Numerikus módszerek - Labor gyakorlatok

Kupán Pál

Tartalomjegyzék

1. FEJEZET

Sorok összegének a kiszámítása

A labor célja: konvergens pozitív sorok összegének a kiszámitása adott pontossággal.

Elméleti fogalmak

Legyen $\sum_{i\geq 1} a_i$ egy pozitív tagú sor $a_i > 0,\ i \geq 1$, aminek az összegét jelöljük S-el

$$S = \sum_{i\geq 1} a_i.$$

A hányados kritérium szerint, ha $\exists M \in \mathbb{N}$ úgy, hogy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1,\ \forall n \geq M, \tag{1.0.1}$$

akkor a sor konvergens.

(1.0.1)-ből következik hogy

$$a_{M+1} \leq q a_M,\ a_{M+2} \leq q a_{M+1},\ \ldots$$

tehát

$$\sum_{i\geq 1} a_i = \sum_{i=1}^{M-1} a_i + a_M \left(1 + q + q^2 + \ldots\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{M-1} a_i + a_M \lim_n \frac{1-q^n}{1-q} = \sum_{i=1}^{M-1} a_i + a_M \frac{1}{1-q}.$$

Tehát, ha az adott sor S összegét az első $M-1$ tag összegévvel közelítjük meg, akkor az elkövetett hiba (maradék tag) a következő lesz:

$$R_M = a_M \frac{1}{1-q}. \tag{1.0.2}$$

Ha adott egy $\epsilon > 0$ pontosság az M értéket a következő egyenlőtlenségből számítjuk ki:

$$R_M \leq \epsilon. \tag{1.0.3}$$

Gyakorlat menete

Feladat. Számítsuk ki

$$\sum_{n\geq 1}\frac{2^n}{n3^n}$$

sor összegét egy százalék pontossággal.

Megoldás. Az $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ hányadosból

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{2^n}{n3^n}}=\frac{2}{3}\frac{n}{n+1}<\frac{2}{3}<1$$

arra következtetünk hogy $q=\frac{2}{3}$.

Az (1.0.3)-ból következik hogy

$$R_M=\frac{2^M}{M3^M}\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=\frac{2^M}{M3^{M-1}}\leq\epsilon. \tag{1.0.4}$$

Gyakorlatilag a sor összegét egy *do-while* ciklusban számítjuk ki, ezért az (1.0.4) egyenlőtlenséget nem oldjuk meg előre, hanem a cikluson belül leellenőrizzük.

Algoritmus (pozitív tagó sor összege):

Bemenő adatok: $a=\frac{2}{3},\ \epsilon=10^{-2},\ n=0,\ S=\frac{2}{3}$

do $n=n+1$

$a=a\frac{n}{n+1}\frac{2}{3}$

$S=S+a$

while $3a>\epsilon$

print $S,n.$

Az eredmény: $S=1.0941,\ M=8.$

Kitűzött feladatok:

1) Számítsuk ki

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$$

sor összegét, $\epsilon=10^{-2}$ pontossággal. Mivel a fenti sor pontos összege $\frac{\pi^2}{6}$, számítsuk ki közelítőleg π értékét.

2) Számítsuk ki

$$\sum_{n\geq 1}\frac{4}{4n^2-1}$$

sor összegét, $\epsilon=10^{-2}$ pontossággal.

2. FEJEZET

Egyenletek numerikus megoldása

2.1. A felező módszer. A Newton-féle módszer.

Gyakorlat célja: egyenletek numerikus megoldása.

Elméleti fogalmak

Egy

$$f(x) = 0,\ x \in A \tag{2.1.1}$$

egyenlet megoldása két lépésben történik. Az első lépés a gyökök elkülönítése, a második a gyökök tényleges meghatározása.

Az elkülönítéssel az A értelmezési intervallumot diszjunkt intervallumokra bontjuk úgy, hogy minden részintervallum egyetlenegy gyököt tartalmazzon.

Ha $f \in C[a, b]$ egy folytonos függvény, akkor

Az elkülönítés történhet analítikusan Rolle-féle sorozattal, vagy grafikusan.

A grafikus elkülönítéshez ábrázoljuk az egyenletből származó függvényt, majd az Ox tengellyel való metszet egy környezete lesz a keresett intervallum.

Természetesen, minél kisebb az elkülönítő intervallum hossza, annál közelebb kerülnek az intervallum végpontjai a gyökhöz. Ez az alapja az intervallumfelező módszernek, vagyis közrefogni és felezni az intervallumot míg ennek hossza elég kicsi (ϵ).

Gyakorlat menete

Algoritmus (intervallum felező):

Bemenő adatok: a, b, f, ϵ
do $x = \frac{a+b}{2}$
  if $f(a) f(x) \leq 0$, *then* $b = x$
    else $a = x$
while $(b - a) \geq \epsilon$
print $x = \frac{a+b}{2}$.

A módszer előnye hogy rendkívül egyszerű, hátránya viszont hogy lassú.

2.2. A Newton-féle módszer.

Egy gyorsabb és gyakran használt módszer az úgy nevezett Newton vagy érintő módszer.

Ez abban áll hogy egy $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozatot hozunk létre ami konvergál az egyenlet gyöke felé. A sorozat tagjait úgy kapjuk, hogy az f függvény görbéjéhez érintőket huzzunk az $f(x_n)$ pontokban majd ezeket metsszük az Ox tengellyel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n \geq 0. \tag{2.2.1}$$

Az x_0 kezdeti értéket a-val vagy b-vel tesszük gyenlővé attól függően hogy $f(a)\, f''(a) > 0$ vagy $f(b)\, f''(b) > 0$.

Az eljárást folytatjuk míg az abszolút, illetve relatív hiba kissebb mint egy adott $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &< \epsilon, \\ \frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n|} &< \epsilon. \end{aligned}$$

Az említett kilépési kritériumot csak akkor használhatjuk ha az $(x_n)_n$ sorozat konvergens.

ABRA 'Newton1.eps';

Algoritmus (Newton módszer):

Bemenő adatok: a, b, f, ϵ

$x = a$

if $f(x)\, f''(x) < 0$ *then* $x = b$

do $x^* = x$

  $x = \varphi(x^*) := x^* - \frac{f(x^*)}{f(x^*)}$

while $|x - x^*| \geq \epsilon$

print x.

A **Matlab** programozási nyelvben az f függvény gyökét meghatározó parancs a következő:

  [x,fval] = fzero(f,x_0*)*

ahol x_0 egy gyök körüli érték.

Feladat. Oldjuk meg az

$$x = \sin(x) + 1$$

egyenletet.

Megoldás. Az $f(x) = \sin(x) + 1 - x$ függvényt ábrázoljuk és a $[0, \pi]$ egy elkülönítő intervallumnak bizonyul.

Az intervallum felező algoritmust alkalmazva azt kapjuk, hogy az x gyök az alábbi egymásba skatulyázott intervallumokban található:

$$[0, \pi] \supset \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \supset \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right] \supset ... \ni x.$$

A Newton módszert alkalmazva a sorozat a következő lesz π, $\frac{\pi+1}{2}$, ...

A **Matlab** programban az elkülönítés érdekében ábrázoljuk az f függvényt. Először értelmezzük az f függvényt: $f = @(x)\sin(x) + 1 - x$, majd ábrázoljuk egy aránylag nagy intervallumon, például $[-10, 10]$: $fplot(f, [-10, 10])$. $x_0 = \pi$ kezdeti értéket felhasználva kapjuk az egyenlet közelítő megoldását $\simeq 1.9346$.

Megjegyzés: Ha az egyenletnek több megoldása van és az elkülönítést nem végezzük el akkor az algoritmus csak egy megoldást kap.

Kitűzött feladatok:

1) Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$e^x - 1 = 0.$$

2) Az

$$x^3 - x + 3 = 0$$

egyenlet esetében vegyük az $x_0 = 0$ kezdeti értéket a Newton módszerhez. Mit lehet észrevenni?

3) A Newton módszert alkalmazva számítsuk ki $\sqrt{a}$ értéket ahol $a > 0$ adott. Vegyük figyelembe hogy $\sqrt{a}$ az $x^2 - a = 0$ egyenlet gyöke. Általánosítsuk.

3. FEJEZET

A húr, a szelő, a Steffensen-féle módszer.

Gyakorlat célja: bemutatni a Newton módszer hátrányait és alternatív megoldásokat adni.

Elméleti fogalmak

Annak ellenére hogy az érintő módszer nagyon gyors és hatékony, szükséges az f' derivált ismerete. A derivált numerikus megközelítéséből különböző módszereket kapunk.

A húr módszer esetében a derivált iránytényezője megközelíthető (lásd 1-es ábra) a $(b, f(b)), (x, f(x))$ pontokat összekötő húr iránytényezőjével:

$$f'(x) \simeq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}. \tag{3.0.1}$$

Tehát a φ iteratív függvény a Newton módszerben

$$\varphi(x) = \frac{bf(x) - xf(b)}{f(x) - f(b)}. \tag{3.0.2}$$

Hasonlóan -a párhuzamosak módszer

$$f'(x) = \lambda \geq f'(x_0), \ \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{\lambda}, \tag{3.0.3}$$

-szelő módszer

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, \ \varphi(x, y) = \frac{f(x)y - f(y)x}{f(x) - f(y)} \tag{3.0.4}$$

-Steffensen módszer:

$$f'(x) = \frac{f(x + f(x)) - f(x)}{f(x)}, \ \varphi(x) = \frac{f^2(x)}{f(x + f(x)) - f(x)}. \tag{3.0.5}$$

Gyakorlat menete

Feladat.

Számítsuk ki az

$$e^x - 1 = 0$$

egyenlet gyökét $\epsilon = 10^{-6}$ pontossággal és hasonlítsuk össze hány lépésre van szükség a bemutatott módszerek esetében.

Megoldás. A megoldást az alábbi táblázat tartalmazza.

	lépés	megoldás
Newton	6	7.78e-017
Steffensen	8	2.16e-017
szelő	9	4.48e-015
Húr	16	-4.79e-007

A táblázatból látszik hogy a Newton és a Steffensen módszerek úgy lépésben mind megoldásban közel állnak.

Kitűzött feladatok.

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

$$\begin{array}{rrcl} (i) & 3e^x - 4\cos(x) & = & 0; \\ (ii) & arctg\,(x) & = & 0. \end{array}$$

3.0.1. Fokozatos közelítések

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x) \;\; x \in [a, b].$$

Ha

$$|\varphi'(x)| < 1, \; x \in [a, b] \tag{3.0.6}$$

akkor

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \tag{3.0.7}$$

sorozat konvergál az adott egyenlet gyökéhez.

1. Probléma. Oldjuk meg az $3e^x - 4\cos(x) = 0$ egyenletet $x \in [0, 1]$.
Az $f(x) = 3e^x - 4\cos(x) = 0$ egyenletet átírjuk $x = \varphi(x)$ ahol:

(1) $\varphi(x) = x + \lambda(3e^x - 4\cos(x))$. Az $\varphi'(x) = 1 + \lambda(3e^x + 4\sin(x))$ függvényt tanulmányozva azt kapjuk, hogy $\lambda = -\frac{1}{10}$-ra a deriváltra igaz az $|\varphi'(x)| < 1$ feltétel, tehát a (3.0.7) sorozat konvergál: $x_0 = 0$, $x_1 = \varphi(x_0) = \frac{1}{10}$, $x_2 = \varphi(x_1) = 0.1664, 0.2065, 0.2292, 0.2414, 0.2479, 0.2512, 0.2530, 0.2539, 0.2543...$ $x_n \to 0.2548$.
A $q = \max_{x\in[0,1]} |\varphi'(x)| = 0.7$ elég közel van 1 értékhez (a gyök közelében $|\varphi'(x)| \approx 0.5$) ezért a konvergencia lassú.

(2) $\varphi(x) = \ln\left(\frac{4}{3}\cos(x)\right)$ és $|\varphi'(x)| = |\tan(x)| < 1$, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. $x_0 = 0$, $x_1 = \varphi(x_0) = \ln\left(\frac{4}{3}\right) = 0.2876$, $x_2 = \varphi(x_1) = 0.2457, 0.2571, 0.2542, 0.2550, 0.2548$.
A gyök közelében $|\varphi'(x)| \approx 0.25$, kisebb az előbbi alpontnál kapott értéknél $(= 0.5)$ ezért a konvergencia gyorsabb.

(3) $\varphi(x) = \arccos\left(\frac{3}{4}e^x\right) \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{-3e^x}{\sqrt{16-9e^{2x}}} < -1$, $x \in [0, 1]$. Az (3.0.7) sorozat divergens.

2. Probléma. Oldjuk meg az $\sqrt{x}-\cos(x)=0$, $\cos^2\left(\sqrt{x}-\cos(x)\right)=0$, $e^x=4x$ egyenleteket!

4. FEJEZET

A Newton-Horner módszer az algebrai egyenletek gyökeinek a meghatározására.

Gyakorlat célja: kiaknázni a polinomok előnyeit annak érdekében hogy a Newton módszerben a derivált értéket minél pontosabban lehessen kiszámítani.

Elméleti fogalmak

A Newton-Horner séma a $P(x) = 0$ algebrai egyenletek valós gyökeinek a meghatározására szolgál, ahol

$$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n. \tag{4.0.1}$$

A P polinomiális függvény behelyettesítési értékét egy $t \in \mathbb{R}$ pontban a Horner sémával számítjuk ki

$$P(t) = a_0 + t(a_1 + ... + t(a_{n-1} + t a_n)). \tag{4.0.2}$$

Deriválva a

$$P(x) = (x - t) Q(x) + r, \; Q \in \mathbb{P}_{n-1}, \tag{4.0.3}$$

képletet kapjuk hogy

$$P'(x) = (x - t) Q'(x) + Q(x).$$

Tehát

$$P'(t) = Q(t), \tag{4.0.4}$$

vagyis a P derivált értéke megegyezik a Q polinom behelyettesítési értékével amit újból Horner sémával oldunk meg.

Az algebrai egyenleteket

$$P(x) = 0$$

a (2.2.1) Newton módszerrel oldjuk meg

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}, \; n \geq 0,$$

és a P' értékét a (4.0.4) sémával számítjuk ki. Kezdeti értéknek lehet venni $x_0 = 0$, vagy $x_0 = \frac{a_0}{a_1}$.

Gyakorlat menete

A Horner sémát a következő rekurzív eljárással végezzük

$$a_n = q_n,\ q_{j-1} = a_{j-1} + tq_j,\ j = \overline{n,1}. \tag{4.0.5}$$

Feladat. Oldjuk meg az

$$P(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

algebrai egyenletet.

Megoldás. $x_0 = 0$ véve kezdeti értéknek azt kapjuk hogy:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{P(0)}{P'(0)} = \frac{24}{50},\ |x_1 - x_0| = 0.48, \\ x_2 &= x_1 - \frac{P(0.48)}{P'(0.48)} = 0.48 - \frac{7.011}{-22.869} = 0.78,\ |x_2 - x_1| = 0.3 \ ... \end{aligned}$$

A **Matlab** programban a (4.0.1) polinom beolvasása, a polinom kiszámítása a t pontban (Horner séma) és a gyökök meghatározása a következő utasításokkal történik:

P=[a_n a_{n-1}... a_1 a_0]
Pt=polyval(P, t)
r=roots(P).

Az előbbi gyakorlat adatait véve alapul: *P*=[1 -10 35 -50 24] , *r=roots(P)*⇒ *r =4,3,2,1.*

Kitűzött feladat:

Számítsuk ki az

$$x^3 - 1 = 0$$

egyenlet gyökeit.

5. FEJEZET

A Newton-Raphson-féle módszer nemlineáris egyenletrendszerek megoldására.

Gyakorlat célja: nemlineáris egyenletrendszerek numerikus megoldása.

Elméleti fogalmak

A Newton-Raphson módszer egy iteratív eljárás a nemlineáris egyenletrendszerek megoldására, vagyis egy X^0 kezdeti közelítő megoldást felhasználva egy olyan $X^1, X^2, ..., X^k$ vektor sorozatot hozunk létre ami konvergál az egyenletrendszer megoldásához.

Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{array} \right. , \tag{5.0.1}$$

illetve annak egy $X^0 = (x_0, y_0)$ közelítő megoldását.

Az f, g függvényeket Taylor sorba fejtjük a lineáris tagokkal bezárólag

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ g(x,y) &= g(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0), \end{aligned}$$

és figyelembe véve a (5.0.1) egyenletrendszert azt kapjuk, hogy

$$x - x_0 = -\frac{\left| \begin{array}{cc} f & \frac{\partial f}{\partial y} \\ g & \frac{\partial g}{\partial y} \end{array} \right|_{(x_0,y_0)}}{\det J(x_0,y_0)}, \; y - y_0 = -\frac{\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x} & f \\ \frac{\partial g}{\partial x} & g \end{array} \right|_{(x_0,y_0)}}{\det J(x_0,y_0)}, \tag{5.0.2}$$

ahol $\det J(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \right)(x_0,y_0) \neq 0$.

A (5.0.1) egyenletrendszer megoldásának következő $X^1 = (x_1, y_1)$ közelítése:

$$x_1 = x_0 - \frac{\left| \begin{array}{cc} f & \frac{\partial f}{\partial y} \\ g & \frac{\partial g}{\partial y} \end{array} \right|_{(x_0,y_0)}}{\det J(x_0,y_0)}, \; y_1 = y_0 - \frac{\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x} & f \\ \frac{\partial g}{\partial x} & g \end{array} \right|_{(x_0,y_0)}}{\det J(x_0,y_0)}. \tag{5.0.3}$$

Hasonlóan a k-ik lépésben ha $\det J(x_k, y_k) \neq 0$ akkor:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial y} \\ g & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}_{(x_k, y_k)}}{\det J(x_k, y_k)}, \quad y_{k+1} = y_k - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & f \\ \frac{\partial g}{\partial x} & g \end{vmatrix}_{(x_k, y_k)}}{\det J(x_k, y_k)}. \tag{5.0.4}$$

Az eljárást folytatjuk míg két egymásutáni vektor $X^k = (x_k, y_k)$ és $X^{k+1} = (x_{k+1}, y_{k+1})$ abszolút, illetve relatív különbsége kisebb mint egy adott $\epsilon > 0$ pontosság:

$$\begin{aligned} \left\| X^{k+1} - X^k \right\| &\leq \epsilon, \\ \frac{\left\| X^{k+1} - X^k \right\|}{\left\| X^k \right\|} &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Gyakorlat menete

Feladat.

A Newton-Raphson módszert használva oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} f(x, y) = x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0 \\ g(x, y) = x^3 - y^3 - 6y + 2 = 0 \end{cases}. \tag{5.0.5}$$

Megoldás. Legyen $X^0 = (x_0, y_0) = (0, 0)$ egy kezdeti megoldás.$\Longrightarrow$ $f(0, 0) = 3$, $g(0, 0) = 2$,

$$J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 6 & 3y^2 \\ 3x^2 & -3y^2 - 6 \end{pmatrix} (0, 0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \det J(0, 0) = 36$. Akkor a (5.0.3) megfelelően kapjuk a következő megközelítést:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 - \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}}{36} = \frac{18}{36} = 0.5, \; y_1 = 0 - \frac{\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{36} = \frac{12}{36} = 0.33 \\ &\Rightarrow \; X^1 = (0.5, 0.33), \left\| X^1 - X^0 \right\|_2 = 0.6, \ldots \end{aligned}$$

A (5.0.5) egyenletrendszernek a mértani jelentése az alábbi ábrán látható:

Ha az $X^0 = (0, 0)$ pontból indulunk ki, akkor az $\left(X^k\right)_k$ megoldás sorozat a $(0.53, 0.35)$ pont felé konvergál.

A **Matlab** programban a

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f(x_1, x_2) \\ g(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \; \mathbf{x} = (x_1, x_2)$$

nemlineáris egyenletrendszert a következő utasítással oldjuk meg:

x=fsolve(F,x$_0$)

ahol x_0 egy kezdeti megoldás.

6. FEJEZET

A Gauss és az LU faktorizációs módszer.

Gyakorlat célja: lineáris egyenletrendszerek numerikus megoldása.

Elméleti fogalmak

A

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & \\ a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. \tag{6.0.1}$$

lineáris egyenletrendszert felső-háromszög típusúnak nevezzük mert az A mátrix nem-nulla tagjai a főátló fölött helyezkednek el:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ha $a_{ii} \neq 0,\ i = \overline{1,n}$, akkor a (6.0.1) megoldása

$$x_n = \frac{b_n}{a_n},\ x_k = \frac{b_k - \sum_{i=k+1}^{n} a_{ki}x_i}{a_{kk}},\ k = \overline{n-1,1}. \tag{6.0.2}$$

Egy négyzetes

$$Ax = b \tag{6.0.3}$$

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,n}\ ,\ x = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)^t\ ,\ b = (b_1\ b_2\ \dots\ b_n)^t$$

egyenletrendszernek a megoldásához használhatjuk a Gauss módszert ami a lineáris algebrából ismert kicserélési lemmára alapoz. Lineáris transzformációkat alkalmazva a sorok között, a (6.0.3) egyenletrendszert visszavezetjük a (6.0.1) háromszög alakú egyenletrendszerre.

A **Matlab** programban ha meg van adva az A és a b mátrix, a megoldást

x=$A\backslash b$

utasítással számítjuk ki.

Az LU faktorizációs módszer az $A = (a_{i,j})_{i,j=1,n}$ mátrix szorzatra való felbontásán alapszik

$$A = LU$$

ahol

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

egy alsó-, illetve felső-háromszög alakú mátrix:

$$\begin{aligned} l_{ij} &= \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}}{u_{jj}}, \; i = \overline{j+1, n}, \\ u_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}, \; i = \overline{1, j}. \end{aligned}$$

Akkor az

$$Ax = b \;\Leftrightarrow\; LUx = b$$

egyenletrendszert két háromszög egyenletrendszer megoldására vezetjük vissza

$$\begin{aligned} Ly &= b, \\ Ux &= y. \end{aligned}$$

Egy A mátrix felbontása a **Matlab** programmal

[L,U]=lu(A)

[L,U,P]=lu(A)

ahol a *P mátrix a permutációs mátrix, i.e.: PA=LU.*

Az LU felbontás alkalmas a determináns kiszámítására is

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}.$$

Gyakorlat menete

Feladat.

1.) Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &=& 6 \\ x_1 + \quad +4x_3 &=& -2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &=& 1 \end{array} \right. . \tag{6.0.4}$$

Megoldás. A (6.0.4) egyenletrendszer ekvivalens az alábbi háromszög egyenletrendszerrel

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &=& 6 \\ 3x_2 - 7x_3 &=& 10 \\ 22x_3 &=& -22 \end{array} \right.$$

aminek a (6.0.2) képlet szerint $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, -1)$ a megoldása.

Az A mátrix LU felbontása a következő mátrixokat eredményezi:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & -0.33 & 1 \end{pmatrix}, \ U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1.5 & 3.5 \\ 0 & 0 & 3.66 \end{pmatrix}, \ P = I_3.$$

2.) Szerkesszük meg azt a negyedfokú $P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \epsilon \mathbb{P}_4$ polinomot mely összeköti a $(1,1), (4,2), (9,3), (16,4), (25,5)$ pontokat.

Megoldás. A $P(x_i) = y_i,\ i = \overline{1,5}$ feltételekből következik, hogy:

$$\begin{cases} a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = & 1 \\ 256a_4 + 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + a_0 = & 2 \\ 6561a_4 + 729a_3 + 81a_2 + 9a_1 + a_0 = & 3 \\ 65536a_4 + 4096a_3 + 256a_2 + 16a_1 + a_0 = & 4 \\ 390\,625a_4 + 15625a_3 + 625a_2 + 25a_1 + a_0 = & 5 \end{cases}.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{cases} a_0 = & 0.55555555555556 \\ a_1 = & 0.47815255731922 \\ a_2 = & -0.03530092592593 \\ a_3 = & 0.00162037037037 \\ a_4 = & -0.00002755731922 \end{cases}$$

3.) Alkalmazzuk Kirchoff törvényét az alábbi áramkörök esetében:

ABRA 'kirchoff1.eps';

Megoldás. A Kirchoff tétel szerint minden zárt hurokban az áramköri elemekben lévő feszültségek összege nulla. Az első, illetve második hurokban az egyenletek:

$$\begin{cases} U_{r_1} + U_{r_6} + U_{r_5} - U_0 & = 0 \\ U_{r_2} + U_{r_3} + U_{r_4} + U_{r_6} & = 0 \end{cases}$$

majd az Ohm törvényét használva:

$$\begin{cases} r_1 i_1 + r_6 (i_1 - i_2) + r_5 i_1 & = U_0 \\ r_2 i_2 + r_3 i_2 + r_4 i_2 + r_6 (i_2 - i_1) & = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{cases} 30i_1 - 10i_2 & = 20 \\ -10i_1 + 70i_2 & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} i_1 & = 0.7 \\ i_2 & = 0.1 \end{cases}.$$

7. FEJEZET

Iteratív módszerek. Túlhatározott egyenletrendszerek

7.1. Jacobi-féle iteratív módszer.

Gyakorlat célja: *lineáris egyenletrendszerek iteratív megoldása.*

Elméleti fogalmak

Az

$$Ax = b \tag{7.1.1}$$

egyenletrendszer ahol

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ekvivalens a

$$x = B_J x + C \tag{7.1.2}$$

ahol

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & & & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \dots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}. \tag{7.1.3}$$

Ha adott egy X^0 kezdeti megoldás akkor a (7.1.2) rekurzív képletből

$$X^1 = B_J X^0 + C, \dots, \; X^{k+1} = B_J X^k + C, \dots$$

Az eljárás folytatható míg

$$\left\| X^{k+1} - X^k \right\| \leq \epsilon$$

ahol $\epsilon > 0$ egy előre megadott pontosság.

Gyakorlat menete

Feladat.

Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Jacobi módszerrel

$$\left\{\begin{array}{rcr} 9x_1 - 2x_2 - 3x_3 & = & 4 \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 & = & -4 \\ -x_1 + 4x_2 - 8x_3 & = & -5 \end{array}\right. . \tag{7.1.4}$$

Megoldás. Mivel az egyenletrendszer átlósan domináns, a Jacobi módszer konvergál.

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{9} & \frac{3}{9} \\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{8} & \frac{4}{8} & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{4}{7} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

$$X^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; X^1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{4}{7} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}, \; X^2 = \begin{pmatrix} \frac{131}{168} \\ \frac{205}{252} \\ \frac{431}{504} \end{pmatrix}, \ldots$$

7.2. Túlhatározott lineáris egyenletrendszerek

$$Ax = b$$

$A \in \mathcal{M}_{mn}, x \in \mathcal{M}_m, A \in \mathcal{M}_n$, $m > n$.

3. Probléma. Oldjuk meg

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 2 \\ 2x_1 + x_3 & = & 3 \\ x_1 + 2x_2 & = & 4 \\ 2x_1 + 2x_2 & = & 5 \end{array}\right. .$$

4. Probléma. J. Kepler harmadik törvénye bolygók mozgására: $\frac{T^2}{x^3} = konst$ ahol T a bolygó keringési periódusa a Nap körül, x a bolygó távolsága a Naptól $\Rightarrow$

$$T = c \cdot x^{\frac{3}{2}}.$$

Ha ismertek a Merkúr, Vénusz, Föld, Mars adatai:

x	58	108	150	228
T	88	225	365	687

határozzuk meg a c konstanst! Milyen távolságra van a Szaturnusz a Naptól ha keringési periódusa $T_{Sz} = 10759$ földi nap?

Megoldás: $\left\{\begin{array}{rcr} 58^{\frac{3}{2}} \cdot c & = & 88 \\ 108^{\frac{3}{2}} \cdot c & = & 225 \\ 150^{\frac{3}{2}} \cdot c & = & 365 \\ 228^{\frac{3}{2}} \cdot c & = & 687 \end{array}\right.$ egyenletrendszernek a megoldása $c = 0.1994$, tehát az egyenlet $T = 0.1994 \cdot x^{\frac{3}{2}}$. A Szaturnusz periódusát behelyettesítve kapjuk, hogy $x_{Sz} = 1428$ millió km-re van a Naptól.

7.3. Rosszul kondicionált lineáris egyenletrendszerek

A lineáris egyenletrendszerek megoldásánál figyelembe kell venni ezek kondicionáltságát. Egy egyenletrendszer rosszul kondicionált ha kis változások az A vagy b mátrixban nagy változásokat eredményeznek a megoldásokban.

A kondicionálás mérőszáma a *cond*

$$cond\,(A) = \|A\|_p \cdot \left\|A^{-1}\right\|_p . \tag{7.3.1}$$

A **Matlab** utastás

k=cond(A,p)

ahol p a norma tipusa.

Ha a *cond* érték nagy az egyenletrendszer instabil, ha pedig $cond \simeq 1$ akkor stabil.

Példa. A negyedrendű Hilbert-féle mátrix

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

kondicionálási száma: $cond\,(H) = 15514$.

5. Példa. 2) Igazoljuk, hogy a $\|\cdot\|_{\max} : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$, $\|A\|_{\max} = \max|a_{ij}|$ függvény eleget tesz a norma definíciónak, de $\|A \cdot B\| \not\leq \|A\| \cdot \|B\|$.

8. FEJEZET

Sajátérték, sajátvektor

Gyakorlat célja: Sajátértékek, sajátvektorok numerikus kiszámítása.

Elméleti fogalmak

A λ számot az $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ mátrix sajátértékének nevezzük ha $\exists x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0_n$ úgy, hogy

$$Ax = \lambda x. \tag{8.0.1}$$

Az x vektort a λ sajátértékhez hozzárendelt sajátvektornak nevezzük.

A sajátértékeket a karakterisztikus polinom gyökeiként lehet kiszámítani

$$\det(A - \lambda I_n) = 0, \tag{8.0.2}$$

vagy

$$(-1)^n \left[\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + ... + (-1)^n p_n\right] = 0, \tag{8.0.3}$$

ahol

$$p_1 = Tr(A) = a_{11} + ... + a_{nn}, ..., p_n = \det(A). \tag{8.0.4}$$

A Cayley-Hamilton tétel szerint minden A mátrix teljesíti a karakterisztikus egyenletét:

$$A^n - p_1A^{n-1} + p_2A^{n-2} + ... + (-1)^n p_nI_n = 0_n. \tag{8.0.5}$$

8.1. Krylov módszer

A módszer abban áll hogy a (8.0.5) egyenletet beszorozzuk $Y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ ... \\ y_n^0 \end{pmatrix}$, kezdeti vektorral majd $Y^k = \begin{pmatrix} y_1^k \\ y_2^k \\ ... \\ y_n^k \end{pmatrix} = AY^{k-1},\ k = \overline{1,n}$ jelöléssel a következő

$n \times n$-es lineáris egyenletrendszerhez jutunk

$$\left\{\begin{array}{lcl} p_1 y_1^{n-1} + p_2 y_1^{n-2} + \ldots + p_n y_1^0 & = & -y_1^n \\ p_1 y_2^{n-1} + p_2 y_2^{n-2} + \ldots + p_n y_2^0 & = & -y_2^n \\ \ldots & & \\ p_1 y_n^{n-1} + p_2 y_n^{n-2} + \ldots + p_n y_n^0 & = & -y_n^n \end{array}\right. \tag{8.1.1}$$

melynek meoglدása a karakterisztikus polinom együtthatói. Ezután megoldjuk a (8.0.3) egyenletet.

A **Matlab**

[sv,se]=eig(A)

utasítással megkapjuk az A mátrix sv sajátvektorait és se sajátértékeit.

Gyakorlat menete

Feladat.

Számítsuk ki az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, majd ellenőrizzük le a (8.0.1) definíciót.

Megoldás. *[sv,se]=eig(A)*

$\Rightarrow$

$$sv = \begin{pmatrix} -0.5915 & -0.9383 & 0.5717 \\ -0.5294 & 0.1934 & -0.7927 \\ -0.6082 & 0.2866 & 0.2116 \end{pmatrix}, \quad se = \begin{pmatrix} 5.71 & 0 & 0 \\ 0 & 1.07 & 0 \\ 0 & 0 & -1.79 \end{pmatrix}.$$

A sajátértékek az se mátrix átlóján találhatók és a megfelelő oszlopon az sv mátrixban a sajátvektor normázva.

Kitűzött feladatok.

Számítsuk ki az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

8.2. Hatvány módszer

6. Példa. Számítsuk ki az $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix domináns sajátértékét, sajátvektorát.

Megoldás: Ha $y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $eps = 10^{-2}$ akkor a domináns sajátérték $domse = 5.7114$, a megfelelő sajátvektor $domsv = \begin{pmatrix} 0.5914 \\ 0.5293 \\ 0.6085 \end{pmatrix}$.

```
while norm(y-yy)>eps
        yy=y;
        y=A*yy;
        lambda=y./yy; %egymasutani hatvany vektorok hanyadosa
        y=y/norm(y);
end
domsv=y
domse=mean(lambda) %hanyados vektor komponenseinek atlaga
```

7. PÉLDA. Számítsuk ki az $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix domináns sajátértékeit, sajátvektorait!

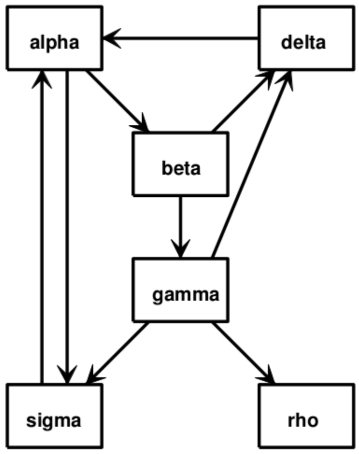
Megoldás: Ha $y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ és $eps = 10^{-2}$ akkor a domináns sajátérték $domse = 4.0122$, a megfelelő (normalizált) sajátvektor $domsv = \begin{pmatrix} 0.7092 \\ 0.7050 \end{pmatrix}$. A minse kiszámításához felhasználjuk, hogy ha (λ, X) se+sv az A mátrixnak akkor, $\left(\frac{1}{\lambda}, X\right)$ se+sv az A^{-1} mátrixnak. Tehát kiszámítjuk az $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixnak a domse, innen pedig az A mátrix minse=1/domseA^{-1}, vagyis $minseA = \frac{1}{0{,}9986} = 1.0014$, $minsv = \begin{pmatrix} 0.4483 \\ -0.8939 \end{pmatrix}$.

8. DEFINÍCIÓ. Sztochasztikus (valószínűségi) mátrixnak nevezzük azt a mátrixot aminek elemei valószínűségek (nulla és egy közötti számok) és minden oszlopban a tagok összege egyenlő eggyel.

Egy $n \times n$ esetén lehet például az egyenletes $E = e_{ij} = \frac{1}{n}$, $\forall i, j$

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & & \\ \frac{1}{n} & & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

9. PÉLDA. C.Moler tiny Web. Ha az alábbi ábra egy web hálózat akkor egy véletlenszerű sétában milyen gyakran látogatjuk meg a csomópontokat?



8.2.1. ábra. Kis web hálozat

A gráf szomszédsági mátrixa:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A cél egy A átmeneti (valószínűségi) mátrixot képezni a G-ból, ami tükrözi egy csomópontból a másikba való áttérési valószínűséget.

A G mátrix oszlopaiból kiolvasható hány él indul kifele az adott csomópontból. Például az első oszlopban látható, hogy az első (*alpha*) csomópontból két él indul kifele (*beta*, illetve *sigma* fele). Ugyanakkor *rho*-ból nem indul egy él sem (zsákutca). Tehát a G mátrix j-dik oszlopában a tagokat összegezve a j csomópont *ki*-fokát kapjuk (soronként a *be*-fokát):

$$c_j = \sum_i g_{ij}. \tag{8.2.1}$$

Ha a G minden egyes j oszlopát elosztjuk c_j-vel akkor egy G^* "majdnem" valószínűségi mátrixot kapunk, ugyanis a nulla ki-fokú oszlopokban nem teljesül a feltétel. A G^* mátrix egy átmeneti mátrix de csak a ki-fokot veszi figyelembe; ugyanakkor ha egy nulla ki-fokú csomóba sétálunk nem tudjuk folytatni az utat. Ennek elkerüléséhez az A mátrixot a G^* és E kombinációjaként számítjuk ki

$$A := p \cdot G^* + (1-p) \cdot E \tag{8.2.2}$$

oly módon, hogy a p súly tükrözze a gráfban megadott séták lehetőségét. Ennek megfelelően, ha egy oszlop ki-foka nulla, akkor $p = 0$, vagyis ebben az esetben a G^* mátrix súlya nulla. Különben legyen p (pl. $p = 0.85$) annak a valószínűsége, hogy a gráfban egy adott élen áthaladunk-e vagy sem (természetesen $(1 - p)$ az ellentétes esemény valószínűsége). Tehát a keresett $A = (a_{ij})$ áttérési mátrix elemeit a következő képlettel állíthatók elő:

$$a_{ij} = \begin{cases} p\frac{g_{ij}}{c_j} + (1-p)\frac{1}{n}, & \text{ha} \quad c_j \neq 0 \\ \frac{1}{n} & \text{ha} \quad c_j = 0 \end{cases} . \tag{8.2.3}$$

Az így előállított A mátrix egy valószínűségi mátrix és ennek az egyensúlyi vektorát az alábbi Markov lánc adja:

$$Ay,\ A^2y,\ A^3y, \ldots$$

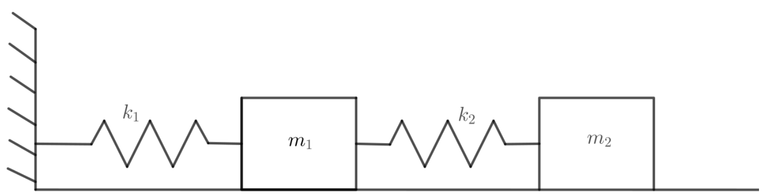
ahol y vektor a rendszer egy kezdeti állapota. Tehát az A mátrix domináns sajátvektorát keressük. Az A mátrix domináns sajátértéke egyenlő eggyel $\lambda_{max} = 1$. A megfelelő sajátvektort a hatvány módszerrel számítjuk ki.

Az adott gráfra a csomópontok (linkek) látogatottsági valószínűsége

$$x = (0.321, 0.170, 0.106, 0.136, 0.064, 0.200)^t,$$

tehát egy véletlenszerű szörföző 32.1%-ban fogja látogatni az *alpha* linket, miközben a *rho* linket csak 6.4% -ban.

10. Példa. Rezgő mozgás.



8.2.2. ábra. Két test rezgő mozgása

Az ábrán látható m_1, m_2 testek két - $k_1 = 0.2$, $k_2 = 0.4$ merevségű $\left(\frac{N}{m}\right)$ - rugóval vannak a falhoz rögzítve. A testeket kimozdítjuk az egyensúlyi pozíciójukból $x_1 = +0.1$, $x_2 = -0.3$ (m).

A Newton törvénye szerint $F = m \cdot a$ tehát

$$\begin{cases} k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) &= m_1 \ddot{x}_1 \\ -k_2 (x_2 - x_1) &= m_2 \ddot{x}_2 \end{cases}$$

vagyis

$$\begin{cases} (-k_1 - k_2) x_1 + k_2 x_2 &= m_1 \ddot{x}_1 \\ k_2 x_1 - k_2 x_2 &= m_2 \ddot{x}_2 \end{cases}$$

Az egyenletrendszer átírható

$$-KX = M\ddot{X}.$$

alakra, ahol

$$K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \; M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}.$$

Ha $m_i = 1$ akkor $M = I_2$ és a következő egyenlethez jutunk:

$$KX = -\ddot{X}. \tag{8.2.4}$$

A megoldását

$$X(t) = e^{\lambda t} u \tag{8.2.5}$$

alakban keressük ahol u egy konstans vektor. Innen

$$\ddot{X}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} u$$

amit behelyettesítve a (8.2.4) képletbe

$$K e^{\lambda t} u = -\lambda^2 e^{\lambda t} u,$$

majd $e^{\lambda t}$-vel egyszerűsítve:

$$Ku = \left(-\lambda^2\right) u. \tag{8.2.6}$$

A kapott egyenlet (8.0.1) típusú, vagyis $\left(\left(-\lambda^2\right), u\right)$ a K mátrix sajátértéke, sajátvektorja. A K egy szimmetrikus, pozitív definit mátrix, tehát (valós) pozitív sajátértékei vannak, ahonnan következik, hogy λ imaginárius szám lesz.

$$sv = \begin{pmatrix} -0.6154 & -0.7882 \\ -0.7882 & 0.6154 \end{pmatrix}, \; se = \begin{pmatrix} 0.0877 & 0 \\ 0 & 0.9123 \end{pmatrix}.$$

A $-\lambda^2 = 0.0877$ -ből következik $\lambda_{1,2} = \pm 0.2961i$, és a $-\lambda^2 = 0.9123$ -ből következik $\lambda_{3,4} = \pm 0.9551i$,

Az általános (valós) megoldást a (8.2.5) képlet jobboldalán lévő tagok kombinációjából állítjuk elő,

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t} + c_4 e^{\lambda_4 t}. \tag{8.2.7}$$

Ugyanakkor, figyelembe véve az Euler formulát:

$$e^{i\cdot t} = \cos(t) + i \cdot \sin(t), \tag{8.2.8}$$

a (8.2.7) képlet első két tagjának az összege következőképpen írható:

$$\begin{aligned}
c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} &= c_1 \cos\left(\overline{\lambda}_1 t\right) + c_1 i \sin\left(\overline{\lambda}_1 t\right) + c_2 \cos\left(\overline{\lambda}_2 t\right) + c_2 i \sin\left(\overline{\lambda}_2 t\right) = \\
&= c_1 \cos\left(\overline{\lambda}_1 t\right) + c_1 i \sin\left(\overline{\lambda}_1 t\right) + c_2 \cos\left(\overline{\lambda}_1 t\right) - c_2 i \sin\left(\overline{\lambda}_1 t\right) = \\
&= (c_1 + c_2) \cos\left(\overline{\lambda}_1 t\right) + (c_1 - c_2)\, i \sin\left(\overline{\lambda}_1 t\right),
\end{aligned}$$

ahol

$$\overline{\lambda}_i = Im(\lambda_i). \tag{8.2.9}$$

Ahhoz, hogy valós megoldást kapjunk c_1, c_2 komplex, konjugált számok kell legyenek, például:

$$2c_1 = A - iB,\ 2c_2 = A + iB.$$

Tehát

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = A \cos\left(\overline{\lambda}_1 t\right) + B \sin\left(\overline{\lambda}_1 t\right),$$

és hasonlóan

$$c_3 e^{\lambda_3 t} + c_4 e^{\lambda_4 t} = C \cos\left(\overline{\lambda}_3 t\right) + D \sin\left(\overline{\lambda}_3 t\right).$$

A (8.2.7) általános megoldás felírható tehát mint:

$$X(t) = \left(A \cos\left(\overline{\lambda}_1 t\right) + B \sin\left(\overline{\lambda}_1 t\right)\right) \cdot sv_1 + \tag{8.2.10}$$
$$+ \left(C \cos\left(\overline{\lambda}_3 t\right) + D \sin\left(\overline{\lambda}_3 t\right)\right) \cdot sv_2 =$$
$$= sv \cdot \begin{pmatrix} A \cos\left(\overline{\lambda}_1 t\right) + B \sin\left(\overline{\lambda}_1 t\right) \\ C \cos\left(\overline{\lambda}_3 t\right) + D \sin\left(\overline{\lambda}_3 t\right) \end{pmatrix}. \tag{8.2.11}$$

Az A, B, C, D paramétereket a kezdeti feltételekből határozzuk meg:

- kezdeti ($t = 0$) kilengés $kil = \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.3 \end{pmatrix} \Rightarrow X(0) = kil$ ami a következő lineáris egyenletrendszerhez vezet:
$$sv \cdot \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = kil,$$
tehát $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = linsolve(sv, kil)$.
- kezdeti sebesség $v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (szabadon engedve) $\Rightarrow \dot{X}(0) = v_0$ ami a következő lineáris egyenletrendszerhez vezet:
$$sv \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 B \\ \lambda_3 D \end{pmatrix} = v_0,$$

tehát $\begin{pmatrix} \lambda_1 B \\ \lambda_3 D \end{pmatrix} = linsolve(sv, v_0)$.

9. FEJEZET

Interpoláció.

9.1. Lagrange -féle interpolációs polinom.

Gyakorlat célja: adott pontokra egy interpoláló polinomot szerkeszteni, majd kiemelni a globális interpoláció hátrányát.

Elméleti fogalmak

Ismerve egy f függvény $(x_0, f_0), ..., (x_n, f_n)$ interpoláló pontjait, keresünk egy olyan n-ed fokú $L_n f$ polinomot ami úgyszinten keresztül halad a pontokon:

(9.1.1) $$L_n f(x_i) = f(x_i) = f_i,\ i = 0, ..., n.$$

Az $L_n f$ polinomot a következő alakban szerkesztjük meg:

(9.1.2) $$L_n f(x) = f_0 l_0(x) + f_1 l_1(x) + ... + f_n l_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i\, l_i(x)$$

ahol

(9.1.3) $$l_i(x) = \frac{\prod_{k\neq i}(x - x_k)}{\prod_{k\neq i}(x_i - x_k)},\ i = \overline{0, n},$$

vagy

(9.1.4) $$\varpi(x) := (x - x_0) ... (x - x_n),\ l_i(x) = \frac{\varpi(x)}{(x - x_i)\,\varpi'(x_i)}.$$

Gyakorlat menete

Feladat.

Határozzuk meg a Lagrange féle interpoláló polinomot a következő adatok esetében:

x_i	0	1	4	9
f_i	0	1	2	3

.

Megoldás. A harmadfokú interpoláló polinom $L_3 f(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x)$ és a (9.1.3)-ból

$$l_0(x) = \frac{(x-1)(x-4)(x-9)}{(-1)(-4)(-9)},\ l_1(x) = \frac{(x-0)(x-4)(x-9)}{(1)(-3)(-8)},\ ...$$

Téves azt gondolni hogy minél több az interpoláló pont annál pontossabban illeszkedik $L_n f$ polinom az adatokra. Ennek érdekében bemutatjuk C. Runge példáját.

9.2. Runge -féle ellenpélda

Az $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$, $x \in [-1,1]$, analitikus függvényből kiemelünk egyenközű interpolációs pontokat és interpoláljuk ezeket a megfelelő polinommal. Az alábbi ábra hét (..) illetve 14 (- -) pont interpolációs polinomját hasonlítja össze az eredeti f (–) függvénnyel.

ABRA 'Runge.eps';

Látható, hogy a fokszám növekedésével az interpoláló polinomok egyre jobban divergálnak a széleken.

A **Matlab**

Ln=polyfit(xi,fi)

utasítás ahol, $xi = x_i$, $fi = f_i$, visszatéríti a Lagrange interpoláló polinomot, míg a

Q=polyfit(xi,fi,n)

visszatéríti az n-ed fokú Q approximáló polinomot (a legkisebb négyzetek módszere).

11. Példa. Magyarországon a 1-től 5-ig terjednek a jegyek, a legkisebb átmenő jegy 2-es. A romániai jegyek 1 től 10 -ig terjednek, legkisebb átmenő 5-ös.

(1) Adjuk meg a lineáris függvényt amely átalakítja a jegyeket ha

m_i	2	5
r_i	5	10

és határozzuk meg a magyarországi 3,4-es osztályzatnak a romániai megfelelőjét!

(2) Adjuk meg a négyzetes függvényt amely átalakítja a jegyeket ha

m_i	2	4	5
r_i	5	8	10

és határozzuk meg a magyarországi 3-as osztályzatnak a romániai megfelelőjét!

10. FEJEZET

Szakaszos interpoláció.

Gyakorlat célja: alternatívát szolgálni a globális interpolációhoz.

Elméleti fogalmak

A Lagrange interpoláció hátrányainak a kiküszöbölésére használjuk a szakaszos interpolációt, vagyis minden $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ intervallumon megszerkesztjük az interpoláló polinomot.

A harmadfokú Hermite-féle interpoláló polinom alakja

$$s(x) = f_i H_0^3(x) + \dot{f}_i H_1^3(x) + \dot{f}_{i+1} H_2^3(x) + f_{i+1} H_3^3(x),\ x \in [x_i, x_{i+1}], \tag{10.0.1}$$

ahol $\{H_0^3, H_1^3, H_2^3, H_3^3\}$ a Hermite-féle alap polinomok

$$\begin{aligned} H_0^3(x) &= 3\left(\frac{x_{i+1}-x}{h_i}\right)^2 - 2\left(\frac{x_{i+1}-x}{h_i}\right)^3, \\ H_1^3(x) &= -h_i\left(\left(\frac{x_{i+1}-x}{h_i}\right)^3 - \left(\frac{x_{i+1}-x}{h_i}\right)^2\right), \\ H_2^3(x) &= h_i\left(\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)^3 - \left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)^2\right), \\ H_3^3(x) &= 3\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)^2 - 2\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)^3,\ h_i = x_{i+1} - x_i. \end{aligned} \tag{10.0.2}$$

Az interpoláló polinom tulajdonságai:

$$\begin{aligned} s(x_i) &= f_i,\ s(x_{i+1}) = f_{i+1} \\ s'(x_i) &= \dot{f}_i,\ s'(x_{i+1}) = \dot{f}_{i+1}. \end{aligned} \tag{10.0.3}$$

Ha a $\dot{f}_i$ deriváltak ismeretlenek, akkor valmilyen módszerrel meg kell szerkeszteni, például

$$\dot{f}_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}},\ i = \overline{1, n-1}. \tag{10.0.4}$$

Gyakorlat menete

Feladat.

Szerkesszunk egy Hermite-féle interpoláló függvényt a következő adatokra:

x_i	0	1	4	9
y_i	0	1	2	3.

Megoldás. Minden ponthoz hozzárendelünk egy iránytényezőt a (10.0.4) képlettel $\dot{f}_1 = \frac{2}{4}$, $\dot{f}_2 = \frac{2}{8}$ és $\dot{f}_0 = 1, \dot{f}_3 = \frac{1}{5}$.

A **Matlab** utasítás a (10.0.1) polinom megszerkesztéséhez
ch=spapi(4,[xi xi],[fi di])
ahol $xi = x_i, fi = f_i, di = \dot{f}_i$ vektorok.

A fenti adatok esetében a Hermite interpoláló polinomot ábrázoljuk az
fnplt(ch,'r')

utasítással.

ABRA hermite.eps

A (10.0.3) képletből azt kapjuk hogy a Hermite interpolációs polinom C^1 osztályú. Ahhoz hogy simább, C^2 interpoláló polinomot kapjunk használjuk a köbös spline függvényeket s_i, $i = 0, ..., n-1$ $(s_i : [x_i, x_{i+1}] \to \mathbb{R})$:

s=spline(xi,fi)

s=csapi(xi,fi)

s=csape(xi,fi), s=csapi(xi,fi,conds, valconds).

Feladat.

Szerkesszük meg a fenti adatok esetében a köbös spline függvényt a következő perem feltételekkel

$$(i) \quad s_0''(x_0) = 0, \; s_{n-1}''(x_n) = 0,$$

(„natural" , természetes spline) majd

$$(ii) \quad s_0'(x_0) = \dot{f}_0 = 1, \; s_{n-1}'(x_n) = \dot{f}_n = 1/5$$

(„complete" spline).

Megoldás. (i) *xi=[0 1 4 9]; fi=[0 1 2 3];s=csapi(xi,fi);fnplt(s)*

(ii) *xi=[0 1 4 9]; fi=[0 1 2 3];di=[1 1/5];s=csape(xi,fi,[1 1],di);fnplt(s)*

ABRA 'cubspline.eps';

11. FEJEZET

Közelítés a legkisebb négyzetek módszerrel

Gyakorlat célja: olyan approximáló módszert bemutatni ami általánosítja az interpolációt.

Elméleti fogalmak

Egy $(x_0, f_0), ..., (x_n, f_n)$ pontokban ismert f függvény legkisebb négyzetek szerinti approximációján, egy F függvényt értünk amely minimizálja a pontokban az eltérést:

$$\sum_{i=0}^{n} \left(f\left(x_i\right) - F\left(x_i\right)\right)^2 \to \min . \tag{11.0.1}$$

A továbbiakban az F függvényt az algebrai polinomok családjából választjuk ki:

$$F\left(x\right) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m.$$

Az $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_m \end{pmatrix}^T$ vektorban szereplő együtthatókat egy

$$MA = V \tag{11.0.2}$$

egyenletrenszer megoldásaként kapjuk ahol:

$$M = \begin{pmatrix} M_0 & M_1 & \dots & M_m \\ M_1 & M_2 & \dots & \\ \vdots & & & \\ M_m & M_{m+1} & \dots & M_{2m} \end{pmatrix}, \ V = \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_m \end{pmatrix} \tag{11.0.3}$$

és

$$\begin{aligned} M_j &: = \sum_{i=0}^{n} x_i^j, \ j = \overline{0, 2m} \\ V_k &: = \sum_{i=0}^{n} x_i^k y_i, \ k = \overline{0, m}. \end{aligned} \tag{11.0.4}$$

Gyakorlat menete

Feladat.

Szerkesszük meg az alábbi pontokra a lineáris regressziós függvényt.

x_i	0	1	4	9
f_i	0	1	2	3

Megoldás. $F(x) = a_1x + a_0$, $M_0 = 4$, $M_1 = 14$, $M_2 = 98$, $V_0 = 6$, $V_1 = 36 \Longrightarrow$

$$\begin{cases} 4a_0 + 14a_1 = 6 \\ 14a_0 + 98a_1 = 36 \end{cases}, \Longrightarrow a_0 = \frac{3}{7}, a_1 = \frac{15}{49} \Longrightarrow F(x) = \frac{15}{49}x + \frac{3}{7}.$$

ABRA$\frac{15}{49}x + \frac{3}{7}$;

A **Matlab** utasítás:

F=polyfit(xi,fi,m)

ahol $xi = x_i, fi = f_i, m =$ a keresett approximáló polinom fokszáma.

12. FEJEZET

Numerikus deriválás és integrálási képletek

12.1. Numerikus deriválás

Gyakorlat célja: különböző eljárást bemutatni derivált és integrál numerikus kiszámítására.

Elméleti fogalmak

Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ egy folytonos és deriválható függvényt és $x_0 \in \mathring{I}$ egy pont az I belsejében.

A határérték definiciójából kiindulva a következő elemi deriválási képletek adódnak

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}, \tag{12.1.1}$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}. \tag{12.1.2}$$

Az első képlet pontossága $O(h)$ a másodiknak pedig $O(h^2)$.

A másodrendű derivált esetében

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0)}{h^2} \tag{12.1.3}$$

$O(h^2)$ pontossággal.

Több ismeretlenes függvények esetében $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, a parciális deriváltak kiszámítása hasonlóan történik

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_m) = \frac{f(x_1, ..., x_i + h, ..., x_m) - f(x_1, ..., x_i, ..., x_m)}{h}, \tag{12.1.4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_m) = \frac{f(x_1, ..., x_i + h, ..., x_m) - f(x_1, ..., x_i - h, ..., x_m)}{2h}. \tag{12.1.5}$$

A másodrendű deriváltakat az alábbi képletekkel számítjuk

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1, ..., x_m) &= \frac{1}{h^2}(f(x_1, ..., x_i + h, ..., x_m) - 2f(x_1, ..., x_i, ..., x_m) + \\ &\quad + f(x_1, ..., x_i - h, ..., x_m)),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1,...,x_m) = \frac{1}{4hk}(f(x_1,...,x_i+h,...,x_j+k,...,x_m) - f(x_1,...,x_i+h,...,x_j-k,...,x$$
$$-f(x_1,...,x_i-h,...,x_j+k,...,x_m) + f(x_1,...,x_i-h,...,x_j-k,...,x_m))$$

ahol h illetve k az x_i illetve x_j irányban megtett lépés.

Gyakorlat menete

Feladat.

Számítsuk ki $f'(1)$, $f''(1)$ értékeket különböző h lépésekre ha $f(x) = e^x$.

Megoldás. Legyen $h = 10^{-2}$. A (12.1.1) képletből

$$f'(1) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{e^{1.01} - e}{0.01} = 2.7319$$

ebben az esetben a hiba $\left|\frac{f(1+h)-f(1)}{h} - e\right| = 2.7319 - 2.718\,3 = 0.0136$.

A (12.1.2) képletet használva

$$f'(1) = \frac{f(1+h) - f(1-h)}{2h} = \frac{e^{1.01} - e^{0,99}}{0.02} = 2.718327$$

a hiba pedig $\left|\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h} - e\right| = 2.718327\text{- } 2.718\,281 = 4.6 \times 10^{-5} = 0.46 \times 10^{-4}$.

A másodfokú derivált értéke

$$f''(1) = \frac{f(1+h) - 2f(1) + f(1-h)}{h^2} = \frac{e^{1.01} - e + e^{0,99}}{10^{-4}} = 2.718304,$$

a hiba $\left|\frac{f(1+h)-2f(1)+f(1-h)}{h^2} - e\right| = 2.26 \times 10^{-5} = 0.226 \times 10^{-4}$.

12. Példa. a.) Ha $f(x) = \sin(x)$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, számítsuk ki $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $f''\left(\frac{\pi}{3}\right)$ deriváltakat $\epsilon = 10^{-4}$ pontossággal!

b.) Ábrázoljuk az f, f', f'' függvényeket!

c.) Számítsuk ki az $x_0 = \frac{\pi}{3}$ pontban húzott érintő és az Ox tengely által bezárt szöget!

Megoldás. a.) Az $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ kiszámításához a (12.1.2) képletet használjuk $h = 10^{-2}$ lépéssel:

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+h\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}-h\right)}{2h} = 0.4999916,$$

az abszolút hiba pedig $8.33 \cdot 10^{-6.}$

Hasonlóan, a (12.1.3) képlettel:

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+h\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}-h\right)}{h^2} = -0.866,$$

a hiba $7.21 \cdot 10^{-6}$.

b.)ABRA numderiv.eps

c.) Az érintő-Oxtengely szöget a

$$\tan \alpha = m,$$

összefüggésből számítjuk ki, ahol m az érintő meredeksége

$$m = f'(x_0).$$

A derivált értékéhez a (12.1.2) képletet használjuk $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.4999916$, tehát:

$$\alpha = \arctan(m) = \arctan(0.4999916) = 0.4636 \text{ rad},$$

vagyis $\alpha_{fok} = \frac{180*\alpha}{\pi} = 26.5647°$. □

13. Példa. Számítsuk ki az $f(x,y) = e^{xy}$ függvény parciális deriváltjait az $(1,2)$ pontban.

Megoldás. Legyen $h = k = 10^{-2}$. A (12.1.5) képletnek megfelelően:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{f(1+h,2) - f(1-h,2)}{2h} = 14.7791$$

és a hiba $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) - 2e^2\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) - 14.7781\right| = 9.85 \times 10^{-4}$;

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \frac{f(1,2+k) - f(1,2-k)}{2k} = 7.3892$$

és a hiba $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) - e^2\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) - 7.3891\right| = 1.23 \times 10^{-4}$. □

12.2. Numerikus integrálás

Legyen $f : [a,b] \to R$ egy folytonos függvény és az $[a,b]$ intervallum egy felosztása:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

Két gyakran használt integrálási képlet az ú.n. trapéz

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + ... + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right) \tag{12.2.1}$$

és a Simpson képlet

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + f(x_{2n})\right). \tag{12.2.2}$$

14. Példa. Számítsuk ki $\int_1^3 x^2 dx$ értéket a trapéz illetve Simpson képlet segítségével $(n = 4)$.

Megoldás. $f(x) = x^2$. A megadott n-ből kiszámítjuk a trapéz módszernek megfelelő lépést: $h = \frac{3-1}{4} = 0.5$, majd a (12.2.1) képletből következik, hogy:

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{h}{2}\left(f(1) + 2f(1+0.5) + 2f(1.5+0.5) + 2f(2+0.5) + f(3)\right) =$$
$$= 0.25\,(1 + 4.5 + 8 + 12.5 + 9) = 8.75.$$

A hiba $\left|8.75 - \frac{x^3}{3}|\right|_1^3 = |8.75 - 8.66| = 0.09\ \left(O\left(n^{-2}\right) = 1/16 = 0.0625\right).$

Hasonlóan a Simpson módszerből $h = \frac{3-1}{2\cdot 4} = 0.25$ és a (12.2.2) képletből:

$$\int_1^3 x^2 dx =$$
$$= \frac{h}{3}\left(f(1) + 4(f(1.25) + f(1.75) + f(2.25) + f(2.75)) + 2\left(f(1.5) + f(2) + f(2.5)\right) + f(3)\right)$$
$$= \frac{0.25}{3}\left(1 + 4\,(1.5625 + 3.0625 + 5.0625 + 7.5625) + 2\,(2.25 + 4 + 6.25) + 9\right) = 8.6666.$$

□

Mivel a függvény másodfokú polinom, az integrál nulla hibával állítható elő a Simpson képlettel.

A trapéz integrálási módszerhez a következő **Matlab** utasítást használjuk:

I=trapz(xi,fi)

ahol $x = x_i,\ fi = f_i = f(x_i)$, míg a Simpson integrálási módszerhez

I=quad(f,a,b).

A kettes integrál

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy$$

kiszámítására használjuk a

I=dblquad(f,a,b,c,d)

utasítást.

Feladat.

Számítsuk ki a $f(x,y) = 8e^{-x^2-y^4}$ felület az $R = [0,1] \times [0,1]$ négyzet fölött bezárt térfogatot.

ABRA 'dblquad.eps';

Megoldás. Ki kell számítani a

$$\int_0^1 \int_0^1 8e^{-x^2-y^4} dxdy$$

kettes integrált.

*f=@(x) 8*exp(-x.^2-y.^4);*

I=dblquad(f,0,1,0,1)

Az integrál értéke $\simeq 5.045$.

13. FEJEZET

Differenciálegyenletek. Euler, Heun, Runge-Kutta módszerek.

Gyakorlat célja: közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldása.

13.1. Elsőrendű differenciálegyenletek

Elméleti fogalmak

Tekintsük a Cauchy feladatot $(y = y(t))$:

$$\left\{ \begin{array}{c} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right., \ t \in [t_0, t_f], \tag{13.1.1}$$

illetve a $[t_0, t_f]$ intervallum egy ekvidisztáns felosztását:

$$t_0 < ... < t_n = t_f, \ t_i = t_0 + ih, \tag{13.1.2}$$

ahol

$$h = \frac{t_f - t_0}{n} \tag{13.1.3}$$

a lépést jelöli.

Az Euler módszer lényege, hogy az elméleti görbét -pontról pontra haladva- lineáris szakaszokkal közelítjük meg és eredményül egy $P_0P_1...P_n$ tört vonalat kapunk; innen származik a módszer elnevezése.

ABRA deeuler.eps

A pontok $(y_i)_{i=1}^n$ ordinátáit a következőképpen állítjuk elő:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i), \ i = \overline{0, n-1}. \tag{13.1.4}$$

vagyis

$$y_{i+1} = y_i + k_1, \ i = \overline{0, n-1} \tag{13.1.5}$$

ahol

$$k_1 = h \cdot f(t_i, y_i). \tag{13.1.6}$$

A Heun módszer egy

$$k_2 = h \cdot f(t_i + h, y_i + k_1) \tag{13.1.7}$$

korrekciós tényezőt alkalmaz az Euler módszerhez:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2, \ i = \overline{0, n-1}.$$

Az Euler módszer pontossága $O(h)$, míg a Heun pontossága $O(h^2)$.

A pontosság növelése érdekében használjuk a Runge-Kutta módszert:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \; i = \overline{0, n-1}, \tag{13.1.8}$$

ahol

$$k_1 = h \cdot f(t_i, y_i), \; k_2 = h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right), \tag{13.1.9}$$

$$k_3 = h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right), \; k_4 = h \cdot f(t_i + h, y_i + k_3). \tag{13.1.10}$$

A módszer hibarendje $O(h^4)$.

Gyakorlat menete

15. PÉLDA. Oldjuk meg a következő Cauchy-féle feladatot ($h = 0.1$)

$$\begin{cases} y' = t \cdot y, & t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

MEGOLDÁS. Alkalmazzuk az Euler módszert: $f(t, y) = t \cdot y$, $t_0 = 0$, $t_i = i \cdot 0.1$, $P_0(0, 1)$

$$y_1 = y_0 + 0.1 \cdot f(0, 1) = 1 + 0$$

$\Longrightarrow P_1(0.1, 1)$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(t_1, y_1) = 1 + 0.1 \cdot 0.1 = 1.001$$

$\Longrightarrow P_2(0.2, 1.001), \ldots$ □

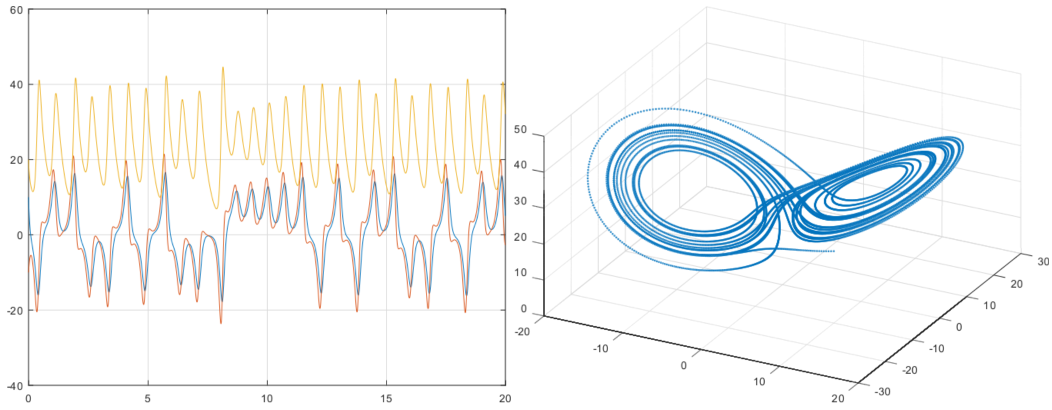
13.2. Differenciál egyenletrendszerek

16. PÉLDA. A Lorenz-féle attractor. Határozzuk meg az $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ függvényeket ha

$$\begin{cases} \dot{x} = 10 \cdot (y - x) \; (= dx(t, x, y, z)) \\ \dot{y} = x \cdot (28 - z) - y \; (= dy(t, x, y, z)) \\ \dot{z} = x \cdot y - \frac{8}{3} z \; (= dz(t, x, y, z)) \end{cases}, \qquad t \in [0, 20]$$

$$\begin{cases} x(0) = 10 \\ y(0) = -10 \\ z(0) = 20 \end{cases}$$

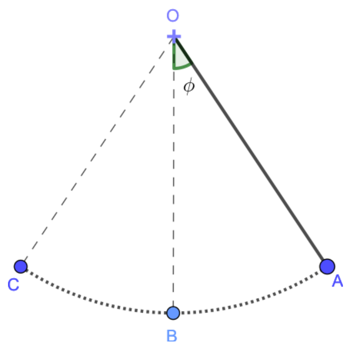
Az Euler módszernél használjunk $n = 10^4$.



13.2.1. ábra. Az x, y, z függvények és a Lorenz-féle attractor

13.3. Másodrendű differenciálegyenletek

17. Példa. Inga lengő mozgása.



13.3.1. ábra. Inga

Adott egy $m = 0.3$kg (pontszerű) test egy $l = 1$m hosszú kar végén. A testet kilendítjük ($t_0 = 0$ kezdeti időpontban) $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ szöggel és szabadon engedjük. Tanulmányozzuk a lengést ($\varphi = \varphi(t)$) tíz percen át $t_f = 10$ ha:

(1) súrlódásmentes mozgást feltételezünk
(2) súrlódásos mozgás esetén.

Megoldás. A lengés egyenlete $m \cdot l \cdot \ddot{\varphi}(t) = -m \cdot g \cdot \sin(\varphi(t))$, tehát a feladat

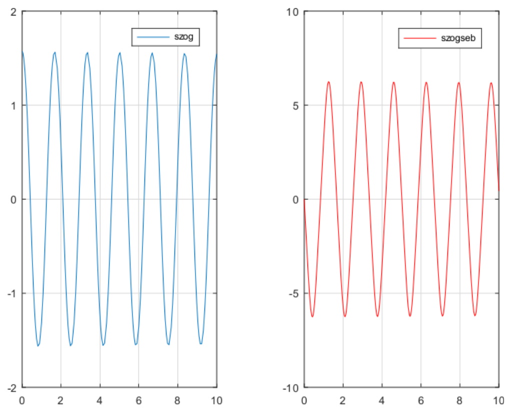
$$\begin{cases} l \cdot \ddot{\varphi} = -g \cdot \sin(\varphi), \quad t \in [t_0, t_f] \\ \varphi(t_0) = \varphi_0 \\ \dot{\varphi}(t_0) = 0 \end{cases}$$

Bevezetve a φ_1, φ_2 függvényeket:

$$\varphi_1 := \varphi,\ \varphi_2 := \dot{\varphi}_1$$

a következő differenciál egyenletrendszerhez jutunk:

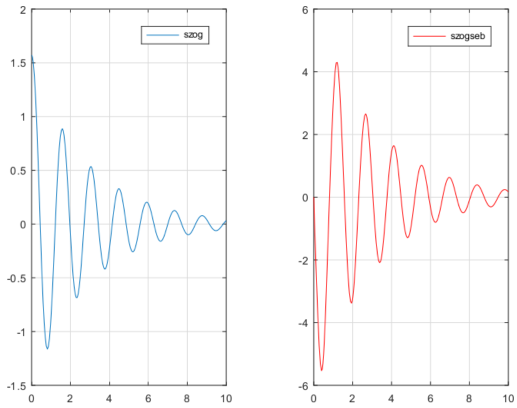
$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_2 = \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \cdot \sin\left(\varphi_1\right) \end{cases},\ t \in [t_0, t_f]$$
$$\begin{cases} \varphi_1\left(t_0\right) = \varphi_0 \\ \varphi_2\left(t_0\right) = 0 \end{cases}.$$



13.3.2. ábra. Súrlódásmentes mozgás

A súrlódás arányos a sebességgel: $m \cdot l \cdot \ddot{\varphi}\left(t\right) = -k \cdot \dot{\varphi}\left(t\right) - m \cdot g \cdot \sin\left(\varphi\left(t\right)\right)$

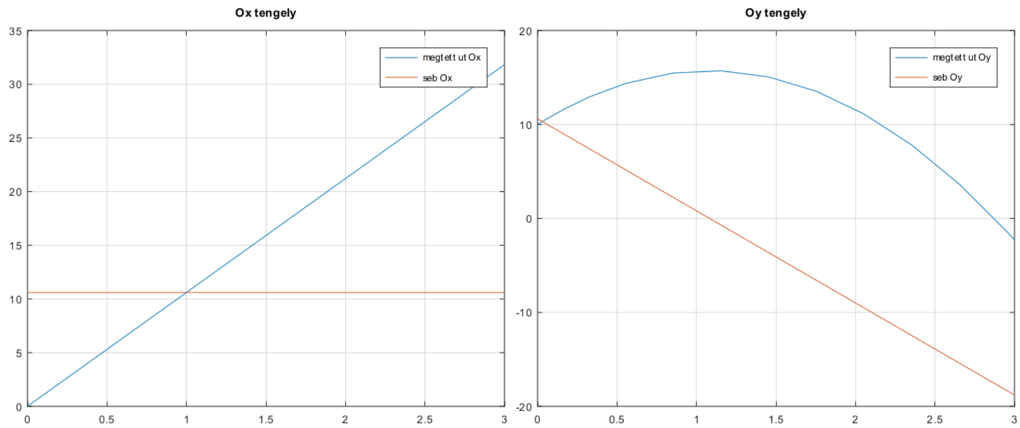
$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_2 = \ddot{\varphi} = -\frac{k}{m \cdot l} \cdot \varphi_2 - \frac{g}{m \cdot l} \cdot \sin\left(\varphi_1\right) \end{cases}, \qquad t \in [t_0, t_f]$$
$$\begin{cases} \varphi_1\left(t_0\right) = \varphi_0 \\ \varphi_2\left(t_0\right) = 0 \end{cases}.$$



13.3.3. ábra. Súrlódásos mozgás ($k = 0.1$)

□

18. Példa. Szög alatti dobás. Egy testet $\alpha = \frac{\pi}{4}$ szög alatt dobunk $h = 10$m magasságból, $v_0 = 15$m/s sebességgel. Írjuk le a vízszintes és függőleges (súrlódásmentes) mozgást. Hasonlítsuk össze az Ox tengely mentén megtett utat különböző szögek esetén!



13.3.4. ábra. Vízszintes, illetve függőleges mozgás $\alpha = \frac{\pi}{4}$

14. FEJEZET

A rács módszer a parciális differenciálegyenletek megoldására.

Gyakorlat célja: parciális differenciálegyenletek numerikus megoldása.

Elméleti fogalmak

A másodrendű parciális differenciálegyenlet általános alakja a következő:

$$a \cdot u_{xx} + b \cdot u_{xy} + c \cdot u_{yy} + d \cdot u_x + e \cdot u_y + f \cdot u = g, \ (x, y) \in \Omega \tag{14.0.1}$$

ahol a, b, c, d, e, f, g függvények x, y-ban.

Osztályozás:

- ha $b^2 - 4ac > 0$ akkor az (14.0.1)-es de.-t hiperbolikusnak nevezzük

Pl. Hullámegyenlet:

$$u_{xx} = \frac{1}{v^2} u_{tt},$$

- ha $b^2 - 4ac = 0$ akkor az (14.0.1)-es de.-t parabolikusnak nevezzük

Pl. Hőterjedés, diffúzió:

$$u_{xx} = \frac{1}{a} u_t,$$

- ha $b^2 - 4ac < 0$ akkor az (14.0.1)-es de.-t elliptikusnak nevezzük

Pl. Lapalce-féle egyenlet

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

A (14.0.1)-es differenciálegyenlethez hozzárendelünk kezdeti vagy perem-feltételek

Lefedjük az Ω síktartományt egy $\Pi = \{x_1, x_2, ..., x_m\} \times \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ ráccsal ahol $(x_i)_{i=1}^m, (y_j)_{j=1}^n$ egyenközű osztópontok

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h, \ i = \overline{1, m} \\ y_{j+1} &= y_j + k, \ j = \overline{1, n} \end{aligned}$$

Az $u(x, y)$ függvény megközelítésére az u függvény (x_i, y_j) csomópontokban közelítését használjuk

$$u(x, y) \simeq u(x_i, y_j) =: u_{ij}, \ i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, n}.$$

Az (14.0.1) egyenlet diszkrét alakjában behelyettesítjük a deriváltak helyett az ismert numerikus deriválási képleteket (12.1.4):

$$u_x(x_i,y_j) = (u_x)_{i,j} = \frac{u(x_i+h,y_j)-u(x_i,y_j)}{h} = \frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h}, \tag{14.0.2}$$

$$u_y(x_i,y_j) = (u_y)_{i,j} = \frac{u(x_i,y_j+k)-u(x_i,y_j)}{k} = \frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k},$$

vagy a pontosabb közelítés (12.1.5)

$$u_x(x_i,y_j) = (u_x)_{i,j} = \frac{u(x_i+h,y_j)-u(x_i-h,y_j)}{2h} = \frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2h}, \tag{14.0.3}$$

$$u_y(x_i,y_j) = (u_y)_{i,j} = \frac{u(x_i,y_j+k)-u(x_i,y_j-k)}{2k} = \frac{u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{2k}.$$

Hasonlóan a másodrendű deriváltakat

$$u_{xx}(x_i,y_j) = (u_{xx})_{i,j} = \frac{u(x_i+h,y_j)-2u(x_i,y_j)+u(x_i-h,y_j)}{h^2} \tag{14.0.4}$$

$$= \frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}, \tag{14.0.5}$$

$$u_{yy}(x_i,y_j) = (u_{yy})_{i,j} = \frac{u(x_i,y_j+k)-2u(x_i,y_j)+u(x_i,y_j-k)}{k^2} \tag{14.0.6}$$

$$= \frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{k^2} \tag{14.0.7}$$

$$u_{xy}(x_i,y_j) = (u_{xy})_{i,j} = \frac{u(x_i+h,y_j+k)-u(x_i+h,y_j)-u(x_i,y_j+k)+u(x_i,y_j)}{hk} \tag{14.0.8}$$

$$= \frac{u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j}-u_{i,j+1}+u_{i,j}}{hk}. \tag{14.0.9}$$

A (14.0.3) képletek véve alapul az $u_{xy}(x_i,y_j)$ vegyes deriváltat a következő képletett lehet kiszámítani:

$$u_{xy}(x_i,y_j) = (u_{xy})_{i,j} \tag{14.0.10}$$

$$= \frac{u(x_i+h,y_j+k)-u(x_i+h,y_j-k)-u(x_i-h,y_j+k)+u(x_i-h,y_j-k)}{4hk} \tag{14.0.11}$$

$$= \frac{u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j-1}-u_{i-1,j+1}+u_{i-1,j-1}}{4hk}. \tag{14.0.12}$$

A behelyettesítést követően, attól függően hogy kezdeti vagy perem-feltételek adódtak, egy rekurzív képletet- vagy egy egyenletrendszert kapunk aminek az ismeretlenei $u_{i,j}$.

Gyakorlat menete

Feladat.

Hőterjedés: adott egy L egységnyi vastag és végtelen nagyságú lemez. Az eredetileg $f(x)$, $x \in [0,L]$ fokos lemezt a t_0 időpontban lehűtjük u_0 fokra (a lemez oldalait). Vizsgáljuk a hőterjedést a lemezanyagában ha az oldalak u_0 fokon vannak tartva.

$$\left\{\begin{array}{c} u:[0,L]\times[0,T]\to\mathbb{R} \\ u_{xx}(x,t)=\frac{1}{a}u_t(x,t), \\ u(x,0)=f(x),\ x\in[0,L] \\ u(0,t)=g_0(t),\ u(L,t)=g_1(t),\ t\in[0,T] \end{array}\right. , \tag{14.0.13}$$

ahol $[0,T]$ a tanulmányozott időintervallum, a pedig a lemez hőterjedési együtthatója.
Konkrét adatok: $L=2$, $T=0,5$, $f(x)=100\,(°C)$, $\forall x\in[0,2]$, $u_0=0\,(°C)$, $a=1$, $g_0(t)=g_1(t)=0\,(°C)$.

Megoldás. Legyen $x_i=i\cdot h$, $i=\overline{0,n}$, $h=(L-0)/n$, és $t_j=j\cdot k$, $j=\overline{0,m}$, $k=(T-0)/m$, illetve az általuk alkotott rács szerkezet (lásd az alábbi ábrát)

ABRA 'pdegrid.eps';

Behelyettesítve a (14.0.13) képletbe a (14.0.2),(14.0.6) képleteket azt kapjuk, hogy

$$\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}-\frac{1}{a}\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k}=0,\ i=\overline{1,m-1},\ j=\overline{0,n-1}.$$

Átalakítva a következő rekurzív képletet kapjuk:

$$u_{i,j+1}=\frac{ak}{h^2}u_{i-1,j}+\left(1-2\frac{ak}{h^2}\right)u_{i,j}+\frac{ak}{h^2}u_{i+1,j},\ i=\overline{1,m-1},\ j=\overline{0,n-1}.$$

A konkrét adatok esetében vegyük a következő lépéseket $h=0.2$, $k=0.01\ \Rightarrow\ \frac{ak}{h^2}=0.25$

$$u_{i,j+1}=0.25u_{i-1,j}+0.5u_{i,j}+0.25u_{i+1,j},\ i=\overline{1,m-1},\ j=\overline{0,n-1}.$$

ahol $u_{0,j+1}=0$, $u_{n,j+1}=0$, $u_{i,0}=100$.

Az alábbi ábrán a hőmérséklet eloszlása látható a lemezben.

ABRA 'pdeeloszlas.eps';