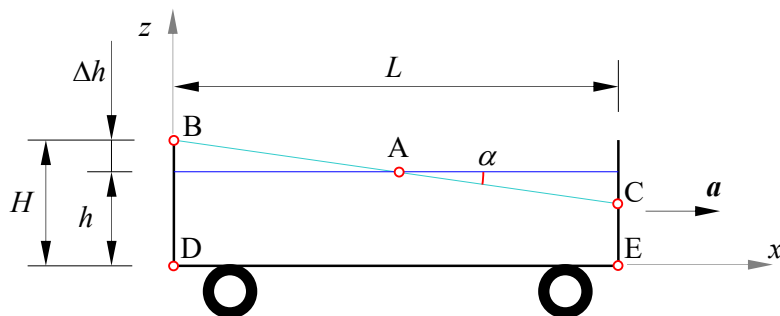


Kakucs András

ÁRAMLÁSTAN
– megoldott feladatok –

1. A SZABAD FELSZÍN MEGHATÁROZÁSA

Az alábbi (1.2.) ábrán egy téglatest alakú tartály látható, amely egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgást végez, a gyorsulással halad az ábra bal oldalától a jobb oldala felé. Mekkora lehet e gyorsulás legnagyobb értéke ahhoz, hogy a tartályból a folyadék ne ömöljön ki? Mekkora nyomást gyakorol ekkor a folyadék a tartály falaira? Ismertnek tekintjük a tartály L hosszúságát és H magasságát, valamint a folyadék nyugalmi állapotban mért h mélységét.



1.1. ábra. Gyorsuló tartály

E feladat-típus esetében a hidrosztatikának az összenyomhatatlan fluidumokra (ideális folyadékokra) érvényes alapegyenletéből indulunk ki:

$$p + \rho \cdot U = \text{konst.}$$

Ebben az egyenletben p a hidrosztatikai nyomás, ρ a folyadék sűrűsége (mely tehát egy állandó érték), U pedig a térfogati erők potenciálja.

Ez utóbbit a következőképpen írjuk fel:

$$U = -\int (f_x dx + f_y dy + f_z dz),$$

ahol az integrál alatt a fajlagos térfogati erő tengelyekre eső vetületeit, komponenseit látjuk. A térfogati erő ez esetben az egységnyi tömegű fluidumra ható erő ($m=1$) – ezt azért kell kihangsúlyozni, mivel más tudományterületeken, például a rugalmasságtanban, ez az egységnyi térfogatra ható erő). Ezen észrevétel alapján tehát kijelenthetjük, hogy az f_x , f_y és f_z vetületek tulajdonképpen gyorsulás jellegű mennyiségek.

Példánkban a tartályban levő folyadékra kétfajta erő hat: a gravitáció és a tehetetlenség. Ennek következtében az eredő térfogati erő komponenseit a következőképpen írhatjuk fel, az ábrán feltüntetett koordináta-rendszer tengelyeihez igazodván:

$$f_x = -a, \quad f_y = 0, \quad f_z = -g. \quad (1.1)$$

Az y tengely az ábra síkjára merőleges és befelé mutat. Ebben az irányban nem hatnak térfogati erők, így a feladat gyakorlatilag kétdimenzióssá redukálódik. A mínusz előjelek

magyarázata az, hogy mindkét erő a tengelyek negatív irányába mutat (a tehetetlenségi erő a gyorsulás irányával ellentétes).

E komponenseket a potenciál integrál-kifejezésébe behelyettesítve:

$$U = -\int(-a \, dx + 0 \, dy - g \, dz) = a \cdot x + g \cdot z + C, \quad (1.2)$$

ahol C egy integrálási konstans (a képlet ugyanis egy határozatlan integrál).

Tudjuk, hogy az

$$U = \text{áll.}$$

egyenletek olyan felületeket írnak le, amelyeken a potenciál értéke állandó – ezek az ekvipotenciális felületek. Amennyiben a potenciál állandó, akkor a hidrosztatika alapegyenletéből (az első felírt képlet) a nyomásnak is állandónak kell lennie, és ennek a kijelentésnek a fordítottja is igaz. A szabad felszínen a nyomás állandó. Esetünkben ez az atmoszférikus nyomással, p_a -val egyenlő, mert a tartály nyitott. A szabad felszín tehát egy ekvipotenciális felület, melynek egyenletét a fentiek szerint

$$a \cdot x + g \cdot z + C = \text{áll.} \quad (1.3)$$

formában kell keresnünk. Ennek az egyenletnek mindkét oldalán szerepel egy-egy konstans, amelyek közül a C integrálási állandót átvihetjük az egyenlet jobb oldalára. A jobb oldalon tehát két konstans különbsége fog állni, amely megintcsak egy konstans eredményez:

$$a \cdot x + g \cdot z = C_1. \quad (1.4)$$

Ez az egyenlet egy sík felületet ír le, amely az y tengely körül fordul el. Az xz síkban az egyenlet egy ferde egyenest ír le. Az egyenletet átrendezve ezek dőlése

$$\text{tg } \alpha = -\frac{a}{g}. \quad (1.5)$$

A kérdés az, hogy miképp tudjuk megállapítani a szabad felszín egyenletében szereplő konstans értékét: ehhez azt a feltételt kell felírni, mi szerint az eredeti folyadékszint alatti térfogat és a térfogati erők hatására kialakuló szabad felszín alatti térfogat azonos egymással, hiszen feltételeztük, hogy a folyadék összenyomhatatlan.

A tanulmányozott feladatban ezt a feltételt képletek felírása nélkül is alkalmazhatjuk, mivel a gyorsuló tartályban beálló felszín is sík: amennyi folyadék hiányzik az eredeti szint alól, a tartály jobb oldalán, ugyanannyi jelenik meg annak baloldalán, az eredeti szint felett. Mivel ez a feltétel két egybevágó háromszöghöz vezet, ebből következik, hogy azok közös csúcsa, vagyis a két felszín metszéspontja $L/2$ távolságra van a tartály oldalfalaitól. Az ábrán látható „A” pont koordinátái tehát $x_A = L/2$, $z_A = h$ (valójában egy y tengellyel párhuzamos egyenesről van szó).

Ezeket a koordinátákat a 1.4. egyenletbe behelyettesítve megkapjuk a keresett konstans értékét:

$$C_1 = a \cdot \frac{L}{2} + g \cdot h, \quad (1.6)$$

a szabad felszín egyenlete tehát

$$a \cdot x + g \cdot z = a \cdot \frac{L}{2} + g \cdot h. \quad (1.7)$$

Ebből az egyenletből meghatározhatjuk a „B” és a „C” pontok magasságát is. Az előbbire $x_B = 0$, amelyet a szabad felszín egyenletébe behelyettesítvén kapjuk:

$$z_B = \frac{a}{g} \cdot \frac{L}{2} + h = \Delta h + h, \quad (1.8)$$

az utóbbira pedig $x_C = L$ és

$$z_C = \frac{a}{g} \cdot \frac{L}{2} + h - \frac{a}{g} \cdot L = -\frac{a}{g} \cdot \frac{L}{2} + h = h - \Delta h. \quad (1.9)$$

Észrevehetjük, hogy amennyivel emelkedik a szint a bal oldalon, ugyanannyival süllyed a jobb oldalon (ez egyébként azonnal következik a háromszögek említett egybevágóságából is). Ugyanezeket az összefüggéseket felírhattuk volna a felszín dőlésének (1.5) ismeretében is, trigonometriai megfontolások alapján.

A feladat azt a legnagyobb gyorsulást kérte, amelynél még nem folyik ki a folyadék: ez a feltétel

$$H = h + \Delta h, \quad (1.10)$$

vagyis a „B” pont z koordinátája $z_B = H$ kell legyen:

$$z_B = \frac{a}{g} \cdot \frac{L}{2} + h = \Delta h + h = H \rightarrow a = 2 \cdot \frac{H - h}{L} \cdot g. \quad (1.11)$$

A feladat második kérdése a tartály falaira gyakorolt nyomás megállapítására vonatkozott. Ehhez az alapegyenletet használjuk, ahova beírjuk a potenciál 1.2. képletét:

$$p + \rho \cdot (a \cdot x + g \cdot z + C) = \text{áll.} \quad (1.12)$$

Ezt a képletet is átrendezzük, a $\rho \cdot C$ szorzat állandó, azt a jobb oldalra átvivén ott egy újabb állandót kapunk:

$$p + \rho \cdot a \cdot x + \rho \cdot g \cdot z = C_2. \quad (1.13)$$

A C_2 állandó meghatározásához az egyenletbe behelyettesítjük valamely felszínen levő pont, például „A” koordinátáit és az ott mérhető nyomást (mivel ez a pont a felszínen van, $p_A = p_a$ – az atmoszférikus nyomás). Tehát

$$C_2 = p_a + \rho \cdot a \cdot \frac{L}{2} + \rho \cdot g \cdot h, \quad (1.14)$$

amivel a nyomást adó képlet

$$p = p_a + \rho \cdot a \cdot \frac{L}{2} + \rho \cdot g \cdot h - \rho \cdot a \cdot x - \rho \cdot g \cdot z = p_a + \rho \cdot a \cdot \left(\frac{L}{2} - x \right) + \rho \cdot g \cdot (h - z). \quad (1.15)$$

Észrevehetjük, hogy a nyomás függőlegesen is és vízszintesen az x irányban egyenletesen, lineárisan változik, hiszen e koordináták az első hatványon vannak. Mivel y e képletben nem szerepel, abban az irányban (az ábra síkjára merőlegesen) a nyomás nem változik.

A nyomásdiagram tehát egyenesekből fog állni, s ezért elegendő a sarokpontokban érvényes nyomás-értékeket kiszámítani. A „B” és a „C” pontokban a nyomást számítás nélkül is megállapíthatjuk: mivel e pontok a felszínen vannak, $p_B = p_C = p_a$.

A „D” pont koordinátái $x_D = 0$ és $z_D = 0$, a 1.15 képletből pedig

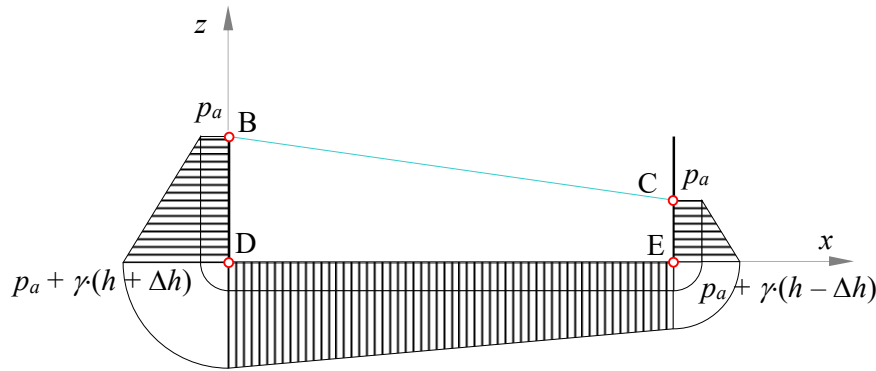
$$p_D = p_a + \rho \cdot a \cdot \frac{L}{2} + \rho \cdot g \cdot h = p_a + \rho \cdot g \cdot \frac{a}{g} \cdot \frac{L}{2} + \rho \cdot g \cdot h = p_a + \rho \cdot g \cdot (h + \Delta h), \quad (1.16)$$

az „E” pont esetében pedig $x_E = L$, $z_E = 0$ és

$$p_E = p_a + \rho \cdot a \cdot \left(\frac{L}{2} - L \right) + \rho \cdot g \cdot h = p_a - \rho \cdot g \cdot \frac{a}{g} \cdot \frac{L}{2} + \rho \cdot g \cdot h = p_a + \rho \cdot g \cdot (h - \Delta h). \quad (1.17)$$

Észrevehetjük, hogy ez esetben is a nyomás a szabad felszíntől mért mélységgel arányosan változik, az arányossági tényező pedig a folyadék $\gamma = \rho \cdot g$ fajsúlya. A nyomás az x tengellyel mentén is lineárisan változik, mely irányt „vízszintesnek” szoktak tekinteni. A tényleges „vízszintest” a gyorsuló folyadéokra a szabad felszín és az azzal párhuzamos síkok jelentik.

A kiszámított nyomásokkal ábrázoljuk a hidrosztatikai nyomás diagramját (1.2. ábra).



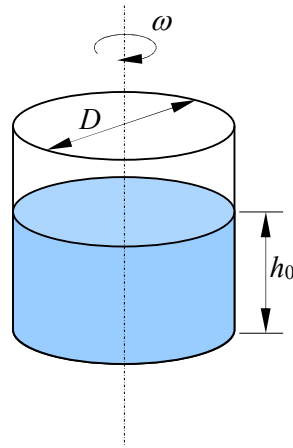
1.2. ábra. A nyomásdiagram

A tartály külső falán a légköri levegő hidrosztatikai nyomása (p_a) hat. A méretezéskor a belső és a külső nyomás különbségét, a relatív nyomást használjuk: ennek diagramját úgy kapjuk, hogy az ábrázolt trapézokból a p_a magasságú téglalapokat töröljük.

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

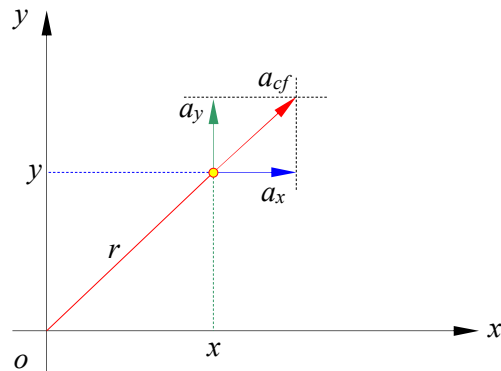
Az alábbi (1.3.) ábrán egy henger alakú tartály látható, amely saját tengelye körül állandó ω szögsebességgel forog. Határozzuk meg a szabad felszín formáját és azt hogy mekkora nyomást gyakorol a folyadék a tartály falaira. Ismertnek tekintjük a tartály D belső átmérőjét és a folyadék nyugalmi állapotban mért h_0 mélységét.

Ebben az esetben a tartályban levő folyadéokra kétfajta erő hat: a saját súlya és a centrifugális erő. A centrifugális gyorsulást valamely pontban az $a_{cf} = r \cdot \omega^2$ képlettel adjuk meg, ahol r az illető pontnak a forgástengelytől mért távolsága. Ha a koordináta-rendszerünket úgy választjuk meg, hogy a henger forgástengelye a z tengely legyen, akkor az illető pont sugarát annak koordinátaival $r^2 = x^2 + y^2$ formában adhatjuk meg. A centrifugális gyorsulás sugárirányú, a tengelyekre eső vetületeivel $a_{cf}^2 = a_x^2 + a_y^2$ formában számítható.



1.3. ábra. Függőleges tengelyű hengeres tartály

E két összefüggés ($r^2 = x^2 + y^2$ és $a_{cf}^2 = a_x^2 + a_y^2$) Pithagorász tétele egy-egy háromszögre felírva. Mivel e két háromszögben a megfelelő oldalak párhuzamosak (a_{cf} sugárirányú, a_x és a_y pedig a megfelelő tengelyekkel párhuzamosak; 1.4. ábra), ebből következően a háromszögek egymáshoz hasonlóak. E hasonlóságból következően $\frac{a_{cf}}{r} = \frac{a_x}{x} = \frac{a_y}{y}$, ahonnan a centrifugális gyorsulást behelyettesítve ($a_{cf} = r \cdot \omega^2$) annak komponenseire az $a_x = x \cdot \omega^2$, illetve az $a_y = y \cdot \omega^2$ képleteket kapjuk.



1.4. ábra. A centrifugális gyorsulás vetületei

A térfogati erő komponenseit tehát most a következőképpen írhatjuk fel:

$$f_x = x \cdot \omega^2, \quad f_y = y \cdot \omega^2, \quad f_z = -g. \quad (1.18)$$

E komponensekkel a potenciál

$$U = -\int (x \cdot \omega^2 dx + y \cdot \omega^2 dy - g dz) = -\frac{\omega^2}{2} \cdot (x^2 + y^2) + g \cdot z + C \quad (1.19)$$

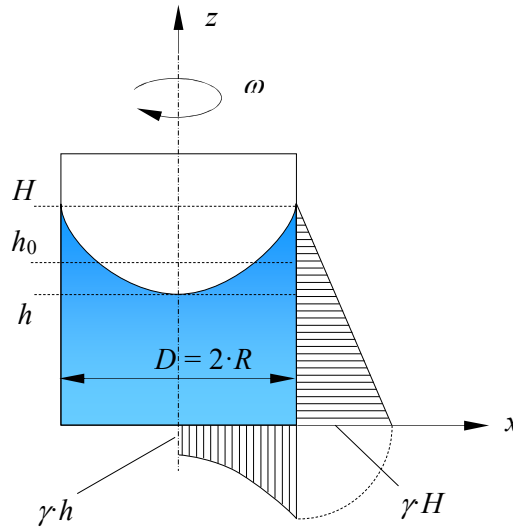
lesz. Az $U = \text{áll.}$ egyenletű ekvipotenciális felületek forgásparaboloidok, és a szabad felszín is ilyen módon egy forgásparaboloid felület lesz. Ez utóbbi egyenlete

$$-\frac{\omega^2}{2} \cdot (x^2 + y^2) + g \cdot z + C = \text{áll.}, \quad (1.20)$$

amelyet tovább alakíthatunk:

$$-\frac{r^2 \cdot \omega^2}{2} + g \cdot z = C_1. \quad (1.21)$$

Ahhoz, hogy megkapjuk a szabad felszín egyenletét, meg kell határoznunk a C_1 állandó értékét. Ebben az esetben is abból indulunk ki, hogy a szabad felszín alatti térfogat a nyugalomban levő és a forgó tartály esetében ugyanaz a mennyiség kell legyen. A számítások elvégzéséhez tekintsük az 1.5. ábrát, amely a tartály függőleges metszetét ábrázolja (ezen a szabad felszín egy szimmetrikus parabolaív).



1.5. ábra. A tartály metszete

Ezen az ábrán láthatjuk, hogy a parabolikus felszín a tartály fala mentén a H magasságba emelkedik fel, míg a forgástengely vonalában a h mélységre süllyed.

A forgáspároloid alatti térfogat úgy számítható, hogy a H magasságú henger térfogatából kivonjuk a $H - h$ magasságú forgáspároloid térfogatát.

A henger térfogata

$$V_h = \pi \cdot R^2 \cdot H, \quad (1.22)$$

a paraboloidé pedig

$$V_p = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{H - h}{2}. \quad (1.23)$$

H és h között a szabad felszín 1.21. egyenlete teremt a kapcsolatot, H egy $r = R$ sugarú pont z koordinátája, míg h az $r = 0$ sugarú pont koordinátája, melyek a szabad felszínen vannak. Tehát, az említett egyenlet értelmében

$$-\frac{R^2 \cdot \omega^2}{2} + g \cdot H = g \cdot h, \quad (1.24)$$

vagyis

$$h = H - \frac{R^2 \cdot \omega^2}{2 \cdot g}. \quad (1.25)$$

Ezt a paraboloid térfogatának képletébe behelyettesítve kapjuk

$$V_p = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{H - \left(H - \frac{R^2 \cdot \omega^2}{2 \cdot g} \right)}{2} = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{R^2 \cdot \omega^2}{4 \cdot g} = \frac{\pi \cdot R^4 \cdot \omega^2}{4 \cdot g}. \quad (1.26)$$

A szabad felszín alatti térfogat tehát

$$V = V_h - V_p = \pi \cdot R^2 \cdot H - \frac{\pi \cdot R^4 \cdot \omega^2}{4 \cdot g} = \pi \cdot R^2 \cdot \left(H - \frac{R^2 \cdot \omega^2}{4 \cdot g} \right), \quad (1.27)$$

amelynek egyenlőnek kell lennie a nyugalmi állapotban számított térfogattal (a h_0 magasságú henger térfogatáról van szó):

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot h_0. \quad (1.28)$$

Ebből az egyenlőségből következik, hogy

$$h_0 = H - \frac{R^2 \cdot \omega^2}{4 \cdot g} \Rightarrow H = h_0 + \frac{R^2 \cdot \omega^2}{4 \cdot g}, \quad (1.29)$$

az 1.25. képlet alapján pedig

$$h = H - \frac{R^2 \cdot \omega^2}{2 \cdot g} = h_0 + \frac{R^2 \cdot \omega^2}{4 \cdot g} - \frac{R^2 \cdot \omega^2}{2 \cdot g} = h_0 - \frac{R^2 \cdot \omega^2}{4 \cdot g}. \quad (1.30)$$

A $z = h, r = 0$ ($x = 0, y = 0$) koordinátájú pont a szabad felszínen kell legyen, az 1.21. képlet szerint tehát

$$C_1 = g \cdot h = g \cdot h_0 - \frac{R^2 \cdot \omega^2}{4}, \quad (1.31)$$

s a szabad felszín egyenlete

$$g \cdot z - \frac{r^2 \cdot \omega^2}{2} = g \cdot h_0 - \frac{R^2 \cdot \omega^2}{4} \quad (1.32)$$

lesz.

A nyomásdiagramok megállapításánál az alapegyenletből indulunk ki:

$$p + \rho \cdot U = p - \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot r^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z = C_2. \quad (1.33)$$

Ha ebbe az egyenletbe behelyettesítjük a tengely és a szabad felszín metszéspontját és az ott ható nyomást, akkor a C_2 konstans meghatározhatjuk: ennek a pontnak a koordinátái $r = 0$ és $z = h$, és ha ebben a pontban $p = p_a$, akkor

$$C_2 = p_a + \rho \cdot g \cdot \left(h_0 - \frac{R^2 \cdot \omega^2}{4 \cdot g} \right) = p_a + \rho \cdot g \cdot h_0 - \frac{\rho \cdot R^2 \cdot \omega^2}{4}. \quad (1.34)$$

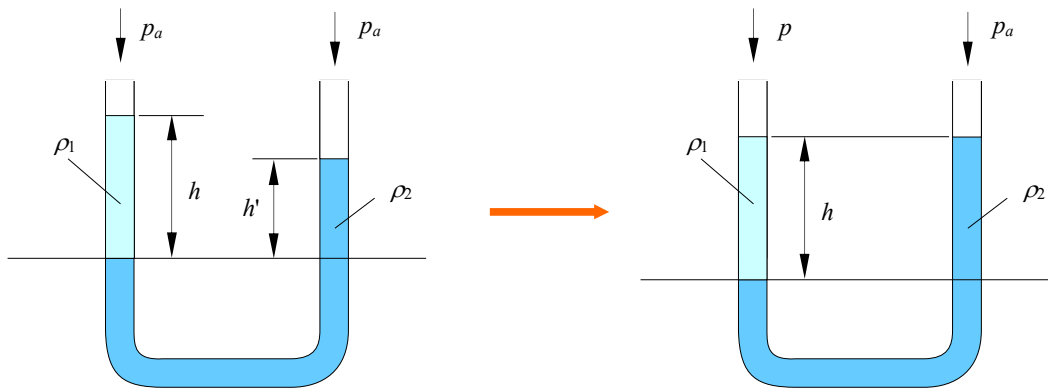
A nyomást adó függvény végső soron

$$p = p_a + \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot (2 \cdot r^2 - R^2)}{4} + \rho \cdot g \cdot (h_0 - z) \quad (1.35)$$

lesz. E képlet szerint függőleges irányban a nyomás ezúttal is lineárisan növekedik a mélységgel, míg sugárirányban az a forgástengelytől mért távolság négyzetével arányos (parabolikus változás). Az edény falán érvényes diagramokat az 1.5. ábrán láthatjuk.

2. A HIDROSZTATIKAI NYOMÁS

Adott az alábbi (2.1.) ábra bal oldalán látható U-alakú cső, amelyben víz van és amelynek egyik ágába a víz fölé h magasságú rétegben olajat öntünk. Mekkora kell legyen a két ág közötti nyomáskülönbség ahhoz, hogy a szabad felszín mind a két ágban ugyanabban a magasságban legyen? Ismertnek tekintjük a két folyadék sűrűségét.



2.1. ábra. U-cső két folyadékkal

Az ilyen jellegű hidrosztatikai feladatok megoldásának alapját néhány észrevétel, összefüggés alkotja. A megoldás alapja a hidrosztatika alaptörvénye, amely gravitációs térben nyugalomban levő homogén, összenyomhatatlan folyadékokra

$$p + \gamma \cdot z = \text{állandó}$$

formában írunk fel, ahol z egy tetszőlegesen megválasztott referencia-felülettől (amely egy ekvipotenciális felület kell legyen) mért magasság,

$$\gamma = \rho \cdot g$$

pedig a folyadék fajsúlya.

Ha a hidrosztatika alaptörvényét egy h magasságú, gravitációs térben nyugalomban levő homogén folyadékoszlopra alkalmazzuk, akkor annak nyomását, amit az oszlop alsó végénél mérünk, $p = p_0 + \gamma \cdot h$ formában kapjuk, ahol p_0 a folyadékoszlop felszínén ható nyomás. A p_0 nyomás az illető folyadékoszlop fölött levő közeg nyomása, tehát az például lehet a légköri nyomás vagy pedig az illető folyadék fölé rétegzett másfajta folyadék nyomása.

Egy másik észrevétel szerint, amely az előbbi következménye, a homogén, gravitációs térben levő nyugvó folyadékok belsejében a vízszintes síkok ekvipotenciális felületek, amelyek mentén a hidrosztatikai nyomás állandó.

Ezen észrevételek alapján először is az említett referencia-felületet kell megválasztanunk. A számítások szempontjából a legegyszerűbb az lenne, ha ez a felület egy vízszintes sík lenne. Mint kiderül, e sík nem emelkedhet az alsó folyadék, a víz felszíne fölé, ugyanis nem metszhet két különböző folyadékot. Más feladatokban megtörténhet, hogy az U-cső mindkét ágában olaj van a vízréteg fölött: ilyen esetekben sem emelkedhet a vízszintes referenciasík a víz felszíne fölé, még akkor sem, ha mindkét ágban az olajréteget metszi.

Ahhoz, hogy a felírandó egyenletben minél kevesebb tag szerepeljen, a referencia-síkot a víz felszínén kell meghúzzuk, a 2.1. ábrán látható módon. E sík mentén tehát mindkét ágban a nyomás ugyanazzal az értékkel rendelkezik.

A kezdetben a folyadék felett mindkét ágban az atmoszférikus nyomás (p_a) hat. A referencia-síkon mérhető nyomások azonosságából következően

$$p_a + \rho_1 \cdot g \cdot h = p_a + \rho_2 \cdot g \cdot h', \quad (2.1)$$

ahonnan egyszerűsítés után kapjuk a jobb oldali ágban a szabad felszín referencia-síkhöz viszonyított magasságát:

$$h' = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot h. \quad (2.2)$$

Ahhoz, hogy a feltett kérdésre a választ megtaláljuk, a bal oldali ágban ható felszíni nyomást úgy kell módosítanunk, hogy a $h = h'$ egyenlőség teljesüljön. A 2.1. relációt tehát újból felírjuk:

$$p + \rho_1 \cdot g \cdot h = p_a + \rho_2 \cdot g \cdot h, \quad (2.3)$$

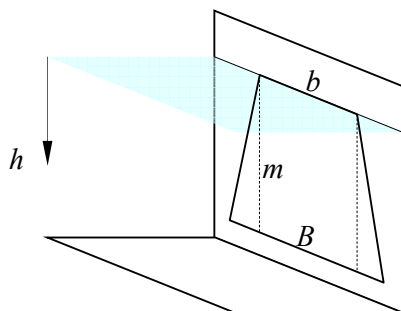
ahonnan:

$$p - p_a = (\rho_2 - \rho_1) \cdot g \cdot h, \quad (2.4)$$

ami a keresett nyomáskülönbséget jelenti.

3. A HIDROSZTATIKAI ERŐ ÉS ANNAK NYOMATÉKA

Az alábbi (3.1.) ábrán egy nyitott tartály látható, amelynek függőleges falán egy szimmetrikus trapéz alakú nyílászáró található. Ennek kislapja b , nagyalapja B , magassága m , felső pereme pedig a tartályban levő folyadék felszínén van. E folyadék fajsúlya γ . Mekkora erőt gyakorol a folyadék a nyílászáróra és hol van ennek az erőnek a támadáspontja?



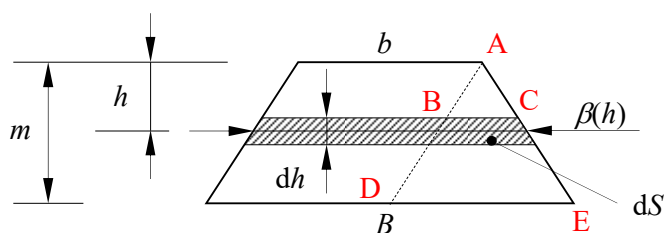
3.1. ábra. Nyílászáró egy tartály függőleges falán

A nyomás definíciója szerint felületen megoszló erő, számszerűen egyenlő az egységnyi felületre ható erővel. E definíció alapján a hidrosztatikai nyomásból származó erő (a hidrosztatikai erő) a nyomás és a nyomással terhelt felület szorzata lenne. Ez az egyszerű összefüggés azonban csak akkor használható, ha a felület sík (ugyanis a nyomás vektoriális mennyiség) és ha a nyomás e felületen állandó. Ellenkező esetben ezt a szorzatot csak egy olyan kis elemi dS felületre írhatjuk fel, amely síknak tekinthető és amelyen a nyomás csak elhanyagolható mértékben változik, a teljes felületre ható erőt pedig az ezen elemi felületeken számított elemi $d\mathbf{F} = -\mathbf{n} \cdot p \cdot dS$ vektorok összegzésével kapjuk:

$$\mathbf{F} = -\int_S \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Példánkban a hidrosztatikai nyomás a szabad felszíntől számított h mélységgel nő, tehát az előbbi integrálban $p = \gamma \cdot h$. Ez a nyomás most a relatív nyomás, mivel a légköri nyomás a nyílászáró mindkét oldalára hat és ezért az abból fakadó erők éppen kiegyenlítik egymást.

A dS felületeket úgy kell megválasztanunk, hogy azon a nyomás közel állandó legyen. Mivel a nyomás vízszintes síkokban állandó, ez a felület a trapéz alapjaival párhuzamos keskeny sáv lesz (3.2. ábra).



3.2. ábra. Az elemi dS felület

Ennek a sávnak a területe

$$dS = \beta(h) \cdot dh, \quad (3.1)$$

ahol $\beta(h)$ a dh magasságú elemi trapéz középvonalának hossza, mely a h mélység függvénye. Ennek a hosszának a kiszámításához a trapéz egyik oldalához egy párhuzamost húzunk az ábrán látható módon, akkor a megjelölt háromszögekhez jutunk. Az ABC háromszög és az ADE

háromszögek hasonlóak, mivel közös csúcsukkal szemben fekvő oldalaik párhuzamosak. E hasonlóság következményeként az alapok és a magasságok aránya azonos:

$$\frac{\beta(h) - b}{B - b} = \frac{h}{m}, \quad (3.2)$$

ahonnan

$$\beta(h) = \frac{h}{m} \cdot (B - b) + b. \quad (3.3)$$

Ezzel

$$dS = \left[\frac{h}{m} \cdot (B - b) + b \right] \cdot dh, \quad (3.4)$$

és

$$dF = \gamma \cdot h \cdot \left[\frac{h}{m} \cdot (B - b) + b \right] \cdot dh. \quad (3.5)$$

A zárószerkezetre ható erő tehát

$$\begin{aligned} F &= \int_0^m \gamma \cdot h \cdot \left[\frac{h}{m} \cdot (B - b) + b \right] \cdot dh = \gamma \cdot \left[\frac{h^3}{3 \cdot m} \cdot (B - b) + \frac{b \cdot h^2}{2} \right] \Bigg|_0^m = \\ &= \frac{\gamma \cdot m^2}{6} \cdot (2 \cdot B + b). \end{aligned} \quad (3.6)$$

A hidrosztatikai erő támadáspontjának meghatározásához Varignon tételét használjuk, mely szerint egy erőrendszert alkotó vektorok nyomatékainak eredője azonos az eredő erővektor nyomatékával.

Az erőrendszert az elemi dF erők alkotják (3.5 képlet). Ezeknek a trapéz kisalajjára vonatkoztatott nyomatéka

$$dM = h \cdot dF, \quad (3.7)$$

ahol a skaláris felírási mód azért lehetséges, mert a $d\mathbf{F}$ vektor merőleges a trapéz síkjára. Az elemi $d\mathbf{M}$ nyomatékok összege az eredő \mathbf{F} erő nyomatékával azonos. Az összegzés, mivel folyamatosan változó mennyiségről van szó, integrálást jelent:

$$M = H \cdot F = \int_S h \, dF, \quad (3.8)$$

ahol H az eredő erő támadáspontjának a felszíntől számított mélysége. Az elemi dF erő 3.5. képletének behelyettesítésével

$$\begin{aligned} M &= \int_0^m h \cdot \gamma \cdot h \cdot \left[\frac{h}{m} \cdot (B - b) + b \right] \, dh = \left(\frac{\gamma \cdot (B - b)}{4 \cdot m} \cdot h^4 + \frac{\gamma \cdot b}{3} \cdot h^3 \right) \Bigg|_0^m = \\ &= \frac{\gamma \cdot (B - b) \cdot m^3}{4} + \frac{\gamma \cdot b \cdot m^3}{3} = \frac{\gamma \cdot (3 \cdot B + b) \cdot m^3}{12}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

A 3.8. képletből következően ha ezt a mennyiséget elosztjuk a 3.6. képlettel megadott F erővel, akkor megkapjuk a támadáspont mélységét:

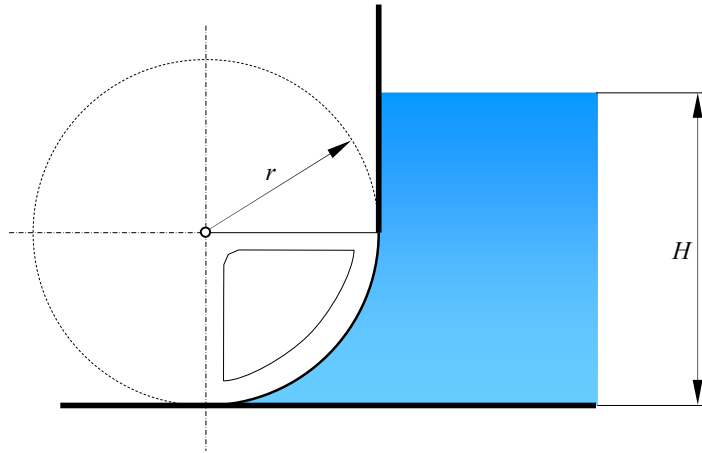
$$H = \frac{M}{F} = \frac{\frac{\gamma \cdot (3 \cdot B + b) \cdot m^3}{12}}{\frac{\gamma \cdot m^2}{6} \cdot (2 \cdot B + b)} = m \cdot \frac{3 \cdot B + b}{2 \cdot (2 \cdot B + b)}. \quad (3.10)$$

Ellenőrzésképpen, amennyiben a trapéz két alapját egyenlővé tesszük ($B = b$), akkor e mélység elvárásunknak megfelelően a „trapéz” (paralelogramma vagy téglalap) magasságának két harmada lesz.

Szimmetria okok miatt a támadáspont a trapéz szimmetriatengelyén van.

—o—o—o—o—o—o—o—o—o—o—

Számítsuk ki a 3.3. ábrán látható, szektor alakú zárószerkezetre ható F hidrosztatikai erőt és annak a szerkezet tengelyére vonatkoztatott M nyomatékát. A szektor egy b magasságú és r sugarú henger palástjának negyede.



3.3. ábra. Hengeres zárószerkezet

Görbült felületek esetében az elemi dS felületre ható $d\mathbf{F}$ erő vetületeit

$$\begin{aligned} dF_x &= d\mathbf{F} \cdot \mathbf{i} = -p \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}) \cdot dS = p \cdot dS_{yz}, \\ dF_y &= d\mathbf{F} \cdot \mathbf{j} = -p \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) \cdot dS = p \cdot dS_{xz}, \\ dF_z &= d\mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = -p \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) \cdot dS = p \cdot dS_{xy} \end{aligned} \quad (3.11)$$

formában számítjuk. Ezekben a képletekben a zárójelben levő skaláris szorzatok az elemi dS felület normálisának iránytényezőit adják, az iránytényező és az elemi felület szorzata pedig e felület vetületeihez vezet, a megfelelő koordinátasíkokra.

A hidrosztatikai erő vetületeit e képletekből integrálással kapjuk:

$$\begin{aligned}
F_x &= \int_{S_{yz}} p \cdot dS_{yz}, \\
F_y &= \int_{S_{xz}} p \cdot dS_{xz}, \\
F_z &= \int_{S_{xy}} p \cdot dS_{xy}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

A hidrosztatikai erő nyomatékát szintén a vetületekkel adjuk meg. Az elemi erők tengelyek körül forgató nyomatékai rendre

$$\begin{aligned}
dM_x &= dF_z \cdot y - dF_y \cdot z = p \cdot (dS_{xy} \cdot y - dS_{xz} \cdot z), \\
dM_y &= dF_x \cdot z - dF_z \cdot x = p \cdot (dS_{yz} \cdot z - dS_{xy} \cdot x), \\
dM_z &= dF_y \cdot x - dF_x \cdot y = p \cdot (dS_{xz} \cdot x - dS_{yz} \cdot y).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Az elemi mennyiségek integrálásával

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_{S_{xy}} p \cdot y \, dS_{xy} - \int_{S_{xz}} p \cdot z \, dS_{xz}, \\
M_y &= \int_{S_{yz}} p \cdot z \, dS_{yz} - \int_{S_{xy}} p \cdot x \, dS_{xy}, \\
M_z &= \int_{S_{xz}} p \cdot x \, dS_{xz} - \int_{S_{yz}} p \cdot y \, dS_{yz}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

A nyomásközéppont koordinátáit (x_c, y_c, z_c) a Varignon-tétel alkalmazásával határozzuk meg, a nyomatékokra felírt

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -z_c & y_c \\ z_c & 0 & -x_c \\ -y_c & x_c & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \tag{3.15}$$

egyenletrendszer megoldásával.

Bebizonyítható (a 3.12. integrálok alapján), hogy a vízszintes összetevők a hidrosztatikai nyomással terhelt S felület függőleges vetületeire eső terheléssel azonosak, illetve a függőleges összetevő a felület fölött levő folyadék súlyával azonos, így azokat az integrálokat nem mindig szükséges analitikus módon kiszámítani, illetve egyszerűsíthetünk a számítások során. A vízszintes összetevők erőkarja az előbbi megoldott feladat alapján számítható, a függőlegesé meg a felület feletti térfogat geometriai középpontjának kiszámítását feltételezi.

E feladat megoldása során is egyszerűsítenünk fogunk.

Először is megrajzolunk egy koordinátarendszert (3.4. ábra), az y tengely a papír síkjára merőleges és befele mutat (ebben az irányban mérjük a hengerpalást b magasságát).

A terhelt S felületet élből látjuk, az egy körívként (egy negyed körként) látszik, és egybeesik önnön S_{xz} vetületével. Az S_{xy} és az S_{yz} vetületek egyaránt r magasságú és b szélességű téglalapok.

A hidrosztatikai nyomás a mélységgel lineárisan változik és merőleges a terhelt felületre. Változását a $p = \gamma \cdot (H - z)$ reláció adja, ha a nyomást a z koordinátával fejezzük ki (mivel a felszíntől számított mélység és a z koordináta között most a $h = H - z$ összefüggés, koordináta-transzformáció állapítható meg).

Ha a hidrosztatikai erő komponenseinek kiszámításához a 3.12. képleteket szeretnénk alkalmazni, akkor először meg kell állapítanunk a vetületek elemi felületeit.

A dS_{yz} elemi felületet dz magasságú és b szélességű téglalapoknak tekinthetjük, hiszen a b méret irányában (mely vízszintes) a hidrosztatikai nyomás nem változik:

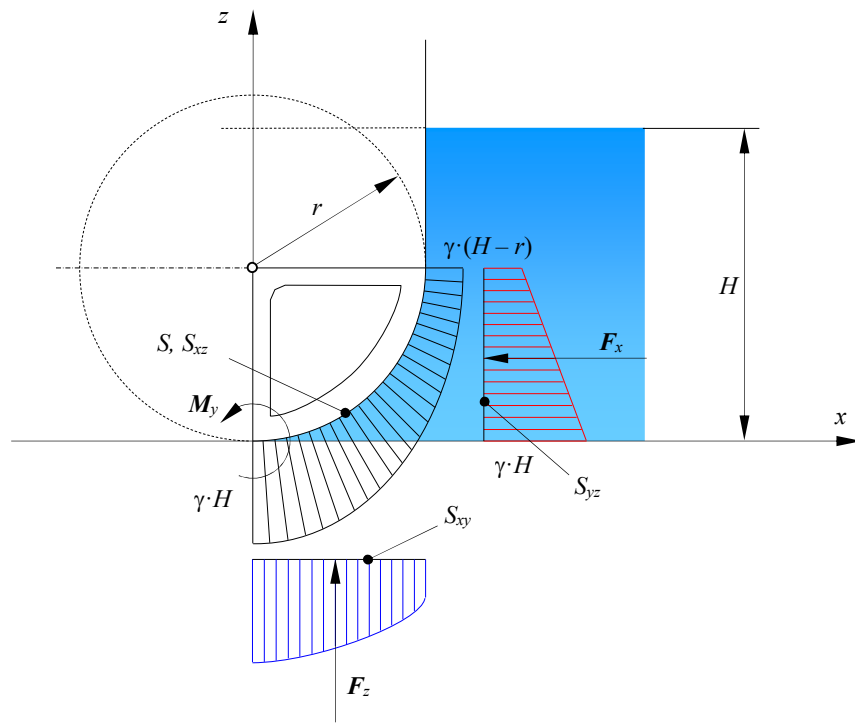
$$dS_{yz} = b \cdot dz . \quad (3.16)$$

A dS_{xz} elemi felület nagysága nulla, hiszen a terhelt felület xz síkra eső vetülete egy körív:

$$dS_{xz} = 0 . \quad (3.17)$$

A dS_{xy} elemi felület felvételénél is a dS_{yz} -hez hasonló módon járhatunk el:

$$dS_{xy} = b \cdot dx . \quad (3.18)$$



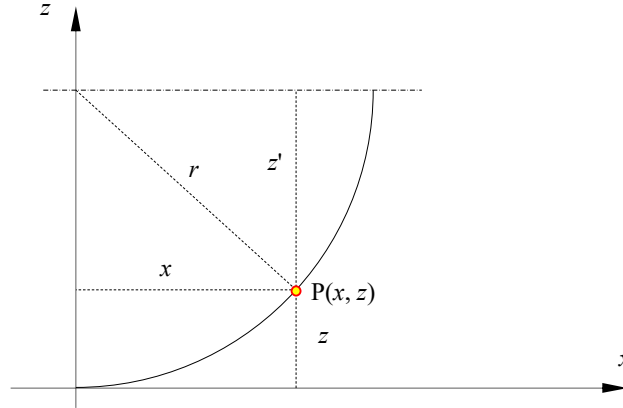
3.4. ábra. A zárószerkezetre ható hidrosztatikai nyomás

Ez utóbbi képletben az x koordináta jelenik meg, viszont a nyomás a mélységgel változik. Ez az x koordináta a terhelt felület egy P pontjának koordinátája, amit a körív sugarával a z koordinátával kapcsolatba hozhatunk (3.5. ábra). Pithagorász tétele alapján, az ábra jelöléseivel

$$z' = \sqrt{r^2 - x^2} , \quad (3.19)$$

és ekkor

$$z(x) = r - z' = r - \sqrt{r^2 - x^2} . \quad (3.20)$$



3.5. ábra. A koordináták közötti kapcsolat

A fentiekkel, a 3.12. képletek alapján

$$\begin{aligned}
 F_x &= \int_{S_{yz}} p \cdot dS_{yz} = \int_0^r \gamma \cdot (H - z) \cdot b \, dz = \gamma \cdot b \cdot \int_0^r (H - z) \, dz, \\
 F_y &= \int_{S_{xz}} p \cdot dS_{xz} = 0, \\
 F_z &= \int_{S_{xy}} p \cdot dS_{xy} = \int_0^r \gamma \cdot [H - z(x)] \cdot b \, dx = \gamma \cdot b \cdot \int_0^r (H - r + \sqrt{r^2 - x^2}) \, dx.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Ha az integrálokat kiszámítjuk, akkor e képletekből

$$\begin{aligned}
 F_x &= -\frac{\gamma \cdot b \cdot r \cdot (2 \cdot H - r)}{2}, \\
 F_y &= 0, \\
 F_z &= \gamma \cdot b \cdot \left[(H - r) \cdot r + \frac{r^2 \cdot \pi}{4} \right]
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Amit a harmadik integrál kiszámításához tudni kell az a következő:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2} \cdot \arcsin \frac{x}{r}. \tag{3.23}$$

Az elméleti 3.12. képletek alkalmazása tehát láthatóan elég sok munkával jár. Ha az említett észrevételeket alkalmazzuk, akkor ugyanezeket az erőket könnyebben is kiszámíthatjuk. Az F_x vetület a nyomásdiagram térfogata (az pedig egy trapéz alapú hasáb, amelynek alapja a trapéz alakú nyomásdiagram és a magassága b), az irányát is figyelembe véve tehát:

$$F_x = -\frac{\gamma \cdot (H - r) + \gamma \cdot H}{2} \cdot r \cdot b = -\frac{\gamma \cdot b \cdot r \cdot (2 \cdot H - r)}{2}. \tag{3.24}$$

Az F_y vetületről könnyen beláthatjuk, hogy nulla, az F_z vetület pedig a terhelt felület fölötti folyadék súlyával azonos. A példánkban a folyadék alulról felfele nyomja a hengeres felületet, így

F_z felfele fog mutatni. A terhelt felület fölötti térfogatot a szabad felszín meghosszabbításáig számoljuk. Ez egy összetett térfogat, amely egy negyed hengerből és egy hasábból áll:

$$V = \frac{1}{4} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot b + (H - r) \cdot r \cdot b, \quad (3.25)$$

s ha ezt a térfogatot megszorozzuk a folyadék γ fajsúlyával, akkor kiemelés és rendezés után a keresett vetületet

$$F_z = \gamma \cdot b \cdot \left[(H - r) \cdot r + \frac{r^2 \cdot \pi}{4} \right]$$

formában kapjuk.

Végző soron tehát sokkal kevesebb munkával jutottunk a keresett mennyiségekhez.

A záró szerkezet tengelyére ható nyomaték analitikus kiszámításához a 3.14. képleteket kellene használnunk. Először is ki tudnánk számítani a koordináta-rendszer y tengelyére vonatkoztatott nyomatékot:

$$M_y = \int_{S_{xy}} p \cdot x \, dS_{xy} - \int_{S_{yz}} p \cdot z \, dS_{yz} = \int_0^r \gamma \cdot (H - r + \sqrt{r^2 - x^2}) \cdot x \cdot b \, dx + \int_0^r \gamma \cdot (H - z) \cdot z \cdot b \, dz, \quad (3.26)$$

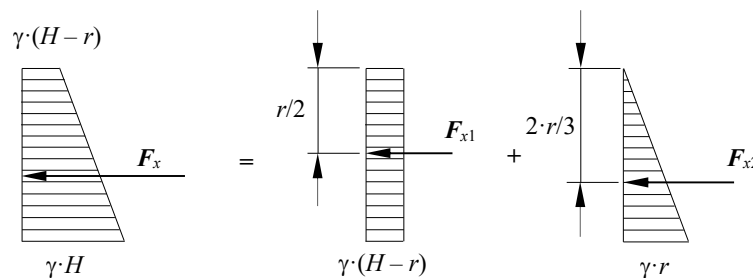
majd a mechanikából ismert

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_y + \mathbf{R} \times \mathbf{F} \quad (3.27)$$

képlet alkalmazásával ki számíthatjuk a szerkezet tengelyére vonatkoztatott nyomatékot is, ahol \mathbf{R} a záró szerkezet tengelyének helyzetvektora az xz síkban

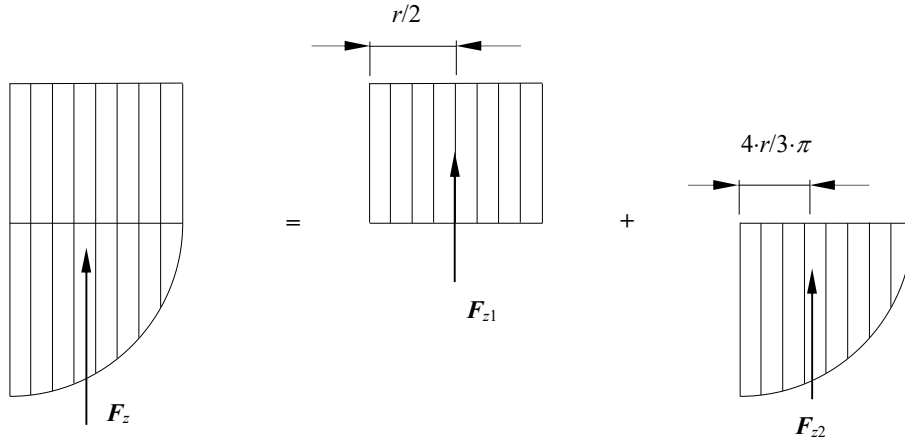
Az egyszerűbb módszer szerint ki kellene számítani az F_x és az F_z összetevők nyomatékát, majd azokat összegezni. Ehhez meg kell állapítani azok támadáspontját.

F_x támadáspontja a trapéz alakú nyomásdiagram geometriai középpontja. Ezt a trapézt egy téglatest és egy háromszög alapú hasábra bonthatjuk fel, azok geometriai középpontját pedig könnyen megadhatjuk (3.6. ábra).



3.6. ábra. A trapéz felbontása

F_z támadáspontja a terhelt felület fölötti térfogat geometriai középpontja, azt is felbontjuk, egy téglatestre és egy negyed hengerre (3.7. ábra). A negyedkör geometriai középpontját vagy táblázatokból keressük ki, vagy pedig kiszámítjuk azt.



3.7. ábra. A terhelt felület fölötti térfogat felbontása

Az ábrán szereplő erőket a diagramok geometriája alapján számítjuk:

$$\begin{aligned}
 F_{x1} &= -\gamma \cdot (H-r) \cdot r \cdot b, \\
 F_{x2} &= -\frac{\gamma \cdot r \cdot r}{2} \cdot b = -\frac{\gamma \cdot r^2}{2} \cdot b, \\
 F_{z1} &= \gamma \cdot r \cdot (H-r) \cdot b, \\
 F_{z2} &= \gamma \cdot \frac{r^2 \cdot \pi}{4} \cdot b.
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

A szerkezet tengelyére vonatkoztatott nyomaték a rajzon feltüntetett erőkarokkal és a felsorolt erőkkel a következő lesz:

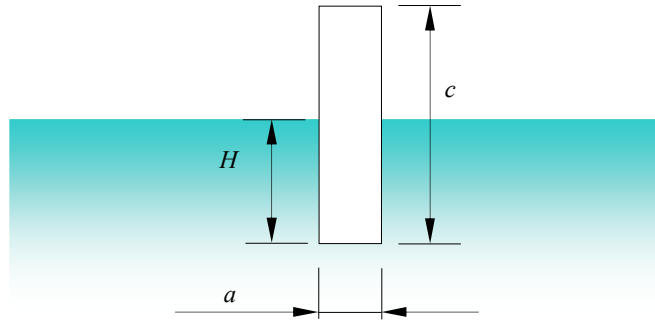
$$M = -\gamma \cdot (H-r) \cdot r \cdot b \cdot \frac{r}{2} - \frac{\gamma \cdot r^2}{2} \cdot b \cdot \frac{2 \cdot r}{3} + \gamma \cdot r \cdot (H-r) \cdot b \cdot \frac{r}{2} + \gamma \cdot \frac{r^2 \cdot \pi}{4} \cdot b \cdot \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi} = 0. \tag{3.29}$$

A 3.26. integrált ki lehetne számítani, vagy az egyszerűsítő észrevételek alapján is eljárhatunk, azonban észrevehetjük hogy az elemi dS felületre ható $d\mathbf{F}$ a zárószerkezet felületének bármely pontjában annak tengelye fele mutat (mert merőleges a felületre, tehát a körívre), s ennek következtében nincs arra vonatkoztatott nyomatéka (\mathbf{n} ugyanis ebben az esetben minden pontban sugárirányú). Ilyen módon Varignon tételének alapján a hidrosztatikai erőknek nincs nyomatéka a zárószerkezet tengelyére nézve, tehát ha eltekintenénk a szerkezet saját súlyától és a súrlódási erőktől, akkor a szerkezet nyitásához szükséges nyomaték zéró lenne.

4. TESTEK ÚSZÁSA

A 4.1. ábrán egy hasáb alakú test látható, amely egy folyadék felszínén úszik. Határozzuk meg a hasáb azon legnagyobb c magasságát, míg annak az ábrázolt úszási

helyzete stabil. A folyadék fajsúlya γ_f , a hasabé γ_t , a hasáb ábrára merőleges mérete $b > a$.



4.1. ábra. Úszó hasáb

A test úszásának feltétele az \mathbf{F} hidrosztatikai felhajtóerő és a test \mathbf{G} súlyának egyensúlya, egyenlősége:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{G} \quad \text{vagy} \quad \mathbf{F} = \mathbf{G}. \quad (4.1)$$

A felhajtóerőt a kiszorított folyadék V_k térfogatával számoljuk ki:

$$\mathbf{F} = \gamma_f \cdot V_k, \quad (4.2)$$

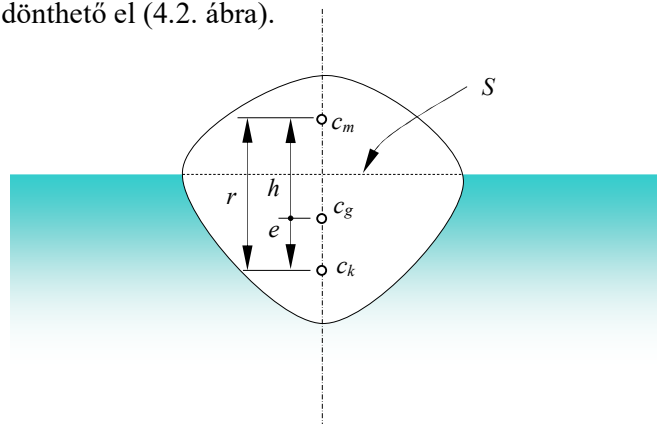
míg a test súlyát, ha anyaga homogén, annak V_t térfogatával

$$\mathbf{G} = \gamma_t \cdot V_t \quad (4.3)$$

formában kapjuk.

A felszínen úszó test esetében $V_k < V_t$ és $\gamma_f > \gamma_t$. A 4.1. feltétel $V_k = V_t$ és $\gamma_t = \gamma_f$ mellett is teljesül, de ekkor a test a folyadék belsejében lebeg és nem a felszínen úszik.

A test úszásának vizsgálatakor azt is meg kell vizsgálnunk, hogy a helyzete stabil-e. E kérdés a c_m metacentrum, a c_k kiszorítási középpont és a test c_g súlypontjának egymáshoz viszonyított helyzetének vizsgálatával dönthető el (4.2. ábra).



4.2. ábra. Az úszó test egyensúlya

A stabil úszás feltétele az

$$r > e \quad (4.4)$$

relációval adható meg, ami azt jelenti hogy a metacentrum a súlypont felett kell legyen. E relációban r a metacentrikus sugár, amit a Bouguer formula ad:

$$r = \frac{I_y}{V_k}, \quad (4.5)$$

ahol I_y az S úszási felületnek a dőléstengelyre vonatkoztatott másodrendű nyomatéka. e az excentrikusság, ami a kiszorítási középpont és a súlypont távolsága. Az ábrán szereplő h a metacentrikus magasság.

Példánkban a test súlya

$$G = \gamma_t \cdot V_t = \gamma_t \cdot a \cdot b \cdot c, \quad (4.6)$$

a felhajtóerő pedig

$$F = \gamma_f \cdot a \cdot b \cdot H. \quad (4.7)$$

A kettő egyensúlyából a merülési mélység

$$H = c \cdot \frac{\gamma_t}{\gamma_f}, \quad (4.8)$$

amellyel a kiszorítási térfogat

$$V_k = a \cdot b \cdot H = \frac{\gamma_t}{\gamma_f} \cdot a \cdot b \cdot c. \quad (4.9)$$

Az úszási felület egy $a \times b$ méretű téglalap, a dőléstengely pedig ennek a hosszabbik oldalával párhuzamos felezővonala. E felületnek tehát a dőléstengelyre vonatkoztatott másodrendű nyomatéka

$$I_y = \frac{b \cdot a^3}{12}, \quad (4.10)$$

a Bouguer formula szerint pedig a metacentrikus sugár

$$r = \frac{I_y}{V_k} = \frac{\frac{b \cdot a^3}{12}}{\frac{\gamma_t \cdot a \cdot b \cdot c}{\gamma_f}} = \frac{\gamma_f}{\gamma_t} \cdot \frac{a^2}{12 \cdot c}. \quad (4.11)$$

Az e excentrikusságot a kiszorítási középpont és a súlypont távolságaként határozzuk meg (4.3. ábra).

Mivel a test téglatest alakú, a kiszorított térfogat is ugyanolyan alakkal rendelkezik. A téglatest súlypontja a magasságának felénél van, tehát a test súlypontja az alaptól a magasság felénél (ami $c/2$) a kiszorítási középpont pedig a merülési mélység felénél (ami $H/2$). Az excentrikusság e kettő különbsége, tehát

$$e = \frac{c}{2} - \frac{H}{2} = \frac{c}{2} - \frac{c}{2} \cdot \frac{\gamma_t}{\gamma_f} = \frac{c}{2} \cdot \left(1 - \frac{\gamma_t}{\gamma_f} \right). \quad (4.12)$$

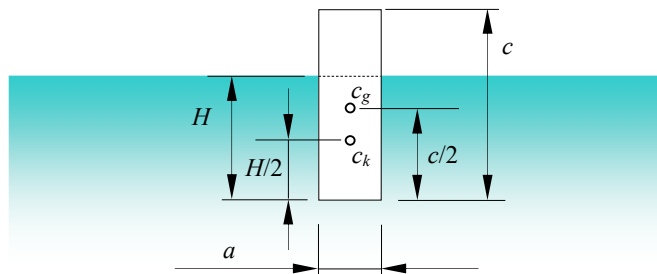
A stabil úszás feltétele $r > e$, tehát

$$\frac{\gamma_f}{\gamma_t} \cdot \frac{a^2}{12 \cdot c} > \frac{c}{2} \cdot \left(1 - \frac{\gamma_t}{\gamma_f}\right), \quad (4.13)$$

ahonnan a téglatest magasságára a

$$0 < c < a \cdot \sqrt{\frac{1}{6 \cdot \frac{\gamma_t}{\gamma_f} \cdot \left(1 - \frac{\gamma_t}{\gamma_f}\right)}} \quad (4.14)$$

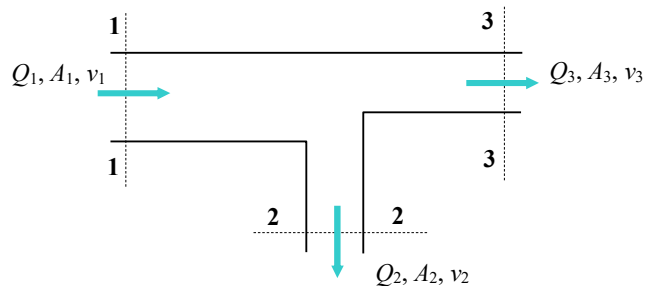
feltételhez jutunk.



4.3. ábra. Az excentrikusság meghatározása

5. A KONTINUITÁSI TÉTEL ALKALMAZÁSA

Az 5.1. ábrán egy T alakú elágazás látható, amelyen keresztül folyadék áramlik át, stacionárius körülmények között. Ismert a beáramló térfogathozam, Q_1 , és az a tény, hogy a két kimeneti ág között a hozam 1:2 arányban oszlik el. Ismert a bemenő ág A_1 keresztmetszete. Határozzuk meg a kimeneti hozamokat és keresztmetszeteket, feltételezve hogy az átlagos áramlási sebesség minden ágon azonos.



5.1. ábra. T alakú elágazás

A kontinuitási tétel folyadékok stacionárius áramlása esetén a tömeghozamok egyenlőségét írja elő egy áramcső bármely keresztmetszetén. Ha az áramcsőben folyadék áramlik, amit összenyomhatatlannak tekinthetünk, akkor a térfogathozamok is azonosak lesznek.

A Q_V térfogathozam, a v átlagos áramlási sebesség és az A keresztmetszet közötti kapcsolatot a

$$Q_V = v \cdot A, \quad (5.1)$$

reláció adja.

Feladatunkban a kontinuitási tétel alkalmazása a bemenő és a kimenő hozamok egyenlőségéhez vezet:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3. \quad (5.2)$$

A kimenő hozamok aránya adott:

$$\frac{Q_2}{Q_3} = \frac{1}{2}, \quad (5.3)$$

ahonnan

$$Q_3 = 2 \cdot Q_2. \quad (5.4)$$

Ezt az 5.2. egyenlőségbe behelyettesítve kapjuk hogy

$$Q_2 = \frac{Q_1}{3}, \quad (5.5)$$

majd az 5.4. egyenletből

$$Q_3 = \frac{2 \cdot Q_1}{3}. \quad (5.6)$$

A hozamok meghatározása után kiszámítjuk az átlagos áramlási sebességet a bemeneti ágon (ott adott a hozam is és a keresztmetszet is), az 5.1. képlet felhasználásával:

$$v_1 = \frac{Q_1}{A_1}. \quad (5.7)$$

A feladatban megadott adatok szerint az áramlási sebességek azonosak minden ágon, tehát

$$v_1 = v_2 = v_3 = \frac{Q_1}{A_1}. \quad (5.8)$$

Az áramlási sebességekkel és a hozamokkal, ugyancsak az 5.1 képlet felhasználásával kapjuk a kilépési keresztmetszeteket:

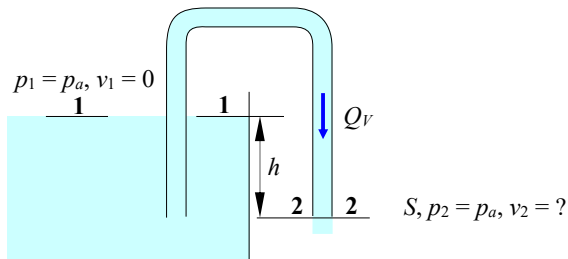
$$A_2 = \frac{Q_2}{v_2} = \frac{\frac{Q_1}{3}}{\frac{Q_1}{A_1}} = \frac{A_1}{3} \quad (5.9)$$

és

$$A_3 = \frac{Q_3}{v_3} = \frac{2 \cdot Q_1}{\frac{Q_1}{A_1}} = \frac{2 \cdot A_1}{3}. \quad (5.10)$$

6. BERNOULLI TÉTELE

Legyen a 6.1. látható tartály, amelyből egy szifon vezet le a folyadékot. Ismervén a szifon végének a szabad felszínhez viszonyított h mélységét és a vezeték S keresztmetszetét, a súrlódás elhanyagolása mellett számítsuk ki a szifon Q_V hozamát.



6.1. ábra. Szifon

Áramló folyadékok nyomásának, hozamának meghatározásakor Bernoulli egyenletét használjuk fel. Egy gravitációs térben levő áramcsőre, vezetékre ez

$$\frac{\alpha_1 \cdot v_1^2}{2 \cdot g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{\alpha_2 \cdot v_2^2}{2 \cdot g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_{r1-2}, \quad (6.1)$$

ahol α a Coriolis együttható (lamináris áramlásban kör keresztmetszetű vezetékekre értéke 2, egyébként egységnyinek tekinthető), v az átlagos áramlási sebesség, p a hidrosztatikai nyomás, γ az áramló fluidum fajsúlya, z a tekintett keresztmetszetnek az adott referencia-szinthez viszonyított magassága, h_r pedig a két keresztmetszet (1 és 2) között fellépő súrlódási veszteség.

Példánkban az egyik keresztmetszetet a tartály szabad felszínén vesszük fel. Itt a nyomás az atmoszférakussal egyenlő, az áramlási sebesség pedig a felszín süllyedésének a sebessége, ami alacsony és elhanyagolható.

A másik keresztmetszetet a kiömlésnél vesszük fel. Itt a nyomás megintcsak az atmoszférakussal egyenlő, mivel a folyadék már kilép a vezetékből.

Ha a referencia-síkot a kiömlési keresztmetszet magasságában vesszük fel, akkor az 1-1 keresztmetszet kótája $z_1 = h$, a 2-2 keresztmetszeté pedig $z_2 = 0$.

A súrlódási veszteségek elhanyagolásával tehát esetünkben

$$\frac{1 \cdot 0^2}{2 \cdot g} + \frac{p_a}{\gamma} + h = \frac{1 \cdot v_2^2}{2 \cdot g} + \frac{p_a}{\gamma} + 0 + 0, \quad (6.2)$$

ahonnan az áramlási sebesség a kiömlésnél (tehát a vezetékben)

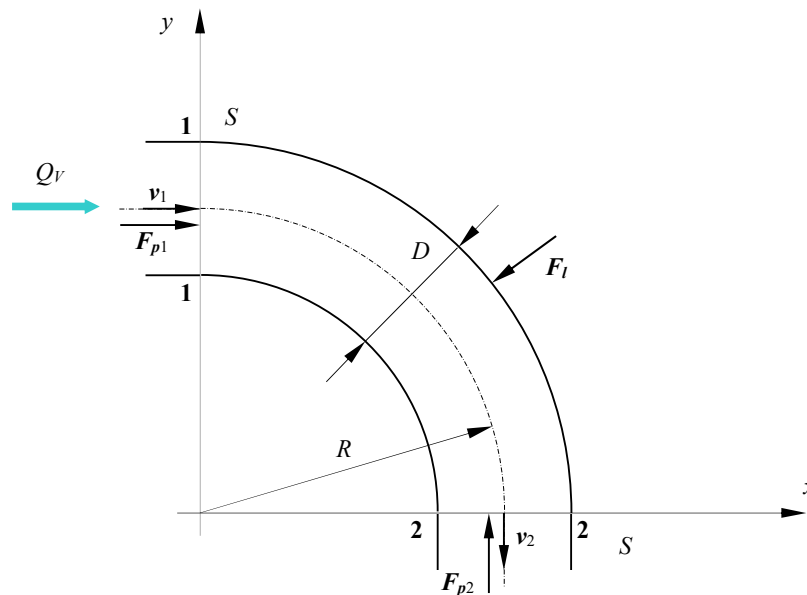
$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}. \quad (6.3)$$

A szifon hozama tehát

$$Q_V = v_2 \cdot S = S \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}. \quad (6.4)$$

7. AZ IMPULZUSMEGMARADÁS TÉTELE

Legyen a 7.1. ábrán látható, vízszintes síkban levő könyők, amelyen egy folyadék áramlik keresztül, Q_V térfogathozammal. Ismervén a könyők átmérőjét és ívének sugarát, valamint a folyadék p nyomását és γ fajsúlyát, számítsuk ki a könyökre ható erőt.



7.1. ábra. Könyök

Az impulzusmegmaradás tételének értelmében a vezetékszakra ható erők rezultánsa

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = Q_m \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1), \quad (7.1)$$

s ez a rezultáns a hidrosztatikai nyomásból, a folyadéksúrlódásból és a folyadék saját súlyából származó erők vektoriális összege:

$$Q_m \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = \mathbf{F}_{p1} + \mathbf{F}_{p2} + \mathbf{F}_l + \mathbf{G}. \quad (7.2)$$

A fenti egyenletben az F_l laterális erő az egyedüli ismeretlen (ekkor erővel hat a csőfal a folyadékra), ami onnan meghatározható. Az egyenlet vektoriális, amit három vetületi egyenlettel helyettesíthetünk. Ehhez meg kell állapítanunk az egyenletben szereplő vektorok vetületeit. Az ábra sajátosságainak felhasználásával, a feltüntetett koordináta-rendszerben (ahol a z tengely az ábra síkjára merőleges és felfele mutat), e vetületek a következők:

$$\mathbf{v}_1 : \begin{cases} v_{1x} = Q_V / S \\ v_{1y} = 0 \\ v_{1z} = 0 \end{cases} \quad (7.3)$$

$$\mathbf{v}_2 : \begin{cases} v_{2x} = 0 \\ v_{2y} = -Q_V / S \\ v_{2z} = 0 \end{cases} \quad (7.4)$$

$$\mathbf{F}_{p1} : \begin{cases} F_{p1x} = p \cdot S \\ F_{p1y} = 0 \\ F_{p1z} = 0 \end{cases} \quad (7.5)$$

$$\mathbf{F}_{p2} : \begin{cases} F_{p2x} = 0 \\ F_{p2y} = p \cdot S \\ F_{p2z} = 0 \end{cases} \quad (7.6)$$

$$\mathbf{F}_l : \begin{cases} F_{lx} = ? \\ F_{ly} = ? \\ F_{lz} = ? \end{cases} \quad (7.7)$$

$$\mathbf{G} : \begin{cases} G_x = 0 \\ G_y = 0 \\ G_z = -\gamma \cdot \frac{\pi \cdot R}{2} \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \end{cases} \quad (7.8)$$

ahol a vezetékben levő folyadék súlyát a negyed tórusz térfogatával számoljuk ki, $S = \pi \cdot D^2 / 4$.

A 7.2. egyenletet vetületekkel felírva a következőkhöz jutunk:

$$\begin{aligned} Q_m \cdot (v_{2x} - v_{1x}) &= F_{p1x} + F_{p2x} + F_{lx} + G_x \\ Q_m \cdot (v_{2y} - v_{1y}) &= F_{p1y} + F_{p2y} + F_{ly} + G_y \\ Q_m \cdot (v_{2z} - v_{1z}) &= F_{p1z} + F_{p2z} + F_{lz} + G_z \end{aligned} \quad (7.9)$$

ahova behelyettesítve a vetületeket kapjuk:

$$\begin{aligned}
Q_V \cdot \rho \cdot (0 - Q_V / S) &= 0 + p \cdot S + F_{lx} + 0 \\
Q_V \cdot \rho \cdot (-Q_V / S - 0) &= p \cdot S + 0 + F_{ly} + 0 \\
Q_V \cdot \rho \cdot (0 - 0) &= 0 + 0 + F_{lz} - \gamma \cdot \frac{\pi^2 \cdot D^2 \cdot R}{8}
\end{aligned}
\tag{7.10}$$

ahol $\rho = \gamma / g$.

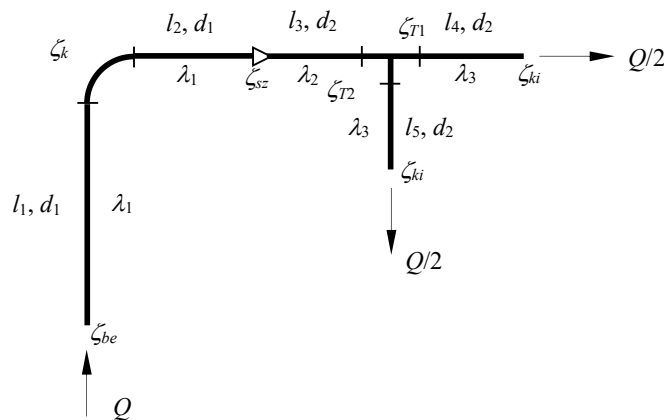
Innen az ismeretlen laterális erő vetületei a következők:

$$\begin{aligned}
F_{lx} &= -Q_V^2 \cdot \gamma / S - p \cdot S \\
F_{ly} &= -Q_V^2 \cdot \gamma / S - p \cdot S \\
F_{lz} &= \gamma \cdot \frac{\pi^2 \cdot D^2 \cdot R}{8}
\end{aligned}
\tag{7.11}$$

Észrevehetjük, hogy ennek az erőnek a vetülete az xy síkra (szimmetria okok miatt) a szögfelezőre esik.

8. HIDRAULIKA

Számítsuk ki a 8.1. látható vezetéken fellépő nyomásesést, a csősúrlódási tényezők, az ellenállás-tényezők, a geometriai méretek és a folyadék sűrűségének, kinematikai viszkozitásának és hozamának ismeretében. A T elágazáson a hozam fele-fele arányban oszlik el.



8.1. ábra. Csővezeték

E feladatok megoldásánál a nyomásveszteséget a

$$\Delta p = \zeta_r \cdot \rho \cdot \frac{v^2}{2}
\tag{8.1}$$

képlettel határozzuk meg, ahol ζ_r az ellenállás tényező. E képletet a veszteségeket előidéző csőszakaszokra és idomokra írjuk fel, a teljes veszteséget e mennyiségek összege adja.

A lokális veszteségforrások (idomok, elágazások, ki és belépés stb.) esetében az ellenállás tényezőt táblázatokból olvashatjuk ki, míg csőszakaszok esetén a

$$\zeta_r = \lambda \cdot \frac{l}{d}. \quad (8.2)$$

képletet használjunk, ahol l a vezeték hossza, d a cső átmérője, λ pedig a csősúrlódási tényező. Ez utóbbi kiszámítására a műszaki gyakorlatban érdekes turbulens áramlás esetén pl. az Altschul-képletet használhatjuk:

$$\lambda = 0.11 \cdot \sqrt[4]{\frac{k_e}{d} + \frac{68}{Re}}, \quad (8.3)$$

ahol k_e az ekvivalens csőérdesség, a Reynolds-számot pedig a v_k kinematikai viszkozitással számoljuk:

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu_k}. \quad (8.4)$$

Példánkban először a hozamokkal és az átmérőkkel szakaszonként meghatározzuk az átlagos áramlási sebességeket, majd azokkal a megfelelő Reynolds-számokat. Ezek alapján az Altschul-képlettel meghatározzuk a csősúrlódási tényezőket, az átmérőktől és a sebességektől függően négy különböző értéket kapunk (az ábrán $\lambda_1 \dots \lambda_4$).

A belépés ζ_{be} , a könyök ζ_k , a szűkítő ζ_{sz} , a T-elágazás két ágának ζ_{T1} és ζ_{T2} , valamint a kilépés ζ_{ki} ellenállástényezőjét ismertnek tekintjük. A szakaszokra ezt az előzetesen meghatározott λ_i csősúrlódási tényezővel, az illető szakasz átmérőjével és hosszával, a 8.2. képlettel határozzuk meg.

E ζ tényezőkkel minden szakaszra és minden lokális veszteségforrásra meghatározzuk, a 8.1. képlettel, a nyomásesést:

- a belépésnél $\Delta p_{be} = \zeta_{be} \cdot \rho \cdot \frac{v_1^2}{2}$
- az első csőszakaszon $\Delta p_1 = \lambda_1 \cdot \frac{l_1}{d_1} \cdot \frac{\rho \cdot v_1^2}{2}$
- a könyökön $\Delta p_k = \zeta_k \cdot \rho \cdot \frac{v_1^2}{2}$
- a második csőszakaszon $\Delta p_2 = \lambda_1 \cdot \frac{l_2}{d_1} \cdot \frac{\rho \cdot v_1^2}{2}$
- a szűkületen $\Delta p_{sz} = \zeta_{sz} \cdot \rho \cdot \frac{v_2^2}{2}$
- a harmadik csőszakaszon $\Delta p_3 = \lambda_2 \cdot \frac{l_3}{d_2} \cdot \frac{\rho \cdot v_2^2}{2}$
- a T egyenes ágán $\Delta p_{T1} = \zeta_{T1} \cdot \rho \cdot \frac{v_3^2}{2}$

– a T derékszögű ágán $\Delta p_{T1} = \zeta_{T2} \cdot \rho \cdot \frac{v_3^2}{2}$

– a negyedik csőszakaszon $\Delta p_4 = \lambda_3 \cdot \frac{l_4}{d_2} \cdot \frac{\rho \cdot v_3^2}{2}$

– az ötödik csőszakaszon $\Delta p_5 = \lambda_3 \cdot \frac{l_5}{d_2} \cdot \frac{\rho \cdot v_3^2}{2}$

– a két kilépésnél $\Delta p_{ki} = \zeta_{ki} \cdot \rho \cdot \frac{v_3^2}{2}$

Ezek összegzésével a belépés és a vízszintes kilépés közötti nyomásesés:

$$\Delta p_1 = \Delta p_{be} + \Delta p_1 + \Delta p_k + \Delta p_2 + \Delta p_{sz} + \Delta p_3 + \Delta p_{T1} + \Delta p_4 + \Delta p_{ki},$$

a belépés és a függőleges kilépés között pedig:

$$\Delta p_1 = \Delta p_{be} + \Delta p_1 + \Delta p_k + \Delta p_2 + \Delta p_{sz} + \Delta p_3 + \Delta p_{T2} + \Delta p_5 + \Delta p_{ki}.$$