdot \sigma_{a\text{ Al}} = \\ &= 7.14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot 105 \cdot 10^6 \text{ Pa} + 42.86 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot 30 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 2035.5 \text{ N} \end{aligned} \quad (4.83)$$

erő.

4.5. példa. Az egyenletes szilárdságú rúd

A feladat egy nehéz oszlop gazdaságos méretezése. Az oszlop egy bizonyos F erőt kell átvegyen, de emellett azt a saját súlya is terheli, amely az átvett erővel összemérhető nagyságú. A gazdaságos méretezés az oszlop keresztmetszetének olyan mértékű meghatározását jelenti, amely annak minden pontjában ugyanahhoz a $\sigma = \sigma_a$ feszültséghez vezet. Ez a legkönnyebb, legkevesebb anyagból készült, és amennyiben a kivitelezést nem drágítja a folyamatosan változó keresztmetszet megvalósítása, akkor egyszersmind a legolcsóbb oszlop, amely az F terhelést még biztonságosan át tudja venni.

Egy adott x koordinátájú, $A(x)$ nagyságú keresztmetszetet ekkor a felette levő rész $G(x)$ súlya és az oszlop által átvett F erő terheli, a tengely irányú igénybevétel itt

$$N(x) = F + G(x). \quad (4.84)$$

A gazdaságos méretezés kritériuma szerint ott a feszültség

$$\sigma_a = \frac{N(x)}{A(x)} = \frac{F + G(x)}{A(x)} \quad (4.85)$$

kell legyen.

Az ehhez közeli $x + dx$ koordinátájú $A(x + dx) = A(x) + dA$ keresztmetszet valamivel nagyobb kell legyen az előbbinél, mert ott az igénybevétel a két keresztmetszet közötti oszlop-darab súlyával nagyobb (4.17. ábra; ρ az oszlop anyagának sűrűsége):

$$N(x + dx) = F + G(x) + \rho \cdot g \cdot A(x) \cdot dx. \quad (4.86)$$

Ez az igénybevétel ugyanazt a

$$\sigma_a = \frac{N(x + dx)}{A(x + dx)} = \frac{F + G(x) + \rho \cdot g \cdot A(x) \cdot dx}{A(x) + dA} \quad (4.87)$$

feszültséget kell okozza.

A 4.85. és a 4.87. hányadosok egyenlőségéből levezethető az

$$[F + G(x)] \cdot dA = \rho \cdot g \cdot A(x)^2 \cdot dx \quad (4.88)$$

egyenlőség, amelyet átrendezvén, a 4.85. felhasználásával az

$$\frac{1}{A(x)} \cdot dA = \frac{\rho \cdot g}{\sigma_a} \cdot dx \quad (4.89)$$

differenciálegyenlethez jutunk. Ennek megoldása:

$$\int \frac{1}{A(x)} dA = \int \frac{\rho \cdot g}{\sigma_a} dx \Rightarrow \ln A(x) = \frac{\rho \cdot g}{\sigma_a} \cdot x + k \quad (4.90)$$

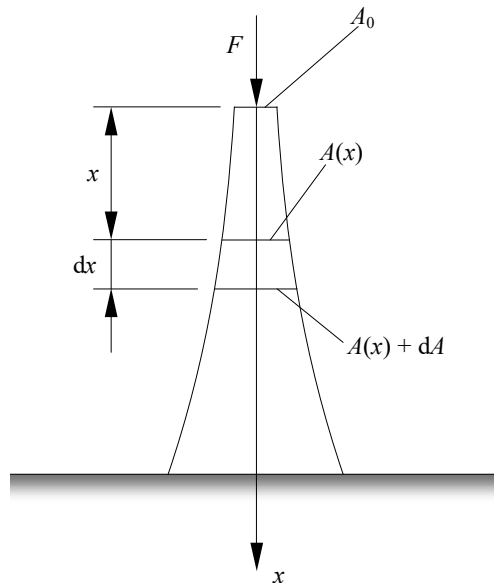
ahol az integrálási állandó az $x = 0$ koordinátával megadott pontra felírt peremfeltételből

$$k = \ln(A(0)) = \ln\left(\frac{F}{\sigma_a}\right) = \ln A_0, \quad (4.91)$$

ugyanis az illető keresztmetszetet csak az F erő terheli. Ezt behelyettesítve és a 4.90. egyenletet delogaritmálva kapjuk:

$$A(x) = A_0 \cdot \exp\left(\frac{\rho \cdot g}{\sigma_a} \cdot x\right), \quad (4.92)$$

tehát az egyenletes szilárdságú húzott-nyomott rúd keresztmetszete exponenciális függvény szerint változik.



4.17. ábra. Egyenletes szilárdságú nyomott rúd

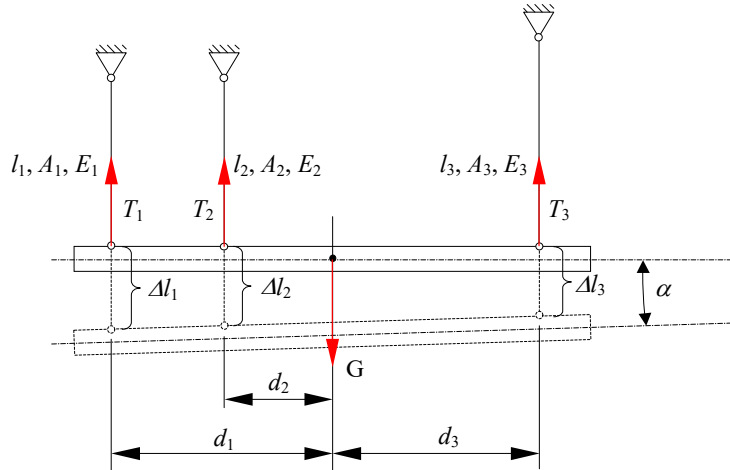
4.5. Sztatikailag határozatlan feladatok

A sztatikailag határozatlan feladatokban (pontosabban: a túlhatározott feladatokban) a kényszerek száma nagyobb a felírható egyensúlyi egyenleteknél és így a kényszererők

kiszámításához újabb egyenleteket kell megállapítanunk. A 4.1. feladatban szereplő inhomogén rúd is határozatlanná vált a hőtágulás miatt: a megoldhatóságához geometriai összefüggéseket kerestünk. Hasonlóképpen járhatunk el más esetekben is.

4.6. példa. Kötelekkel felfüggesztett gerenda

A 4.18. ábrán egy merevnek tekinthető gerenda látható, amelyet három kötel tart. A gerenda súlya G , a súlypontja pedig a középpontjában van. A feladat a kötélterők meghatározása.



4.18. ábra. Kötelekkel felfüggesztett gerenda

A felírható egyensúlyi egyenletek a következők: a függőleges erők egyensúlyából

$$T_1 + T_2 + T_3 = G, \tag{4.93}$$

a súlypontra felírt nyomatékegyenletből pedig

$$T_1 \cdot d_1 + T_2 \cdot d_2 - T_3 \cdot d_3 = 0, \tag{4.94}$$

amelyekben három ismeretlen szerepel.

A gerenda a kötelek rugalmas alakváltozása miatt elmozdul, ezalatt a saját tengelye körül is elfordul egy bizonyos α szöggel. A szilárdságtan feltételezése szerint ezek az elmozdulások kicsik ($\sin \alpha \approx \alpha$), s mivel a gerenda merev, közöttük a következő geometriai összefüggések állapíthatók meg:

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= \Delta l_3 + \alpha \cdot (d_1 + d_3), \\ \Delta l_2 &= \Delta l_3 + \alpha \cdot (d_2 + d_3). \end{aligned} \tag{4.95}$$

Ezeket az elmozdulásokat a kötelek megnyúlása okozza:

$$\Delta l_i = \frac{T_i \cdot l_i}{E_i \cdot A_i} = \frac{T_i}{k_i}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.96}$$

A 4.95. és 4.96. relációkkal a kötélterők közötti

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{k_1}{k_3} \cdot T_3 + \alpha \cdot k_1 \cdot (d_1 + d_3), \\ T_2 &= \frac{k_2}{k_3} \cdot T_3 + \alpha \cdot k_2 \cdot (d_2 + d_3) \end{aligned} \tag{4.97}$$

összefüggésekhez jutunk. A 4.93, 4.94. és a 4.97. egyenletek egy négy egyenletből álló rendszert alkotnak, ahol a kötélerek mellett a negyedik ismeretlen a gerenda elfordulásának α szöge.

Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy $k_1 = k_2 = k$, $k_3 = 4 \cdot k$, $d_1 = d_3 = 2 \cdot a$, $d_2 = a$. Ekkor a 4.97. összefüggések alapján

$$\begin{aligned} T_1 &= 0.25 \cdot T_3 + 4 \cdot k \cdot a \cdot \alpha, \\ T_2 &= 0.25 \cdot T_3 + 3 \cdot k \cdot a \cdot \alpha, \end{aligned} \quad (4.98)$$

a 4.93. egyensúlyi egyenletből

$$1.5 \cdot T_3 + 7 \cdot k \cdot a \cdot \alpha = G, \quad (4.99)$$

a 4.94.-ből pedig

$$1.25 \cdot T_3 - 11 \cdot k \cdot a \cdot \alpha = 0. \quad (4.100)$$

E két utóbbi egy egyenletrendszert alkot, amelynek a megoldása az elfordulás

$$\alpha = 0.0495 \cdot \frac{G}{k \cdot a} \quad (4.101)$$

szöge és a

$$T_3 = 0.4356 \cdot G \quad (4.102)$$

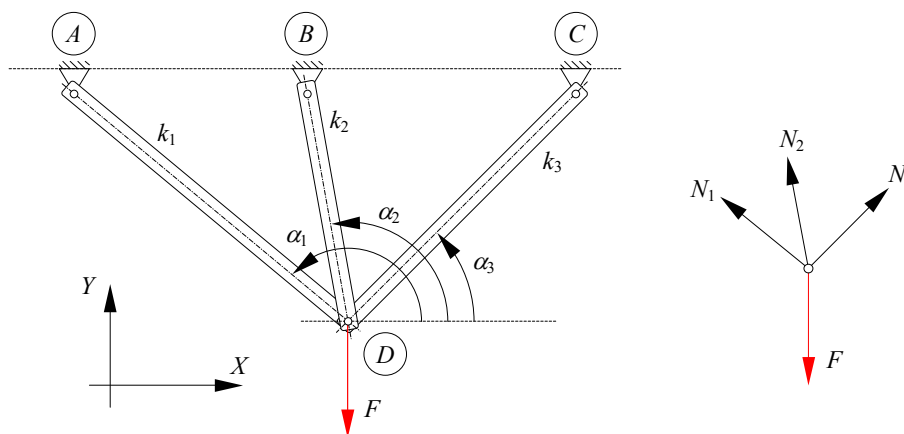
kötélerek. Ez utóbbival a 4.98. alapján

$$\begin{aligned} T_1 &= 0.3069 \cdot G, \\ T_2 &= 0.2575 \cdot G. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Ellenőrizhetjük, hogy a megoldás eleget tesz a felírt 4.93. és 4.94. egyensúlyi egyenleteknek.

4.7. példa. Sztatikailag határozatlan rácsos szerkezet

A 4.19. ábrán egy rúdszerkezet látható, ahol három rúd egy pontban, csuklókkal illeszkedik egymáshoz: a feladat a szerkezetet alkotó rudakban fellépő feszültségek megállapítása, valamint a rúdszerkezet alakváltozásának vizsgálata.



4.19. ábra. Sztatikailag határozatlan rácsos szerkezet

A szerkezetet csuklók rögzítik, a szerkezetet alkotó egyenes rudak csuklókval illeszkednek egymáshoz és a terhelés az illeszkedési pontban hat. Ha a csuklók középpontja a rudak tengelyére esik, akkor e rudakban csak tengely irányú igénybevétel jelenik meg. Az ilyen módon felépített struktúrát „rácsos szerkezetnek” nevezik. A rácsos szerkezetek lehetnek sztatikailag határozottak vagy határozatlanok. A határozottakat egyensúlyi egyenletek felírásával tudjuk számítani, az alulhatározottakat mechanizmusként működnek, a túlhatározottakat pedig a rudak rugalmasságának figyelembe vételével lehet tanulmányozni.

Megállapíthatjuk, hogy a 4.19. ábrán egy túlhatározott szerkezet szerepel.

E szerkezet elemeit a $k_i = E_i \cdot A_i / l_i$, húzásra számított merevségükkel jellemezzük, ahol $i = 1, 2, 3$. Ezek a rudak egy bizonyos α_i szöget zárnak be a globális X tengellyel.

A D csomópontban ható F külső erő (a terhelő erő) és az ott egymáshoz illeszkedő rudakban ébredő, a terhelés következményeként fellépő N_i belső erők (rúderők) egyensúlyban kell legyenek, ezt a feltételt pedig az X és az Y tengelyekre eső vetületek egyensúlyával, az

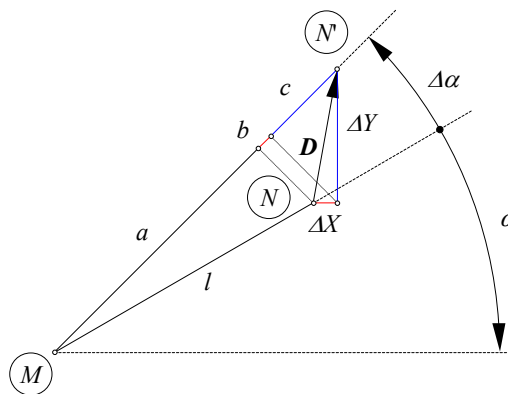
$$\begin{aligned} \sum F_X = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1,3} N_i \cdot \cos \alpha_i = 0, \\ \sum F_Y = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1,3} N_i \cdot \sin \alpha_i = F \end{aligned} \quad (4.104)$$

egyenletekkel tudjuk előírni. E két egyenletben három ismeretlen szerepel, tehát további feltételek is szükségesek.

A terhelés hatására, a rudak rugalmas alakváltozásának következtében a D pont elmozdul, ennek következtében a rudak hossza megváltozik:

$$\Delta l_i = \frac{N_i}{k_i}. \quad (4.105)$$

A D pontban levő csukló egy geometriai kényszert jelent, a Δl_i megnyúlások nem lehetnek tetszőlegesek, mivel a D pont mindhárom rúd közös pontja. Megállapítható, hogy mivel a példánkban a rudak nem közös vége mindhárom esetben rögzített, a D pont elmozdulása és a megnyúlások között szoros összefüggés áll fenn.



4.20. ábra. A relatív elmozdulás és a megnyúlás közötti kapcsolat

A 4.20. ábrán egy tetszőleges, M és N csomópontokkal rendelkező rudat láthatunk, amelynek a csomópontjai a rugalmas alakváltozás következtében elmozdultak. Az elmozdult és megnyúlt rudat önmagával párhuzamosan olyanképpen toljuk el, hogy a kezdőpontját az eredeti helyzetébe

(M) jutassuk vissza. Ekkor a rúd megnyúlását az N végpontnak az N' helyzetbe történő elmozdulásának tulajdoníthatjuk: e pont elmozdulás-vektora \mathbf{D} , amelynek vetületei ΔX és ΔY . Az M és N' pontok közötti távolság a rúd megnyúlt hossza, az a , b és c szakaszok hosszának összege, amelyek rendre az l , a ΔX , illetve a ΔY szakaszoknak a rúd elmozdult helyzetére eső vetületei:

$$\begin{aligned} l' = a + b + c &= l \cdot \cos \Delta\alpha + \Delta X \cdot \cos(\alpha + \Delta\alpha) + \Delta Y \cdot \sin(\alpha + \Delta\alpha) \approx \\ &\approx l + \Delta X \cdot \cos \alpha + \Delta Y \cdot \sin \alpha, \end{aligned} \quad (4.106)$$

mivel a kis elmozdulások hipotézisében $\Delta\alpha \rightarrow 0$. A rúd megnyúlása tehát

$$\Delta l = \Delta X \cdot \cos \alpha + \Delta Y \cdot \sin \alpha. \quad (4.107)$$

Példánkban, előjel-helyesen $\Delta l_i = -(\Delta X_D \cdot \cos \alpha_i + \Delta Y_D \cdot \sin \alpha_i)$, ahol ΔX_D és ΔY_D a D pont elmozdulás-vektorának vetületei, a 4.105.-ből pedig

$$N_i = -(\Delta X_D \cdot \cos \alpha_i + \Delta Y_D \cdot \sin \alpha_i) \cdot k_i. \quad (4.108)$$

A 4.104. egyensúlyi egyenleteket a D pont elmozdulásával tehát a következőképpen tudjuk felírni:

$$\begin{aligned} \sum F_X = 0 &\Rightarrow \Delta X_D \cdot \sum_{i=1,3} k_i \cdot \cos^2 \alpha_i + \Delta Y_D \cdot \sum_{i=1,3} k_i \cdot \sin \alpha_i \cdot \cos \alpha_i = 0, \\ \sum F_Y = 0 &\Rightarrow \Delta X_D \cdot \sum_{i=1,3} k_i \cdot \sin \alpha_i \cdot \cos \alpha_i + \Delta Y_D \cdot \sum_{i=1,3} k_i \cdot \sin^2 \alpha_i = -F. \end{aligned} \quad (4.109)$$

A fenti egyenletrendszer megoldásával a D pont elmozdulásának vetületeihez jutunk, ezekkel pedig a 4.108. rúderőket is kiszámíthatjuk, a keresett feszültségeket pedig a rúderők és a megfelelő A_i keresztmetszetek $\sigma_i = N_i / A_i$ hányadosaként határozhatjuk meg.

Megjegyzendő, hogy a rácsos szerkezetek, és általában a rúdszerkezetek számítására általánosan alkalmazható eljárásokat dolgoztak ki, amelyek közül a legelterjedtebb a „merevségi mátrix módszere”, amely a végeselem-módszer alapját képezi.

5. NYÍRÓ IGÉNYBEVÉTEL

5.1. Kis keresztmetszetek nyírása

5.1.1. Tiszta nyírás

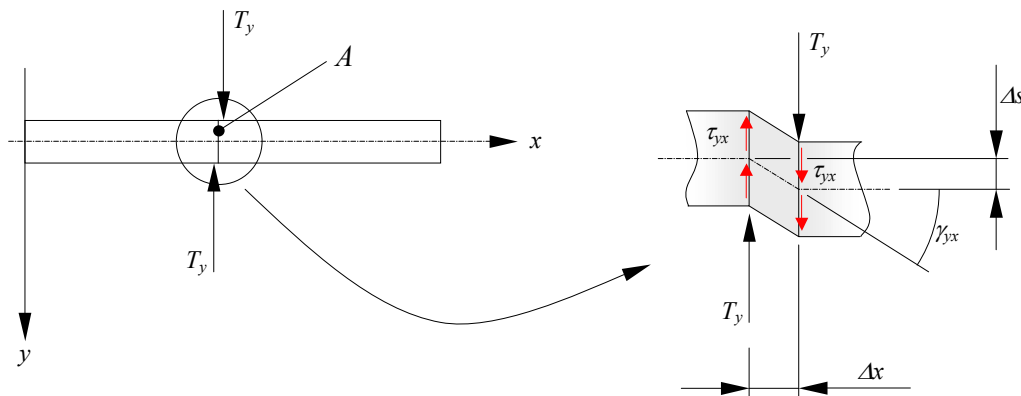
A tengelyére merőleges erőkkel terhelt tartók esetében a hajlító és a nyíró igénybevételek közötti 2.107, 2.200. összefüggések szerint, egyenes és íves tartókra egyaránt, azok bármely keresztmetszetén a hajlító-nyomaték deriváltja a nyíróerővel azonos. A tiszta nyírás azt feltételezi, hogy a keresztmetszeten csak nyíró igénybevétel jelenjen meg. Az $M_z(x) = 0$ konstans-függvény deriváltja az említett összefüggések szerint a $T_y(x) = 0$ függvény, tehát a tartók esetében a tiszta nyíró igénybevétel legfeljebb csak egy-egy keresztmetszeten jelenhet meg. A 6.2. fejezetben tárgyalt, a teljes egyenletesen megoszló nyomatékkal terhelt egyenes kéttámaszú tartó egy kivételes eset, annak minden keresztmetszete tisztán nyírt.

Tiszta és egyszerű nyíró-igénybevételt csak kis keresztmetszetek esetében feltételezünk: amennyiben egy alkatrész A nagyságú keresztmetszetén, annak két oldalán és azzal párhuzamosan és igen kis távolságra egy T erőpár hat (5.1. ábra), akkor elfogadjuk azt a hipotézist, hogy az illető keresztmetszeten egy állandó, egyenletesen megoszló

$$\tau = \frac{T}{A} \quad (5.1)$$

nyírófeszültség jelenik meg. Ez a feszültség a keresztmetszet síkjában hat. Amennyiben szükségessé válik megjelölni a nyírófeszültség irányát (jelöletlenül csak annyit tudunk, hogy a keresztmetszet síkjában hat), akkor a tau betű mellé egy kettős indexet írunk: az első a nyírófeszültség irányát, a második pedig a sík normálisának irányát adja. Az ábrán a keresztmetszet normálisa x , a feszültség pedig y irányú, tehát a feszültség pontosabb jelölése ebben az esetben „ τ_{yx} ”.

Mivel $\Delta x \rightarrow 0$, az erőpár nyomatékát elhanyagoljuk.

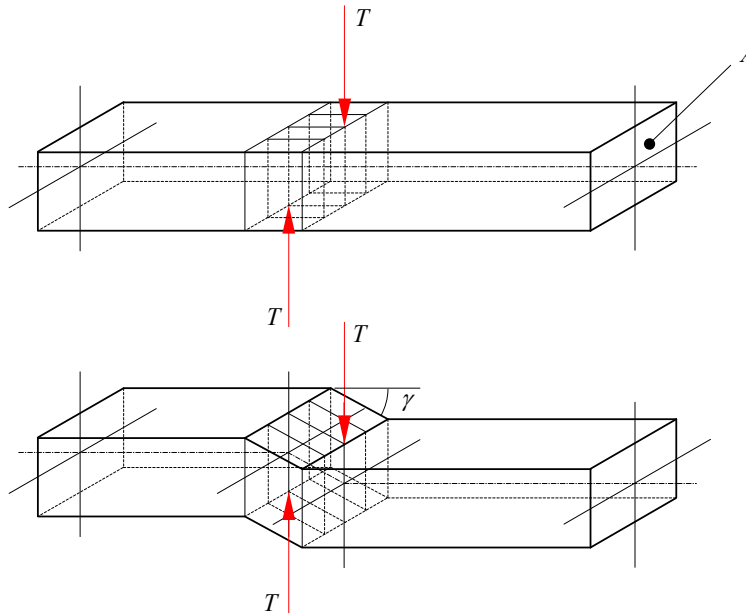


5.1. ábra. Egy keresztmetszet nyírása

5.1.2. A nyíró-igénybevétel által előidézett alakváltozás

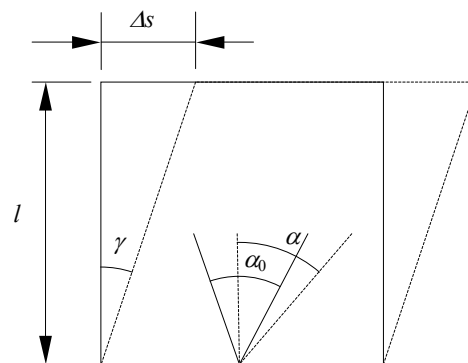
Feltételezzük, hogy az 5.1. ábrán bemutatott, a nyírás következtében az egymástól Δx távolságra levő keresztmetszetek a saját síkjaikban, egymással párhuzamosan elcsúsznak, de az alakváltozást követően is síkok maradnak. Ha az alakváltozás előtt a keresztmetszetre merőlegesen

vonalat rajzoltunk, akkor azt tapasztaljuk, hogy azok az alakváltozás következtében egy bizonyos γ szöggel elfordulnak egymástól. Ennek következtében a két keresztmetszet közötti A alapterületű és Δx magasságú egyenes hasáb vagy henger alakú idom formája megváltozik, az egy ugyanakkora alapterületű és az előbbivel azonos magasságú ferde hasábbá vagy hengerré torzul. Mivel ezek térfogatát az alapterületük és a magasságuk $A \cdot \Delta x$ szorzataként számolhatjuk ki, levonhatjuk azt a következtetést, hogy a nyírás következtében csak a forma változik meg és a térfogat állandó marad (5.2. ábra).



5.2. ábra. A nyírás következtében fellépő alakváltozás

A nyírás következtében fellépő torzulás mértékét jelentő γ szöget fajlagosított mennyiségnek tekintjük, hiszen az a derékszög torzulásának a mértéke. Ahogyan a τ és a σ feszültségek analóg mennyiségek, ugyanúgy a γ és az ε mennyiségek is analógok: azok a fajlagos alakváltozások, γ -t pontosabban fajlagos szögtorzulásnak nevezik.



5.3. ábra. A fajlagos szögtorzulás

Egy tetszőleges α_0 szög $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$ megváltozásából a fajlagos szögtorzulást a

$$\gamma = \frac{\Delta\alpha}{\alpha_0 / (\pi/2)} \quad (5.2)$$

hányadossal tudjuk kiszámolni (5.3. ábra). Az 5.2. hányados nevezőjében szereplő mennyiség azt adja meg, hogy az α_0 szögben hányszor van meg a derékszög.

Bár a szögeket a műszaki gyakorlatban általában fokokban mérjük, a Nemzetközi Mértékegység-rendszerben definiált alap-mértékegységük a radián ($360^\circ = 2 \cdot \pi$ rad): a szilárdságtani számításokban γ -t radiánban kell megadni.

Mivel feltételezéseink szerint az alakváltozások kicsik, $\sin \gamma \approx \gamma$ és a nyírás következtében fellépő elmozdulás az 5.3. ábra szerint

$$\Delta s = \gamma \cdot l. \quad (5.3)$$

5.1.3. A nyírófeszültség és a fajlagos szögváltozás kapcsolata

Hooke törvénye az erő és az erő által előidézett alakváltozás arányosságát feltételezi, amelyből a húzófeszültség és a fajlagos nyúlás közötti lineáris $\sigma = E \cdot \varepsilon$ kapcsolatra következtettünk, ahol az E arányossági tényező az anyagjellemző Young-modulusz (rugalmassági modulusz). Ezt az arányosságot, Hooke-törvényét kiterjesztve, a nyírófeszültség és a fajlagos szögváltozás közötti

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (5.4)$$

összefüggéshez jutunk, ahol G egy újabb rugalmassági modulusz, amelyet „nyírási modulusz”-nak nevezünk.

τ mértékegysége σ mértékegységével azonos, hiszen a feszültséget az egységnyi felületen megoszló erőként értelmeztük. Bár a szögek mértékét fokban vagy radiánban adjuk meg, a fizikában azok „dimenzió nélküli számoknak” minősülnek: a radiánban kifejezett szög ugyanis nem más, mint az adott középponti szöghöz tartozó körív hosszának és sugarának a hányadosa. Következésképpen γ is és ε is dimenzió (és ennek következtében mértékegység) nélküli viszonyszámok, tehát a nyírási modulusz mértékegysége azonos a feszültség mértékegységével.

5.1.4. A nyíróerő és az alakváltozás kapcsolata

A nyírófeszültség és a nyíróerő kapcsolatát adó 5.1. egyenlet a 4.2.-vel analóg egyensúlyi egyenlet. A fajlagos szögváltozást a szög megváltozásával összekötő 5.2. egyenlet a 4.3.-mal analóg geometriai egyenlet. A nyírófeszültséget és a fajlagos szögváltozást összekapcsoló 5.4. anyagegyenlet pedig a 4.4.-gyel analóg. Ezeket az egyenleteket a

$$\Delta\alpha = \frac{T \cdot \alpha_0 / (\pi/2)}{G \cdot A} \quad (5.5)$$

összefüggés formájában egyesíthetjük, amely a húzott rudakra megállapított 4.4. egyenlettel analóg. Még szorosabb a megfeleltetés, ha a geometriai egyenletet az 5.3. formában használjuk, ekkor a két, egymástól l távolságra levő keresztmetszet

$$\Delta s = \frac{T \cdot l}{G \cdot A} \quad (5.6)$$

relatív elmozdulásához jutunk, ahol a

$$k = \frac{G \cdot A}{l} \quad (5.7)$$

mennyiséget a nyírással szembeni merevségként értelmezhetjük. Ez utóbbival az erő és az elmozdulás kapcsolata:

$$T = k \cdot \Delta s. \quad (5.8)$$

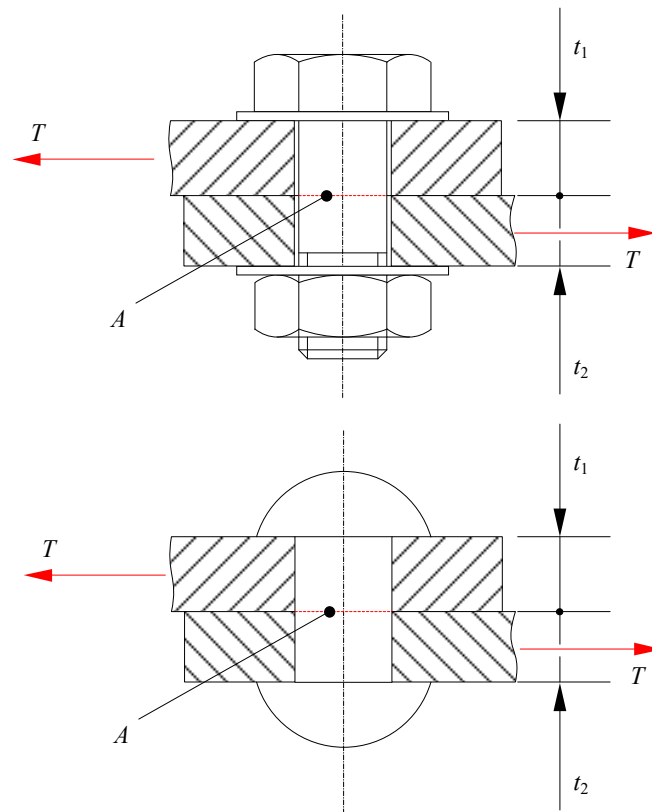
Megjegyzendő, hogy a nyírt rudakra a fenti egyenleteket a tengelyirányú igénybevétellel való analógia ellenére sem alkalmazhatjuk, mert – mint látni fogjuk –, azok keresztmetszetén τ nem állandó.

Az is megjegyzendő, hogy a nyírásból származó alakváltozást nem szokták számításba venni, a nyírt kötőelemeket pedig alakváltozásra nem kell ellenőrizni.

5.2. Csavar- és szegecskötések

5.2.1. Egyszer nyírt kötőelem

Az 5.4. ábrán egy nyírt csavarkötés, illetve szegecskötés látható. Az első egy oldható, a második pedig egy oldhatatlan kötés. A kötőelemet (a csavart, illetve a szegecszet az összekötött elemeken átmenő furatban helyezük el. A csavart a csavaranya, a szegecszet pedig a kovácsolással kialakított szegecs-fej rögzíti. Mindkét kötőelem külső átmérője valamivel kisebb kell legyen a furaténál, azonban a szegecs szára a fej kialakításának következtében a furat átmérőjéig duzzad. Amennyiben a kötést az ábrán látható módon terheljük, a csavaranyát nem szorítjuk meg túlságosan és az esetleg melegen kialakított fejű szegecs kihűlését követő zsugorodása miatt annak szárában nem jelenik meg jelentősebb húzófeszültség, feltételezzük, hogy az ábrán megjelölt keresztmetszeteken tiszta nyíró igénybevétel jelenik meg.



5.4. ábra. Nyírt csavar-, illetve szegecskötés

A csavar esetében is és a szegecs esetében is a nyírt keresztmetszet kör alakú, amelynek az átmérője a csavar szárának az átmérője, illetve a szegecs esetében pedig a furat átmérője, amelyet jelöljünk egyöntetűen d -vel:

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}. \quad (5.9)$$

Feltételezésünk szerint a nyíróerő egyenletesen oszlik meg a nyírt keresztmetszeten, az ott fellépő feszültség tehát:

$$\tau = \frac{T}{A}. \quad (5.10)$$

Ahogy létezik a σ_a megengedett feszültség a húzó-nyomó igénybevétel esetén, ugyanúgy megadható a megengedett τ_a feszültség is, mint τ felső határértéke. A csavar- és a szegecskötés méretezésének alapja a $\tau \leq \tau_a$ feltétel teljesítése: a kötőelem szükséges keresztmetszete:

$$A_{nec} = \frac{T}{\tau_a}, \quad (5.11)$$

ahonnan a kötőelem szükséges átmérője

$$d_{nec} = \sqrt{\frac{4 \cdot A_{nec}}{\pi}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{T}{\pi \cdot \tau_a}}. \quad (5.12)$$

Mivel tetszőleges átmérőjű csavarok és szegecskötések nem léteznek, mert azokat csak szabványosított átmérővel gyártják, az elérhető átmérők sorozatából a legkisebb $d \geq d_{nec}$ méretet kell kiválasztanunk. Például, ha a számítások eredményeként a csavar szükséges átmérője $d_{nec} = 8.3$ mm, akkor a metrikus csavarok mm-ben megadott átmérőinek ..., 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, ... sorozatából az M10-es szabványos méretet kell kiválasztanunk.

5.2.2. A felületi nyomás és a palástnyomás

A felületi nyomás két test közös érintkezési felületén keletkezik, értelmezése pedig a fizikából jól ismert

$$p = \frac{F}{A} \quad (5.13)$$

képlet, amely feltételezi, hogy az említett testek kölcsönhatásaként fellépő F erő a sík A felületre merőleges és azon egyenletesen oszlik meg. Ezek szerint a felületi nyomás a felületen megoszló terhelés egyik speciális formája. Amennyiben legalább az egyik test egy nyugvó folyadék vagy gáz, akkor ez a nyomás a hidrosztatikai nyomással azonos.

A szilárdságtanban, amennyiben a terhelt felület hengeres (az A felület egy hengerpalást részét képezi), akkor az ott keletkező felületi nyomást „palástnyomás”-nak nevezzük.

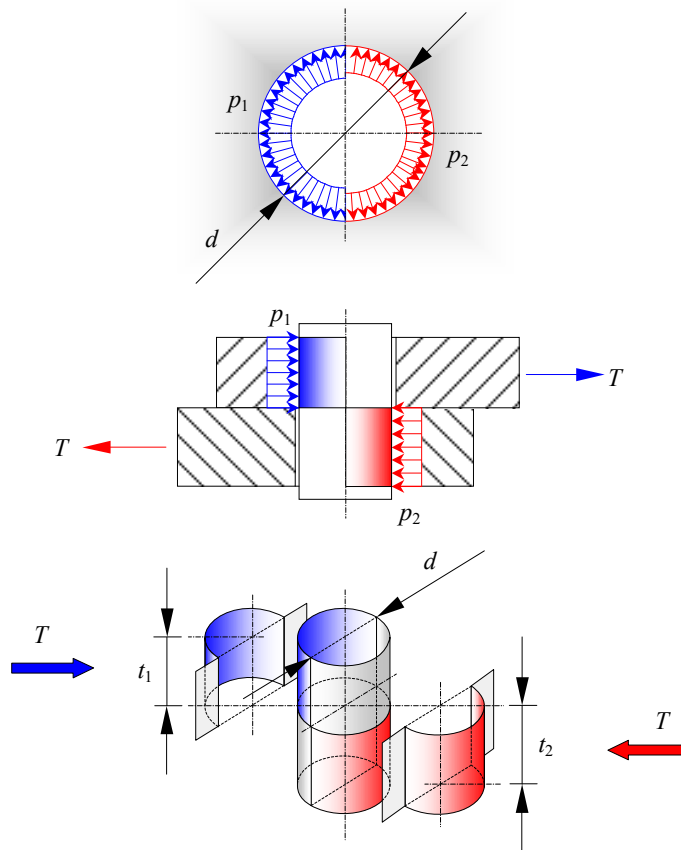
A nyírt csavar- és szegecskötések esetében az összefogott alkatrészek között az erő átadása a kötőelem hengeres szárán keresztül történik. Ennek az erő-átadásnak a mechanizmusát az 5.5. ábra szerint idealizáljuk: feltételezzük, hogy az összefogott lemezek kis mértékben elcsúsznak egymáson és ennek következtében a kötőelem hengeres szárának ellentétes oldalaira támaszkodnak fel, egy-egy tengely irányban félbevágott hengerpalást formájú felületet terhelvén. Egyszerűsítő

feltételezésként elfogadjuk, hogy az érintkezési felületeken az erő arra mindenütt merőleges és egyenletesen oszlik meg, tehát a terhelés irányának megfelelően az egyik lemez furatának felületén egy p_1 , a másikon pedig egy p_2 intenzitású palástnyomást idézvé elő.

A 2.201.-2.202. relációkból a palástnyomást a terhelt felület vetületével számíthatjuk ki. Ezt a vetületet pedig az átadott erő irányára merőleges síkban vesszük fel. A terhelt felület lemezenként egy-egy d átmérőjű és t_i magasságú henger fél-palástja, amelyek a vetülete egy d szélességű és t_i magasságú, $A_i = d \cdot t_i$ területű téglalap, tehát a palástnyomás

$$p_i = \frac{T}{A_i} = \frac{T}{d \cdot t_i}, \quad (5.14)$$

ahol $i = 1, 2$.



5.5. ábra. A palástnyomás

A szilárd testek anyaga tönkremenetel nélkül csak egy bizonyos felületi nyomást bír el, éppen ezért annak nagyságát annak σ_{as} megengedett értéke határolja le:

$$p_i \leq \sigma_{as}, \quad (5.15)$$

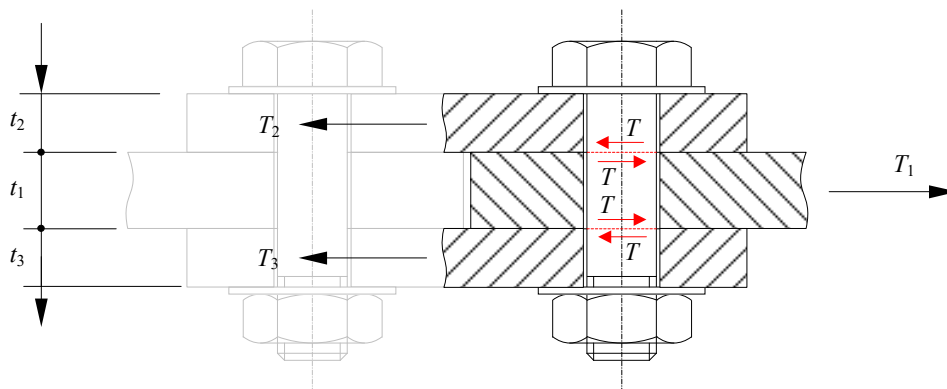
mely feltételt a csavar- és szegecskötések ellenőrzésére használjuk.

A tönkremenetel nélkül átvehető legnagyobb felületi feszültség nem csak az anyag minőségétől függ, hanem például a terhelés módjától és a terhelt felület relatív nagyságától is. Ilyenképpen a műszaki előírások a csavar- és szegecskötések esetében a palástnyomás megengedett

értékét a lemez anyagának húzásra megállapított megengedett σ_a feszültségének függvényében adják meg, a konkrét esetnek megfelelő c együtthatóval: $\sigma_{as} = c \cdot \sigma_a$.

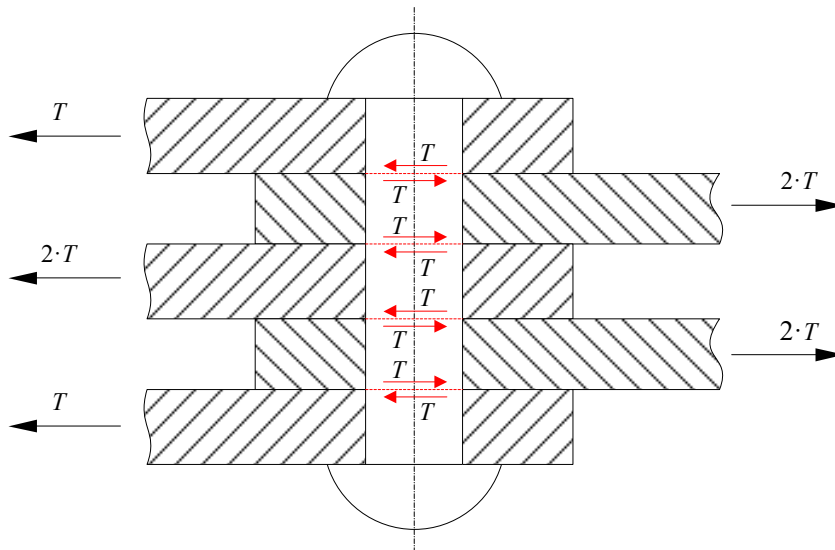
5.2.3. Kétszer vagy többször nyírt kötőelem

Nagyobb erők esetén az 5.4. ábrán látható átlapolt illesztés a lemezeket meghajlítani: ilyenkor az 5.6. ábrán látható megoldáshoz folyamodunk, ahol a két összekapcsolandó lemezt egy síkban helyezük el és az illesztést hevederek segítségével oldjuk meg. A kötőelemet az egymáshoz illesztett alkatrészek két síkban is nyírják, ezért azt „kétszer nyírt”-nak nevezzük. Ahhoz, hogy az erők eloszlása optimális legyen, a két heveder vastagsága azonos kell legyen ($t_2 = t_3$): ekkor a szimmetria miatt a két heveder és a két nyírt keresztmetszet egyenlő mértékben terhelődik ($T_2 = T_3 = T_1 / 2$).



5.6. ábra. Kétszer nyírt csavar

Előfordulhatnak többször nyírt kötések is, az 5.7. ábrán egy négyszer nyírt szegecs láthatunk.



5.7. ábra. Négyszer nyírt szegecs

Az összekapcsolt lemezek számától és vastagságától függetlenül a számításokban azt feltételezzük, hogy mindegyik nyírt keresztmetszet ugyanakkora T nyíróerőt vesz át. Amennyiben a nyírt keresztmetszetek száma n , a kötőelem anyagának megengedett nyírófeszültsége τ_a és a nyírt keresztmetszet nagysága A , akkor az illető elem teherbíró-képessége

$$T_{cap} = n \cdot A \cdot \tau_a \quad (5.16)$$

lesz.

Amennyiben az n -szer nyírt kötőelemet méreteznünk kell, akkor az annak szükséges keresztmetszetét adó 5.11. képlet a következőképpen módosul:

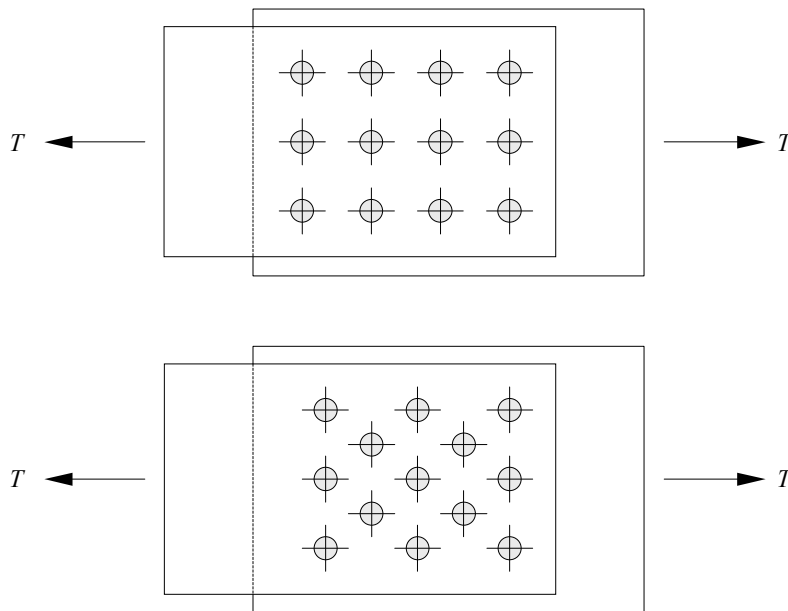
$$A_{nec} = \frac{T}{n \cdot \tau_a}. \quad (5.17)$$

Bár a méretezésnél és a teherbíró-képesség megállapításánál a lemezvastagságokat nem vettük figyelembe, a palástnyomásra történő ellenőrzésnél más a helyzet: a palástnyomást az 5.14. képlettel lemezenként, az illető lemez által átvett erővel és annak vastagságával kell kiszámítanunk.

5.2.4. Két vagy több kötőelemmel összefogott húzott alkatrészek

A kötőelem szarának átmérőjét a különféle műszaki útmutatók előírásainak megfelelően kell kiválasztani, az összefogott alkatrészek vastagságának megfelelően. Ennek és az egyéb műszaki megfontolásoknak a következményeként szükségessé válhat két vagy több kötőelem alkalmazása.

Lemezek összefogásánál a kötőelemeket egy, két, vagy több sorban lehet elhelyezni (5.8. ábra), az elemeknek az egymáshoz és a lemez széleihez mért távolságát szintén a műszaki útmutatóknak megfelelően kell megválasztani.



5.8. ábra. Több sorban elhelyezett elemekkel megoldott átlapolt kötés

A számításokban feltételezzük, hogy az összefogott elemek merevsége miatt a kötőelemek egyszerre és azonos mértékben deformálódnak, melynek következtében minden nyírt keresztmetszeten azonos mértékű γ alakváltozás lép fel. Amennyiben a kötőelemek anyaga azonos

(mindegyiknek ugyanaz a G nyírási modulusza), ekkor minden nyírt keresztmetszeten ugyanakkora $\tau = G \cdot \gamma$ nyírófeszültséget feltételezhetünk. Ezeket az illesztéseket rendszerint egyfajta kötőelemmel szokták kivitelezni: ekkor a nyírt keresztmetszetek is azonosak és minden keresztmetszet ugyanazt a $t = A \cdot \tau$ nyíróerőt veszi át. Ekkor, ha az egy kötőelem nyírt keresztmetszeteinek a száma n , a kötést pedig N elemmel szándékozunk megvalósítani, akkor a teljes kötés által átvett erő és a kötőelem szárát terhelő igénybevétel között a

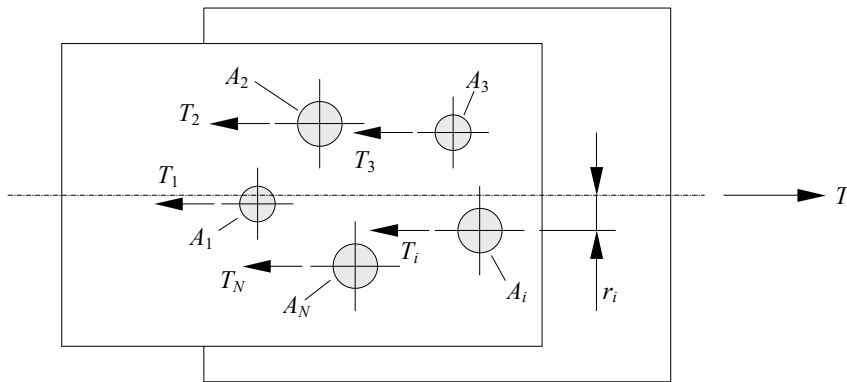
$$T = N \cdot n \cdot t \quad (5.18)$$

kapcsolatot tudjuk megállapítani, ahonnan a szárban fellépő feszültséget

$$\tau = \frac{t}{A} = \frac{T}{N \cdot n \cdot A} \quad (5.19)$$

formában kapjuk.

Ahhoz, hogy a kötőelemeknek a fenti számításokban szereplő egyenletes terhelését megvalósítsuk, a kötést csak húzóerővel terhelhetjük, nyomatékkkal nem. Az 5.9. ábrán egy átlapolt kötés némiképpen általánosított esetét láthatunk, az általánosítás abban áll, hogy a nyírt keresztmetszetek A_i nagysága elemenként más és más. A nyírt keresztmetszetek száma elemenként $n = 1$, a kötőelemek száma pedig N .



5.9. ábra. Húzásnak kitett átlapolt kötés

Mivel a fajlagos alakváltozás a feltételezéseink szerint minden nyírt keresztmetszeten azonos ($\gamma_i = \gamma$) és minden elem anyagának ugyanaz a G nyírási modulusza, a keresztmetszeteket terhelő feszültség is mindenhol ugyanakkora lesz ($\tau_i = G \cdot \gamma_i = \tau$), azok A_i nagyságától függetlenül. Az egy elem által átvett erő ($T_i = A_i \cdot \tau$) viszont elemenként különbözik, amennyiben a keresztmetszetek nem azonosak. Az ezekkel az erőkkel felírt egyensúlyi egyenletek a következők: a nyíróerő tartóegyenésére eső vetületek egyensúlyi egyenlete,

$$\sum_{i=1, N} T_i = T; \quad (5.20)$$

valamint a kötés által átvett T húzóerő tartóegyenésének valamely pontjára felírt nyomaték-egyenlet.

$$\sum_{i=1, N} r_i \cdot T_i = 0. \quad (5.21)$$

Ez utóbbi a tisztán húzásnak kitett kötés feltétele.

Az előbbiből

$$\sum_{i=1,N} T_i = \sum_{i=1,N} A_i \cdot \tau = \tau \cdot \sum_{i=1,N} A_i \Rightarrow \tau = \frac{T}{A_i} \quad (5.22)$$

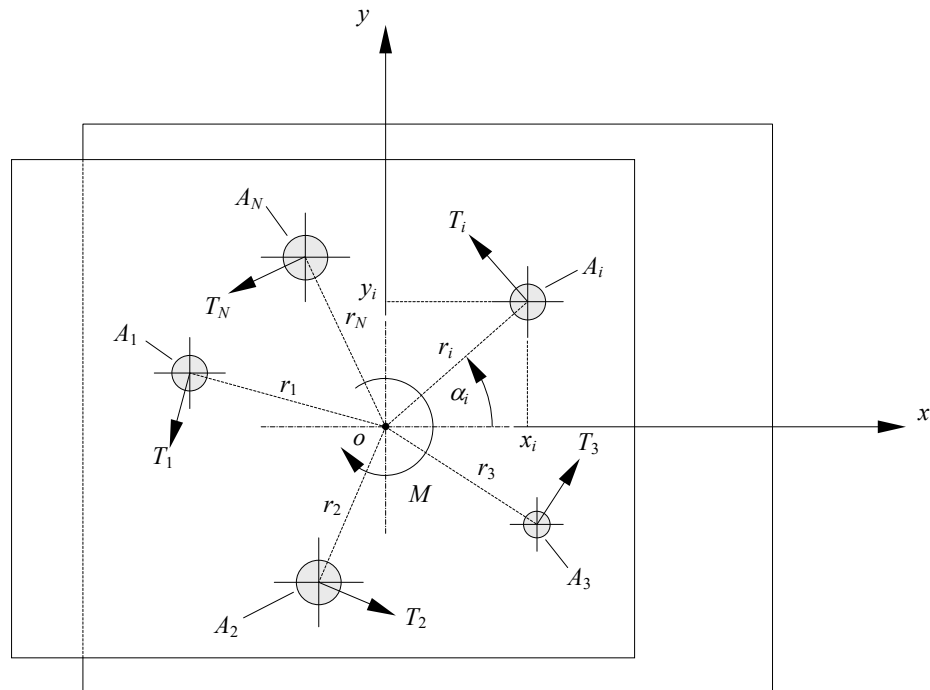
(a nyírófeszültség bármely nyírt keresztmetszeten az átvett erő és a nyírt keresztmetszetek összegének hányadosa), az utóbbiból pedig

$$\sum_{i=1,N} r_i \cdot T_i = \tau \cdot \sum_{i=1,N} r_i \cdot A_i = \tau \cdot S = 0 \Rightarrow S = 0, \quad (5.23)$$

ahol az S összeg a nyírt keresztmetszetnek az erő hatásvonalára számított elsőrendű nyomatékát adja. A kötést tehát úgy kell kivitelezni, hogy az erő hatásvonala a nyírt keresztmetszet (mint összetett idom) geometriai középpontján menjen át, vagyis az annak egy súlyvonala legyen.

5.2.5. Nyomatékkal terhelt átlapolt kötés

Az 5.10. ábrán levő kötést egy M nyomaték terheli. Az összefogott lemezek e nyomaték hatására egy bizonyos o pont körül egymáshoz viszonyítva elfordulnak, az elfordulás szöge pedig egy kicsi φ szög. Az o ponttól r_i távolságra levő i -edik kötőelem esetében a két lemez egymáshoz viszonyítva egy bizonyos $\Delta s_i = \varphi \cdot r_i$ távolságon mozdul el, amely az 5.3. ábra értelmében, ha feltételezzük, hogy minden egyes kötésre az l távolság ugyanaz, a sugárral egyenesen arányos $\gamma_i = k \cdot r_i$ fajlagos alakváltozáshoz vezet. E képletben k egy egyelőre ismeretlen arányossági tényező.



5.10. ábra. Nyomatékkal terhelt átlapolt kötés

Ha minden kötőelem anyaga ugyanaz, akkor a nyírt keresztmetszeten fellépő $\tau_i = G \cdot \gamma_i = G \cdot k \cdot r_i = k' \cdot r_i$ feszültség is az r_i távolságokkal lesz arányos. Ez a feszültség a kötőelem

által átvett $T_i = A_i \cdot \tau_i = k' \cdot A_i \cdot r_i$ nyíróerőhöz vezet, amelynek az iránya az r_i sugárra merőleges (az elfordulás miatt, a két lemez relatív elmozdulása érintőleges irányú).

A kötésre három egyensúlyi egyenletet tudunk felírni: az erők x tengelyre eső $T_{x,i} = -T_i \cdot \sin \alpha_i$ vetületeinek egyensúlyi egyenletét:

$$\sum_{i=1,N} T_{x,i} = -\sum_{i=1,N} T_i \cdot \sin \alpha_i = -\sum_{i=1,N} k' \cdot A_i \cdot r_i \cdot \sin \alpha_i = -k' \cdot \sum_{i=1,N} A_i \cdot y_i = -k' \cdot S_x = 0, \quad (5.23)$$

az y tengelyre eső $T_{y,i} = T_i \cdot \cos \alpha_i$ vetületek egyensúlyi egyenletét:

$$\sum_{i=1,N} T_{y,i} = \sum_{i=1,N} T_i \cdot \cos \alpha_i = \sum_{i=1,N} k' \cdot A_i \cdot r_i \cdot \cos \alpha_i = k' \cdot \sum_{i=1,N} A_i \cdot x_i = k' \cdot S_y = 0, \quad (5.24)$$

valamint az o pontra felírt nyomatékok egyensúlyi egyenletét:

$$\sum_{i=1,N} r_i \cdot T_i = \sum_{i=1,N} r_i \cdot k' \cdot A_i = k' \cdot \sum_{i=1,N} r_i \cdot A_i = k' \cdot I_p = M. \quad (5.25)$$

Az első két egyenletből az derül ki, hogy a nyírt keresztmetszetek elsőrendű nyomatéka mindkét tengelyre nulla kell legyen ($S_x = S_y = 0$), mivel $k' \neq 0$, tehát az o pont, amely körül a két lemez egymáshoz viszonyítva elfordul, a nyírt keresztmetszetek geometriai középpontjával azonos.

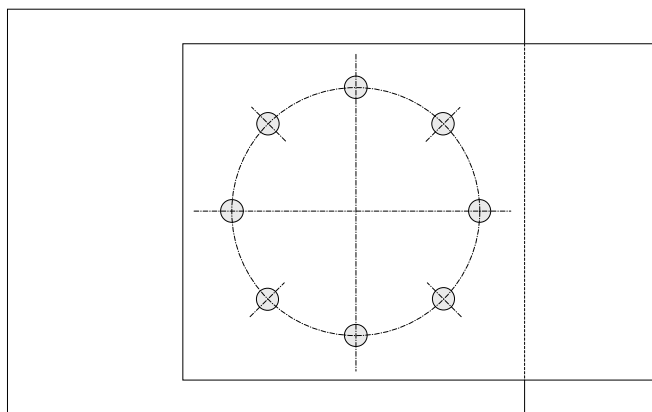
A harmadik egyenletből megállapíthatjuk a

$$k' = \frac{M}{I_p} \quad (5.26)$$

arányossági tényező értékét, ahol a nevezőben a nyírt keresztmetszeteknek az o pontra számított poláris másodrendű nyomatéka szerepel. Ezzel a kötőelemek szárában ébredő feszültséget adó

$$\tau_i = k' \cdot r_i = \frac{M \cdot r_i}{I_p} \quad (5.27)$$

relációhoz jutunk.



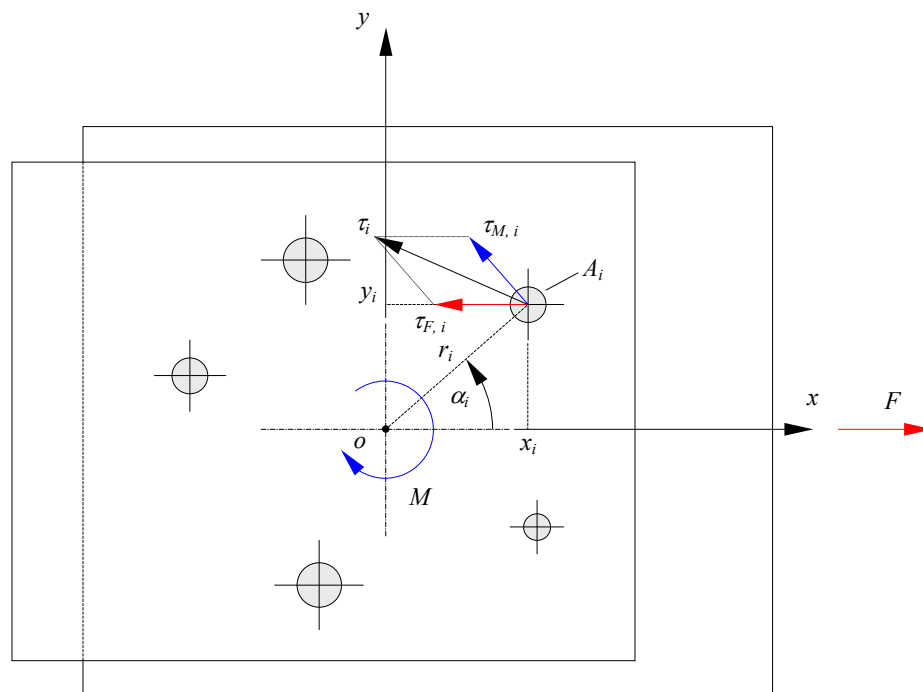
5.11. ábra. Nyomatékkal terhelt átlapolt kötés elemeinek optimális elhelyezése

Ez utóbbi szerint az azonos r_i távolságra levő nyírt keresztmetszetek bármelyikén, azok nagyságától függetlenül, ugyanaz a τ nyírófeszültség lép fel. Minél távolabb van a kötőelem az o ponttól, annál nagyobb lesz a benne ébredő feszültség. Az o pontban elhelyezett elem nem vesz át terhelést.

Ezen észrevételek alapján levonhatjuk azt a következtetést, hogy amennyiben gazdaságosan szeretnénk méretezni, akkor a kötőelemeket egy kör mentén kell elhelyeznünk (5.11. ábra).

5.2.6. Húzóerővel és nyomatékkal terhelt kötés

Amennyiben a kötetet egyszerre terheli erő is és nyomaték is, az előbbi alfejezetekben bemutatottak alapján, külön-külön, kiszámítjuk a keresztmetszeteken ható nyírófeszültségeket: az erőből származó τ_F és a nyomatékból származó τ_M feszültségeket. Ezeknek az iránya legfeljebb csak a sajátos helyzetű elemekre azonos, ugyanis az előbbieket a húzóerő irányában, az utóbbiak pedig körkörös hatnak (5.12. ábra).



5.12. ábra. Húzóerővel és nyomatékkal terhelt átlapolt kötés

A feszültség vektoriális mennyiség, a kétfajta igénybevételből származó nyírófeszültségek τ_i eredőjét pedig a τ_F és a τ_M feszültségek vektoriális összegzésével kapjuk. Ezt az összegzést azért alkalmazhatjuk, mivel mindkettő ugyanabban a síkban hat. Ha az eredő vetületeit szeretnénk megadni, akkor az ábra jelöléseivel

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= -(\tau_F + \tau_M \cdot \sin \alpha), \\ \tau_{yz} &= \tau_M \cdot \cos \alpha,\end{aligned}\tag{5.28}$$

ahol a z index az ábra síkjára merőleges irányra, a nyírt keresztmetszet normálisának irányára utal.

5.3. Hegesztett kötések

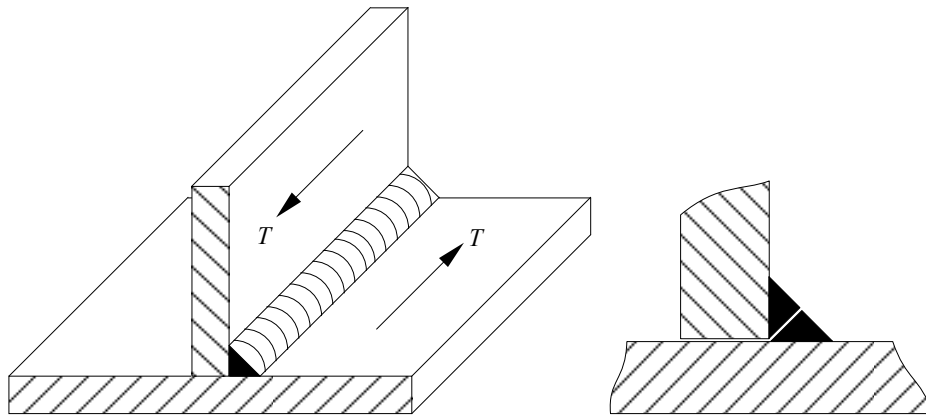
A hegesztés és a forrasztás a különálló szerkezeti elemeként fémből, esetleg műanyagból elkészített alkatrészek oldhatatlan kötással történő illesztése.

A hegesztés az alkatrészek anyagának összeolvasztásával történik: emiatt az egymáshoz illesztett alkatrészek anyaga közel azonos kell legyen. Ha a varrat elkészítésekor többlet-anyagra van szükség, akkor egy harmadik, az előbbiekkal szintén közel azonos összetételű hozaganyagra van szükség (a hegesztőpálca, ívhegesztésnél pedig az elektróda anyaga). A kötés a megszilárduló olvadék révén, a molekulák között ható erők révén jön létre, s emiatt ezt kohéziós kötésnek is nevezik.

A forrasztás egy harmadik, alacsonyabb olvadáspontú anyag felhasználásával történik, amelyik hozzátapad mindkét összeillesztendő alkatrészhöz, kismértékben diffundál és kitölti a közöttük levő rést. A három anyag (a két alkatrésze és a hozaganyagé) merőben különbözhet egymástól. A kötés a megszilárduló hozaganyag és az egymáshoz illesztendő felületek közötti adhézióknak köszönhető, ezért ezt a fajta kötést adhéziós kötésnek nevezik. Hasonlóan működnek a ragasztott kötések is.

E kötések méretezését a továbbiakban a sarokvarratokon keresztül példázzuk (5.13. ábra). Ha a sarokvarratok a hosszuk mentén adják át a terhelőerőt az egymáshoz hegesztett elemek között (ahogyan ez az ábrán is látható), akkor azt feltételezzük, hogy bennük nyírófeszültségek keletkeznek. A varratot alkotó hozaganyag az összeillesztett alkatrészekhez tapad és az a varrat legkisebb hosszszelvénye mentén nyíródna el. A nyírófeszültséget az átadott erővel és a hosszszelvény nagyságával számítjuk, feltételezve, hogy egyenletesen oszlik meg:

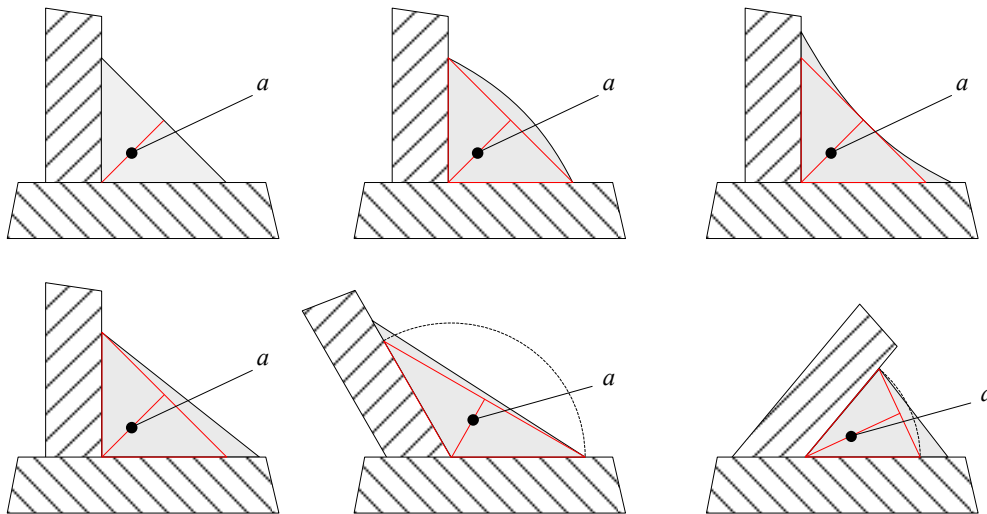
$$\tau = \frac{T}{A_s} \quad (5.29)$$



5.13. ábra. Nyírt sarokvarrat

Az A_s nyírt hosszszelvényt a varrat keresztmetszetének a „gyökméretével” és a varrat l_s hosszúságával számoljuk. Egyezményesen, a gyökméret a keresztmetszetbe berajzolható egyenlő oldalú háromszög magassága (5.14. ábra); egyes előírások azonban ezt másképp határozhatják meg. Mivel a varrat kivitelezésénél fellépő körülmények miatt a kezdetének és a végének a szilárdságára nem számíthatunk, a varratnak a számításokban tekintett l_s hossza az l kivitelezési hosszánál rövidebb:

$$l_s = l - 2 \cdot a \quad (5.30)$$



5.14. ábra. A sarokvarrat gyökmérete

A hozaganyag szilárdsága rendszerint nagyobb az összeillesztett alkatrészének anyagának szilárdságánál. A hegesztés során a hozaganyag olvadáka keveredik az alapanyagokkal, emiatt az emígy kiszámított nyírófeszültséget az utóbbiakra érvényes τ_a megengedett feszültséggel kell összehasonlítani: ez a varrat méretezésének alapja: $A_{nec} = T / \tau_a$. A gyökméretet különféle műszaki előírások szabályozzák, az nem lehet egy adott minimumnál kisebb, a varrat magassága és szélessége pedig az átolvadás veszélye miatt nem haladhatja meg az egymáshoz illesztett alkatrészek vastagságát. A megválasztott gyökmérettel a varrat szükséges hossza

$$l_{s,nec} = \frac{A_s}{a} = \frac{T}{a \cdot \tau_a}, \quad (5.31)$$

amelyet esetleg több darabra is oszthatunk és mindegyik szakasz hosszát $2 \cdot a$ -val kell megnöveljük a kivitelezési hosszak kiszámításához. A szakaszokra való osztás alapelve az lehet, hogy a varrat csak húzásnak legyen kitéve, csavarásnak nem.

5.1. példa. Sarokvarrat méretezése

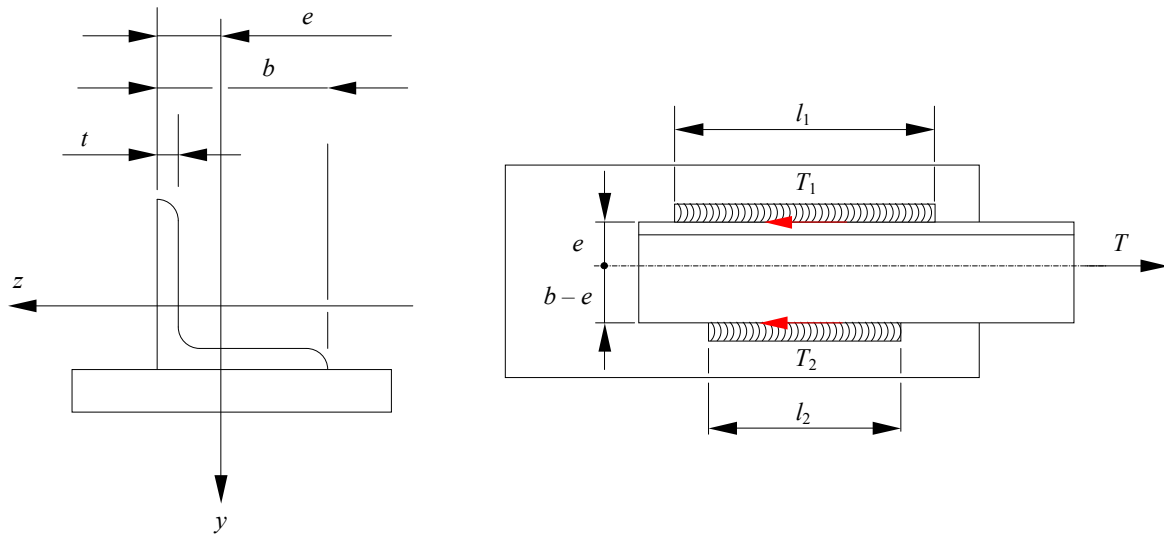
Példaként tegyük fel, hogy egy hengerelt szögacélból (L-idom) készült húzott rudat szeretnénk egy acél-lemezhez illeszteni (5.15. ábra). A szögacél keresztmetszetének geometriai méreteit standardok rögzítik, a minket érdeklő mennyiségek ezek közül a talp b szélessége és t vastagsága, valamint a geometriai középpontjának az ábra szerint felvett e excentrikussága.

Ahhoz, hogy a rúd csak húzó igénybevételnek legyen kitéve, a T erő a keresztmetszet geometriai középpontjában kell hasson (központos húzás). Ezt az erőt a két varrat együttesen veszi át:

$$T = T_1 + T_2. \quad (5.32)$$

Ahhoz, hogy ne jöjjön létre hajlító hatás, a húzóerő összetevőinek eredő nyomatéka zéró kell legyen. Ez a következő, a rúd tengelyének valamely pontjára felírt nyomaték-egyenlethez vezet:

$$T_1 \cdot e = T_2 \cdot (b - e). \quad (5.33)$$



5.15. ábra. Sarokvarrattal egymáshoz illesztett alkatrészek

Az 5.32. és az 5.33. egyenletekből álló rendszer megoldása a következő:

$$\begin{aligned} T_1 &= T \cdot \frac{b-e}{b}, \\ T_2 &= T \cdot \frac{e}{b}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

ahonnan a megfelelő varrathosszak

$$\begin{aligned} l_{s,1} &= \frac{T_1}{a_1 \cdot \tau_a} = T \cdot \frac{b-e}{b \cdot a_1 \cdot \tau_a}, \\ l_{s,2} &= \frac{T_2}{a_2 \cdot \tau_a} = T \cdot \frac{e}{b \cdot a_2 \cdot \tau_a}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

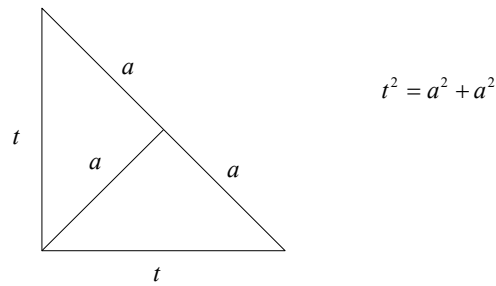
a gyökméretet pedig az idom talpvastagságával (5.16. ábra) például a következőképpen határozhatjuk meg:

$$a_1 = a_2 = \frac{t}{\sqrt{2}}. \quad (5.36)$$

A varratok kivitelezési hossza tehát:

$$\begin{aligned} l_1 &= l_{s,1} + 2 \cdot a_1 = \sqrt{2} \cdot \left(T \cdot \frac{b-e}{b \cdot t \cdot \tau_a} + t \right), \\ l_2 &= l_{s,2} + 2 \cdot a_2 = \sqrt{2} \cdot \left(T \cdot \frac{e}{b \cdot t \cdot \tau_a} + t \right). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Mivel $e < b - e$, $l_1 > l_2$, tehát a rúd tengelyéhez közelebb levő varrat hosszabb lesz a másíknál.



5.16. ábra. A gyökméret meghatározása

Hasonlóképpen méretezzük a hosszuk mentén terhelt tompavarratokat is (5.17. ábra): a teljes beolvadású varratok gyökmérete az egymáshoz illesztett alkatrészek vastagságával; a részleges beolvadású varratok gyökméretét pedig az ábra értelmezi. A merőleges irányban terhelt varratok számítása az adott igénybevételnek felel meg (pl. húzás).



5.17. ábra. Tompavarratok gyökmérete

5.4. További esetek

Egyenletesen megoszló τ feszültséget feltételezünk a csapszegek, ékek, reteszek és a bordástengelyek nyírt keresztmetszetén is.

5.2. példa. Csapszeg méretezése

Méretezzünk egy csapszeget, amely egy D átmérőjű tengelyre felszerelt alkatrészt rögzít. A tengely az illető alkatrésznek egy M_t nyomatékot ad át (5.18. ábra).

A csapszeget az átadott nyomaték miatt egymáshoz képest elfordulni igyekvő alkatrészek a tengely palástfelülete mentén nyírják, a nyírt felületet a csapszeg sík keresztmetszetével közelíthetjük. A két nyírt keresztmetszet átellenesen, D távolságra van egymástól.

A nyírt keresztmetszeteken egy T nyíróerő lép fel, szimmetria okokból a két felületen azonos intenzitással, egy erőpárt alkotván. Ennek az erőpárnak a nyomatéka az átadott nyomatékkal azonos, mely egyensúlyi egyenletből

$$T = \frac{M_t}{d}. \quad (2.38)$$

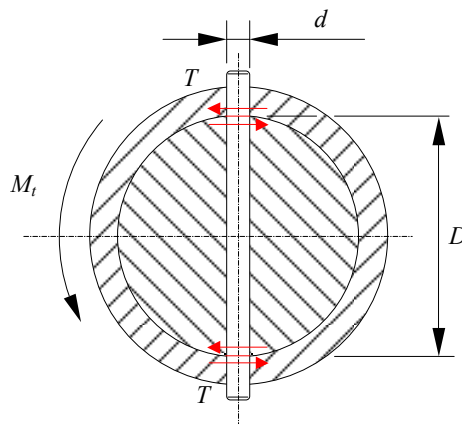
Feltételezvé, hogy ez az erő egyenletesen oszlik meg a keresztmetszeten, a belőle származó nyírófeszültség a csapszeg d átmérőjével ($A = \pi \cdot d^2 / 4$)

$$\tau = \frac{T}{A} = \frac{4 \cdot T}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot M_t}{\pi \cdot D \cdot d^2}. \quad (2.39)$$

A méretezés feltétele $\tau = \tau_a$, ahonnan a csapszeg szükséges átmérője

$$d_{nec} = 2 \cdot \sqrt{\frac{M_t}{\pi \cdot D \cdot \tau_a}}. \quad (2.40)$$

Akár a szegecs- és csavarkötéseknél, az illesztést a palástnyomásra kell ellenőrizni (feltételezzük, hogy a T erő egyenletesen oszlik meg a tengelyre illesztett alkatrésznek a csapszegre támaszkodó felületén).



5.18. ábra. Nyírt csapszeg

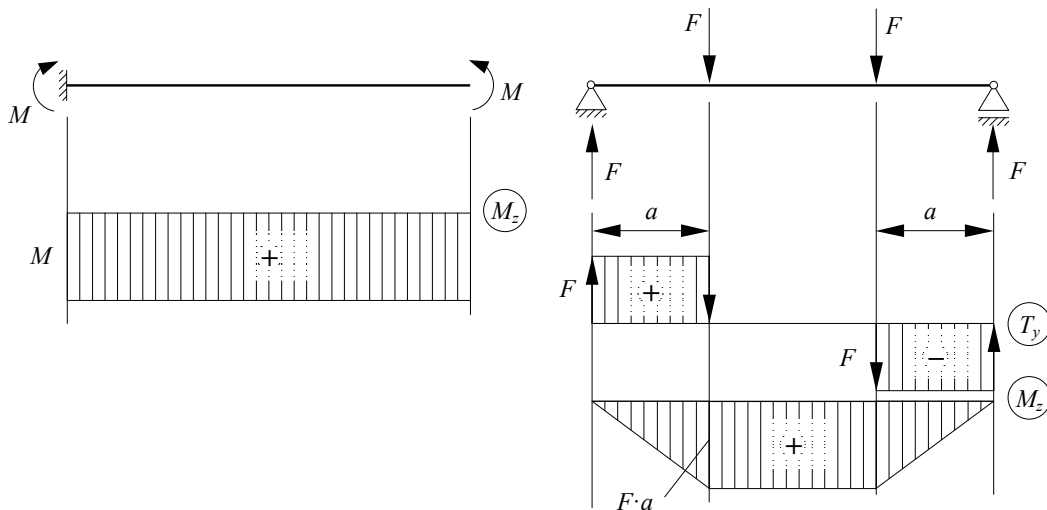
Hasonlóképpen méretezzük az ék- és reteszkötéseket, ahol a nyírt keresztmetszetek száma rendszerint egy, hiszen egy kötőelemmel valósítjuk meg azt; valamint a bordástengelyeket, ahol a nyírt keresztmetszetek száma a bordák számával egyenlő. Ezekben az esetekben a kötőelemek geometriáját, amelyből a nyírt keresztmetszet nagysága származik, műszaki előírások szerint kell megválasztani.

6. HAJLÍTÓ IGÉNYBEVÉTEL

6.1. Tiszta hajlítás

6.1.1. Egyenes hajlítás

A hajlító és a nyíró igénybevételek közötti 2.107. és 2.200. összefüggések szerint a hajlítónyomaték deriváltja a nyíróerővel azonos: a hajlítás azt feltételezi, hogy a keresztmetszeten csak hajlító igénybevétel jelenjen meg, nyírás nélkül. A $T_y(x) = 0$ feltétel az $M_z(x) = \text{áll.}$ feltételhez vezet, tehát a tiszta hajlító igénybevétel csak ott jelenhet meg, ahol az a tartó hosszán állandó intenzitással jelentkezik (6.1. ábra).



6.1. ábra. Tiszta hajlítás (a jobb oldali esetben csak a középső szakaszon)

A meghajlított rúd tengelye meggörbül, és azt feltételezzük, hogy a rúd tengelyére a hajlítás előtt merőleges sík keresztmetszetek az alakváltozást követően is síkok és a meggörbült tengelyre merőlegesek maradnak (Bernoulli hipotézise). A rúd meggörbülését követően ezek a sík keresztmetszetek elfordulnak, s ha egyenes hajlítást feltételezünk, akkor ez az elfordulás a hajlítás tengelyével párhuzamos tengely körül történik (6.2. ábra).

Ha két, eredeti állapotban dx távolságra levő keresztmetszetet figyelünk meg (6.3. ábra), akkor azt tapasztaljuk, hogy az adott keresztmetszeteket tartalmazó, eredetileg párhuzamos síkok az elfordulásuk következtében egy bizonyos $d\varphi$ szög alatt metszik egymást. E síkok metszésvonalára párhuzamos a hajlítás tengelyével és merőleges az ábra síkjára.

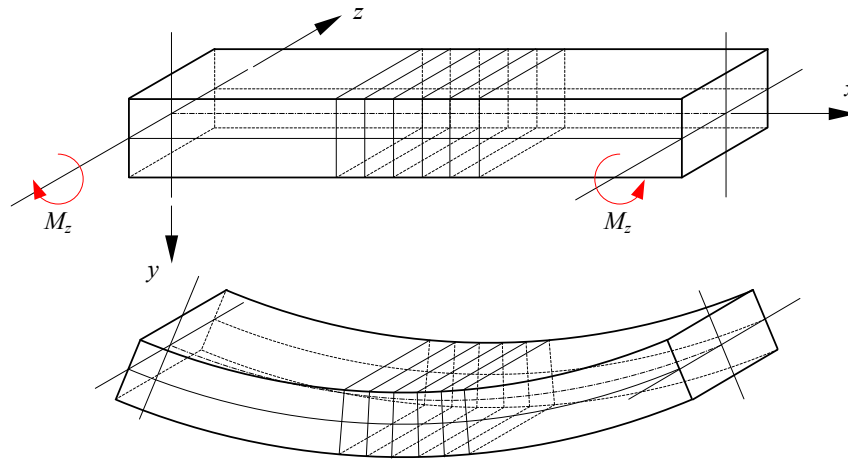
Amennyiben feltételezzük, hogy az alakváltozások kicsik, akkor a rúd meghajlított tengelyének a két keresztmetszet közötti részét egy körívvel közelíthetjük, s a tengellyel párhuzamos egyenes vonalak pedig az alakváltozást követően pedig az előbbivel koncentrikus körívekké görbülnek.

Egy körív hossza a központi szögének és a sugarának a szorzata, ennek következtében a keresztmetszeteket tartalmazó síkok metszésvonalához közelebb eső ívek rövidebbek, a távolabbiak pedig hosszabbak lesznek: levonhatjuk tehát azt a következtetést, hogy a rúd hossz menti alakváltozást szenved, a tengelyével párhuzamos vonalak ugyanis a helyzetüktől függően megnyúlhatnak vagy megrövidülhetnek a rúd meghajlítása során.

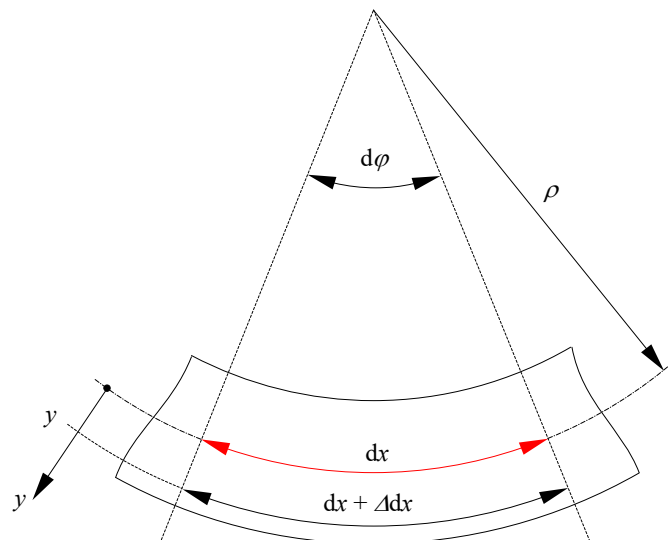
Hooke törvénye szerint ez az alakváltozás tengely irányú feszültségek megjelenéséhez vezet, e feszültségek keresztmetszeten történő integrálása pedig egy tengely irányú erőt eredményezhet. A

rudat valójában tengely irányú erő nem terheli, tehát ezeknek a feszültségeknek a megoszlása olyan kell legyen, hogy az eredőjük zérus legyen: következésképpen pozitív és negatív feszültségeknek is meg kell jelenniük, vagyis egyes vonalaknak meg kell nyúlniuk, másoknak pedig rövidülniük kell.

Az ívek hossza a sugárral egyenesen arányosan változik, emiatt kell léteznie egy olyan ρ sugarú ívnek, amely a megnyúlt és a megrövidült vonalak közötti átmenetet képezvén, megtartja az eredeti dx hosszúságát. Három dimenzióra kiterjesztve, ez egy ρ sugarú hengeres felületet jelent, amely eredeti állapotában a rúd tengelyével is és a hajlítás tengelyével is párhuzamos sík volt és amelyet *semleges sík*nak nevezünk, mert benne feszültségek nem jelennek meg.



6.2. ábra. Prizmatikus rúd egyenes hajlítása



6.3. ábra. A hajlítás következtében létrejövő alakváltozás

Ha a hajlítás tengelye z , akkor legyen a semleges sík az xz koordináta-sík. Erre merőlegesen mérjük az y távolságot, a 6.3. ábra szerint. E távolság függvényében az eredetileg dx hosszúságú vonalak fajlagos alakváltozását a következőképpen adhatjuk meg:

$$\varepsilon = \frac{(dx + \Delta dx) - dx}{dx} = \frac{(\rho + y) \cdot d\varphi - \rho \cdot d\varphi}{\rho \cdot d\varphi} = \frac{y}{\rho} \quad (6.1)$$

(tehát ε az y koordinátával egyenesen arányos, az arányossági tényező pedig a semleges sík $\kappa = 1/\rho$ görbülete). Ez az alakváltozás a

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{E}{\rho} \cdot y \quad (6.2)$$

feszültséghez vezet, amely tehát a semleges síkra merőleges irányban a távolsággal arányosan változik, a homorú (megrövidült) oldalon negatív, a domború (nyújtott) oldalon pedig pozitív előjelű.

Mivel nincs tengely irányú igénybevétel, a feszültséget a rúd A keresztmetszetén integrálván

$$N = \int_A \sigma \, dA = \frac{E}{\rho} \cdot \int_A y \, dA = \frac{E}{\rho} \cdot S_z = 0, \quad (6.3)$$

mely egyensúlyi egyenletből az $S_z = 0$ feltételhez jutunk: ezek szerint az xz koordináta-síkként felvett semleges síknak tartalmaznia kell a keresztmetszet geometriai középpontját, tehát a z tengely a keresztmetszet súlyvonala kell legyen.

További egyensúlyi egyenleteket is felírhatunk: a σ feszültség megoszlása olyan kell legyen, hogy az a z tengely körül forgató M_z nyomatékot adja, mialatt az y tengely körül forgató M_y nyomaték nulla kell legyen. Kezdjük ez utóbbival:

$$M_y = \int_A z \cdot \sigma \, dA = \frac{E}{\rho} \cdot \int_A z \cdot y \, dA = \frac{E}{\rho} \cdot I_{yz} = 0, \quad (6.4)$$

ahonnan $I_{yz} = 0$ kell legyen: ez azt jelenti, hogy az y és a z tengelyek a keresztmetszet főirányait kell jelentsék. Ha nem főirány körül hajlítunk, akkor a hajlítás nem egyenes, hanem ferde lesz, ami egy összetett igénybevételt jelent.

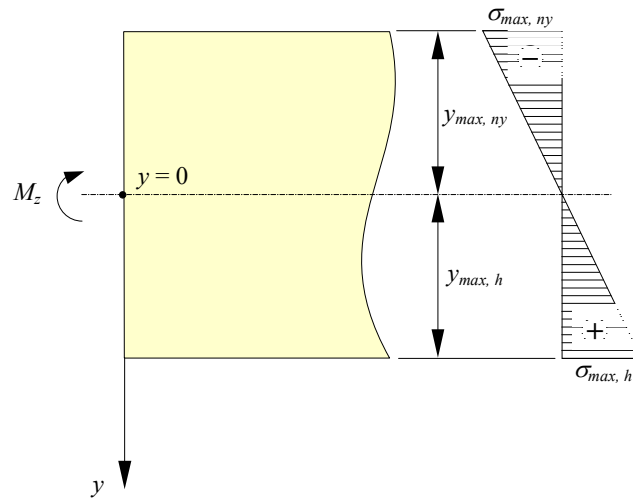
Végül, a harmadik egyensúlyi egyenletet a következőképpen írhatjuk fel

$$M_z = \int_A y \cdot \sigma \, dA = \frac{E}{\rho} \cdot \int_A y^2 \, dA = \frac{E}{\rho} \cdot I_z, \quad (6.5)$$

ahol az egyelőre ismeretlen $1/\rho$ görbület is szerepel. A 6.2. összefüggésből $E/\rho = \sigma/y$, s ezzel az utóbbi kifejezés tovább alakítható:

$$\sigma(y) = \frac{M_z}{I_z} \cdot y. \quad (6.6)$$

A fenti összefüggés „Navier képlete” néven ismeretes és a hajlításból származó tengely irányú feszültséget adja meg, egy y -ban lineáris függvény gyanánt (6.4. ábra). A σ feszültség előjele pedig a hajlító igénybevétel előjelétől és az y koordináta előjelétől függ. A 6.4. ábrán M_z -t az egyezményes pozitív irányban vettük fel, így a negatív y koordinátáknak negatív σ feszültségek felelnek meg, a pozitív koordinátáknak pedig pozitív feszültségek: a rúd nyújtott oldala tehát alul, a nyomott pedig felül van.



6.4. ábra. A hajlítás következtében fellépő feszültség

A mérnöki feladatokban ennek a feszültségnek a szélsőértékeit kell megvizsgálni, első sorban. Ezeket a szélsőértékeket, mivel egy adott keresztmetszeten az M_z / I_z hányados állandó, az y koordináta szélsőértékei adják. Ha $y_{max,h}$ jelöli a húzott oldalon levő, a rúd tengelyétől (valójában az xz koordináta-síktól) legmesszebb levő pont távolságát – ami az illető pont y koordinátájának $|y|$ abszolút értéke –, $y_{max,ny}$ pedig a nyomott oldal legtávolabbi pontjának a távolsága, akkor Navier képlete szerint a legnagyobb húzófeszültség

$$\sigma_{max,h} = \frac{|M_z|}{I_z} \cdot y_{max,h} = \frac{|M_z|}{W_{z,h}}, \quad (6.7)$$

a legnagyobb nyomófeszültség abszolút értéke pedig

$$\sigma_{max,ny} = \frac{|M_z|}{I_z} \cdot y_{max,ny} = \frac{|M_z|}{W_{z,ny}}. \quad (6.8)$$

A legnagyobb nyomófeszültség tulajdonképpen negatív mennyiség, az a Navier-képlet által adott feszültségek $\sigma_{min} = -\sigma_{max,ny}$ értékű minimuma.

Az utóbbi két képletben két új jelölés került bevezetésre:

$$W_{z,h} = \frac{I_z}{y_{max,h}}, \text{ illetve } W_{z,ny} = \frac{I_z}{y_{max,ny}}, \quad (6.9)$$

amelyek a keresztmetszet geometriáját jellemző újabb mennyiségek, a húzott, illetve a nyomott oldalnak a z tengely körüli hajlításra számított szilárdsági moduluszai. E moduluszok mértékegysége a Nemzetközi Mértékegységrendszerben m^3 .

A megengedett feszültség bevezetésével a biztonság feltételét a $\sigma \leq \sigma_a$ egyenlőtlenség teljesítése adja. Az anyagok többsége húzásra és nyomásra egyenlő mértékben áll ellen: ezeknél mindkét irányú igénybevételre az előírások egy bizonyos σ_a megengedett feszültséget adnak meg. Vannak olyan anyagok, mint például az öntöttvas és a beton, amelyek a húzással szemben jóval

kisebb ellenállást tudnak kifejteni, mint a nyomó igénybevétel esetében: ezekre az anyagokra az igénybevétel irányától függően a megengedett feszültségnek más-más értéke van, húzásra az $\sigma_{a,h}$, nyomásra pedig $\sigma_{a,ny}$ (a hazai szakirodalomban a megfelelő jelölések σ_{at} , illetve σ_{ac}), ez utóbbi pedig a megengedett feszültség abszolút értéke gyanánt van megadva.

Mivel a hajlítás során a rúd keresztmetszetén mindkét irányú feszültség megjelenik, egyszerre kell teljesülniük a

$$\begin{cases} \sigma_{max,h} \leq \sigma_{a,h} \\ \sigma_{max,ny} \leq \sigma_{a,ny} \end{cases} \quad (6.10)$$

feltételeknek.

A húzásra és nyomásra szimmetrikusan viselkedő anyagok esetében e számításokat leegyszerűsíthetjük: megkeressük a semleges síktól legtávolabb eső pont y koordinátáját, amellyel e pontnak a síktól mért távolsága $y_{max} = \max(y_{max,h}, y_{max,ny})$.

E távolsággal egy $W_z = I_z / y_{max}$ szilárdsági moduluszt számíthatunk, amely az eddig kiszámítottak közül a kisebbik: $W_z = \min(W_{z,h}, W_{z,ny})$.

E moduluszsal a feszültség legnagyobb abszolút értéke $\sigma_{max} = |M_z| / W_z$, az eddigiekben kiszámított szélsőértékek maximuma: $\sigma_{max} = \max(\sigma_{max,h}, \sigma_{max,ny})$, amelyre teljesülnie kell a $\sigma_{max} \leq \sigma_a$ feltételnek.

6.1. példa. Hajlított rúd méretezése

Legyen egy téglalap keresztmetszetű kéttámaszú tartó, amelyet egy egyenletesen megoszló p erő terhel, annak teljes l hosszúságán (ez a 2.3. és a 2.19. feladatokban szereplő tartó). Tegyük fel, hogy ez egy húzásra és nyomásra azonosképpen viselkedő anyagból készül.

E rúd méretezéséhez első lépésben meg kell határoznunk annak legnagyobb igénybevételét: a 2.19. feladatban ezt az

$$M_{z,max} = \frac{p \cdot l^2}{8} \quad (6.11)$$

mennyiségként határoztuk meg.

Navier képlete alapján, ha a legnagyobb feszültséget a megengedettel azonosnak írjuk elő, a szilárdsági modulusz szükséges értékére a

$$W_{z,nec} = \frac{M_z}{\sigma_a} \quad (6.12)$$

feltételt kapjuk. A példa adataival

$$W_{z,nec} = \frac{p \cdot l^2}{8 \cdot \sigma_a}. \quad (6.13)$$

A szilárdsági moduluszhoz szükségünk van a keresztmetszetnek a z tengelyre vonatkoztatott másodrendű nyomatékára, amely a 3. fejezetben foglaltak szerint (6.5. ábra)

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}. \quad (6.14)$$

Mivel szimmetrikusan viselkedő anyagról van szó, elegendő a legtávolabbi pont távolságát meghatározni:

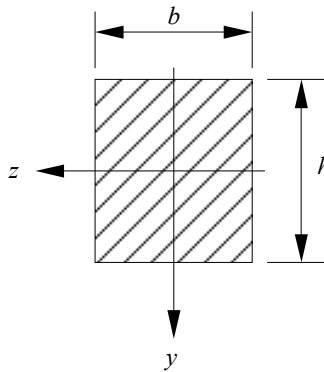
$$y_{max} = \frac{h}{2}, \quad (6.15)$$

amellyel a téglalap z tengelyre vonatkoztatott szilárdsági moduluszára a

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{b \cdot h^2}{6} \quad (6.16)$$

képletet kapjuk.

Itt megjegyzendő, hogy a téglalap a hajlítás tengelyére szimmetrikus idom, tehát ha szükség lenne a nyújtott és a nyomott oldal külön vizsgálatára, a megfelelő szilárdsági moduluszok azonosak és azokat a fenti képlettel számolhatjuk: $W_{z,h} = W_{z,ny} = W_z$.



6.5. ábra. A hajlított rúd keresztmetszete

A szilárdsági modulusz szükséges értékéből a téglalap alakú keresztmetszet b és h értékét kell meghatározni: amennyiben b adott, a keresztmetszet szükséges magassága

$$h_{nec} = \sqrt{\frac{6 \cdot W_{z,nec}}{b}}, \quad (6.17)$$

ha pedig h rögzített, akkor

$$b_{nec} = \frac{6 \cdot W_{z,nec}}{h^2}. \quad (6.18)$$

Észrevehetjük, hogy a tengelyre vonatkoztatott másodrendű nyomatékok képletében (nemcsak a téglalap esetében) a tengelyre merőleges méret harmadik hatványa szerepel. Ugyanerre a tengelyre nézve a hajlításra számított szilárdsági modulusz tehát e méret második hatványától fog függeni, a legmesszebb eső pont távolságával való osztás miatt. Ugyanakkor mindkét mennyiségben a tengellyel párhuzamos méret első hatványa szerepel. Levonhatjuk azt a következtetést, hogy két azonos A keresztmetszetű rúd közül a hajlításra nézve az lesz szilárdabb, amelynek esetében a hajlítás tengelyére számított másodrendű nyomaték nagyobb, tehát amelynek esetében a rúd anyaga távolabb helyezkedik el a semleges síktól. A gazdaságos méretezés a keresztmetszet geometriájának azon megválasztására törekszik, amely $W_{z,nec}$ értékének biztosítása

mellett a lehető legkisebb A keresztmetszethez vezet. Ezt számszerűen egy $k = W_{z_{nec}} / A$ hányados bevezetésével lehet kifejezni: a keresztmetszet akkor optimális, ha k a lehető legnagyobb értékkel rendelkezik. Példánkban így érdekesebb a téglalap b szélességét a lehető legkisebbre venni és meghatározni az annak megfelelő szükséges h magasságot, a 6.17. képlet segítségével.

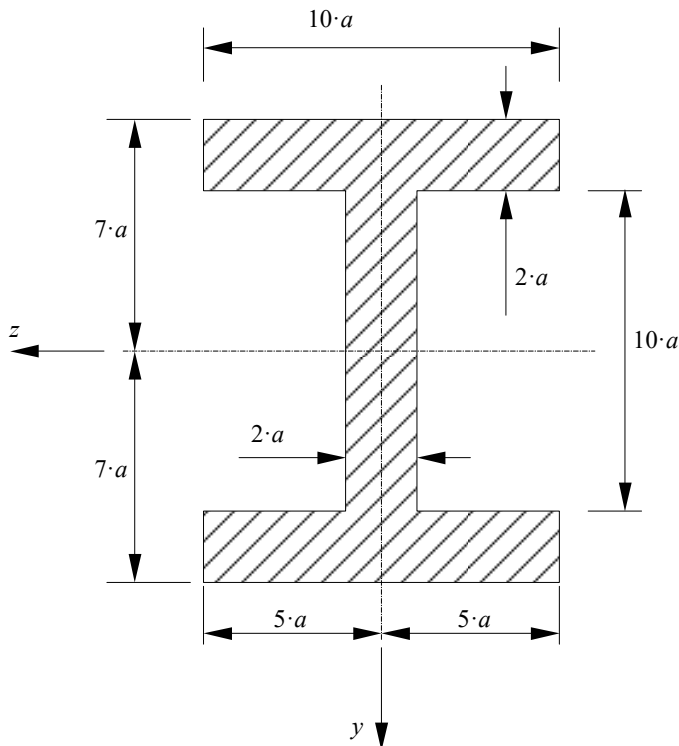
6.2. példa. Hajlított rúd teherbíró képessége

Legyen a 3.23. feladatban szereplő, két szimmetriatengellyel rendelkező keresztmetszetű rúd (6.6. ábra). E keresztmetszet másodrendű nyomatékai

$$\begin{aligned} I_z &= 1620 \cdot a^4, \\ I_y &= 340 \cdot a^4, \end{aligned} \quad (6.19)$$

a legtávolabbi pontok koordinátái pedig

$$\begin{aligned} y_{max} &= 7 \cdot a, \\ z_{max} &= 5 \cdot a. \end{aligned} \quad (6.20)$$



6.6. ábra. A hajlított rúd keresztmetszete

Ezekkel az adatokkal

$$\begin{aligned} W_z &= \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{1620 \cdot a^4}{7 \cdot a} = 231.4 \cdot a^3, \\ W_y &= \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{340 \cdot a^4}{5 \cdot a} = 68 \cdot a^3. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Amennyiben a rúd anyagának a megengedett feszültsége σ_a (a keresztmetszet szimmetriája miatt, a nem szimmetrikus viselkedésű anyagok esetében a $\sigma_{a,ny}$ megengedett feszültséggel kell számolni), akkor a teherbíró-képességét a két tengely szerint

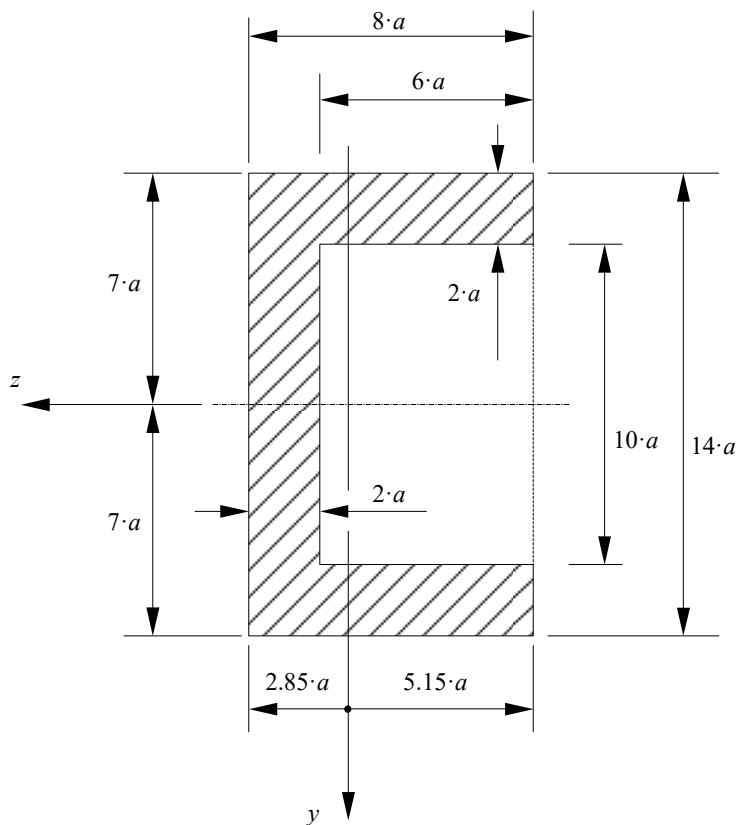
$$\begin{aligned} M_{z\,cap} &= W_z \cdot \sigma_a = 231.4 \cdot a^3 \cdot \sigma_a, \\ M_{y\,cap} &= W_y \cdot \sigma_a = 68 \cdot a^3 \cdot \sigma_a \end{aligned} \quad (6.22)$$

gyanánt kapjuk.

Észrevehetjük, hogy $M_{z\,cap} / M_{y\,cap} = W_{z\,cap} / W_{y\,cap} = 231.4 / 68 = 3.4$, tehát a z tengely körüli hajlítással szemben a rúd sokkal szilárdabb, mint az y tengely körüli hajlításra, mivel a rúd anyaga a z -től távolabb van és inkább az y körül tömörül.

6.3. példa. Nem szimmetrikus viselkedésű anyagból készült hajlított rúd teherbíró képessége

Legyen egy, a 3.22. feladatban szereplő, egy szimmetriatengellyel rendelkező keresztmetszetű rúd (6.7. ábra), amelynek az anyaga nem szimmetrikus viselkedést mutat ($\sigma_{a,h} < \sigma_{a,ny}$).



6.7. ábra. A hajlított rúd keresztmetszete

A tengelyekre számított másodrendű nyomatékok a következők:

$$\begin{aligned} I_z &= 1329.3333 \cdot a^4, \\ I_y &= 288.1025 \cdot a^4. \end{aligned} \quad (6.23)$$

A z tengely szimmetria-tengely, emiatt, az előbbi feladatban leírtak alapján megállapítható, hogy

$$M_{z\text{ cap}} = W_z \cdot \sigma_{a,h} = \frac{I_z}{y_{\max}} \cdot \sigma_{a,h} = \frac{1329.3333 \cdot a^4}{7 \cdot a} \cdot \sigma_{a,h} = 189.9 \cdot a^3 \cdot \sigma_{a,h}, \quad (6.24)$$

bármilyen irányú (előjelű) z tengely körüli hajlításra.

A pozitív M_y nyomaték a keresztmetszetnek az ábrán az y tengely bal oldalán eső részét nyomja és a jobb oldalt húzza. Ekkor $z_{\max,h} = 5.15 \cdot a$, $z_{\max,ny} = 2.85 \cdot a$ amivel

$$\begin{aligned} W_{y,h} \cdot \sigma_{a,h} &= \frac{I_y}{z_{\max,h}} \cdot \sigma_{a,h} = \frac{288.1025 \cdot a^4}{5.15 \cdot a} \cdot \sigma_{a,h} = 55.9 \cdot a^3 \cdot \sigma_{a,h}, \\ W_{y,ny} \cdot \sigma_{a,ny} &= \frac{I_y}{z_{\max,ny}} \cdot \sigma_{a,ny} = \frac{288.1025 \cdot a^4}{2.85 \cdot a} \cdot \sigma_{a,ny} = 101.1 \cdot a^3 \cdot \sigma_{a,ny}, \\ M_{y\text{ cap}}^+ &= \min(55.9 \cdot a^3 \cdot \sigma_{a,h}, 101.1 \cdot a^3 \cdot \sigma_{a,ny}). \end{aligned} \quad (6.25)$$

A negatív M_y hajlítónyomaték viszont az ábra bal oldali részét húzza, ekkor $z_{\max,h} = 2.85 \cdot a$ és $z_{\max,ny} = 5.15 \cdot a$, tehát a húzott és nyomott oldalakra számított szilárdsági moduluszok felcserélődnek:

$$\begin{aligned} W_{y,ny} \cdot \sigma_{a,ny} &= \frac{I_y}{z_{\max,ny}} \cdot \sigma_{a,ny} = \frac{288.1025 \cdot a^4}{5.15 \cdot a} \cdot \sigma_{a,ny} = 55.9 \cdot a^3 \cdot \sigma_{a,ny}, \\ W_{y,h} \cdot \sigma_{a,h} &= \frac{I_y}{z_{\max,h}} \cdot \sigma_{a,h} = \frac{288.1025 \cdot a^4}{2.85 \cdot a} \cdot \sigma_{a,h} = 101.1 \cdot a^3 \cdot \sigma_{a,h}, \\ M_{y\text{ cap}}^- &= \min(55.9 \cdot a^3 \cdot \sigma_{a,ny}, 101.1 \cdot a^3 \cdot \sigma_{a,h}). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Általában $M_{y\text{ cap}}^+ \neq M_{y\text{ cap}}^-$, és ha a hajlítás irányától független teherbíró képességet szeretnénk megadni, akkor a két érték közül a kisebbiket kell elfogadnunk:

$$M_{y\text{ cap}} = \min(M_{y\text{ cap}}^+, M_{y\text{ cap}}^-). \quad (6.27)$$

Öntöttvasra például $\sigma_{a,ny} = c \cdot \sigma_{a,h}$, ahol $c = 2 \dots 5$, az öntvény anyagától függően. Fogadjuk most el a $c = 2.5$ -ös értéket: ezzel $M_{y\text{ cap}}^+ = 55.9 \cdot a^3 \cdot \sigma_{a,h}$, $M_{y\text{ cap}}^- = 101.1 \cdot a^3 \cdot \sigma_{a,h}$, tehát negatív előjelű igénybevételre a rúd sokkal ellenállóbb, mint pozitív előjelűre.

6.1.2. A hajlítás következtében fellépő alakváltozás

A hajlító-nyomatékkal terhelt rúd tengelye a terhelést követően meggörbül, a rúd tengelyének a pontjai elmozdulnak, a keresztmetszetek pedig elfordulnak.

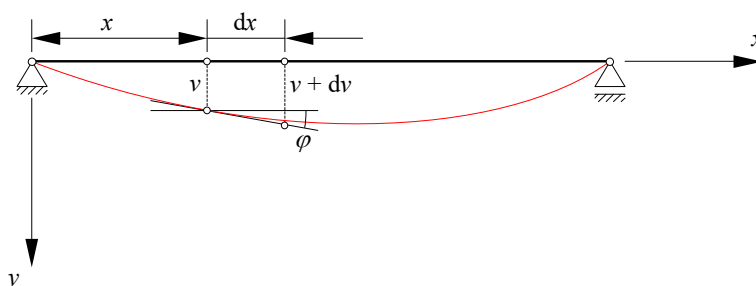
Tételezzük fel, hogy e pontok csak függőleges irányban, az y tengely irányában mozognak el és ezt az elmozdulást jelöljük v -vel: ez a rúd *lehajlása* következtében létrejövő elmozdulás.

A tengelyre merőleges sík keresztmetszet elfordulásának a szöge és a meggörbült tengelyhez húzott érintőnek a vízszintessel bezárt φ szöge, a merőleges szárú szögek tétele alapján azonos.

Mindkét mennyiséget egy-egy függvény írja le, az x koordináta függvényeként. A 6.8. ábra értelmében közöttük egy összefüggés írható fel, ugyanis

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{(v + dv) - v}{dx} \Rightarrow \varphi = \frac{dv}{dx}, \quad (6.28)$$

mivel az elfordulás szöge a kis alakváltozások hipotézisében kellőképpen kicsi.



6.8. ábra. A hajlított rúd alakváltozása

Egy $y = f(x)$ függvény görbületét az ismert $\kappa = \frac{y''}{\sqrt{[1 + (y')^2]^3}}$ összefüggés adja. A jelöléseinkkel, mivel a görbület a görbületi sugár inverze és mivel $dv/dx = \varphi \ll 1$,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v/dx^2}{\sqrt{[1 + (dv/dx)^2]^3}} \approx \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx}. \quad (6.29)$$

A 6.5. összefüggés alapján a tengely görbülete

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E \cdot I_z}, \quad (6.30)$$

az utóbbi két képletet kombinálva pedig

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M_z}{E \cdot I_z}, \quad (6.31)$$

ahol a negatív előjel az M_z hajlító igénybevétel előjeléhez való igazodás miatt szükséges. Ez utóbbi két differenciál-egyenletet jelent, amelyet integrálva a lehajláshoz, illetve az elfordulás szögéhez jutunk:

$$\varphi(x) = -\int \frac{M_z(x)}{E \cdot I_z} dx + c_1, \quad (6.32)$$

$$v(x) = \int \varphi(x) dx + c_2, \quad (6.33)$$

ahol $M_z(x)$ az igénybevételi függvény, a c_1 és c_2 integrálási konstansokat pedig a peremfeltételekből tudjuk megállapítani.

6.4. példa. Nyomatékkal terhelt mereven befogott rúd alakváltozása

Legyen a 6.1. ábra bal oldalán látható rúd: ennek az igénybevételi függvénye az $M_z(x) = M$ konstans-függvény. Feltételezvé, hogy az $E \cdot I_z$ szorzat a rúd hosszában állandó,

$$\varphi(x) = -\int \frac{M_z(x)}{E \cdot I_z} dx + c_1 = -\frac{M}{E \cdot I_z} \cdot x + c_1, \quad (6.34)$$

$$v(x) = \int \varphi(x) dx + c_2 = \int \left(-\frac{M}{E \cdot I_z} \cdot x + c_1 \right) dx + c_2 = -\frac{M}{2 \cdot E \cdot I_z} \cdot x^2 + c_1 \cdot x + c_2. \quad (6.35)$$

A merev befogásnál, ahol $x = 0$, a rúd kényszerei nem teszik lehetővé sem a keresztmetszet elfordulását, sem a rúd lehajlását:

$$\varphi(0) = c_1 = 0, \quad (6.36)$$

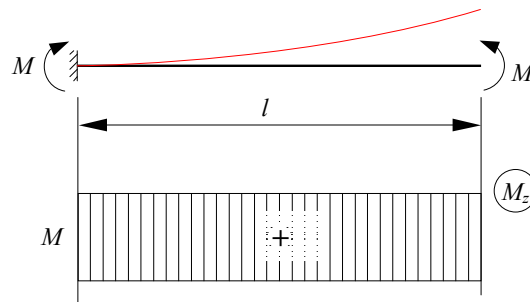
$$v(0) = c_2 = 0. \quad (6.37)$$

Tehát az elfordulás szögét, illetve a lehajlást adó függvények ez esetben:

$$\varphi(x) = -\frac{M}{E \cdot I_z} \cdot x, \quad (6.38)$$

$$v(x) = -\frac{M}{2 \cdot E \cdot I_z} \cdot x^2. \quad (6.39)$$

A $v(x)$ függvény ábrázolásával a rúd tengelyének meggörbült alakját kapjuk, amely ez esetben egy parabolaív és amely a 6.9. ábrán látható.



6.9. ábra. Mereven befogott hajlított rúd alakváltozása

A rúd szabad végének az elmozdulása, $x = l$ behelyettesítésével

$$v(l) = -\frac{M \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I_z}, \quad (6.40)$$

az elfordulása pedig

$$\varphi(l) = -\frac{M \cdot l}{E \cdot I_z}. \quad (6.41)$$

Amennyiben a

$$k = \frac{E \cdot I_z}{l} \quad (6.42)$$

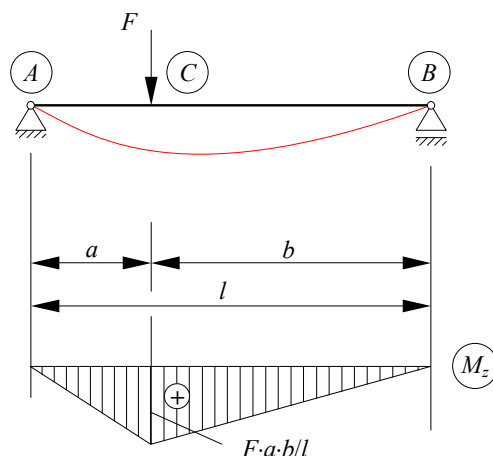
mennyiséget a prizmatikus rúd z tengely körüli hajlítással szembeni merevségének tekintjük, az állandó hajlító-igénybevételű rúd két végének relatív elfordulását (pontosabban: annak nagyságát)

$$\varphi = \frac{M_z}{k} \quad (6.43)$$

formában adhatjuk meg. Észrevehetjük, hogy az utóbbi három összefüggés analóg a húzó és a nyíró igénybevételnél megállapítottakkal (4.5, 4.6, 5.6, 5.7).

6.5. példa. Koncentrált erővel terhelt kéttámaszú rúd alakváltozása

Vegyük a 2.1, 2.18. feladatokban szereplő kéttámaszú rudat, amelyet egy koncentrált erő terhel (6.10. ábra).



6.10. ábra. Kéttámaszú hajlított rúd alakváltozása

Az igénybevételi függvényeket szakaszonként határoztuk meg:

$$AC, x \in [0, a): \quad M_z(x) = F \cdot \frac{b}{l} \cdot x, \quad (6.44)$$

$$CB, x \in [a, l]: \quad M_z(x) = F \cdot a - F \cdot \frac{a}{l} \cdot x.$$

Ennek következtében az alakváltozásokat is csak szakaszonként tudjuk megadni:

$$AC, x \in [0, a): \quad \begin{cases} \varphi(x) = -\int \frac{M_z(x)}{E \cdot I_z} dx + c_{11} = -\frac{F \cdot b}{2 \cdot l \cdot E \cdot I_z} \cdot x^2 + c_{11}, \\ v(x) = \int \varphi(x) dx + c_{12} = -\frac{F \cdot b}{6 \cdot l \cdot E \cdot I_z} \cdot x^3 + c_{11} \cdot x + c_{12}, \end{cases} \quad (6.45)$$

$$CB, x \in [a, l]: \quad \begin{cases} \varphi(x) = -\int \frac{M_z(x)}{E \cdot I_z} dx + c_{21} = \frac{F \cdot a}{2 \cdot l \cdot E \cdot I_z} \cdot x^2 - \frac{F \cdot a}{E \cdot I_z} \cdot x + c_{21}, \\ v(x) = \int \varphi(x) dx + c_{22} = \frac{F \cdot a}{6 \cdot l \cdot E \cdot I_z} \cdot x^3 - \frac{F \cdot a}{2 \cdot E \cdot I_z} \cdot x^2 + c_{21} \cdot x + c_{22}. \end{cases}$$

Ilyen módon négy integrálási konstans kell meghatározni, szakaszonként kettőt. Ehhez négy feltétel kell. Felhasználjuk a geometriai kényszereket: a csukló, illetve a támasz meggátolja a rúd

lehajlását (de az elfordulását nem) – ezek a peremfeltételek –, az alakváltozást adó függvényeknek meg folytonosnak kell lenniük, hiszen a rúd nem törik meg (φ folytonos a C pontban) és nem törik el (v is folytonos a C pontban) – ezek pedig folytonossági feltételek –, tehát:

$$\begin{aligned} v(0) &= 0, \\ v(l) &= 0, \\ \varphi^{AC}(a) &= \varphi^{CB}(a), \\ v^{AC}(a) &= v^{CB}(a). \end{aligned} \quad (6.46)$$

A számítások áttekinthetősége végett a 6.45. függvényeket a következőképpen írjuk át:

$$\begin{aligned} AC, x \in [0, a): & \begin{cases} \varphi(x) = k_1 \cdot x^2 + c_{11}, \\ v(x) = k_2 \cdot x^3 + c_{11} \cdot x + c_{12}, \end{cases} \\ CB, x \in [a, l]: & \begin{cases} \varphi(x) = k_3 \cdot x^2 + k_4 \cdot x + c_{21}, \\ v(x) = k_5 \cdot x^3 + k_6 \cdot x^2 + c_{21} \cdot x + c_{22}. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.47)$$

Ekkor a peremfeltételek és a folytonossági feltételek a következőképpen fognak kinézni:

$$\begin{aligned} v(0) = 0 & \Rightarrow c_{12} = 0, \\ v(l) = 0 & \Rightarrow k_5 \cdot l^3 + k_6 \cdot l^2 + c_{21} \cdot l + c_{22} = 0, \\ \varphi^{AC}(a) = \varphi^{CB}(a) & \Rightarrow k_1 \cdot a^2 + c_{11} = k_3 \cdot a^2 + k_4 \cdot a + c_{21}, \\ v^{AC}(a) = v^{CB}(a) & \Rightarrow k_2 \cdot a^3 + c_{11} \cdot a + c_{12} = k_5 \cdot a^3 + k_6 \cdot a^2 + c_{21} \cdot a + c_{22}, \end{aligned} \quad (6.48)$$

a konstansokat tehát egy lineáris egyenletrendszer megoldásával tudjuk meghatározni, a módszer tehát még egy egyszerű terhelési esetben is munkaigényesnek bizonyul. A megoldáshoz a második egyenletből

$$c_{22} = -k_5 \cdot l^3 - k_6 \cdot l^2 - c_{21} \cdot l, \quad (6.49)$$

amivel az utolsó két egyenlet:

$$\begin{aligned} k_1 \cdot a^2 + c_{11} &= k_3 \cdot a^2 + k_4 \cdot a + c_{21}, \\ k_2 \cdot a^3 + c_{11} \cdot a &= k_5 \cdot a^3 + k_6 \cdot a^2 - k_5 \cdot l^3 - k_6 \cdot l^2 + c_{21} \cdot (a - l). \end{aligned} \quad (6.50)$$

Ezek közül az elsőt $-a$ -val végigszorozva és a kettőt összeadva kapjuk:

$$(k_2 - k_1) \cdot a^3 = (k_5 - k_3) \cdot a^3 + (k_6 - k_4) \cdot a^2 - k_5 \cdot l^3 - k_6 \cdot l^2 - c_{21} \cdot l, \quad (6.51)$$

ahonnan

$$c_{21} = (k_5 - k_3 - k_2 + k_1) \cdot \frac{a^3}{l} + (k_6 - k_4) \cdot \frac{a^2}{l} - k_5 \cdot l^2 - k_6 \cdot l. \quad (6.52)$$

Ezt a 6.50. első egyenletébe visszahelyettesítve

$$c_{11} = (k_3 - k_1) \cdot a^2 + k_4 \cdot a + (k_5 - k_3 - k_2 + k_1) \cdot \frac{a^3}{l} + (k_6 - k_4) \cdot \frac{a^2}{l} - k_5 \cdot l^2 - k_6 \cdot l, \quad (6.53)$$

és végül, a 6.49. összefüggéssel

$$c_{22} = -(k_5 - k_3 - k_2 + k_1) \cdot a^3 - (k_6 - k_4) \cdot a^2. \quad (6.54)$$

A $k_1 \dots k_6$ együtthatókat a 6.47. és a 6.48. egyenletek egybevetésével azonosíthatjuk, s azokat behelyettesítve kapjuk:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{a \cdot (a^2 + 2 \cdot l^2 - 3 \cdot l \cdot a)}{6 \cdot l} \cdot \frac{F}{E \cdot I_z}, & c_{12} &= 0, \\ c_{21} &= \frac{a \cdot (a^2 + 2 \cdot l^2)}{6 \cdot l} \cdot \frac{F}{E \cdot I_z}, & c_{22} &= -\frac{a^3}{6} \cdot \frac{F}{E \cdot I_z}. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Ezekkel az integrálási konstansokkal az alakváltozást leíró függvények tehát a következők, x különböző hatványait tartalmazó polinomok lesznek:

$$\begin{aligned} AC, x \in [0, a]: & \begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{2 \cdot l} \cdot \left[\frac{a \cdot (a^2 + 2 \cdot l^2 - 3 \cdot l \cdot a)}{3} - b \cdot x^2 \right] \cdot \frac{F}{E \cdot I_z}, \\ v(x) = \frac{1}{6 \cdot l} \cdot \left[a \cdot (a^2 + 2 \cdot l^2 - 3 \cdot l \cdot a) \cdot x - b \cdot x^3 \right] \cdot \frac{F}{E \cdot I_z}, \end{cases} \\ CB, x \in [a, l]: & \begin{cases} \varphi(x) = \left[\frac{a \cdot (a^2 + 2 \cdot l^2)}{6 \cdot l} - a \cdot x + \frac{a}{2 \cdot l} \cdot x^2 \right] \cdot \frac{F}{E \cdot I_z}, \\ v(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{a^3}{3} + \frac{a \cdot (a^2 + 2 \cdot l^2)}{3 \cdot l} \cdot x - a \cdot x^2 + \frac{a}{3 \cdot l} \cdot x^3 \right] \cdot \frac{F}{E \cdot I_z}. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.56)$$

Amennyiben a legnagyobb lehajlást keressük, a $v(x)$ függvény szélsőértékeit kell meghatároznunk. Azok helyét a $dv(x)/dx = \varphi(x) = 0$ feltételből lehet meghatározni: a 6.56. megfelelő függvényeinek a szögletes zárójelét egyenlővé kell tenni zéróval, s ha ezeknek az egyenleteknek van az illető függvény értelmezési tartományára eső gyöke, a szélsőértéket abban a pontban kell kiszámítani. Mivel képlettel ez bonyolult lenne, lássuk az $a = 0.25 \cdot l$ esetet. Ekkor $b = l - a = 0.75 \cdot l$, a lehajlás szélsőértékeinek helyéhez vezető egyenletek pedig a következők lesznek: az AC , $x \in [0, 0.25 \cdot l)$ szakaszon

$$\begin{aligned} \frac{a \cdot (a^2 + 2 \cdot l^2 - 3 \cdot l \cdot a)}{3} - b \cdot x^2 &= 0, \\ \frac{0.25 \cdot (0.25^2 + 2 - 3 \cdot 0.25)}{3} \cdot l^3 - 0.75 \cdot l \cdot x^2 &= 0, \\ 0.145833 \cdot l^2 - x^2 &= 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 0.38 \cdot l, \end{aligned}$$

a CB , $x \in [0.25 \cdot l, l]$ szakaszon pedig

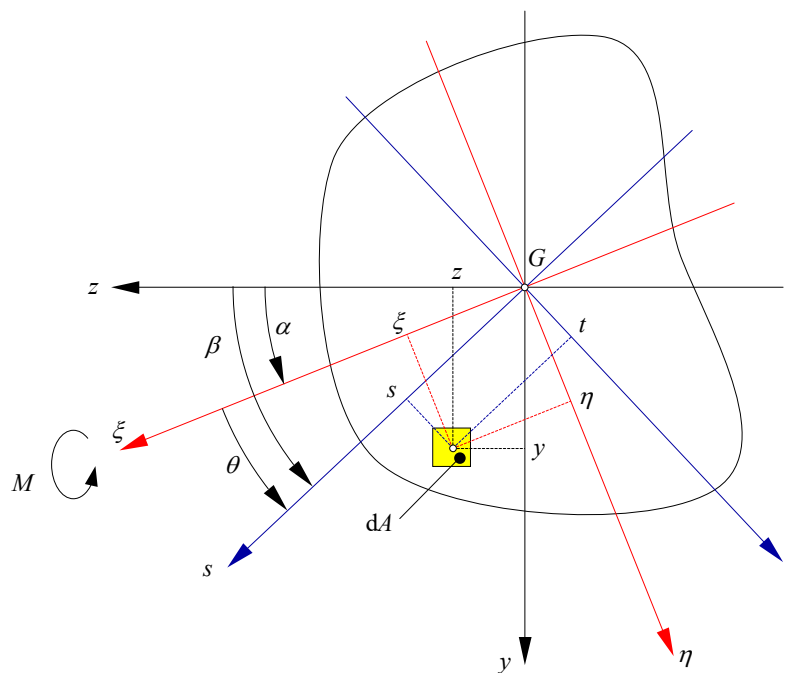
$$\begin{aligned} \frac{a \cdot (a^2 + 2 \cdot l^2)}{6 \cdot l} - a \cdot x + \frac{a}{2 \cdot l} \cdot x^2 &= 0, \\ \frac{0.25 \cdot (0.25^2 + 2)}{6} \cdot l^2 - 0.25 \cdot l \cdot x + \frac{0.25}{2} \cdot x^2 &= 0, \\ 0.0859375 \cdot l^2 - 0.25 \cdot l \cdot x + 0.125 \cdot x^2 &= 0, \\ 0.6875 \cdot l^2 - 2 \cdot l \cdot x + x^2 = 0 &\Rightarrow x_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 0.6875}}{2} \cdot l = \frac{2 \pm 1.12}{2} \cdot l, \\ x_3 = 1.56 \cdot l, \quad x_4 = 0.44 \cdot l. & \end{aligned}$$

Az egyedüli lehetséges megoldás az $x_4 = 0.44 \cdot l$ koordináta: ezt az értéket pedig a $v(x)$ lehajlás CB szakaszon értelmezett függvényébe behelyettesítve kapjuk a rúd legnagyobb lehajlását.

Következtetésképpen elmondhatjuk, hogy az alakváltozást leíró függvényeket elméletileg egyszerű összefüggések adják, azonban az elméletnek a gyakorlatba ültetése nehézségekbe ütközhet: ha a hajlító igénybevételt leíró függvényt n szakaszon értelmezzük, akkor az integrálási együtthatók meghatározásához felírt lineáris egyenletrendszer $2 \cdot n$ egyenletet tartalmaz, ami az analitikus számításokat megnehezíti vagy lehetetlenné teszi. A nehézségek elkerülésének az egyik módszere az egymásra-halmozás elvének az alkalmazása: a rúd terhelését elemeire bontjuk, azokra a $\varphi_i(x)$ és a $v_i(x)$ függvényeket külön-külön kiszámítjuk – így elkerülhetjük a nagyobb méretű egyenletrendszerek megoldását. A teljes terhelés által okozott alakváltozás e függvények összege lesz: $\varphi(x) = \sum_i \varphi_i(x)$, $v(x) = \sum_i v_i(x)$.

6.1.3. Ferde hajlítás

A 6.1.1. fejezetben ismertetettek szerint az egyenes hajlítás feltétele a valamely főirány körüli hajlítás. Ha ez nem teljesül, akkor a hajlítás ferde lesz. Ha a Bernoulli-hipotézist elfogadjuk, akkor továbbra is érvényes marad az a megállapítás, hogy a rúd tengelyére merőleges párhuzamos síkok egymáshoz viszonyított elfordulása miatt azok egy egyenes mentén metszik egymást, a fajlagos alakváltozások pedig erre az egyenesre merőleges irányban lineáris változást mutatnak. Ez az egyenes, és ennek következtében a semleges tengely iránya, nem párhuzamos a hajlítás tengelyével, a kihajlás tehát nem a hajlítás tengelyére merőleges síkban lép fel: emiatt ezt az esetet *ferde hajlítás*nak nevezik. Ezt az esetet mutatja a 6.11. ábra.



6.11. ábra. Ferde hajlítás

Az ábrán az y és a z tengelyek a keresztmetszet főirányainak felelnek meg, G a keresztmetszet geometriai középpontja. Az M hajlító-nyomaték a ξ tengely körül forgat. A ferde

kihajlás miatt a keresztmetszet az s tengely körül fordul el. Emiatt az ε fajlagos alakváltozás (s azzal együtt a σ feszültség) az s tengellyel párhuzamos vonalak mentén állandó és a t tengely mentén pedig lineárisan változik, valamilyen

$$\varepsilon = a + b \cdot t \quad (6.57)$$

törvény szerint.

Az $N = 0$ egyensúlyi feltételt felírván (egyenes hajlításra ezt az 6.3. összefüggés jelentette) az

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma \, dA = \int_A E \cdot \varepsilon \, dA = E \cdot \int_A (a + b \cdot t) \, dA = E \cdot \left(a \cdot \int_A dA + b \cdot \int_A t \, dA \right) = \\ &= E \cdot (a \cdot A + b \cdot S_s) = a \cdot E \cdot A = 0 \end{aligned} \quad (6.58)$$

relációhoz jutunk, ahol az S_s elsőrendű nyomaték nulla, mivel az s tengely a G geometriai középponton megy keresztül. Innen tehát $a = 0$, a 6.57. alapján pedig ε és σ a t koordinátával egyenesen arányos mennyiségek lesznek, s -et pedig a keresztmetszet semleges tengelyeként azonosíthatjuk. A rúd x tengelye a ferde hajlítás esetében is semleges síkban van. A b paraméter ez esetben is a rúd tengelyének görbülete. Ekkor:

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho} \cdot t, \quad (6.59)$$

$$\sigma = \frac{E}{\rho} \cdot t. \quad (6.60)$$

A hajlító-nyomaték a ξ tengely körül hat, tehát a keresztmetszeten fellépő feszültségnek erre a tengelyre vonatkoztatott nyomatéka $M_\xi = M$ kell legyen, az η tengelyre nézve pedig $M_\eta = 0$:

$$M_\xi = \int_A \eta \cdot \sigma \, dA = M, \quad (6.61)$$

$$M_\eta = \int_A \xi \cdot \sigma \, dA = 0. \quad (6.62)$$

E képletek kifejtéséhez a feszültséget adó 6.60. függvényt, amely az st koordináta-rendszerben érvényes, át kell írunk a $\xi\eta$ koordináta-rendszerre. Ha az elforgatás pozitív iránya az ábrán feltüntetett irány, akkor a 3.25. koordináta-transzformációt a következőképpen írhatjuk át:

$$\begin{aligned} s &= z \cdot \cos \beta + y \cdot \sin \beta, \\ t &= -z \cdot \sin \beta + y \cdot \cos \beta, \end{aligned} \quad (6.63)$$

$$\begin{aligned} \xi &= z \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha, \\ \eta &= -z \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Az egyensúlyi feltételek tehát a következők lesznek:

$$\begin{aligned} M_\xi &= \int_A \eta \cdot \sigma \, dA = \frac{E}{\rho} \cdot \int_A \eta \cdot t \, dA = \\ &= \frac{E}{\rho} \cdot \int_A (-z \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha) \cdot (-z \cdot \sin \beta + y \cdot \cos \beta) \, dA = \end{aligned}$$

$$= \frac{E}{\rho} \cdot \int_A [z^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta + y^2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta - y \cdot z \cdot (\sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha)] dA = \quad (6.65)$$

$$= \frac{E}{\rho} \cdot [I_y \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta + I_z \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta - I_{yz} \cdot (\sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha)] =$$

$$= \frac{E}{\rho} \cdot (I_y \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta + I_z \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta) = M,$$

$$M_\eta = \int_A \xi \cdot \sigma dA = \frac{E}{\rho} \cdot \int_A \xi \cdot t dA =$$

$$= \frac{E}{\rho} \cdot \int_A (z \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha) \cdot (-z \cdot \sin \beta + y \cdot \cos \beta) dA =$$

$$= \frac{E}{\rho} \cdot \int_A [-z^2 \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha + y^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta - y \cdot z \cdot (\sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \cos \beta)] dA = \quad (6.66)$$

$$= \frac{E}{\rho} \cdot [-I_y \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha + I_z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta - I_{yz} \cdot (\sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \cos \beta)] =$$

$$= \frac{E}{\rho} \cdot (-I_y \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha + I_z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta) = 0$$

ahol $I_{yz} = 0$, mivel z és y főirányok. E feltételekkel tehát egy egyenletrendszert alkothatunk, ahol az ismeretlenek a semleges tengely helyzetét megadó β szög és a rúd tengelyének $\kappa = 1/\rho$ görbülete:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \cdot (I_y \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta + I_z \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta) = \frac{M}{E}, \\ I_y \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha - I_z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta = 0. \end{cases} \quad (6.67)$$

Ha a második egyenletet végigosztjuk a $\sin \alpha \cdot \cos \beta$ szorzattal, akkor rendezés után a β szöget adó

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I_z}{I_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (6.68)$$

képlethez jutunk. Eszerint, ha $I_z \neq I_y$ (mivel y és z főirányok: ha $I_1 \neq I_2$), vagy $\operatorname{tg} \alpha \neq 0$ és $\operatorname{tg} \alpha \neq \pm\infty$, akkor a semleges tengely egy $\theta = \beta - \alpha \neq 0$ szöget fog bezárni a hajlítás tengelyével. Az $I_1 = I_2$ egyenlőség egyébként azt eredményezi, hogy minden irány főirány, tehát bármilyen tengely körüli hajlítás egyenes hajlítás. $\operatorname{tg} \alpha$ nulla vagy végtelen értéke a z , illetve az y tengelyek, vagyis a fő tengelyek körüli hajlítást jelenti. Következésképpen: a hajlítás akkor egyenes, ha a fő tengelyek körül hajlítunk, ellenkező esetben mindig ferde.

A $\sin \beta = \operatorname{tg} \beta / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}$, $\cos \beta = 1 / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}$ trigonometriai azonosságok és a szögek tangensei közötti 6.68. képlet felhasználásával az egyenletrendszer első egyenletének a zárójele a következőképpen alakítható tovább:

$$\begin{aligned}
I_y \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta + I_z \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{I_y \cdot \sin \alpha \cdot \frac{I_z}{I_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \left(\frac{I_z}{I_y}\right)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}} + \frac{I_z \cdot \cos \alpha}{\sqrt{1 + \left(\frac{I_z}{I_y}\right)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \\
&= \frac{I_z \cdot \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \cos \alpha\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{I_z}{I_y}\right)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{I_z \cdot \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha}}{\sqrt{1 + \left(\frac{I_z}{I_y}\right)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{I_z}{\cos \alpha \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{I_z}{I_y}\right)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}}. \quad (6.69)
\end{aligned}$$

A görbület tehát:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I_z} \cdot \cos \alpha \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{I_z}{I_y}\right)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad (6.70)$$

amelyet a 6.60. képletbe behelyettesítve megkapjuk σ -t az st koordináta-rendszerben leíró függvényt. A feszültség szélsőértékeit a keresztmetszetnek az s tengelytől legtávolabb eső pontjaiban kapjuk. Amennyiben a feszültségeket a zy vagy a $\xi\eta$ koordináta-rendszer tengelyei szerelnénk megadni, akkor ismét a koordináta-transzformációkat kell alkalmaznunk.

6.1.4. A ferde hajlítás, mint összetett igénybevétel

Az egyenes hajlítás feltétele a főirány körüli hajlítás: ha a hajlítás tengelye nem főirány, akkor a hajlítás ferde lesz. Ezt az észrevételt a ferde hajlítás egyszerűbb tárgyalásához is felhasználhatjuk: a hajlító-nyomaték egy vektoriális mennyiség, amelynek a tartóegyense a hajlítás tengelye. Ezt a vektort, mint bármely vektort, összetevőkre bonthatjuk, így meghatározhatjuk a hajlító-nyomaték főirányokra eső összetevőit. Ezek az összetevők külön-külön egyenesen hajlítanak, mivel főirányok körül forgatnak. Az egymásra-halmazás elvének alkalmazásával a ferde hajlítás tehát két egyenes hajlítás összetételeként jön létre, összetett igénybevételként. Az igénybevétel összetettsége azonban nem okoz különösebb problémát, hiszen mindkét összetevőből a rúd keresztmetszetére merőleges σ feszültség keletkezik, amelyek eredőjét egyszerű összegzéssel kapjuk (6.12. ábra).

Navier képletét alkalmazva, a z tengely körüli hajlításból származó feszültség-összetevő

$$\sigma^{M_z}(y) = \frac{M_z}{I_z} \cdot y, \quad (6.71)$$

az y tengely körüli hajlításból származó pedig

$$\sigma^{M_y}(z) = -\frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad (6.72)$$

(az előjel a nyomaték és az általa okozott feszültség egyezményes előjeleinek összehangolása miatt szükséges).

A keresztmetszet valamely $P(y, z)$ pontjában a ferde hajlításból származó feszültséget tehát a két összetevővel a

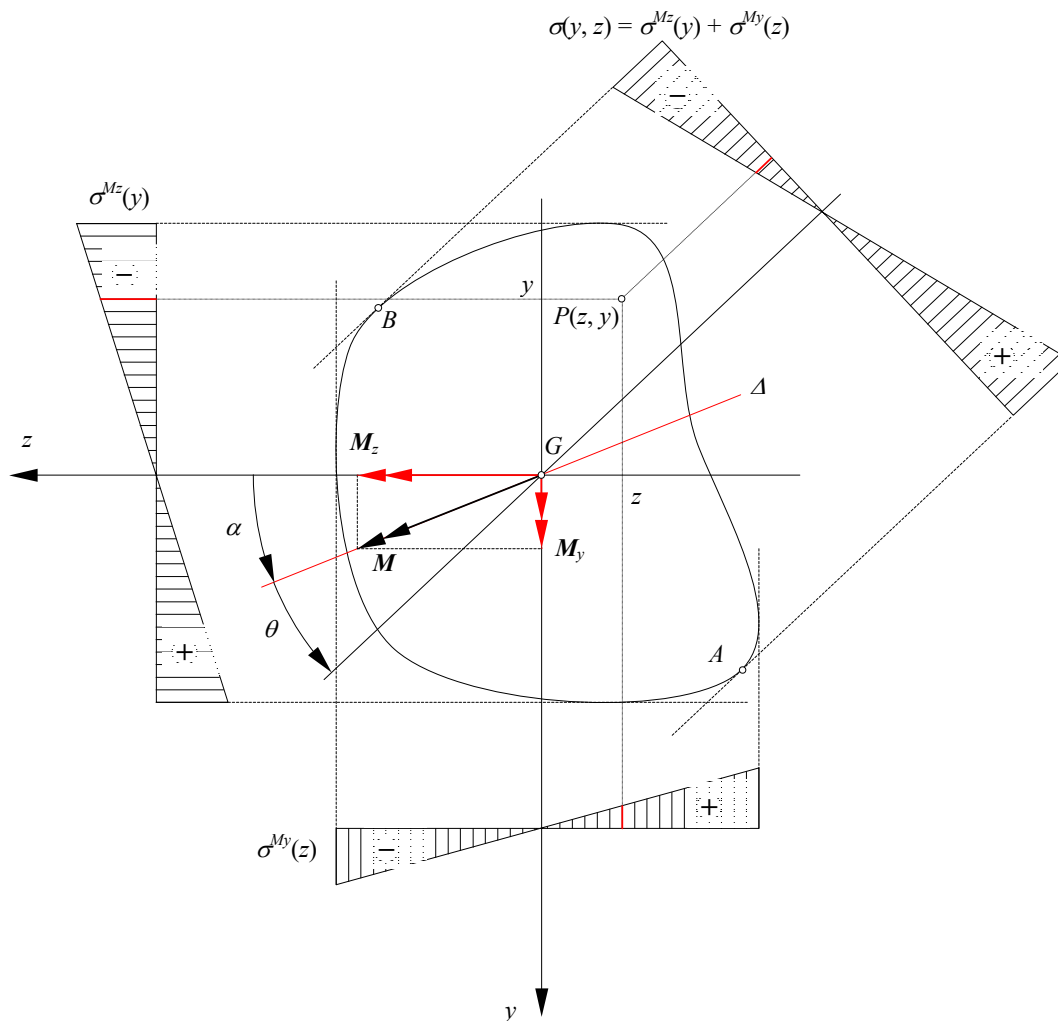
$$\sigma(y, z) = \sigma^{M_z}(y) + \sigma^{M_y}(z) = \frac{M_z}{I_z} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad (6.73)$$

összeg adja, a feszültség tehát a két koordináta lineáris függvénye lesz. Az ábra jelölései szerint

$$\begin{aligned} M_z &= M \cdot \cos \alpha, \\ M_y &= M \cdot \sin \alpha, \end{aligned} \quad (6.74)$$

az előbbi képlet pedig a következőképpen alakítható tovább:

$$\sigma(y, z) = M \cdot \left(\frac{y \cdot \cos \alpha}{I_z} - \frac{z \cdot \sin \alpha}{I_y} \right). \quad (6.75)$$



6.12. ábra. Ferde hajlítás, mint összetett igénybevétel

A feszültséget adó képletet aránylag könnyen meghatároztuk, azonban a feszültség szélsőértékeinek megállapítása már egy nehezebb feladat. Tévedés lenne azt gondolnunk, hogy σ legnagyobb és legkisebb értékét a tengelyek körüli hajlításból, a 6.71. és a 6.72. képletekkel meghatározható szélsőértékek összegeként kaphatjuk meg. Ezek a szélsőértékek a keresztmetszetet befogadó, a tengelyekkel párhuzamos oldalakkal megrajzolt téglalap sarkaiban jelennének meg, ezek a pontok pedig csak sajátos esetekben tartoznak a keresztmetszethez.

A $\sigma(y, z) = 0$ egyenlet a semleges tengely egyenletéhez vezet:

$$\frac{M_z}{I_z} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot z = 0 \Rightarrow y = \frac{I_z}{I_y} \cdot \frac{M_y}{M_z} \cdot z = \frac{I_z}{I_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot z = \operatorname{tg} \beta \cdot z, \quad (6.76)$$

a z tengelyhez viszonyított dőlését a 6.68. képlet adja.

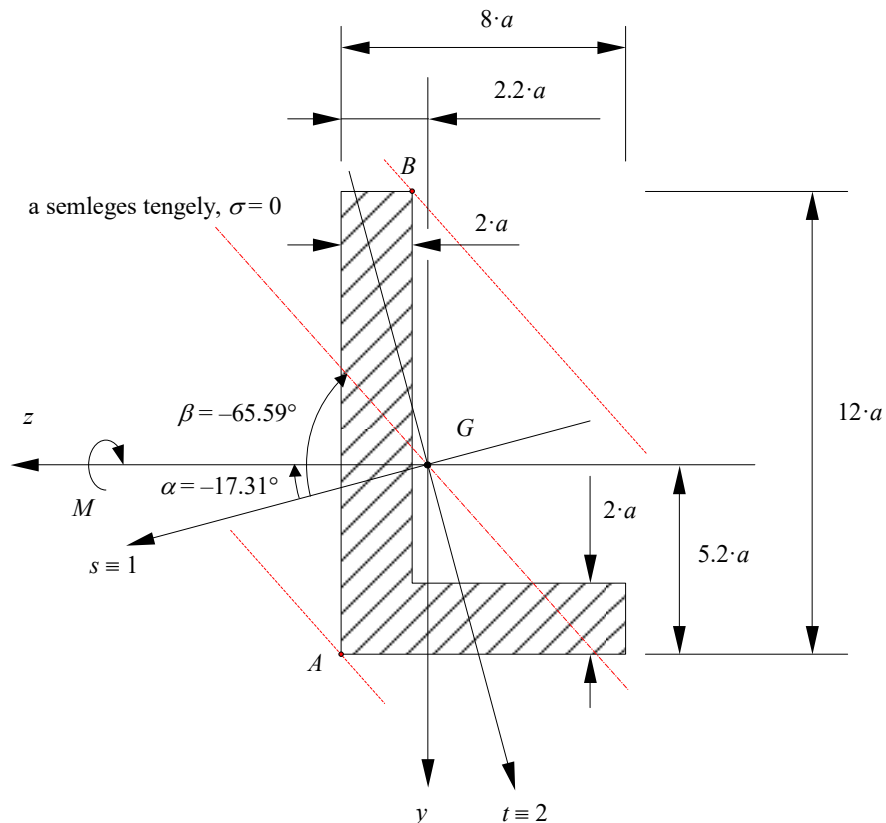
Az állandó feszültséget adó $\sigma(y, z) = k$ egyenletből az következik, hogy a feszültség a semleges tengellyel párhuzamos egyenes vonalak mentén állandó, ugyanis ezek meredeksége azonos a semleges tengely meredekségével. Ezek a vonalak a $\sigma(y, z)$ függvény nivógörbéi.

A függvény $\operatorname{grad} \sigma(y, z)$ gradiensvektora a legnagyobb változás irányába mutat és a nivógörbére merőleges: ebből az következik, hogy a feszültség a semleges tengelyre merőleges irányban változik a legnagyobb mértékben.

Következésképpen a feszültség legnagyobb pozitív és legkisebb negatív értékét a keresztmetszet körvonalához a semleges tengellyel párhuzamosan húzott legtávolabbi érintők mentén kapjuk, az ábránkon az A és a B pontokban. A feszültség szélsőértékeinek meghatározásához először meg kell állapítanunk e pontok koordinátáit, majd ezeket a 6.73. képletbe behelyettesítve kiszámíthatjuk a keresett szélsőértékeket.

6.6. példa. Ferde hajlítás

Hajlítsuk a 3.21. feladatban szereplő, a 6.13. ábrán látható keresztmetszettel rendelkező rudat a vízszintes (az ábrán z -vel jelölt) tengely körül!



6.13. ábra. Hajlítás egy tetszőleges tengely körül

A hajlítás tengelye nem főtengely, emiatt az ferde lesz. A feladat megoldásához az M nyomatékot levetítjük a főtengelyekre. Ahhoz, hogy a koordináták jelölésében ne legyen zavar, a főtengelyeket „ s ”-sel és „ t ”-vel jelöljük, az első főtengely és a z koordináta-tengely közötti α szög előjele pedig a tengelyek elrendezése miatt lesz negatív:

$$\begin{aligned} M_s &= M \cdot \cos \alpha, \\ M_t &= M \cdot \sin \alpha. \end{aligned} \quad (6.77)$$

E két összetevő, külön-külön, egyenesen hajlít, tehát a keresztmetszeten fellépő feszültség összetevőit a következőképpen határozhatjuk meg:

$$\sigma(s, t) = M \cdot \left(\frac{t \cdot \cos \alpha}{I_s} - \frac{s \cdot \sin \alpha}{I_t} \right), \quad (6.78)$$

ahol $I_s = 826.5664 \cdot a^4$ és $I_t = 116.9002 \cdot a^4$ a 3.21. feladatban kiszámolt első, illetve második főérték, $\alpha = 17.31^\circ$. A $\sigma(s, t) = 0$ egyenlőségből a semleges tengely egyenlete:

$$t = \frac{I_s}{I_t} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot s = \frac{826.5664 \cdot a^4}{116.9002 \cdot a^4} \cdot \operatorname{tg}(-17.31^\circ) \cdot s = -2.20363 \cdot s. \quad (6.79)$$

Innen a semleges tengely dőlése az s tengelyhez viszonyítva $\operatorname{tg} \beta = -2.20363 \Rightarrow \beta = -65.59^\circ$.

A semleges tengellyel húzott párhuzamos egyenesek az A , illetve a B pontban érintik e keresztmetszet körvonalát. Ha a hajlító igénybevétel pozitív előjelű, akkor a legnagyobb nyújtófeszültség (pozitív σ) az A , a legkisebb nyomófeszültség (negatív σ) a B pontban fog megjelenni. Ezek kiszámításához szükségünk van e két pont s és t koordinátáira. Ezeket ugyan nem ismerjük, de a 3.25. relációkkal megadott koordináta-transzformációval ki tudjuk számítani:

$$\begin{aligned} s &= z \cdot \cos(-\alpha) + y \cdot \sin(-\alpha), \\ t &= -z \cdot \sin(-\alpha) + y \cdot \cos(-\alpha). \end{aligned} \quad (6.80)$$

Az A pont koordinátái $z_A = 2.2 \cdot a$, $y_A = 5.2 \cdot a$, a B ponté pedig $z_B = 0.2 \cdot a$, $y_B = -6.8 \cdot a$, tehát

$$\begin{aligned} s_A &= 2.2 \cdot a \cdot \cos 17.31^\circ + 5.2 \cdot a \cdot \sin 17.31^\circ = 3.65 \cdot a, \\ t_A &= -2.2 \cdot a \cdot \sin 17.31^\circ + 5.2 \cdot a \cdot \cos 17.31^\circ = 4.31 \cdot a, \end{aligned} \quad (6.81)$$

és

$$\begin{aligned} s_B &= 0.2 \cdot a \cdot \cos 17.31^\circ - 6.8 \cdot a \cdot \sin 17.31^\circ = -1.83 \cdot a, \\ t_B &= -0.2 \cdot a \cdot \sin 17.31^\circ - 6.8 \cdot a \cdot \cos 17.31^\circ = -6.55 \cdot a, \end{aligned} \quad (6.82)$$

a feszültség keresett szélsőértékei pedig

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \sigma(s_A, t_A) = M \cdot \left(\frac{4.31 \cdot a \cdot \cos(-17.31^\circ)}{826.5664 \cdot a^4} - \frac{3.65 \cdot a \cdot \sin(-17.31^\circ)}{116.9002 \cdot a^4} \right) = \\ &= 0.01427 \cdot \frac{M}{a^3}, \\ \sigma_B &= \sigma(s_B, t_B) = M \cdot \left(\frac{(-6.55 \cdot a) \cdot \cos(-17.31^\circ)}{826.5664 \cdot a^4} - \frac{(-1.83 \cdot a) \cdot \sin(-17.31^\circ)}{116.9002 \cdot a^4} \right) = \\ &= -0.01222 \cdot \frac{M}{a^3}. \end{aligned} \quad (6.83)$$

6.1.5. Az összetett keresztmetszetű rúd hajlítása

Tekintsünk egy, például a 6.14. ábrán látható összetett keresztmetszettel rendelkező prizmatikus rudat: ha azt egy tetszőleges ξ tengely körül forgató hajlító-nyomatékkal terheljük, akkor a fellépő alakváltozást követően a rúd keresztmetszetei el fognak mozdulni az eredeti helyzetükből. Amennyiben fenntartjuk annak a hipotézisnek az érvényességét, amely szerint a terheletlen rúd tengelyére merőleges sík keresztmetszetek az alakváltozás után is síkok és a rúd meggörbült tengelyére merőlegesek maradnak, akkor ez esetben is a keresztmetszeteknek egy bizonyos s tengely körüli elfordulásával kell számolnunk. Ennek következtében most is léteznie kell egy semleges tengelynek, ahol $\varepsilon = 0$ és emiatt a feszültség is nulla: ez az említett s tengely, amellyel párhuzamos vonalak mentén, a keresztmetszet bármely pontjában, az anyag szilárdságtani jellemzőitől függetlenül a fajlagos alakváltozás állandó értékkel rendelkezik. A sík keresztmetszetek elfordulásából az is következik, hogy a semleges tengelyre merőleges t irányban ε a távolsággal arányosan, lineárisan változik, szintén az anyag minőségétől függetlenül. Ezek az észrevételek a homogén keresztmetszetű rúd hajlításakor megállapítottakkal azonosak és azért maradtak érvényesek az összetett keresztmetszet esetében is, mivel pusztán geometriai megfontolásokból eredtek.

Amennyiben az összetett keresztmetszetet felépítő anyag lineárisan rugalmas, akkor a meghajlított rúd keresztmetszetén, annak bármely pontjában, a keletkező feszültség arányos a fajlagos alakváltozással ($\sigma = E \cdot \varepsilon$, az arányossági tényező pedig az E Young-modulusz). Tegyük fel, hogy az összetett keresztmetszetet alkotó A_i területű részekben e modulusz egy-egy állandó E_i értékkel rendelkezik. Ekkor a következőket tapasztaljuk:

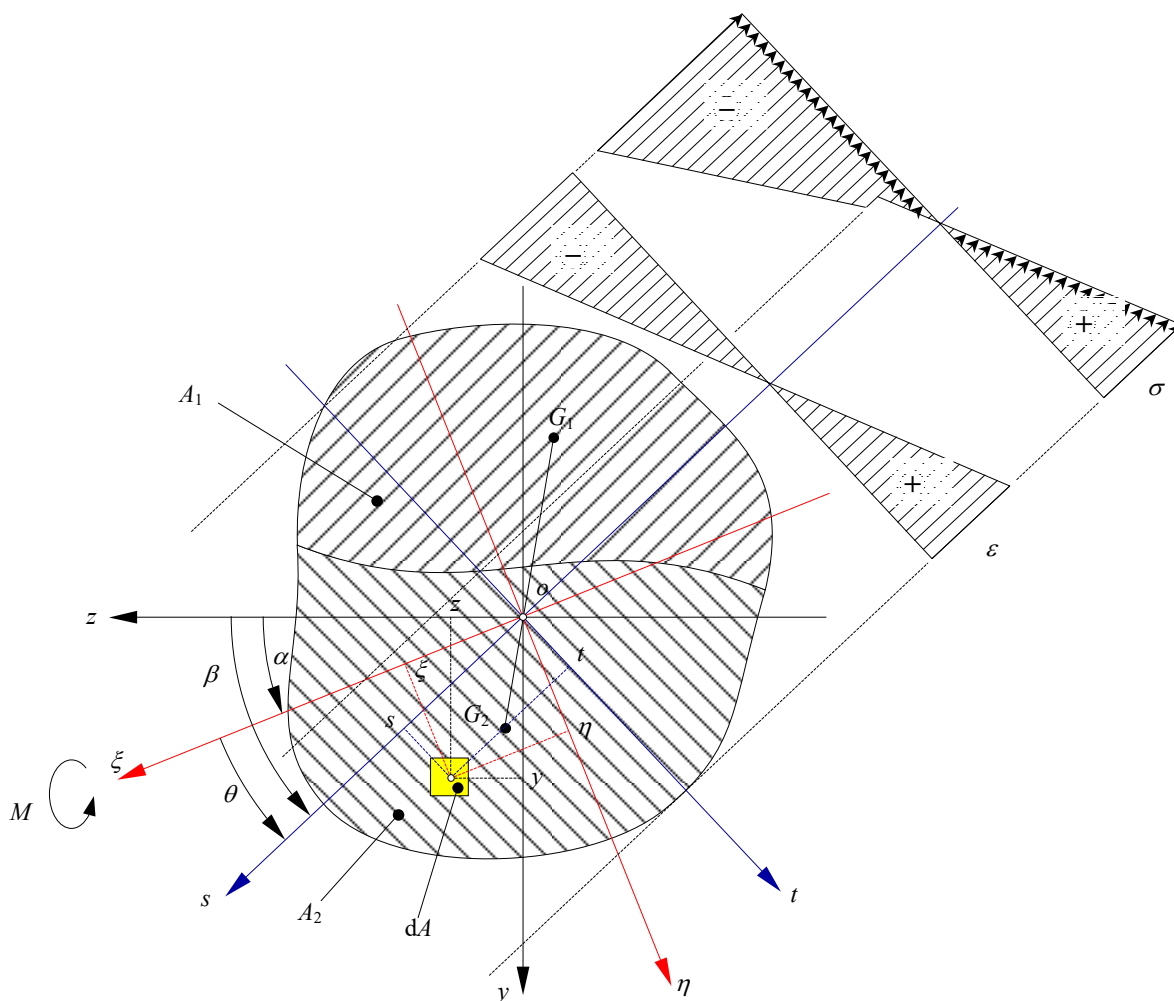
- a semleges tengely mentén, az anyagi minőségtől függetlenül, $\sigma = 0$ mivel $\varepsilon = 0$, annak bármely pontjában;
- a semleges tengellyel párhuzamos vonalak mentén σ egy adott A_i tartományon állandó, de a tartományok határán ugrás-szerűen változik, mivel az állandó $\varepsilon \neq 0$ fajlagos alakváltozást a Young-modulusz más-más értékével kell szorozzuk. A feszültség diagramja az azt leíró lépcsős függvény ábrázolásából származik;
- a semleges tengelyre merőleges irányban, akárcsak ε , a σ feszültség is a távolsággal egyenes arányban változik, a tartományok határán ugrás-szerű változással. A feszültség diagramja különböző dőlésű, sugár-irányú egyenesekből áll, amelyek meghosszabbításai a semleges tengelyen levő, nulla feszültségű pontban metszik egymást. A 4.14. ábrán a t tengely mentén ábrázolt feszültség látható.

A feszültség változását leíró bonyolultabb függvények miatt az összetett keresztmetszet hajlításának általános esetét tárgyalni nehézkes; e tárgyalásban kövessük a ferde hajlítás esetét!

Induljunk ki egy olyan yz koordináta-rendszerből, amelynek a tengelyei tetszőleges irányúak, de az origója az összetett keresztmetszet központos húzásakor megállapított, Young-moduluszokkal súlyozott o tömegközéppontjában van (4.2.6. fejezet, 4.8. ábra). Az o ponton keresztülmenő tengelyekre nézve az A_i területeknek az E_i Young-moduluszokkal számított „súlya” egy nulla nagyságú sztatikus nyomatékot ad, így a választott koordináta-rendszerünkben

$$\begin{aligned} E_1 \cdot A_1 \cdot z_{G1} + E_2 \cdot A_2 \cdot z_{G2} &= E_1 \cdot S_{y1} + E_2 \cdot S_{y2} = \sum S^*_{y_i} = S^*_y = 0, \\ E_1 \cdot A_1 \cdot y_{G1} + E_2 \cdot A_2 \cdot y_{G2} &= E_1 \cdot S_{z1} + E_2 \cdot S_{z2} = \sum S^*_{z_i} = S^*_z = 0. \end{aligned} \quad (6.84)$$

E képletekben az $S_z^* = \sum E_i \cdot A_i \cdot y_{G_i}$ formájú mennyiségek a mechanikából ismert, a 3.6.2. fejezetben tárgyalt sztatikus nyomatékokkal analóg mennyiségek. Ez az analógia a $\mu_i \leftrightarrow E_i$ megfeleltetésén alapul.



6.14. ábra. Összetett keresztmetszetű rúd hajlítása

Ez esetben is a fajlagos alakváltozást leíró függvényt a 6.57, $\varepsilon = a + b \cdot t$ formában keressük. Az $N = 0$ egyensúlyi feltételt felírván, a 6.58. azonosságot megfelelőképpen módosítva kapjuk:

$$\begin{aligned}
 N &= \int \sigma \, dA = \int_{A_1} \sigma \, dA + \int_{A_2} \sigma \, dA = \int_{A_1} E_1 \cdot \varepsilon \, dA + \int_{A_2} E_2 \cdot \varepsilon \, dA = \\
 &= E_1 \cdot \int_{A_1} (a + b \cdot t) \, dA + E_2 \cdot \int_{A_2} (a + b \cdot t) \, dA = \\
 &= a \cdot (E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2) + b \cdot (E_1 \cdot S_{s_1} + E_2 \cdot S_{s_2}) = a \cdot \sum (E_i \cdot A_i) + b \cdot S_s^* = 0.
 \end{aligned} \tag{6.85}$$

Mivel az s tengely az o tömegközépponton megy keresztül, az összefüggés második zárójele minden esetben nulla: következésképpen a választott, „tömegközéppont” origójú koordináta-rendszerünkben $a = 0$, $b = 1/\rho$, akárcsak a homogén keresztmetszet esetében.

A másik két egyensúlyi egyenletet is a homogén keresztmetszetre megállapítottakkal analóg módon írhatjuk fel. A 6.65. alapján:

$$\begin{aligned} M_{\xi} &= \int_A \eta \cdot \sigma \, dA = \frac{1}{\rho} \cdot \left(E_1 \cdot \int_{A_1} \eta \cdot t \, dA + E_2 \cdot \int_{A_2} \eta \cdot t \, dA \right) = \\ &= \frac{1}{\rho} \cdot \left[(E_1 \cdot I_{y_1} + E_2 \cdot I_{y_2}) \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta + (E_1 \cdot I_{z_1} + E_2 \cdot I_{z_2}) \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta - \right. \\ &\quad \left. - (E_1 \cdot I_{yz_1} + E_2 \cdot I_{yz_2}) \cdot (\sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha) \right] = M, \end{aligned} \quad (6.86)$$

a 6.66. alapján pedig

$$\begin{aligned} M_{\eta} &= \int_A \xi \cdot \sigma \, dA = \frac{1}{\rho} \cdot \left(E_1 \cdot \int_{A_1} \xi \cdot t \, dA + E_2 \cdot \int_{A_2} \xi \cdot t \, dA \right) = \\ &= \frac{1}{\rho} \cdot \left[-(E_1 \cdot I_{y_1} + E_2 \cdot I_{y_2}) \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha + (E_1 \cdot I_{z_1} + E_2 \cdot I_{z_2}) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta - \right. \\ &\quad \left. - (E_1 \cdot I_{yz_1} + E_2 \cdot I_{yz_2}) \cdot (\sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \cos \beta) \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.87)$$

Ha kiterjesztjük a $\mu_i \leftrightarrow E_i$ megfeleltetésen alapuló analógiát a 3.6.6. fejezetben definiált tehetetlenségi nyomatékokra is, akkor az előbbi képletek a következő egyszerűbb formára hozhatók:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \left[I_{y_i}^* \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta + I_z^* \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta - I_{yz}^* \cdot (\sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha) \right] = M, \quad (6.88)$$

$$-I_y^* \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha + I_z^* \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta - I_{yz}^* \cdot (\sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \cos \beta) = 0. \quad (6.89)$$

Ez utóbbiból, $\cos \alpha \cdot \cos \beta$ -val való osztás után

$$-\operatorname{tg} \beta \cdot I_y^* + \operatorname{tg} \alpha \cdot I_z^* - (\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta - 1) \cdot I_{yz}^* = 0, \quad (6.90)$$

ahonnan a semleges tengely irányát adó β szög értékéhez vezető

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot I_z^* + I_{yz}^*}{I_y^* + \operatorname{tg} \alpha \cdot I_{yz}^*} \quad (6.91)$$

relációhoz jutunk. Az előbbiből pedig

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot I_y^* + I_z^* - (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \cdot I_{yz}^*}, \quad (6.92)$$

ahova β (vagy pedig a $\cos \beta = 1/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}$ átalakítással, $\operatorname{tg} \beta$) behelyettesítésével megkapjuk a görbületet, amely az $\varepsilon(t) = t/\rho$ fajlagos alakváltozáshoz vezet. Ebből koordináta-transzformációval meghatározható a kiindulási koordináta-rendszerben érvényes $\varepsilon(y, z)$ függvény, a Hooke-törvény felhasználásával, az adott pontban érvényes Young-modulusszal pedig a $\sigma(y, z)$ függvény is.

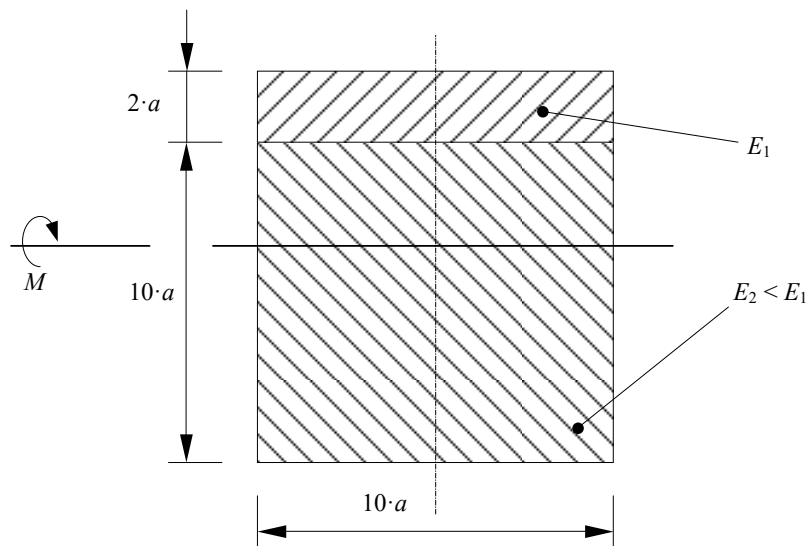
Megállapítható, hogy az összetett keresztmetszetű rúd hajlítása akkor lesz egyenes, ha $\alpha = \beta$, aminek a feltételeire a 6.91. képletből, $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$ behelyettesítésével következtethetünk. Ez eléggé átláthatatlannak ígérkezik.

Egyszerűbben tárgyalható a feladat, ha nem egy tetszőleges koordináta-rendszerből indulunk ki, hanem egy olyanból, amelynek a tengelyei a Young-modulusokkal súlyozott területekből álló összetett idom fő tehetetlenségi irányjai (3.6.9. fejezet). Ekkor $I_{yz}^* = 0$ és a kapott képletek jelentősen leegyszerűsödnek: a homogén keresztmetszetre megállapított relációkhoz jutunk, amelyekben a másodrendű nyomatékok helyén a tehetetlenségi nyomatékok jelennek meg, a Young-moduluszt pedig az $E = 1$ egységnyi értékkel kell helyettesítenünk. Következtetésként: ha az összetett keresztmetszet hajlítása e koordináta-rendszer valamelyik tengelye körül történik, akkor a hajlítás egyenes lesz. Mivel az $I_{yz}^* = 0$ mennyiség nem csak a geometriától függ, ez a feltétel sokféleképpen teljesülhet. Egy, a műszaki gyakorlatban gyakran előforduló sajátos eset az, amikor az összetett keresztmetszet az y vagy z tengelyek közül legalább az egyikre nézve szimmetrikus: ekkor az y és a z tengelyek körüli hajlítás egyenes lesz.

6.7. példa. Összetett keresztmetszetű rúd hajlítása

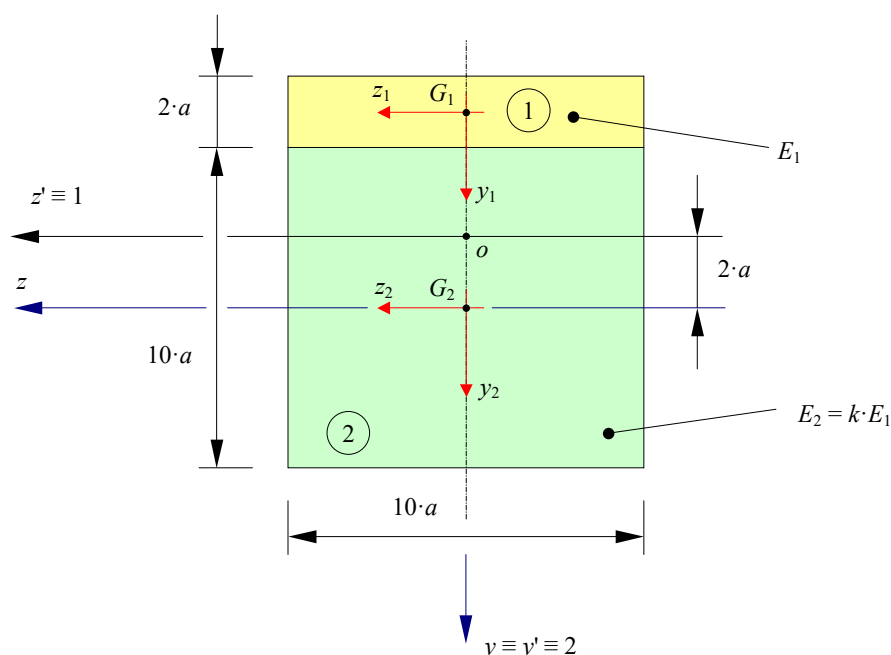
Legyen a 6.14. ábrán látható szendvics-szerkezetű hajlított keresztmetszet, amely két különböző anyag egymásra rétegzésével épül fel: a felső, vékonyabb réteg valamilyen merevebb, az alsó pedig valamilyen lágyabb anyagból áll. Ha gyakorlati példát szeretnénk mondani, akkor ez egy hőszigetelő réteggel bevont szerkezeti elem is lehetne, ahol a szigetelő réteg teherbírására is számítunk. Ekkor a hajlító igénybevételt a két anyag együttesen veszi át.

A keresztmetszet ugyan téglalap alakú, de annak az anyag minőségének változása miatt csak függőleges szimmetria-tengelye van.



6.14. ábra. Szendvics-szerkezet, összetett keresztmetszet

Az összetett keresztmetszet hajlításának tanulmányozása egyszerűbb a Young-modulusokkal súlyozott tehetetlenségi nyomatékok felhasználásával. Ehhez első sorban meg kell állapítanunk a keresztmetszet „tömegközéppontjának” a koordinátáit: egy olyan yz koordináta-rendszerből indulunk ki, amelynek a függőleges y tengelye a szimmetria-tengellyel azonos, a vízszintes z tengelye pedig tetszőleges helyzetű, az például a 2. összetevő geometriai középpontján keresztül meghúzott tengely is lehet. Itt feltételezzük azt, hogy a két anyaga összetevő homogén, tehát az összetett keresztmetszetet alkotó részek tömegközéppontja egybeesik azok geometriai középpontjával (6.15. ábra).



6.15. ábra. Az összetett keresztmetszet tehetetlenségi főirányai

A számítások leegyszerűsítése végett fejezzük ki a Young-modulusokat az egymáshoz viszonyított értékükkel: $E_2 = k \cdot E_1$, ahol legyen $k = 0.4$.

Az összetett keresztmetszet „tömege” a következőképpen számítható:

$$\begin{aligned} A_1 &= 10 \cdot a \cdot 2 \cdot a = 20 \cdot a^2 \Rightarrow m_1 = E_1 \cdot A_1 = 20 \cdot a^2 \cdot E_1, \\ A_2 &= 10 \cdot a \cdot 10 \cdot a = 100 \cdot a^2 \Rightarrow m_2 = E_2 \cdot A_2 = 100 \cdot a^2 \cdot k \cdot E_1 = 40 \cdot a^2 \cdot E_1, \\ m &= m_1 + m_2 = 60 \cdot a^2 \cdot E_1. \end{aligned} \quad (6.93)$$

A tömegközéppontok függőleges helyzetét a zy koordináta-rendszerünkben az

$$\begin{aligned} y_{G1} &= -6 \cdot a, \\ y_{G2} &= 0 \end{aligned} \quad (6.94)$$

koordináták adják (a vízszintes koordinátákkal nem kell foglalkoznunk a szimmetria miatt), az alkotó idomok z tengelyre vonatkoztatott statikus nyomatékai pedig a következő mennyiségek:

$$\begin{aligned} S_{z1}^* &= y_{G1} \cdot m_1 = (-6 \cdot a) \cdot 20 \cdot a^2 \cdot E_1 = -120 \cdot a^3 \cdot E_1, \\ S_{z2}^* &= y_{G2} \cdot m_2 = 0 \cdot 100 \cdot a^2 \cdot k \cdot E_1 = 0, \\ S_z^* &= S_{z1}^* + S_{z2}^* = -120 \cdot a^3 \cdot E_1. \end{aligned} \quad (6.95)$$

A tömegközéppont koordinátái tehát

$$\begin{aligned} z_o &= 0, \\ y_o &= \frac{S_z^*}{m} = \frac{-120 \cdot a^3 \cdot E_1}{60 \cdot a^2 \cdot E_1} = -2 \cdot a. \end{aligned} \quad (6.96)$$

E tömegközépponton keresztül meghúzzuk az új, centrális $z'y'$ koordináta-rendszerünk tengelyeit: mivel ezek egyike szimmetria-tengely, következik, hogy ezek a tehetetlenségi főirányokban fekszenek.

Az összetett idomot alkotó téglalapnak és a négyzetnek a saját centrális koordináta-rendszerükben számított tehetetlenségi nyomatékai a következők (az y tengelyre vonatkoztatottakra tulajdonképpen most nincs szükségünk):

$$\begin{aligned} I_{z_1}^* &= \frac{10 \cdot a \cdot (2 \cdot a)^3}{12} \cdot E_1 = 6.6667 \cdot a^4 \cdot E_1, \\ I_{y_1}^* &= \frac{(10 \cdot a)^3 \cdot 2 \cdot a}{12} \cdot E_1 = 166.6667 \cdot a^4 \cdot E_1, \\ I_{z_2}^* &= \frac{10 \cdot a \cdot (10 \cdot a)^3}{12} \cdot E_2 = 833.3333 \cdot a^4 \cdot k \cdot E_1 = 333.3333 \cdot a^4 \cdot E_1, \\ I_{y_2}^* &= \frac{(10 \cdot a)^3 \cdot 10 \cdot a}{12} \cdot E_2 = 833.3333 \cdot a^4 \cdot k \cdot E_1 = 333.3333 \cdot a^4 \cdot E_1. \end{aligned} \quad (6.97)$$

Mivel az y tengelyek egybeesnek ($y_1 \equiv y_2 \equiv y'$), a z tengelyek pedig nem, a vízszintes tengelyre számított értékeket Steiner képletével át kell számítanunk a centrális koordináta-rendszer z' tengelyére. A koordináta-rendszerek eltolásának mértéke a következőképpen állapítható meg:

$$\begin{aligned} \Delta z_1 &= z_o - z_{G1} = 0, \\ \Delta y_1 &= y_o - y_{G1} = -2 \cdot a - (-6 \cdot a) = 4 \cdot a, \\ \Delta z_2 &= z_o - z_{G2} = 0, \\ \Delta y_2 &= y_o - y_{G2} = -2 \cdot a - 0 = -2 \cdot a. \end{aligned} \quad (6.98)$$

Steiner képletével tehát:

$$\begin{aligned} I_{z_1}^* &= I_{z_1}^* + \Delta y_1^2 \cdot m_1 = 6.6667 \cdot a^4 \cdot E_1 + (4 \cdot a)^2 \cdot 20 \cdot a^2 \cdot E_1 = 326.6667 \cdot a^4 \cdot E_1, \\ I_{z_2}^* &= I_{z_2}^* + \Delta y_2^2 \cdot m_2 = 333.3333 \cdot a^4 \cdot E_1 + (-2 \cdot a)^2 \cdot 40 \cdot a^2 \cdot E_1 = 493.3333 \cdot a^4 \cdot E_1. \end{aligned} \quad (6.99)$$

A keresett tehetetlenségi nyomatékok a fent kiszámolt mennyiségekkel a következők lesznek:

$$\begin{aligned} I_{z'}^* &= I_{z_1}^* + I_{z_2}^* = 326.6667 \cdot a^4 \cdot E_1 + 493.3333 \cdot a^4 \cdot E_1 = 820 \cdot a^4 \cdot E_1, \\ I_{y'}^* &= I_{y_1}^* + I_{y_2}^* = 166.6667 \cdot a^4 \cdot E_1 + 333.3333 \cdot a^4 \cdot E_1 = 500 \cdot a^4 \cdot E_1. \end{aligned} \quad (6.100)$$

Mivel a szimmetria miatt egyszersmind ezek főértékek, megállapíthatjuk, hogy

$$\begin{aligned} I_1^* &= I_{z'}^* = 820 \cdot a^4 \cdot E_1, \\ I_2^* &= I_{y'}^* = 500 \cdot a^4 \cdot E_1, \end{aligned} \quad (6.101)$$

az első főirányt a vízszintes z' , a másodikat pedig a függőleges y' tengely adja.

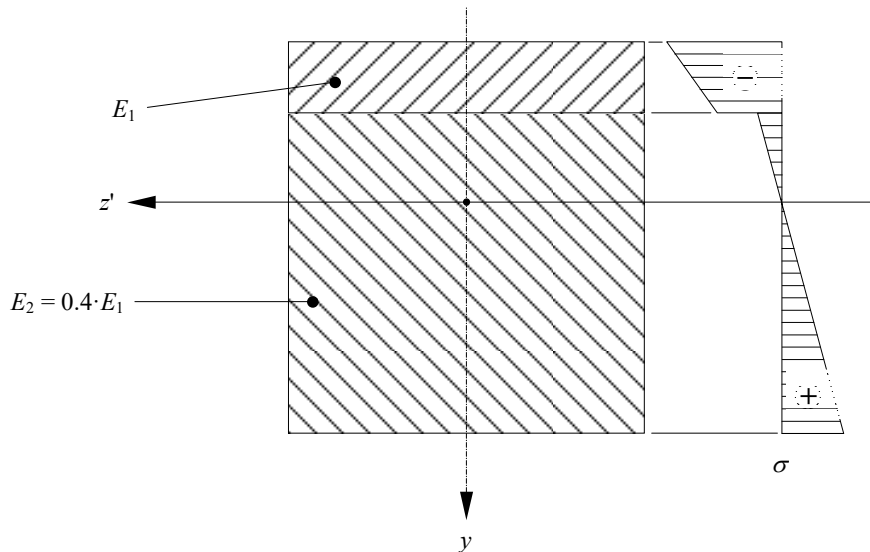
A hajlítás az első főirány szerint történik, így a 6.92. képletben mind a két szög nulla:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{I_{z'}^*}; \quad (6.102)$$

ha a függőleges tengely körül hajlítanánk, akkor a nevezőben az $I_{y'}^*$ mennyiség szerepelne. A fajlagos alakváltozás $\varepsilon(y) = y/\rho$, Hooke-törvénye szerint pedig $\sigma(y) = E(z, y) \cdot \varepsilon(y)$, ahol

$E(z, y)$ az E_1 vagy az E_2 értéket jelentheti, a koordinátának megfelelően (6.16. ábra). A példánkban, bármely $z \in [-5 \cdot a, 5 \cdot a]$ -ra:

$$\sigma(y) = \begin{cases} E_1 \cdot \frac{M}{I_{z'}^*} \cdot y & \text{ha } y \in [-5 \cdot a, -3 \cdot a], \\ E_2 \cdot \frac{M}{I_{z'}^*} \cdot y & \text{ha } y \in (-3 \cdot a, 7 \cdot a]. \end{cases} ; \quad (6.103)$$



6.16. ábra. Az összetett keresztmetszet hajlítása során fellépő feszültség

Észrevehetjük, hogy a feszültség anyagonként egy legkisebb és egy legnagyobb érték között változik, lineárisan. Ezeket a szélsőértékeket az y koordinátát megadó intervallumok határaival számolhatjuk ki, például az első anyagra $\sigma_{1min} = -5 \cdot a \cdot E_1 \cdot M / I_{z'}^*$ és $\sigma_{1max} = -3 \cdot a \cdot E_1 \cdot M / I_{z'}^*$. A méretezés, méretellenőrzés vagy a teherbíró-képesség során a szélsőértékek legkisebb negatív értéke nem haladhatja meg az illető rész anyagának a megengedett húzófeszültségét, a legnagyobb pozitív érték pedig nem lehet nagyobb a megengedett nyomófeszültségnél.

Ha az y tengely körül hajlítanánk, a feszültség változását a

$$\sigma(z) = \begin{cases} E_1 \cdot \frac{M}{I_{y'}^*} \cdot z & \text{ha } z \in [-5 \cdot a, -3 \cdot a], \\ E_2 \cdot \frac{M}{I_{y'}^*} \cdot z & \text{ha } z \in (-3 \cdot a, 7 \cdot a]. \end{cases} ; \quad (6.104)$$

reláció adná, ahol $z \in [-5 \cdot a, 5 \cdot a]$.

6.8. példa. Összetett keresztmetszetű rúd egyenes hajlításának számítása az egyenértékű területek módszerével

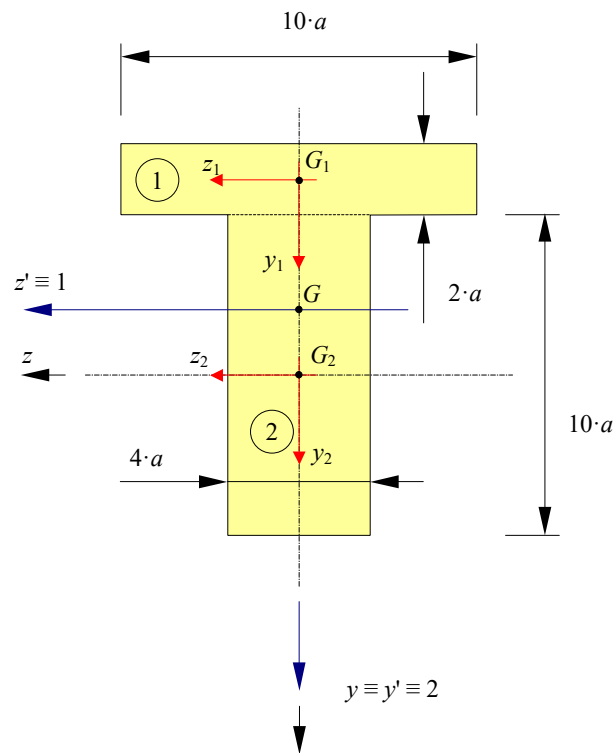
Az előbbi példa során elvégzett számítások tanulmányozása során észrevehetjük, hogy:

→ a képletekben a geometriai mennyiségeket helyettesítő, Young-modulusokkal kiszámított mechanikai mennyiségek csak egy szorzóban, az illető modulusban különböznek egymástól;

→ mivel a hajlítás egy főirány szerint történt, a képletekben a hajlítás tengelyének irányában mért koordináta mindig csak az első hatványon jelenik meg (a példánkban ezek a vízszintes irányú, különböző indexű z koordináták).

E két észrevétel lehetővé teszi azt, hogy a képletekben szereplő $E \cdot z$ formájú szorzatokat a vízszintes irányban mért geometriai méretek egyfajta skálázott értékének tekintsük: a szimmetria megőrzésével a keresztmetszetet a vízszintes méretek skálázásával ábrázolhatjuk és ilyen módon a minket érdeklő $I^*_{z'}$ tehetetlenségi nyomatékot úgy számíthatjuk ki, mint a skálázott idom $I_{z'}$ másodrendű (geometriai) nyomatékát. Az ábrázolt keresztmetszet vízszintes méretei erő/hosszúság fizikai jelentéssel bírnak, pl. N/m -ben adhatjuk meg azokat.

Eljárhatunk másképpen, egyszerűbben is: a vízszintes irányú méreteket például a $k_i = E_i / E_1$ hányadosokkal skálázzuk: ekkor ezek továbbra is hosszúság jellegű mennyiségek maradnak, a skálázott idom másodrendű nyomatékával pedig $I^*_{z'} = E_1 \cdot I_{z'}$. A 6.17. ábrán az ilyen módon skálázott, az összetetttel egyenértékű homogén keresztmetszet látható: a második alkotó szélessége változott meg a $k \cdot (10 \cdot a) = 4 \cdot a$ átszámítás következtében. Ez a második terület a keletkezett T idom gerincét alkotja.



6.17. ábra. Az összetett keresztmetszettel egyenértékű homogén keresztmetszet

Az egyenértékű keresztmetszet területe a következő:

$$\begin{aligned} A_1 &= 10 \cdot a \cdot 2 \cdot a = 20 \cdot a^2, \\ A_2 &= 4 \cdot a \cdot 10 \cdot a = 40 \cdot a^2, \\ A &= A_1 + A_2 = 60 \cdot a^2. \end{aligned} \tag{6.105}$$

A tömegközéppontok függőleges helyzetét a zy koordináta-rendszerünkben továbbra is az

$$\begin{aligned}y_{G1} &= -6 \cdot a, \\y_{G2} &= 0\end{aligned}\tag{6.106}$$

koordináták adják, mivel a függőleges irányban vett méretek nem változtak meg. Ezt az észrevétel a 3.5. fejezetben *skalázási tétel*ként említett tulajdonságokra alapoz.

A fenti mennyiségekkel az összetett keresztmetszet z tengelyre vonatkoztatott elsőrendű nyomatéka az azt alkotó téglalapok nyomatékaival:

$$\begin{aligned}S_{z1} &= y_{G1} \cdot m_1 = (-6 \cdot a) \cdot 20 \cdot a^2 = -120 \cdot a^3, \\S_{z2} &= y_{G2} \cdot m_2 = 0 \cdot 40 \cdot a^2 = 0, \\S_z &= S_{z1} + S_{z2} = -120 \cdot a^3,\end{aligned}\tag{6.107}$$

a geometriai középpont függőleges irányú koordinátája pedig

$$y_G = \frac{S_z}{A} = \frac{-120 \cdot a^3}{60 \cdot a^2} = -2 \cdot a.\tag{6.108}$$

Észrevehetjük, hogy ugyanazt a koordinátát kaptuk, mint amikor a Young-modulusokkal súlyozott keresztmetszet tömegközéppontjának a koordinátáit kerestük.

A számítások a szokásos módon folytatódnak: a geometriai középponton keresztül meghúzzuk a centrális $z'y'$ koordináta-rendszer tengelyeit: amelyek a szimmetria miatt a főirányokat jelentik. A téglalapoknak a saját centrális koordináta-rendszerükben számított másodrendű nyomatékai a következők:

$$\begin{aligned}I_{z1} &= \frac{10 \cdot a \cdot (2 \cdot a)^3}{12} = 6.6667 \cdot a^4, \\I_{z2} &= \frac{4 \cdot a \cdot (10 \cdot a)^3}{12} = 333.3333 \cdot a^4.\end{aligned}\tag{6.109}$$

Észrevehetjük, hogy az előbbi módszerben kiszámított tehetetlenségi nyomatékoktól csak abban különböznek, hogy nem tartalmazzák az E_1 -es szorzót.

A koordináta-rendszerek eltolásának mértéke, mivel $y_G = y_o$, ugyanaz marad:

$$\begin{aligned}\Delta y_1 &= y_G - y_{G1} = -2 \cdot a - (-6 \cdot a) = 4 \cdot a, \\ \Delta y_2 &= y_G - y_{G2} = -2 \cdot a - 0 = -2 \cdot a,\end{aligned}\tag{6.110}$$

Steiner képletével tehát:

$$\begin{aligned}I_{z'1} &= I_{z1} + \Delta y_1^2 \cdot A_1 = 6.6667 \cdot a^4 + (4 \cdot a)^2 \cdot 20 \cdot a^2 = 326.6667 \cdot a^4, \\ I_{z'2} &= I_{z2} + \Delta y_2^2 \cdot A_2 = 333.3333 \cdot a^4 + (-2 \cdot a)^2 \cdot 40 \cdot a^2 = 493.3333 \cdot a^4,\end{aligned}\tag{6.111}$$

és végül:

$$I_{z'} = I_{z'1} + I_{z'2} = 326.6667 \cdot a^4 + 493.3333 \cdot a^4 = 820 \cdot a^4.\tag{6.112}$$

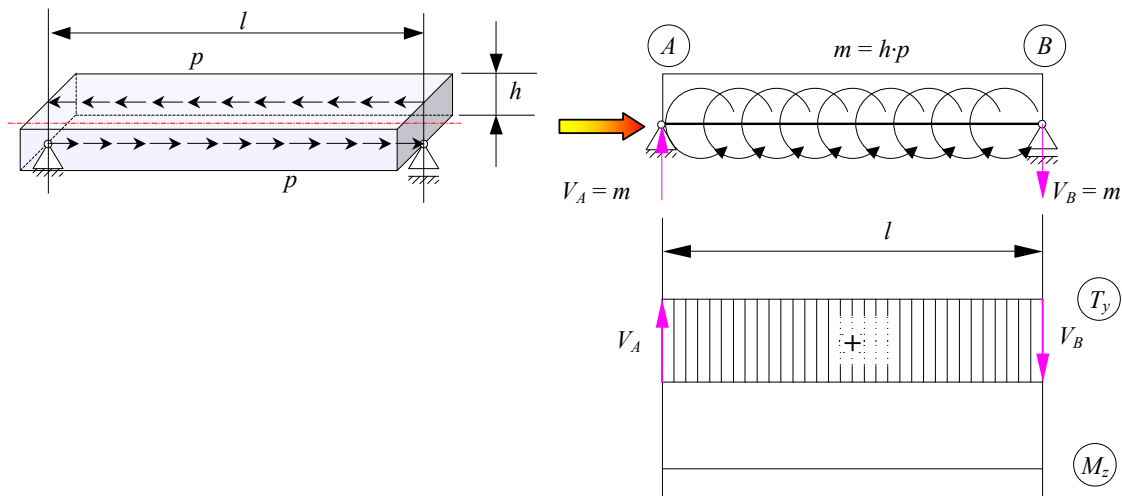
Most is megállapíthatjuk, hogy ezek a másodrendű nyomatékok a tehetetlenségi nyomatékoktól szintén csak az E_1 -es szorzó hiányában különböznek: a skalázott idom keresett tehetetlenségi nyomatéka a másodrendű nyomaték ismeretében tehát

$$I_{z'}^* = I_{z'} \cdot E_1,\tag{6.113}$$

amivel a feszültségeket adó 6.103. relációhoz jutunk.

6.2. Hajlítás nyírással

A 2. fejezetben megoldott példákat tanulmányozva megállapíthatjuk, hogy a hajlítás rendszerint nyírással társul. Csak speciális esetekben fordul elő az, hogy a tartót kizárólag csak hajlító igénybevétel terheli, az esetek többségében a nyíró igénybevétel legfennebb csak egy-egy pontban tűnik el. Ehhez hozzátehetjük azt is, hogy a tisztán nyírt tartó esete is kivételes. Ezt például a 6.18. ábrán látható módon lehetne megvalósítani: a tengellyel párhuzamosan ható, egyenletesen megoszló nyíróerő egy egyenletesen megoszló hajlítónyomatékot eredményez, az igénybevételek közötti 2.111. összefüggés alapján pedig kijelenthetjük, hogy egy csak nyírt (és nem hajlított) tartóhoz jutunk.



6.18. ábra. Tisztán nyírt tartó

Az egyszerre hajlított és nyírt keresztmetszet igénybevétele összetett és tulajdonképpen az nem lenne tárgyalható egyszerűen, mivel egyszerre két különböző fajta, közvetlenül nem összegezhető feszültség jelenik meg ezen a keresztmetszeten (a hajlításból σ , a nyírásból τ). A prizmatikus tartó nyírása azonban különbözik a kis keresztmetszetek nyírásától, a tapasztalat azt mutatja, hogy τ megoszlása nem egyenletes. E feszültségnek a nyíró-igénybevétel irányába eső összetevőjét, annak a megoszlását, bizonyos feltételezések bevezetésével Zsuravszkij képlete írja le. E képletből az következik, hogy a τ értéke a hajlítás tengelyétől számított legtávolabbi pontokban nulla, ugyanitt Navier képlete alapján σ szélsőértékeit kell keresnünk. Mint látni fogjuk, σ esetétől eltérően τ legnagyobb értékét nem lehet ilyen egyszerű módon lokalizálni, de azt kijelenthetjük, hogy valahol a keresztmetszet belsejében fog megjelenni, s ilyen módon a kétfajta feszültség szélsőértékei nem ugyanazon a helyen fordulnak elő. Mindkét feszültség valamilyen törvény szerint változik és egy kis szerencsével azok kombinációja egyik pontban sem okoz nagyobb igénybevételt, mint σ és τ szélsőértékei külön-külön.

A legnagyobb nyíró igénybevétel sok esetben nem ott jelenik meg, ahol a hajlítás a legintenzívebb, de ha mégis, akkor a keresztmetszet magasságához képest kellőképpen hosszú tartók esetében a nyírásból rendszerint jóval kisebb feszültség származik, mint a hajlításból: ez egy második érv lehet, amivel alátámaszthatjuk azt, hogy a kétfajta igénybevétel hatását nem kell kumulálnunk.

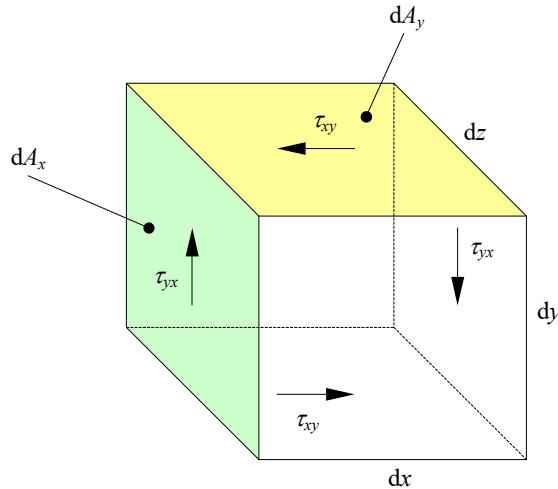
Azonban, ha felmerül a gyanú, hogy mégsem lehet eltekinteni σ és τ együttes hatásának a vizsgálatától, akkor ezt az igénybevételt összetettként kell tárgyalnunk, amihez egy későbbi fejezet nyújt megoldást.

6.2.1. A nyírófeszültségek dualitása

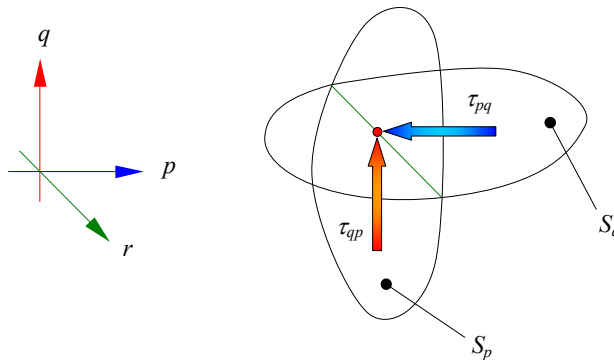
A kis keresztmetszetek nyírása esetében elfogadtuk, hogy a nyírófeszültség megoszlása egyenletes és az intenzitását a $\tau = T/A$ hányados adja. Ha az 5.1. ábrán szereplő nyírt keresztmetszeten egy infinitezimális térfogatelemet különítünk el, a 6.19. ábrán látható módon, akkor az elvárásaink szerint ennek egyensúlyban kellene lennie, hiszen egy egyensúlyban levő szerkezeti elemből metszettük ki azt. Ennek az elemnek a függőleges oldalain egy-egy $dT_y = dA_x \cdot \tau_{yx}$ erő hat, amelyek erőpárként egy $dM_{z1} = dT_y \cdot dx$ nyomatékkal hatnak a térfogatelemre. Az egyensúly helyreállításához egy ugyanekkora nagyságú, de ellentétes irányba forgató nyomatékra van szükség, amelyet a vízszintes oldalapokon fellépő feszültségekből származó $dT_x = dA_y \cdot \tau_{xy}$ erők által alkotott erőpárnak tulajdonítunk: $dM_{z2} = dT_x \cdot dy$. Mivel $dA_x = dy \cdot dz$ és $dA_y = dx \cdot dz$, az egyensúly $dM_{z1} - dM_{z2} = 0$ feltételéből a

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \tag{6.114}$$

feltételhez jutunk: ez a feltétel adja a nyírófeszültségek dualitásának az elvét, amelyet a rugalmasságtan bevezetőjében részletesen is kifejtünk.



6.19. ábra. A nyírófeszültségek egyensúlya



6.20. ábra. A nyírófeszültségek dualitása

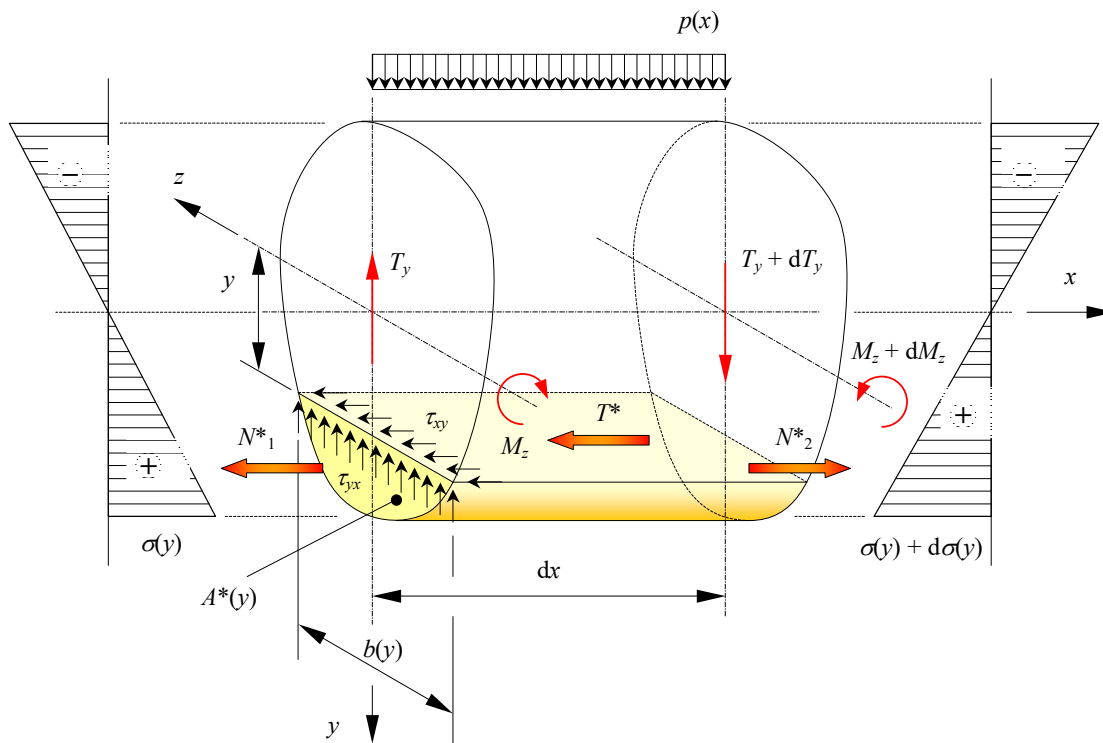
Ezen elv alapján, ha egy p tengellyel párhuzamos normálissal rendelkező S_p sík egy bizonyos P pontjában, valamely tetszőleges q tengely irányában, egy τ_{qp} tangenciális feszültség hat, akkor a P ponton keresztül meghúzott, az előbbire merőleges, q irányú normálissal rendelkező S_q síkban, p irányában, egy ugyanakkora τ_{pq} kell hasson. E feszültségek vagy a két sík metszésvonala fele, vagy azzal ellentétes irányba kell mutassanak (6.20. ábra).

6.2.2. Zsuravszkij képlete

Egy hajlított és nyírt prizmatikus rúd hosszán különítsünk el egy dx vastagságú szeletet, egy rúdelemet (6.21. ábra). Messük el ezt a rúdelemet egy olyan síkkal, amely párhuzamos a semleges síkkal és attól egy tetszőleges y távolságra van. E sík magasságában a rúd keresztmetszetének a szélessége $b(y)$, a keresztmetszetnek pedig a metszésvonal alatti területi pedig $A^*(y)$. Tételezzük fel, hogy e vonal mentén a bal oldali függőleges oldallapon egy egyenletesen megoszló τ_{yx} feszültség hat, a rúd nyírásának következtében. Ekkor a vízszintes metsző síkban, a nyírófeszültségek dualitása miatt, e vonal mentén szintén egyenletesen megoszló, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ feszültséget kell feltételeznünk.

A jobb oldali függőleges oldallapon ugyanezeket lehet feltételezni: ott az igénybevétel változása miatt a nyírófeszültség $\tau_{xy} + d\tau_{xy} = \tau_{yx} + d\tau_{yx}$.

Továbbá fogadjuk el a tisztán hajlított rúd esetében tett feltételeket is, aminek következtében a függőleges metszéssíkokat az alakváltozás után is sík felületeknek tekinthetjük, amelyeken a normálfeszültség változását Navier képlete írja le.



6.21. ábra. Zsuravszkij képletének levezetése

Mivel a rúd egésze egyensúlyban volt, következésképpen a lemetszett darabnak is egyensúlyban kell lennie. A lemetszett darab két oldalsó felületén egy-egy normális irányú, a normálfeszültségekből származó erő számítható; a bal oldalon

$$N^*_1 = \int_{A^*} \sigma(y) \, dA = \int_{A^*} \frac{M_z}{I_z} \cdot y \, dA = \frac{M_z}{I_z} \cdot \int_{A^*} y \, dA = \frac{M_z}{I_z} \cdot S^*_z, \quad (6.115)$$

a jobb oldalon pedig

$$N^*_2 = \int_{A^*} (\sigma(y) + d\sigma(y)) \, dA = \int_{A^*} \frac{M_z + dM_z}{I_z} \cdot y \, dA = \frac{M_z + dM_z}{I_z} \cdot S^*_z, \quad (6.116)$$

ahol S^*_z a vízszintes sík által levágott A^* terület z tengelyre vonatkoztatott elsőrendű nyomatéka. Ez a két erő tengely irányú, de azok a keresztmetszetek elfordulása miatt tulajdonképpen egy bizonyos szöveget zárnak be egymással. Mivel a szilárdságtanban általában kis alakváltozásokat feltételezünk, elfogadhatjuk, hogy a tengely görbülete kicsi és a két erő x irányú marad.

Ugyanerre a darabra a nyírófeszültségből származó erők is hatnak: ami minket érdekel, az a vízszintes síkban ható feszültség miatt megjelenő tengely irányú erő. Ennek a síknak a területe $A' = b(y) \cdot dx$ és az a rúd hajlítása miatt enyhén meggörbül. A kis alakváltozások feltételezésével azt is elfogadhatjuk, hogy ez a felület sík marad az alakváltozás után is. Ekkor a nyírófeszültségből származó erőt a

$$T^* = \int_{A'} \tau_{xy}(x) \, dA \approx \tau_{xy} \cdot A' = \tau_{xy} \cdot b(y) \cdot dx \quad (6.117)$$

integrállal lehetne kiszámítani, a $\tau_{xy}(x)$ függvény ismeretében. Ez a feszültség a dx hosszúságon valamilyen nem túl gyorsan változó függvény szerint változik, balról jobbra haladva a τ_{xy} értéktől a $\tau_{xy} + d\tau_{xy}$ értékig. A rúdelem dx hosszán a feszültség $d\tau_{xy}$ változásának a hatása elhanyagolhatóan kicsi, így az integrált a feltüntetett módon közelíthetjük meg.

A lemetszett darabra felírt, az x irányú erők egyensúlyát adó egyenlet a következő:

$$N^*_2 - N^*_1 - T^* = 0, \quad (6.118)$$

amelyet az előbb meghatározott mennyiségekkel

$$\frac{M_z + dM_z}{I_z} \cdot S^*_z - \frac{M_z}{I_z} \cdot S^*_z - \tau_{xy} \cdot b(y) \cdot dx = 0 \quad (6.119)$$

írhatunk fel részletesebben. Észrevehetjük, hogy az $M_z \cdot S^*_z / I_z$ mennyiségek leegyszerűsödnek, s az igénybevételek közötti $T_y = dM_z / dx$ összefüggéssel (amely az ábrázolt terhelési sémára érvényes) a nyírófeszültséget megadó

$$\tau(y) = \frac{T_y \cdot S^*_z(y)}{b(y) \cdot I_z} \quad (6.120)$$

képlethez jutunk: ez Zsuravszkij képlete, amely szerint a nyírófeszültség a hajlítás tengelyére merőleges irányban a geometriától függően változik. τ iránya T_y irányával azonos.

A nyírófeszültség nulla értéke ott fordul elő, ahol a tört számlálójában szereplő $S^*_z(y)$ mennyiség nulla. Ha az $A^*(y)$ területet szigorúan az ábra szerint értelmezzük, akkor ez két esetben fordulhat elő:

→ ha $y = y_{max}$, akkor $A^* = 0 \Rightarrow S_z^* = 0$;

→ ha $y = y_{min}$, akkor $A^* = A \Rightarrow S_z^* = S_z = 0$ (mert z főirányú centrális tengely).

Észrevehetjük, hogy ha a megmaradt területet $A^{**}(y) = A - A^*(y)$, akkor annak az elsőrendű nyomatéka $S_z^{**}(y) = -S_z^*(y)$ kell legyen, mivel a teljes keresztmetszet elsőrendű nyomatéka a z tengelyre nulla. Következésképpen a Zsuravszkij-képletben szereplő S_z^* mennyiséget egyaránt számolhatjuk a keresztmetszetet el metsző vonal alatti vagy feletti rész z tengelyre vonatkoztatott elsőrendű nyomatékeként: gyakorlatilag érdemes az egyszerűbb geometriájú részre számítani, az esetleges negatív előjelet pedig törölni kell.

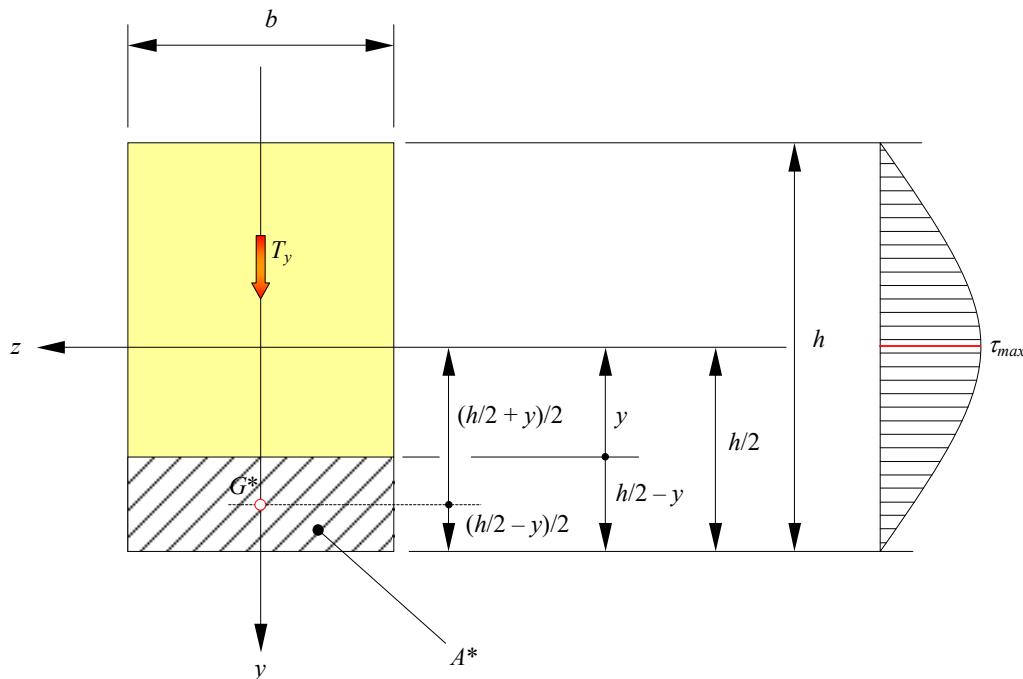
A nyírőfeszültség változását az $S_z^*(y)/b(y)$ hányados adja, τ legnagyobb értékéhez e hányados legnagyobb értéke vezet.

6.9. példa. Zsuravszkij képletének alkalmazása a téglalap alakú keresztmetszet esetére

A 6.22. ábrán látható, téglalap alakú keresztmetszet szélessége állandó: $b(y) = b$.

Az y magasságban el metszett keresztmetszet A^* területű része szintén egy téglalap, amelynek a magassága az ábra szerint $h/2 - y$. Ezek szerint $A^*(y) = b \cdot (h/2 - y)$. E le metszett téglalap G^* geometriai középpontjának függőleges koordinátája, szintén az ábra szerint, $y_{G^*} = (h/2 + y)/2$, tehát

$$S_z^*(y) = A^*(y) \cdot y_{G^*} = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right). \quad (6.121)$$



6.22. ábra. Zsuravszkij képletének alkalmazása téglalap alakú keresztmetszetre

A teljes keresztmetszet z tengelyre vonatkoztatott másodrendű nyomatéka $I_z = b \cdot h^3 / 12$.

E mennyiségekkel Zsuravszkij képletét a

$$\tau(y) = \frac{T_y \cdot S_z^*(y)}{b(y) \cdot I_z} = T_y \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{12}{b \cdot h^3} = T_y \cdot \left(-\frac{6}{b \cdot h^3} \cdot y^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{b \cdot h} \right) \quad (6.122)$$

formában írhatjuk fel, ahol a zárójel jelenti a feszültségnek az y koordináta függvényében történő változását leíró geometriai jellegű mennyiséget. Ha e zárójelet tanulmányozzuk, akkor rájöhethetünk, hogy a grafikonja egy, a z tengelyre nézve szimmetrikus másodfokú parabola, amelynek a csúcsa τ szélsőértékének felel meg. Ezt a szélsőértéket az $y = 0$ behelyettesítéssel kapjuk, ez pedig a keresztmetszeten fellépő feszültség legnagyobb abszolút értéke lesz:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T_y}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T_y}{A}, \quad (6.123)$$

ahol A a keresztmetszet nagysága. Zsuravszkij képletével ez esetben tehát a legnagyobb nyírófeszültség másfélszer akkora, mint a feszültség egyenletes megosztásának hipotézisében kiszámítható $\tau = T_y / A$ érték.

6.10. példa. Zsuravszkij képletének alkalmazása körkeresztmetszet esetére

A 6.23. ábrán látható kör-keresztmetszet geometriája egyszerű, azonban a számítások mégis bonyolultabbak lesznek az előbbi esetnél: a keresztmetszet szélessége a

$$b(y) = 2 \cdot \sqrt{R^2 - y^2} \quad (6.124)$$

függvény szerint változik (ezt Pitagorasz tételének alkalmazásával kapjuk, az ábrán szereplő derékszögű háromszögre alkalmazva), az y koordináta magasságában lemetsett A^* területű darab pedig egy körszelet, aminek az S_z^* elsőrendű nyomatékát kell kiszámítanunk.

Ha a körszeletet egy körcikk és egy háromszög különbségként fognánk fel, akkor e nyomaték kiszámításakor kiindulhatnánk a 3.1. táblázatban összefoglalt képletekből. E módszernek az lenne a hátránya, hogy a minket érdeklő mennyiséget az α középponti szög függvényében, $S_z^*(\alpha)$ formában kapnánk, így még egy változócsere is be kellene vezetnünk a minket érdeklő $S_z^*(y)$ függvény megállapításához.

Az elsőrendű nyomatékot egyszerűbb közvetlen integrálással meghatározni: a dA^* terület-elem egy $b(y)$ szélességű és dy magasságú téglalap, tehát

$$S_z^*(y) = \int_{A^*} y \, dA^* = \int_y^R y \cdot b(y) \, dy = \int_y^R 2 \cdot y \cdot \sqrt{R^2 - y^2} \, dy. \quad (6.125)$$

Ezt az integrált az $R^2 - y^2 = u$ változó-cserével lehet megoldani, ekkor $du = -2 \cdot y \cdot dy$, az integrálási határértékek pedig alul $u_1 = R^2 - y^2$, felül $u_2 = 0$ (itt egy kis zűrzavart okozhat az, hogy az integrál alsó határértékeként megjelölt y a körszelet egyenes oldalának a változó helyzetét jelenti, aminek a függvényében kapjuk az S_z^* mennyiséget, az integrandusban szereplő y pedig a körszelet magasságán változó függőleges koordináta). A változócsere bevezetésével tehát

$$S_z^*(y) = - \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{u} \, du = - \frac{2}{3} \cdot u^{3/2} \Big|_{u_1}^{u_2} = \frac{2}{3} \cdot (R^2 - y^2)^{3/2}. \quad (6.126)$$

A harmadik minket érdeklő geometriai mennyiség a 3.1. táblázatból

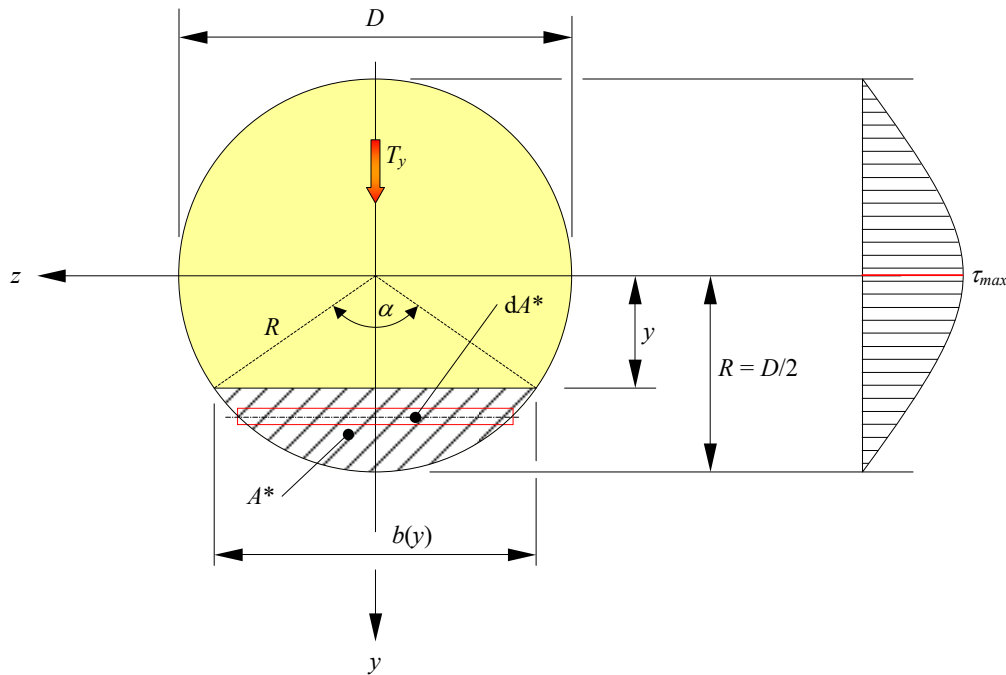
$$I_z = \frac{\pi \cdot R^4}{4}. \quad (6.127)$$

Ezek felhasználásával:

$$\begin{aligned} \tau(y) &= \frac{T_y \cdot S_z^*(y)}{b(y) \cdot I_z} = T_y \cdot \frac{2}{3} \cdot (R^2 - y^2)^{3/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (R^2 - y^2)^{-1/2} \cdot \frac{4}{\pi \cdot R^4} = \\ &= T_y \cdot \left(-\frac{4}{3 \cdot \pi \cdot R^4} \cdot y^2 + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\pi \cdot R^2} \right). \end{aligned} \quad (6.128)$$

Akárcsak az előbbi példában, τ parabolikus változásához jutottunk, a feszültség legnagyobb értéke, a kör $A = \pi \cdot R^2$ területével

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{T_y}{\pi \cdot R^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{T_y}{A}. \quad (6.129)$$



6.23. ábra. Zsuravszkij képletének alkalmazása körkeresztmetszetre

6.11. példa. Háromszög alakú keresztmetszet nyírása

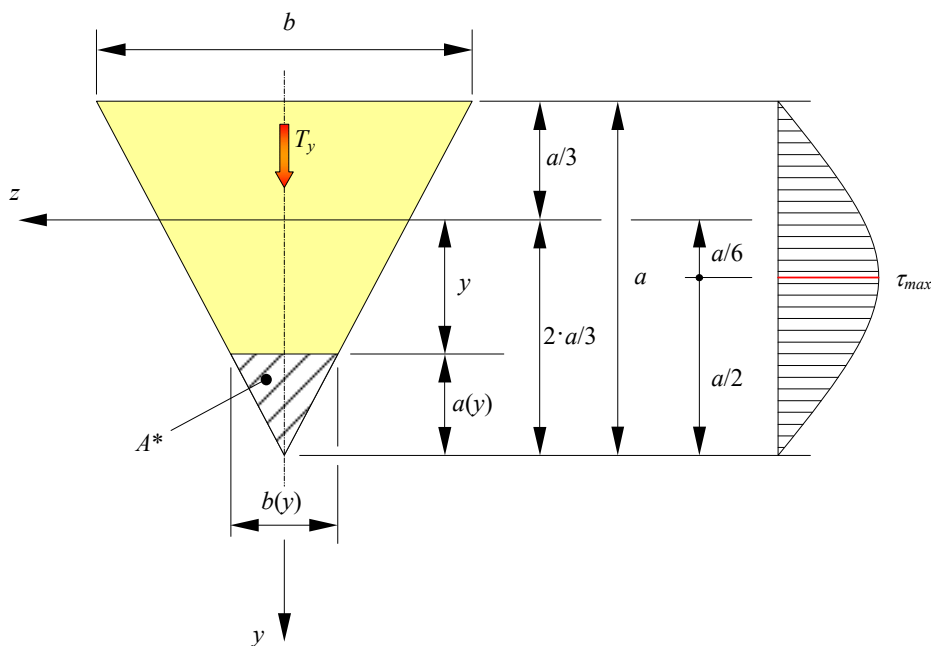
Legyen a 6.24. ábrán látható egyenlő szárú háromszög alakú keresztmetszet. Ennek az idomnak a geometriai középpontja a háromszög magasságvonalán van, ami a keresztmetszet szimmetria-tengelye, az alaptól mérve a magasság harmadánál.

A háromszög y koordinátának megfelelő szélességét a két háromszög, a teljes keresztmetszet és a lemetszett rész hasonlóságából állapíthatjuk meg. A lemetszett rész is egy egyenlő szárú háromszög, amelynek a magassága

$$a(y) = \frac{2}{3} \cdot a - y, \quad (6.130)$$

a háromszögek hasonlóságából pedig

$$\frac{b}{a} = \frac{b(y)}{a(y)} \Rightarrow b(y) = a(y) \cdot \frac{b}{a} = \frac{2}{3} \cdot b - y \cdot \frac{b}{a}. \quad (6.131)$$



6.24. ábra. Háromszög alakú keresztmetszet nyírása

A lementszett rész geometriai középpontja az $a(y)$ magasság harmadánál van:

$$y_{G^*} = y + \frac{a(y)}{3} = \frac{2}{9} \cdot a + \frac{2}{3} \cdot y. \quad (6.132)$$

Ezekkel az adatokkal

$$\frac{S_z^*(y)}{b(y)} = \frac{a(y) \cdot b(y)}{2} \cdot y_{G^*} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot a - y \right) \cdot \left(\frac{2}{9} \cdot a + \frac{2}{3} \cdot y \right) = \frac{2 \cdot a^2 + 3 \cdot a \cdot y - 9 \cdot y^2}{27}, \quad (6.133)$$

és mivel a háromszögre $I_z = b \cdot a^3 / 36$, Zsuravszkij képletét a következőképpen tudjuk felírni:

$$\begin{aligned} \tau(y) &= \frac{T_y \cdot S_z^*(y)}{b(y) \cdot I_z} = T_y \cdot \frac{2 \cdot a^2 + 3 \cdot a \cdot y - 9 \cdot y^2}{27} \cdot \frac{36}{b \cdot a^3} = \\ &= T_y \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{9}{b \cdot a^3} \cdot y^2 + \frac{3}{b \cdot a^2} \cdot y + \frac{2}{b \cdot a} \right). \end{aligned} \quad (6.134)$$

A nyírófeszültség megoszlása ez esetben is parabolikus; ha a legtávolabbi pontok $y = -a/3$, illetve $y = 2 \cdot a/3$ behelyettesítjük, τ mindkét esetben nulla lesz. A semleges síkban, ahol $y = 0$, a keresztmetszet $A = b \cdot a/2$ területével a

$$\tau(0) = \frac{4}{3} \cdot \frac{T_y}{A} \quad (6.135)$$

feszültséghez jutunk, azonban első ránézésre is rájöhethetünk, hogy ez nem a legnagyobb érték, mivel a szimmetrikus parabola csúcsa a magasság felénél van és nem a harmadánál. Matematikai alapossággal a szélsőérték helyét deriválással tudjuk meghatározni:

$$\tau'(y) = T_y \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{18}{b \cdot a^3} \cdot y + \frac{3}{b \cdot a^2} \right) = 0 \Rightarrow y = \frac{a}{6}, \quad (6.136)$$

(ez a hely az alaptól $a/3 + a/6 = a/2$ távolságra, tehát a magasság felénél van), a keresett szélsőérték pedig

$$\tau_{max} = T_y \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{9}{b \cdot a^3} \cdot \frac{a^2}{36} + \frac{3}{b \cdot a^2} \cdot \frac{a}{6} + \frac{2}{b \cdot a} \right) = T_y \cdot 3 \cdot \frac{1}{b \cdot a} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T_y}{A}. \quad (6.137)$$

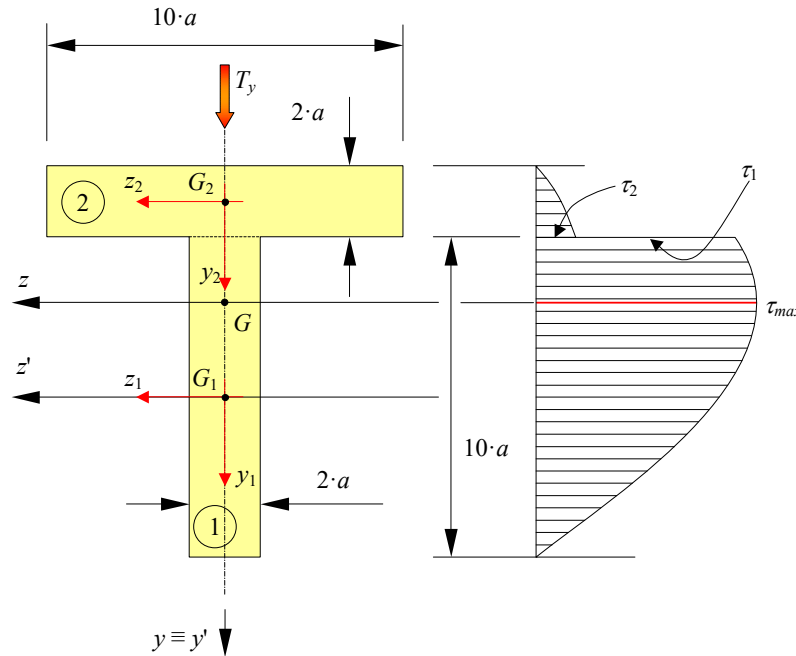
6.12. példa. T-alakú keresztmetszet nyírása

A 6.25. ábrán látható keresztmetszet vízszintes tengely körüli hajlítása és függőleges irányú nyírása esetében először a semleges tengely helyzetét kell meghatároznunk (a másik főirány a szimmetria-tengely). A keresztmetszet nagysága a két téglalap területével

$$A = A_1 + A_2 = (2 \cdot a) \cdot (10 \cdot a) + (10 \cdot a) \cdot (2 \cdot a) = 40 \cdot a^2, \quad (6.138)$$

a z' tengelyre vonatkoztatott elsőrendű nyomatéka pedig a tengely sajátságos helyzetéből fakadóan a 2. idom elsőrendű nyomatékával azonos:

$$S_z' = A_2 \cdot y_{G_2}' = (10 \cdot a) \cdot (2 \cdot a) \cdot (-6 \cdot a) = -120 \cdot a^3. \quad (6.139)$$



6.25. ábra. T-alakú keresztmetszet nyírása

A geometriai középpont koordinátája tehát

$$y_G' = \frac{S_z'}{A} = \frac{-120 \cdot a^3}{40 \cdot a^2} = -3 \cdot a, \quad (6.140)$$

s ezzel megrajzoljuk a centrális koordináta-rendszer vízszintes z tengelyét. Steiner képletét alkalmazva a két téglalapra kapjuk:

$$\begin{aligned} I_z &= I_{z_1} + I_{z_2} = \\ &= \frac{(2 \cdot a) \cdot (10 \cdot a)^3}{12} + (-3 \cdot a)^2 \cdot (2 \cdot a) \cdot (10 \cdot a) + \frac{(10 \cdot a) \cdot (2 \cdot a)^3}{12} + (3 \cdot a)^2 \cdot (10 \cdot a) \cdot (2 \cdot a) = \quad (6.141) \\ &= 533.333 \cdot a^4. \end{aligned}$$

A keresztmetszet $b(y)$ szélességét ez esetben egy lépcsős függvény írja le, minek következtében Zsuravszkij képletét intervallumonként kell alkalmaznunk. Az első intervallum esetében a keresztmetszetet vízszintesen szelő vonal feletti résszel számolunk, mert annak a geometriája egyszerűbb (a vonal alatti rész T-alakú, összetett keresztmetszet lenne). Az elsőrendű nyomatékként kiszámolt mennyiség a Zsuravszkij-képlet levezetésénél említett A^{**} terület nyomatéka, amit fordított előjellel kell vennünk:

$$y \in [-4 \cdot a, -2 \cdot a]: \left\{ \begin{aligned} S_z^*(y) &= -(y + 4 \cdot a) \cdot (10 \cdot a) \cdot \left(y - \frac{y + 4 \cdot a}{2} \right) = \\ &= -\frac{y^2 - 16 \cdot a^2}{2} \cdot 10 \cdot a, \\ b(y) &= 10 \cdot a, \\ \tau(y) &= T_y \cdot \frac{S_z^*(y)}{b(y) \cdot I_z} = T_y \cdot \frac{-\frac{y^2 - 16 \cdot a^2}{2} \cdot 10 \cdot a}{10 \cdot a \cdot 533.333 \cdot a^4} = \\ &= T_y \cdot (-0.0009375 \cdot y^2 + 0.015 \cdot a^2) \cdot \frac{1}{a^4}, \end{aligned} \right. \quad (6.142)$$

$$y \in (-2 \cdot a, 8 \cdot a): \left\{ \begin{aligned} S_z^*(y) &= (8 \cdot a - y) \cdot (2 \cdot a) \cdot \left(y + \frac{8 \cdot a - y}{2} \right) = \\ &= -\frac{y^2 - 64 \cdot a^2}{2} \cdot 2 \cdot a, \\ b(y) &= 2 \cdot a, \\ \tau(y) &= T_y \cdot \frac{S_z^*(y)}{b(y) \cdot I_z} = T_y \cdot \frac{-\frac{y^2 - 64 \cdot a^2}{2} \cdot 2 \cdot a}{2 \cdot a \cdot 533.333 \cdot a^4} = \\ &= T_y \cdot (-0.0009375 \cdot y^2 + 0.06 \cdot a^2) \cdot \frac{1}{a^4}. \end{aligned} \right. \quad (6.143)$$

Észrevehetjük, hogy a keresztmetszet tetején és az alján, ahol $y = -4 \cdot a$, illetve $y = 8 \cdot a$, a nyírófeszültség értéke nulla lesz. Ahol a keresztmetszet szélessége az $y = -2 \cdot a$ koordinátánál ugrás-szerűen változik, ott τ diagramjában is ugrás van: a gerincen a $\tau_1 = 0.05625 \cdot T_y / a^2$, talpon pedig a $\tau_2 = 0.01125 \cdot T_y / a^2$ értékeket számíthatjuk. Észrevehetjük, hogy $\tau_1 = 5 \cdot \tau_2$, ami megfelel a talpszélesség és a gerincvastagság $b_2 / b_1 = 10 \cdot a / 2 \cdot a$ arányának. Másképpen és általánosítva, az ugrás $y = y_{ugrás}$ koordinátájú helyén, a megfelelő szélességekkel:

$$\tau_1 \cdot b_1(y = y_{ugrás}) = \tau_2 \cdot b_2(y = y_{ugrás}). \quad (6.144)$$

A nyírófeszültség maximális értékét intervallumonként kell keressük: ha tisztán matematikai eszközökkel akarjuk ezt megoldani, akkor a $\tau'(y) = 0$ egyenletnek a függvény értelmezési tartományára eső gyökeit kell kiszámítanunk és azokat össze kell hasonlítanunk az értelmezési tartományok határain számolható értékekkel:

$$y \in [-4 \cdot a, -2 \cdot a]: \begin{cases} \tau'(y) = -0.01875 \cdot y \cdot \frac{T_y}{a^4} = 0 \Rightarrow y = 0 \notin [-4 \cdot a, -2 \cdot a), \\ \tau(-4 \cdot a) = 0, \\ \tau(-2 \cdot a) = 0.01125 \cdot \frac{T_y}{a^4}, \end{cases} \quad (6.145)$$

$$y \in (-2 \cdot a, 8 \cdot a]: \begin{cases} \tau'(y) = -0.01875 \cdot y \cdot \frac{T_y}{a^4} = 0 \Rightarrow y = 0 \in (-2 \cdot a, 8 \cdot a], \\ \tau(0) = 0.06 \cdot \frac{T_y}{a^4}, \\ \tau(-2 \cdot a) = 0.05625 \cdot \frac{T_y}{a^4}, \\ \tau(8 \cdot a) = 0. \end{cases} \quad (6.146)$$

Az összehasonlításból következik, hogy a τ_{max} érték most a semleges síkban lép fel, pedig a keresztmetszetnek nincs vízszintes szimmetria-tengelye.

6.13. példa. I-alakú keresztmetszet vízszintes irányú nyírása

Legyen a 3.23. feladatban szereplő I-alakú keresztmetszet, amit y körül hajlítunk és z irányban nyírunk (6.26. ábra). A keresztmetszet „szélességén”, a nyírás iránya miatt, a tulajdonképpeni magasságát kell érteni, az azt megadó függvényt pedig lépcsős függvényként, három intervallumon tudjuk definiálni:

$$\begin{cases} z \in [-5 \cdot a, -a): & b(z) = 4 \cdot a, \\ z \in (-a, a): & b(z) = 14 \cdot a, \\ z \in (a, 5 \cdot a]: & b(z) = 4 \cdot a, \end{cases} \quad (6.147)$$

ugyanis hol csak a két talpat metsszük (a két talp vastagsága $2 \times 2 \cdot a$), hol a gerincet is. Azt is észrevehetjük, hogy az y tengely szimmetria-tengely, $\tau(z)$ szimmetriája miatt tehát elég lesz a fél-keresztmetszeten, például a pozitív z koordináták tartományán dolgozni.

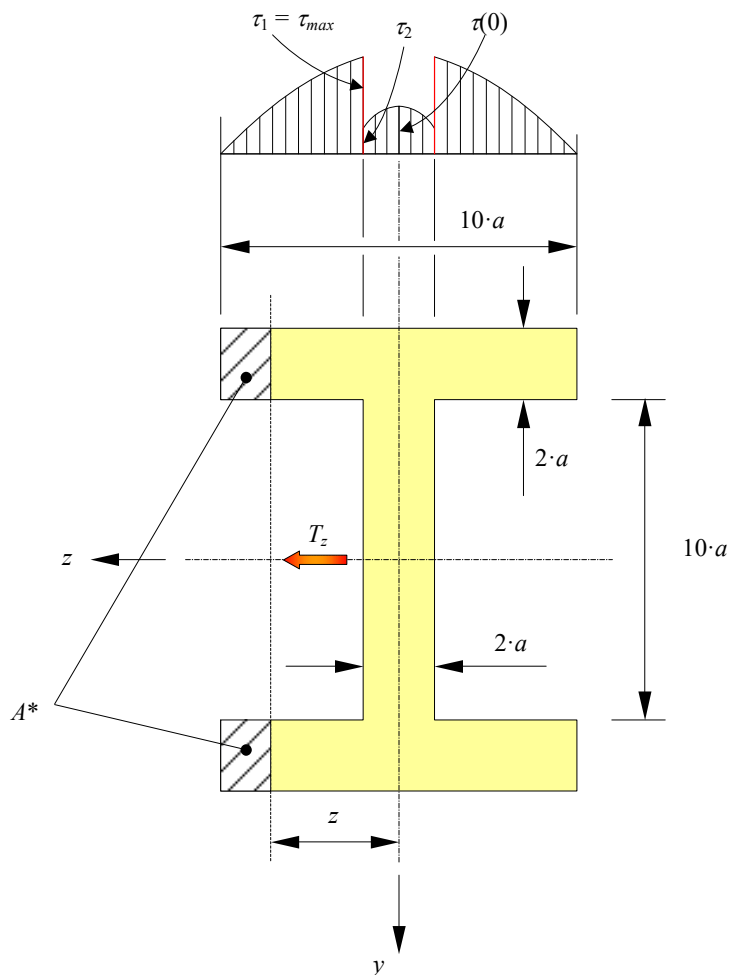
A $z \in (a, 5 \cdot a]$ tartományon a talpkból lemetezett rész két téglalaphoz áll (6.26. ábra), azoknak az y tengelyre vonatkoztatott elsőrendű nyomatéka pedig

$$S_{y}^* (z) = 2 \cdot (5 \cdot a - z) \cdot (2 \cdot a) \cdot \left(z + \frac{5 \cdot a - z}{2} \right) = 50 \cdot a^3 - 2 \cdot a \cdot z^2. \quad (6.148)$$

A szimmetria-tengely pozitív oldalán, a $z \in [0, a)$ intervallumon az iménti két téglalaphoz hozzáadódik a gerincből lemetezett téglalap is (6.27. ábra); itt tehát

$$S_{y}^* (z) = 50 \cdot a^3 - 2 \cdot a \cdot z^2 + (a - z) \cdot (10 \cdot a) \cdot \left(z + \frac{a - z}{2} \right) = 55 \cdot a^3 - 7 \cdot a \cdot z^2. \quad (6.149)$$

A keresztmetszetnek az y tengelyre vonatkoztatott másodrendű nyomatéka a 3.23. feladat megoldásából $I_y = 340 \cdot a^4$.



6.26. ábra. I-alakú keresztmetszet nyírása

Ezekkel az adatokkal:

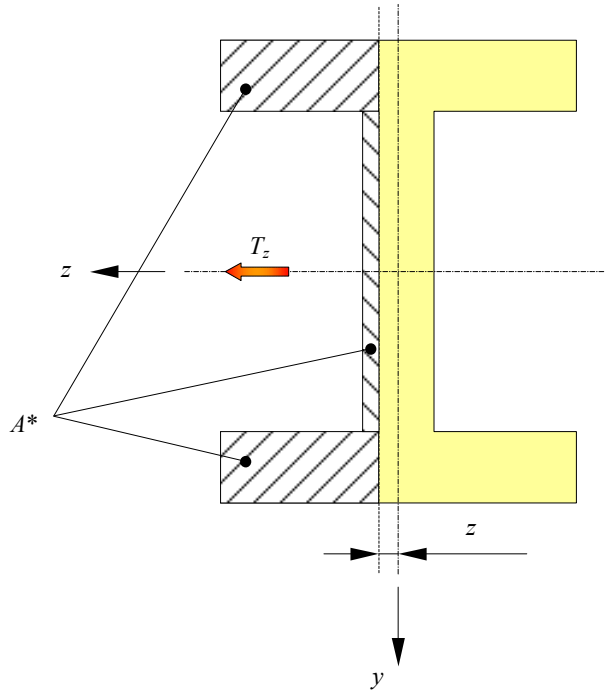
$$z \in [-5 \cdot a, -a) \cup (a, 5 \cdot a]: \quad \tau(z) = T_z \cdot \frac{S_y^*(z)}{b(z) \cdot I_y} = T_z \cdot \frac{50 \cdot a^3 - 2 \cdot a \cdot z^2}{(4 \cdot a) \cdot (340 \cdot a^4)} = T_z \cdot \frac{25 \cdot a^2 - z^2}{680 \cdot a^4}, \quad (6.150)$$

$$z \in (-a, a): \quad \tau(z) = T_z \cdot \frac{S_y^*(z)}{b(z) \cdot I_y} = T_z \cdot \frac{55 \cdot a^3 - 7 \cdot a \cdot z^2}{(14 \cdot a) \cdot (340 \cdot a^4)} = T_z \cdot \frac{55 \cdot a^2 - 7 \cdot z^2}{4760 \cdot a^4}.$$

τ megoszlása ez esetben is parabolikus. Meggyőződhetünk, hogy a legtávolabbi pontokban, ahol $z = \pm 5 \cdot a$, a nyírófeszültség nulla, a szimmetria-tengelyen pedig $\tau(0) = T_z \cdot \frac{11}{952 \cdot a^2}$. A másodfokú változás és a szimmetria miatt a $z \in (-a, a)$ intervallumon ez az érték τ maximumát jelenti, de ez csak egy lokális maximum, ugyanis a talp és a gerinc határán számolható $\tau_1 = T_z \cdot \frac{3}{85 \cdot a^2}$ (ami a talpon érvényes) és $\tau_2 = T_z \cdot \frac{6}{595 \cdot a^2}$ (ami a gerincen érvényes) értékek közül τ_1 ennél nagyobb. Megállapíthatjuk tehát, hogy

$$\tau_{max} = \tau_1 = T_z \cdot \frac{3}{85 \cdot a^2}. \quad (6.151)$$

A nyírófeszültség diagramját a 6.26. ábrán láthatjuk. E nyírófeszültség iránya az eddigi példákkal ellentétben vízszintes: pontosabban e példában a z irányú nyírásból származó $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ feszültség került meghatározásra, míg az a korábbi példákban Zsuravszkij képletéből, az y irányú nyírásból a $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ feszültséget tudtuk meghatározni.



6.27. ábra. Az I-alakú keresztmetszet gerincének nyírása

Egyszerűbb esetekben a fenti példákban vázolt matematikai eljárást nem kell feltétlenül követni, sőt, a feszültségeloszlást sem kell minden esetben megrajzolni, ha csupán a τ_{max} mennyiség meghatározása a cél. A következő észrevételekre támaszkodhatunk:

→ ha a keresztmetszet szélességét jelentő $b(y)$ függvény egy polinom, akkor τ -t egy y -ban másodfokú polinom-függvény írja le. Ennek az a magyarázata, hogy $S_z^*(y)$ -t az

$$\int_{A^*} y \cdot dA^* = \int_y^{y_{max}} y \cdot b(y) \cdot dy \text{ integrál adja, ahol az } y \cdot b(y) \text{ szorzat integrálásával egy, } b(y)$$

fokszámánál kettővel magasabb fokú polinomhoz jutunk. E két polinom maradékos osztásakor az $S_z^*(y)/b(y)$ mennyiséget egy másodfokú polinom (mint hányados) és egy legfennebb elsőfokú polinom (mint maradék) összegeként kapjuk. Ezt az észrevételt az esetek nagy többségében felhasználhatjuk, ugyanis a műszaki gyakorlatban a keresztmetszet körvonalát rendszerint egyenesek és körívek alkotják;

→ ha a z tengely szimmetria-tengely, akkor $\tau(y)$ megoszlása is szimmetrikus lesz;

→ az S_z^* mennyiség legnagyobb értéke nyilvánvalóan a fél-keresztmetszetnek felel meg (tehát a z tengely alatti vagy feletti résznek). Ha a z tengelytől távolodva a

keresztmetszet szélessége egyik irányban sem csökken, akkor ott τ -nak legalább lokális maximuma kell legyen;

→ a z tengelytől legtávolabb eső pontokban $\tau = 0$;

→ hirtelen szélesség-változáskor τ is hirtelen változik, de a $\tau(y) \cdot b(y)$ szorzat állandó marad.

6.14. példa. Amikor a nyírófeszültség változása nem parabolikus

Legyen egy exponenciálisan növekedő vastagságú keresztmetszet, ahol $b(y) = e^y$ (6.28. ábra). A keresztmetszet két oldalát leíró görbék egyenlete $z = \pm 0.5 \cdot e^y$, vagy pedig, ha z -t tekintjük független koordinátának, akkor $y = \ln(2 \cdot |z|)$.

E keresztmetszet z tengelyre vonatkoztatott elsőrendű nyomatékához az $\int_{y_{min}}^{y_{max}} y \cdot e^y dy$ integrált kell kiszámítanunk. Parciális integrálással:

$$\int y \cdot e^y dy = y \cdot e^y - \int e^y dy = e^y \cdot (y-1) + c, \quad (6.152)$$

a keresett elsőrendű nyomaték pedig, a határértékek behelyettesítésével,

$$S_z = e^{y_{max}} \cdot (y_{max} - 1) - e^{y_{min}} \cdot (y_{min} - 1). \quad (6.153)$$

Ha azt szeretnénk, hogy a z tengely főtengely legyen, az y_{min} és az y_{max} értékeket úgy kell megválasztanunk, hogy az előbbi mennyiség nulla legyen. Az $S_z = 0$ egyenlet azonban transzcendens, tehát algebrailag nem oldható meg, így például az y_{max} értékét a megválasztott y_{min} függvényeként megadó képletet nem tudjuk előállítani. Példánkban tekintsük a függőleges koordinátát az $y_{min} = -1$ m egységnyi értékkel, ekkor ezt az $S_z = 0$ egyenletbe behelyettesítve és azt numerikusan megoldva az $y_{max} = 0.59362426$ m koordinátához jutunk.

A keresztmetszet z tengelyre vonatkoztatott másodrendű nyomatékához, a parciális integrálás szabályát kétszer is alkalmazván,

$$\int y^2 \cdot e^y dy = y^2 \cdot e^y - \int 2 \cdot y \cdot e^y dy = e^y \cdot (y^2 - 2 \cdot y - 2) + c, \quad (6.154)$$

a felső és az alsó határértékek behelyettesítésével pedig az $I_z = 0.27013 \text{ m}^4$ értékhez jutunk.

Zsuravszkij képletével tehát

$$\begin{aligned} \tau(y) &= \frac{T_y \cdot S_z^*(y)}{b(y) \cdot I_z} = T_y \cdot \frac{e^{0.59362} \cdot (0.59362 - 1) - e^y \cdot (y - 1)}{e^y} \cdot \frac{1}{0.27013} = \\ &= T_y \cdot \frac{-0.73576 - e^y \cdot (y - 1)}{0.27013 \cdot e^y} \text{ Pa} \end{aligned} \quad (6.155)$$

(T_y -t newtonban kell behelyettesíteni). Észrevehetjük, hogy a változás most nem parabolikus. Leellenőrizhetjük, hogy y_{min} és y_{max} értékét behelyettesítve a nyírófeszültség nulla értékéhez jutunk. E feszültség legnagyobb értékének a helyét a $\tau'(y) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$\begin{aligned} \tau'(y) &= \frac{T_y}{0.27013} \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{-0.73576 - e^y \cdot (y - 1)}{e^y} \right) = T_y \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{-0.73576}{e^y} - y + 1 \right) = \\ &= T_y \cdot (0.73576 \cdot e^{-y} - 1) = 0 \Rightarrow y = -0.30685 \text{ m.} \end{aligned} \quad (6.156)$$

E koordinátával

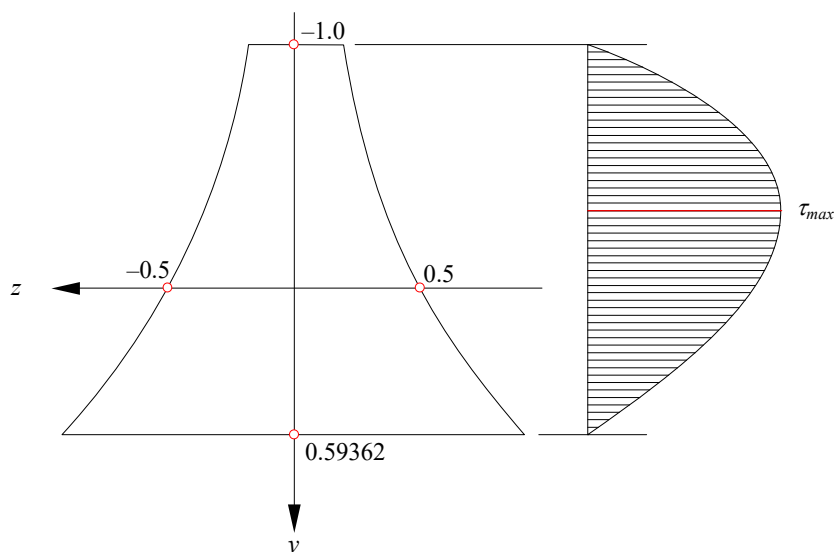
$$\tau_{max} = T_y \cdot \frac{-0.73576 - e^{-0.30685} \cdot (-0.30685 - 1)}{0.27013 \cdot e^{-0.30685}} = 1.13594 \cdot T_y \text{ Pa} . \quad (6.157)$$

A keresztmetszet területe

$$A = \int_{y_{min}}^{y_{max}} e^y dy = e^{y_{max}} - e^{y_{min}} = 1.44265 \text{ m}^2 , \quad (6.158)$$

tehát ez esetben is a feszültség legnagyobb értéke jóval nagyobb a T_y / A értéknél.

A semleges síkban $\tau(0) = 0.97820 \cdot T_y \text{ Pa}$. A feszültség megoszlását a 6.28. ábrán láthatjuk.



6.28. ábra. Exponenciálisan változó szélességű keresztmetszet nyírása

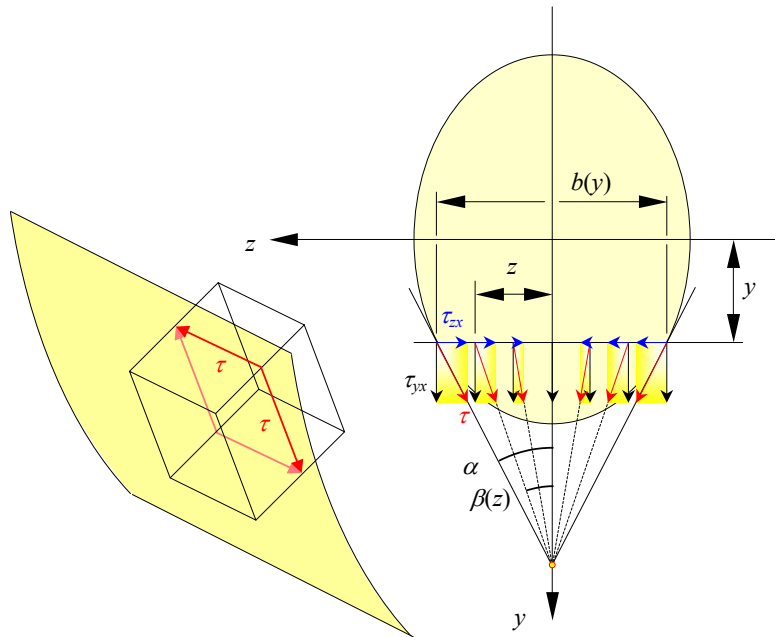
6.2.3. A harántirányú nyírófeszültség

Zsuravszkij képlete a nyíró-igénybevétel irányában megjelenő feszültséget adja, tehát például a T_y irányába eső τ_{yx} feszültséget. Ha a keresztmetszeten csak ez a nyírófeszültség-összetevő jelenne meg, akkor a tartónak a függőleges iránnyal (y tengellyel) valamilyen α szöget bezáró oldalfületein is valamilyen nyírófeszültségnek kellene fellépnie, azok dualitása miatt. Terheletlen felületeken azonban feszültség nem léphet fel, éppen ezért τ a peremhez érintőleges irányú kell legyen. Ha elfogadjuk, hogy Zsuravszkij képlete e feszültségnek az y tengely irányába eső vetületét adja, akkor feltételeznünk kell a nyíró-igénybevétel irányára merőleges τ_{zx} feszültség megjelenését is (6.29. ábra):

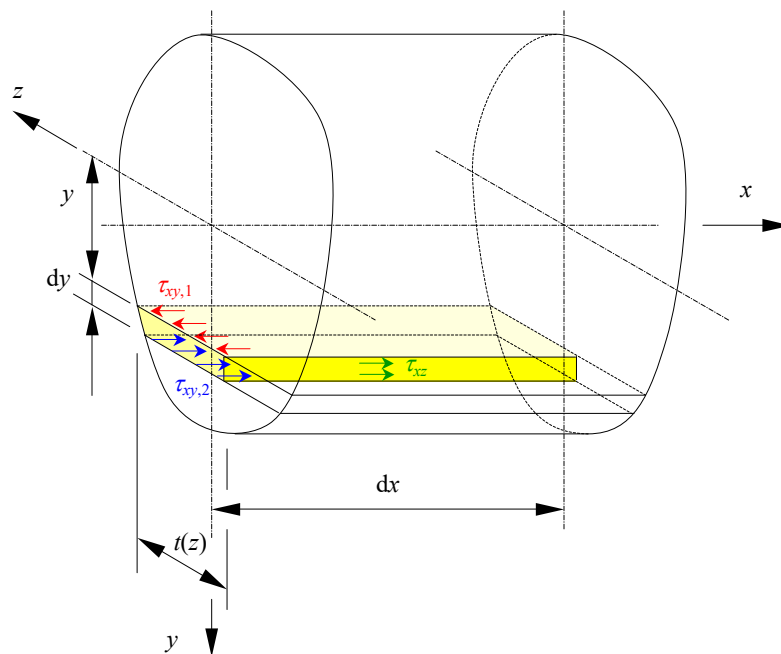
$$\tau_{yx} = \tau \cdot \cos \alpha, \quad \tau_{zx} = \tau \cdot \sin \alpha = \tau_{yx} \cdot \operatorname{tg} \alpha . \quad (6.159)$$

A Zsuravszkij-képlet levezetéséhez hasonlóan és annak felhasználásával felírhatnánk a 6.30. ábrán feltüntetett szeletke egyensúlyi egyenleteit, azonban a reményeink ellenére ez nem vezetne a $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ feszültségek változását leíró képlethez. Ez azért van, mert a Zsuravszkij-képlettel a szeletke alsó és felső felületén kiszámolt $\tau_{xy,1}$, illetve $\tau_{xy,2}$ feszültségek a keresztmetszeten

fellépő σ_x feszültségekkel tartanak egyensúlyt (hiszen erre a hipotézisre alapoz a képlet), így τ_{xz} kiszámolt értéke nulla lenne.



6.29. ábra. A harántirányú nyírófeszültség szimmetrikus keresztmetszeten



6.30. ábra. Kísérlet τ_{xz} meghatározására

τ_{xz} megoszlásáról biztosat állítani legfeljebb csak annyit tudunk, hogy ha y szimmetria-tengely, akkor ez a megoszlás is szimmetrikus lesz (egyébként a tartó tengelye a nem-szimmetrikus

alakváltozás következtében oldalirányban is elmozdulna). Egy feltételezés szerint, szimmetrikus keresztmetszetek esetében, bármely $y = \text{áll.}$ vonal mentén a τ feszültség iránya egy rögzített ponton keresztül megy át: ha e feszültség függőleges összetevője az illető vonal mentén állandó (a Zsuravszkij-képlet által adott érték), akkor az ábra jelöléseivel a vízszintes összetevőt a következőképpen számíthatjuk:

$$\tau_{zx}(z) = \tau(z) \cdot \sin \beta(z) = \tau_{yx} \cdot \operatorname{tg} \beta(z) = \tau_{yx} \cdot \frac{z}{d} = \tau_{yx} \cdot \frac{z}{b(y)/2} = \tau_{yx} \cdot \frac{2 \cdot z}{b(y)} \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (6.160)$$

E vízszintes feszültség-összetevő tehát a vízszintes vonalak mentén lineárisan változik, a legnagyobb nagysággal (ami $\tau_{yx} \cdot \operatorname{tg} \alpha$) pedig a tengelytől mért legtávolabbi pontokban jelentkezik.

Nem-szimmetrikus keresztmetszetek esetében nem létezik olyan egyszerű eljárás, amelynek alapján a harántirányú nyírófeszültség megoszlása kiszámítható lenne.

6.2.4. Vékonyfalú tartók nyírása

A harántirányú nyírófeszültség hatását a tömör keresztmetszetek esetében rendszerint elhanyagoljuk, a tapasztalat szerint a vékonyfalú tartók esetében azonban ezt is számításba kell venni.

E nyírófeszültség meghatározására azt az észrevételt használjuk fel, mely szerint a keresztmetszet terheletlen peremén feszültség nem jelenhet meg. Eszerint például a 6.25. ábrán látható T-alakú keresztmetszet esetében a Zsuravszkij-képlettel kiszámított, függőleges irányú τ_2 feszültség nem jelenhet meg a talp (másképpen: öv – a vízszintes lemez) alsó vízszintes peremén; a valóságban a talp és a gerinc (a függőleges lemez) csatlakozásánál a nyírófeszültség folyamatosan, és nem ugrás-szerűen változik, e változást pedig egyszerű relációkkal leírni nem tudjuk.

Ha figyelembe vesszük az említett észrevételt és ha elfogadjuk azt a feltevést, mely szerint a harántirányú nyírófeszültség nagysága a talp vastagságában függőleges irányban nem változik, akkor a 6.31. ábrán látható lemetszett rész egyensúlyi egyenlete a 6.30. ábra szeletkéjével ellentétben egy nullától különböző $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ feszültséghez vezet, amely a hajlításból származó, a Navier-képlettel kiszámolt normálfeszültségekkel tart egyensúlyt:

$$N^{**}_1 + T^{**} - N^{**}_2 = 0, \quad (6.161)$$

ahol, a Zsuravszkij-képlet levezetésénél használt eljárás szerint

$$N^{**}_1 = \int_{A^{**}} \sigma(y) \, dA = \int_{A^{**}} \frac{M_z}{I_z} \cdot y \, dA = \frac{M_z}{I_z} \cdot S^{**}_z, \quad (6.162)$$

$$N^{**}_2 = \int_{A^{**}} (\sigma(y) + d\sigma(y)) \, dA = \int_{A^{**}} \frac{M_z + dM_z}{I_z} \cdot y \, dA = \frac{M_z + dM_z}{I_z} \cdot S^{**}_z, \quad (6.163)$$

$$T^{**} = \tau_{xz} \cdot t \cdot dx, \quad (6.164)$$

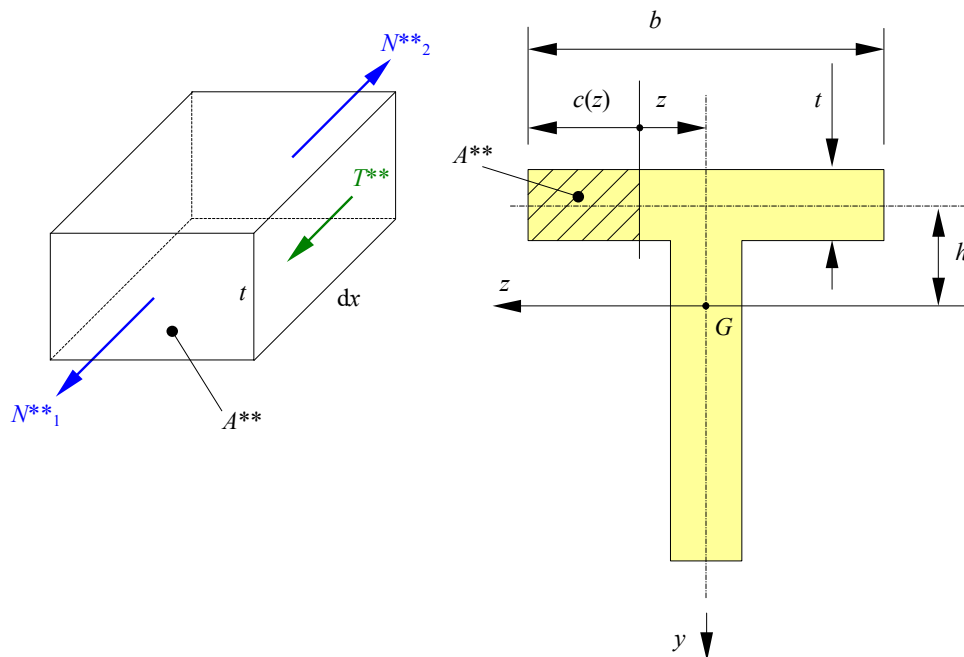
ahol S^{**}_z a talpról lemetszett A^{**} terület z tengelyre vonatkoztatott elsőrendű nyomatéka. Az egyensúlyi egyenletből

$$\tau_{xz} = \frac{dM_z}{I_z} \cdot \frac{S^{**}_z}{t \cdot dx}, \quad (6.165)$$

tehát a harántirányú nyírófeszültséget a Zsuravszkij-képletre hasonló formában adó

$$\tau_{xz} = \frac{T_y \cdot S_{z}^{**}}{t \cdot I_z} \quad (6.166)$$

összefüggéshez jutunk.



6.31. ábra. τ_{xz} meghatározása vékonyfalú tartók esetében

Ha a talp vízszintes (a z tengellyel párhuzamos) és a vastagsága állandó, ahogyan az a 6.31. ábrán szereplő példán is látható, akkor a lementszett darab területe

$$A^{**} = c(z) \cdot t = \left(\frac{b}{2} - z \right) \cdot t = \frac{(b - 2 \cdot z) \cdot t}{2}. \quad (6.167)$$

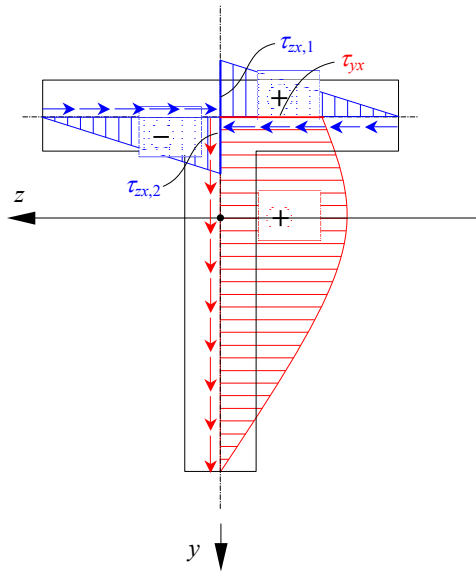
Ennek a z tengelyre vonatkoztatott elsőrendű nyomatéka a talp középvonalának h magasságával

$$S_{z}^{**} = -\frac{(b - 2 \cdot z) \cdot t \cdot h}{2}, \quad (6.168)$$

így végső soron levonhatjuk azt a következtetést, hogy a talpon a harántirányú nyírófeszültség a z tengely mentén lineárisan változik.

A vékonyfalú keresztmetszetek esetében a vastagság irányában ható nyírófeszültségek elhanyagolhatók, csak az oldalak középvonala mentén ható nyírófeszültségeket szokták figyelembe venni és azokat a vastagság irányában állandónak tekintik. A példaként elemzett T alakú keresztmetszet esetében ezek diagramja a 6.32. ábrán látható. Ezt a nyírófeszültséget a fal (gerinc, öv) t vastagságával szorozva a *nyírófolyamnak* nevezett, vonal mentén megoszló erőként működő $t \cdot \tau$ mennyiséghez jutunk.

A szimmetria miatt a példaként vett keresztmetszeten a nyírófeszültség diagramja is szimmetriát mutat: $|\tau_{xz,1}| = |\tau_{xz,2}|$. Emiatt a nyírófolyam eredője – amit, mint vonal mentén megoszló erőnek, a keresztmetszet középvonala mentén történő integrálással számíthatunk ki, – függőleges irányú lesz.



6.32. ábra. A nyírófeszültségek egy T alakú tartó esetében

6.2.4. A hajlított és nyírt rúd alakváltozása

A hajlított rúd keresztmetszetén megjelenő normálfeszültséget Navier képlete adja. E képlet szerint a feszültség az y koordináta lineáris függvénye, belőle következően a rúd tengelyének irányában mért fajlagos alakváltozást szintén az y koordináta lineáris függvényeként kapjuk:

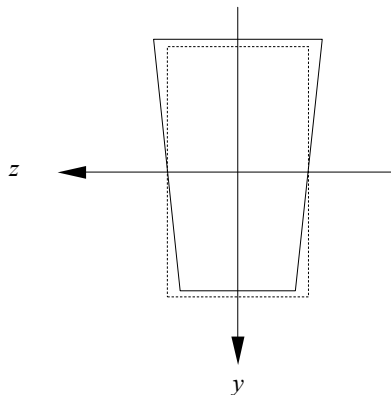
$$\varepsilon(y) = \frac{M_z}{E \cdot I_z} \cdot y. \quad (6.161)$$

A hossz-menti alakváltozást harántirányú alakváltozás követi, egyenes arányosságot feltételezve ezt $\varepsilon_t = -\nu \cdot \varepsilon$ formában lehet megadni, a Poisson-együttható segítségével. E harántirányú alakváltozás miatt a keresztmetszet a hajlítás következtében torzulni fog: a nyomott oldalon, ahol $\varepsilon < 0$, a méretei növekedni fognak, a húzott oldalon pedig, ahol $\varepsilon > 0$, a méretek csökkenésével kell számoljunk. Például a téglalap alakú keresztmetszet a tiszta hajlítás következtében trapézvá torzul (6.30. ábra).

A hajlított és nyírt keresztmetszeten Zsuravszkij képlete alapján, a nyírófeszültség megjelenésének következtében a

$$\gamma(y) = \frac{T_y \cdot S_z^*(y)}{G \cdot b(y) \cdot I_z} \quad (6.162)$$

fajlagos alakváltozással is számolhatunk: γ annak a derékszögnek a megváltozása, amelyet a rúd keresztmetszete zárt be a rúd tengelyével. E fajlagos alakváltozás következtében a rúd keresztmetszete γ szöggel elfordul a tengelyre merőleges pozíciójából, és mivel ez a szög az y koordinátával változik, a nyírás következtében a keresztmetszet meg is görbül: szigorúan véve tehát a tengelyre merőlegesen maradó sík keresztmetszetek Bernoulli-féle hipotézise nem állja meg a helyét (6.31. ábra).



6.30. ábra. A keresztmetszet hajlítás következtében fellépő torzulása

A kis alakváltozások hipotézisének elfogadásával azonban úgy a normálfeszültség miatt megjelenő 6.161, mint a nyírófeszültség által előidézett 6.162. fajlagos alakváltozásokat elhanyagoljuk, a hajlított és nyírt rúd deformált alakjának kiszámításakor csak a tengely irányában fellépő nyúlást-rövidülést vesszük figyelembe, ahogyan azt a tiszta hajlítás esetében tettük a 6.1.2. alfejezet szerint.

Megoldott feladatok

2.1. példa. Merőleges koncentrált erővel terhelt kéttámaszú tartó reakciói	30
2.2. példa. Koncentrált ferde erővel terhelt kéttámaszú tartó reakciói	31
2.3. példa. Egyenletesen megoszló merőleges erővel terhelt kéttámaszú tartó reakciói	33
2.4. példa. Egyenletesen megoszló erővel részben terhelt kéttámaszú tartó reakciói	34
2.5. példa. Egyenletesen megoszló erővel részben terhelt kéttámaszú konzolos tartó reakciói	35
2.6. példa. Lineárisan, háromszög szerint megoszló erővel terhelt kéttámaszú tartó reakciói	35
2.7. példa. Trapéz szerint megoszló erővel terhelt kéttámaszú tartó reakciói	37
2.8. példa. Koncentrált hajlítónyomatékkal terhelt kéttámaszú tartó reakciói	39
2.9. példa. Koncentrált erővel merőlegesen terhelt, egyik végén befogott tartó reakciói	40
2.10. példa. Koncentrált erővel ferdén terhelt, egyik végén befogott tartó reakciói	40

2.11. példa. Koncentrált hajlítónyomatékkal terhelt, egyik végén befogott tartó reakciói	41
2.12. példa. Koncentrált csavarónyomatékkal terhelt, egyik végén befogott tartó reakciói	41
2.13. példa. Lineárisan megoszló erővel terhelt, egyik végén befogott tartó reakciói	42
2.14. példa. Megoszló tengelyirányú erővel terhelt kéttámaszú tartó reakciói	43
2.15. példa. Megoszló ferde erővel terhelt, egyik végén befogott tartó reakciói	44
2.16. példa. Megoszló nyomatékkal terhelt tartók	45
2.17. példa. Ferde támaszú tartó reakciói	46
2.18. példa. A merőleges koncentrált erővel terhelt kéttámaszú tartó igénybevételei	48
2.19. példa. Az egyenletesen megoszló erővel terhelt kéttámaszú tartó igénybevételei	50
2.20. példa. Lineárisan, háromszög szerint megoszló erővel terhelt kéttámaszú tartó igénybevételei	52
2.21. példa. Az egyenletesen megoszló erővel részben terhelt kéttámaszú tartó igénybevételei	59
2.22. példa. Az egyenletesen megoszló erővel részben terhelt kéttámaszú konzolos tartó igénybevételei	62
2.23. példa. Trapéz szerint megoszló erővel terhelt kéttámaszú tartó igénybevételei	65
2.24. példa. Koncentrált ferde erővel terhelt kéttámaszú tartó igénybevételei	69
2.25. példa. Koncentrált erővel terhelt ferde támaszú tartó igénybevételei	70
2.26. példa. Megoszló tengelyirányú erővel terhelt kéttámaszú tartó igénybevételei	72
2.27. példa. Koncentrált hajlítónyomatékkal terhelt kéttámaszú tartó igénybevételei	73
2.28. példa. Koncentrált erővel merőlegesen terhelt, egyik végén befogott tartó igénybevételei	75
2.29. példa. Koncentrált erővel ferden terhelt, egyik végén befogott tartó igénybevételei	75
2.30. példa. Koncentrált hajlítónyomatékkal terhelt, egyik végén befogott tartó igénybevételei	75
2.31. példa. Koncentrált csavarónyomatékkal terhelt, egyik végén befogott tartó igénybevételei	76
2.32. példa. Lineárisan megoszló erővel terhelt, egyik végén befogott tartó igénybevételei	77
2.33. példa. Megoszló ferde erővel terhelt, egyik végén befogott tartó igénybevételei	79
2.34. példa. Megoszló hajlítónyomatékkal terhelt kéttámaszú tartó igénybevételei	79
2.35. példa. Megoszló csavarónyomatékkal terhelt, egyik végén befogott tartó igénybevételei	81
2.36. példa. Megoszló erővel terhelt, kéttámaszú ferdetengelyű tartó igénybevételei	81
2.37. példa. Egy mereven befogott törtvonalú tartó reakcióinak és igénybevételeinek kiszámítása	84
2.38. példa. Egy kéttámaszú törtvonalú tartó reakcióinak és igénybevételeinek kiszámítása	86
2.39. példa. Koncentrált erővel terhelt kéttámaszú íves tartó	91
2.40. példa. Megoszló erővel terhelt kéttámaszú íves tartó	93
3.1. példa. A téglalap területe	100
3.2. példa. A háromszög területe	100
3.3. példa. A trapéz területe	101
3.4. példa. A körcikk területe	101
3.5. példa. A trapéz, mint összetett idom	102
3.6. példa. Egy kilyukasztott idom	102
3.7. példa. A téglalap elsőrendű nyomatékai	103
3.8. példa. A háromszög elsőrendű nyomatékai	104
3.9. példa. A körcikk elsőrendű nyomatékai	104
3.10. példa. A téglalap geometriai középpontja	107
3.11. példa. A háromszög geometriai középpontja	107
3.12. példa. A körcikk geometriai középpontja	108
3.13. példa. A derékszögű trapéz geometriai középpontja	109
3.14. példa. Egy lyukas idom geometriai középpontja	110
3.15. példa. A téglalap másodrendű nyomatékai	113
3.16. példa. A derékszögű háromszög másodrendű nyomatékai	115
3.17. példa. A körcikk másodrendű nyomatékai	116
3.18. példa. A téglalap főirányai és főértékei	120
3.19. példa. A körcikk főirányai és főértékei	121
3.20. példa. A derékszögű háromszög főirányai és főértékei	121
3.21. példa. Szimmetria-tengelyek nélküli összetett idom	122
3.22. példa. Egy szimmetria-tengellyel rendelkező összetett idom	125
3.23. példa. Két szimmetria-tengellyel rendelkező összetett idom	127
4.1. példa. A meggátolt hőtágulás által okozott feszültség	149
4.2. példa. Tengely irányban lineárisan terhelt rúd méretezése és annak alakváltozása	155
4.3. példa. Elektromos távvezeték	157
4.4. példa. Összetett keresztmetszetű sodrony teherbíró képessége	159
4.5. példa. Az egyenletes szilárdságú rúd	160
4.6. példa. Kötelekkel felfüggesztett gerenda	162
4.7. példa. Sztatikailag határozatlan rácsos szerkezet	163

5.1. példa. Sarokvarrat méretezése	179
5.2. példa. Csapszeg méretezése	181
6.1. példa. Hajlított rúd méretezése	187
6.2. példa. Hajlított rúd teherbíró képessége	189
6.3. példa. Nem szimmetrikus viselkedésű anyagból készült hajlított rúd teherbíró képessége	190
6.4. példa. Nyomatékkal terhelt mereven befogott rúd alakváltozása	192
6.5. példa. Koncentrált erővel terhelt kéttámaszú rúd alakváltozása	194
6.6. példa. Ferde hajlítás	202
6.7. példa. Összetett keresztmetszetű rúd hajlítása	207
6.8. példa. Összetett keresztmetszetű rúd egyenes hajlításának számítása az egyenértékű területek módszerével	210
6.9. példa. Zsuravszkij képletének alkalmazása a téglalap alakú keresztmetszet esetére	217
6.10. példa. Zsuravszkij képletének alkalmazása körkeresztmetszet esetére	218
6.11. példa. Háromszög alakú keresztmetszet nyírása	219
6.12. példa. T-alakú keresztmetszet nyírása	221
6.13. példa. I-alakú keresztmetszet vízszintes irányú nyírása	223
6.14. példa. Amikor a nyírófeszültség változása nem parabolikus	226