

Numerikus módszerek - Labor gyakorlatok

Kupán Pál

Tartalomjegyzék

1. fejezet. Bevezető	5
2. fejezet. Sorok összegének a kiszámítása	9
3. fejezet. Egyenletek numerikus megoldása	11
3.1. A felező módszer. A Newton-féle módszer.	11
3.2. A Newton-féle módszer.	12
4. fejezet. A húr, a szelő, a Steffensen-féle módszer.	15
5. fejezet. A Newton-Horner módszer az algebrai egyenletek gyökeinek a meghatározására.	19
6. fejezet. A Newton-Raphson-féle módszer nemlineáris egyenletrendszerek megoldására.	21
7. fejezet. A Gauss és az LU faktorizációs módszer.	23
8. fejezet. Iteratív módszerek. Túlhatározott egyenletrendszerek	27
8.1. Jacobi-féle iteratív módszer.	27
8.2. Túlhatározott lineáris egyenletrendszerek	28
8.3. Rosszul kondicionált lineáris egyenletrendszerek	29
9. fejezet. Sajátérték, sajátvektor	31
9.1. Krylov módszer	32
9.2. Hatvány módszer	33
10. fejezet. Interpoláció.	39
10.1. Lagrange -féle interpolációs polinom.	39
10.2. Runge -féle ellenpélda	40
11. fejezet. Szakaszos interpoláció.	41
12. fejezet. Közelítés a legkisebb négyzetek módszerrel	43
13. fejezet. Numerikus deriválás és integrálási képletek	45
13.1. Numerikus deriválás	45
13.2. Numerikus integrálás	47

14. fejezet. Differenciálegyenletek. Euler, Heun, Runge-Kutta módszerek.	49
14.1. Elsőrendű differenciálegyenletek	49
14.2. Differenciál egyenletrendszerek	50
14.3. Másodrendű differenciálegyenletek	51
15. fejezet. A rács módszer a parciális differenciálegyenletek megoldására.	55

1. FEJEZET

Bevezető

A Matlab szoftver Command Window (Vezérlő ablak)

```
>> x=3;
```

Változó mentése a memóriában. Ha a parancsot nem zárjuk ; jellel, akkor a változó kiíródik a vezérlő ablakban.

```
>> x=sqrt(x+1);
```

paranccsal felülíródik az x változó és $x = 2$ eredményt kapunk. A fel-gomb-bal a lekért utasításokat újra lehívhatjuk. Adott esetben az x változása egy idő után már nem észlelhető ($x = 1.618$). A

```
>> format long
```

utasítással viszont további tizedesek láthatóak. Visszatérni a

```
>> format short
```

utasítással lehet. A fenti utasítás-sorozat a

$$(1.0.1) \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}$$

rekurens képlettel ekvivalens amit egy *for* ciklussal oldunk meg amit a szerkesztőben írunk:

```
>> edit
```

A szerkesztő ablakban ajánlott rövid megjegyzéssel kezdeni. Az előbbi sorozat a következőképpen néz ki a szerkesztőben:

```
% bevezeto a Matlab nyelvezetbe
```

```
x=3;
```

```
for i=1:8
```

```
    x=sqrt(x+1);
```

```
end
```

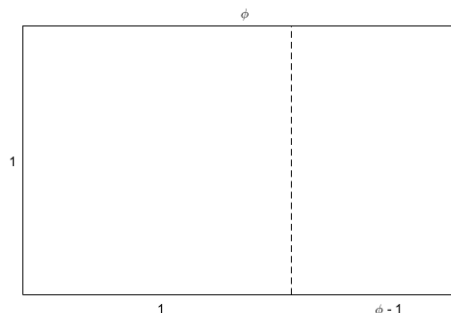
```
%%% kiiratas
```

```
disp([' megoldas=', num2str(x)]);
```

```
%%% kiratas egyszeruen
```

```
megoldas=x
```

A kapott érték az ókorból már ismert arany-szám (arany-metszet) $\phi = 1.6180$. Az arany-szám egy téglalap oldalai közti „szép” arányt adja,



1.0.1. ábra. Arany-négyszög

vagyis ha a nagy téglalabból kivágunk egy négyzetet a megmaradt téglalap oldalai ugyanazt az arányt adják. Tehát

$$\frac{\phi}{1} = \frac{1}{\phi - 1},$$

ahonnan a $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ megoldása az alábbi egyenletnek:

$$(1.0.2) \quad x^2 - x - 1 = 0.$$

A (1.0.2) egyenletet algebrainak, míg a (1.0.1) egyenletet: $x = \sqrt{x+1}$ nem-algebrai (transzcendensnek) nevezzük. A numerikus módszer egyik feladata ezekre algoritmust adni.

Az ϕ arany-szám kapcsolódik a Fibonacci ($f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$) számokhoz, ugyanis két egymásutáni Fibonacci szám hányadosa határértékben tart ϕ -hez:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi.$$

```
% Fibonacci számok iteratív eljárás
% hany nyul par lesz egy ev alatt?
f0=1;f1=1;
for i=1:10
    f2=f1+f0;

    f0=f1;
    f1=f2;
end
nyulpar=f2
```

```
%% arany-szam kozelites
```

```
phi=f1/f0
```

A Fibonacci sorozatot mátrix szorzással is meghatározható

A mátrix sorait pont-vesszővel különítjük el.

```
%Fibonacci szamok generalasa matrix szorzassal
```

```
% A=[0 1]      F=[1]
```

```
%  [1 1]      [1]
```

```
A=[0 1;1 1];    %2x2 -es matrix
```

```
F=[1;1]         %oszlopvektor
```

```
for i=1:10
```

```
    F=A*F
```

```
end
```

Lánctörtek: $[a, b, c, \dots] = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{\ddots}}}$. A leelemibb lánctört: $[1, 1, 1, \dots]$ Számítsuk

ki tíz mélységig és adjuk meg a racionális alakját!

A Matlab=Matrix Laboratory

az alábbi kódreszlet ...

```
% vektorizacio vs loop
```

```
%% vektorizacio
```

```
tic
```

```
y = sin(pi*[0:1e-7:1]);
```

```
t1=toc
```

```
%% for loop
```

```
tic
```

```
i = 0 ;
```

```
for t = 0:1e-7:1
```

```
    i = i + 1 ;
```

```
    yy(i) = sin(pi*t) ;
```

```
end
```

```
t2=toc
```

A t_2 és t_1 összehasonlításából arra lehet következtetni, hogy a vektorizáció optimálisabb a *for* ciklusnál (majdnem kétszer gyorsabb).

2. FEJEZET

Sorok összegének a kiszámítása

A labor célja: konvergens pozitív sorok összegének a kiszámítása adott pontossággal.

Elméleti fogalmak

Legyen $\sum_{i \geq 1} a_i$ egy pozitív tagú sor $a_i > 0$, $i \geq 1$, aminek az összegét jelöljük S -el

$$S = \sum_{i \geq 1} a_i.$$

A hányados kritérium szerint, ha $\exists M \in \mathbb{N}$ úgy, hogy

$$(2.0.1) \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1, \quad \forall n \geq M,$$

akkor a sor konvergens.

(2.0.1)-ből következik hogy

$$a_{M+1} \leq qa_M, \quad a_{M+2} \leq qa_{M+1}, \quad \dots$$

tehát

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 1} a_i &= \sum_{i=1}^{M-1} a_i + a_M (1 + q + q^2 + \dots) = \\ &= \sum_{i=1}^{M-1} a_i + a_M \lim_n \frac{1 - q^n}{1 - q} = \sum_{i=1}^{M-1} a_i + a_M \frac{1}{1 - q}. \end{aligned}$$

Tehát, ha az adott sor S összegét az első $M - 1$ tag összegévvél közelítjük meg, akkor az elkövetett hiba (maradék tag) a következő lesz:

$$(2.0.2) \quad R_M = a_M \frac{1}{1 - q}.$$

Ha adott egy $\epsilon > 0$ pontosság az M értéket a következő egyenlőtlenségből számítjuk ki:

$$(2.0.3) \quad R_M \leq \epsilon.$$

Gyakorlat menete

Feladat. Számítsuk ki

$$\sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{n3^n}$$

sor összegét egy százalék pontossággal.

Megoldás. Az $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ hányadosból

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{2^n}{n3^n}} = \frac{2}{3} \frac{n}{n+1} < \frac{2}{3} < 1$$

arra következtetünk hogy $q = \frac{2}{3}$.

Az (2.0.3)-ból következik hogy

$$(2.0.4) \quad R_M = \frac{2^M}{M3^M} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{2^M}{M3^{M-1}} \leq \epsilon.$$

Gyakorlatilag a sor összegét egy *do-while* ciklusban számítjuk ki, ezért az (2.0.4) egyenlőtlenséget nem oldjuk meg előre, hanem a cikluson belül leellenőrizzük.

Algoritmus (pozitív tagó sor összege):

Bemenő adatok: $a = \frac{2}{3}$, $\epsilon = 10^{-2}$, $n = 0$, $S = \frac{2}{3}$

do $n = n + 1$

$$a = a \frac{n}{n+1} \frac{2}{3}$$

$$S = S + a$$

while $3a > \epsilon$

print S, n .

Az eredmény: $S = 1.0941$, $M = 8$.

Kitűzött feladatok:

1) Számítsuk ki

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

sor összegét, $\epsilon = 10^{-2}$ pontossággal. Mivel a fenti sor pontos összege $\frac{\pi^2}{6}$, számítsuk ki közelítőleg π értékét.

2) Számítsuk ki

$$\sum_{n \geq 1} \frac{4}{4n^2 - 1}$$

sor összegét, $\epsilon = 10^{-2}$ pontossággal.

3. FEJEZET

Egyenletek numerikus megoldása

3.1. A felező módszer. A Newton-féle módszer.

Gyakorlat célja: egyenletek numerikus megoldása.

Elméleti fogalmak

Egy

$$(3.1.1) \quad f(x) = 0, \quad x \in A$$

egyenlet megoldása két lépésben történik. Az első lépés a gyökök elkülönítése, a második a gyökök tényleges meghatározása.

Az elkülönítéssel az A értelmezési intervallumot diszjunkt intervallumokra bontjuk úgy, hogy minden részintervallum egyetlen gyököt tartalmazzon.

Ha $f \in C[a, b]$ egy folytonos függvény, akkor $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Az elkülönítés történhet analitikusan Rolle-féle sorozattal, vagy grafikusan.

A grafikus elkülönítéshez ábrázoljuk az egyenletből származó függvényt, majd az Ox tengellyel való metszet egy környezetébe lesz a keresett intervallum.

Természetesen, minél kisebb az elkülönítő intervallum hossza, annál közelebb kerülnek az intervallum végpontjai a gyökhöz. Ez az alapja az intervallumfelező módszernek, vagyis közrefogni és felezni az intervallumot míg ennek hossza elég kicsi (ϵ).

Gyakorlat menete

Algoritmus (intervallum felező):

Bemenő adatok: a, b, f, ϵ

while $(b - a) > \epsilon$

$$c = \frac{a+b}{2}$$

if $f(a) \cdot f(c) \leq 0$, *then* $b = c$

else $a = c$

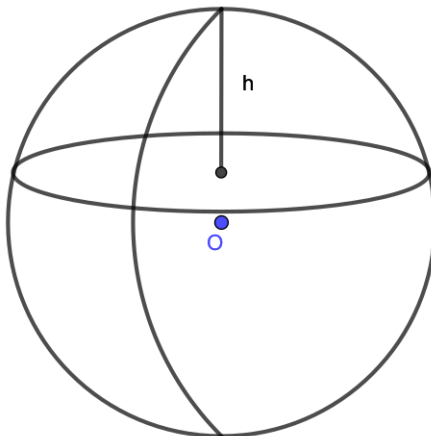
print $c = \frac{a+b}{2}$.

Ha $\epsilon = \textit{eps}$ akkor az utolsó lépésben az a és b bináris felírása csak az utolsó bitben változik.

A módszer előnye hogy rendkívül egyszerű, hátránya viszont hogy lassú.

1. PROBLÉMA. Egy $R = 10$ cm sugarú fagömböt ($\rho_{fa} = 0.6$ g/cm³) a vízbe merítünk. Mennyire (h) emelkedik ki a vízből?

MEGOLDÁS. Archimédész törvénye szerint az egyensúly akkor áll fenn ha a kiszorított víz tömege egyenlő a fagömb tömegével: $m_{fa} = \rho_{fa} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 800\pi$ gramm.



3.1.1. ábra. A fagömbből h magasság emelkedik a víz fölé

Ha $V_l = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$ -vel jelöljük a vízből kiálló gömbszelet térfogatát, akkor a kiszorított víz térfogata egyenlő $\frac{4}{3}\pi R^3 - V_l$ értékkel és a tömege $\frac{4}{3}\pi 10^3 - \frac{\pi h^2}{3}(30 - h)$ gramm. Tehát h az alábbi egyenletnek tesz eleget:

$$\frac{4}{3}\pi 10^3 - \frac{\pi h^2}{3}(30 - h) = 800\pi,$$

vagyis

$$(3.1.2) \quad h^3 - 30h^2 + 1600 = 0.$$

A (3.1.2) egyenletnek három gyöke van, ebből az adott feladatnak a megoldása: $h = 8.6586$ cm.

3.2. A Newton-féle módszer.

Egy gyorsabb és gyakran használt módszer az úgy nevezett Newton vagy érintő módszer.

Ez abban áll hogy egy $(x_n)_{n \geq 0}$ sorozatot hozunk létre ami konvergál az egyenlet gyöke felé. A sorozat tagjait úgy kapjuk, hogy az f függvény görbéjéhez érintőket húzzunk az $f(x_n)$ pontokban majd ezeket metsszük az Ox tengellyel

$$(3.2.1) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0.$$

Az x_0 kezdeti értéket a -val vagy b -vel tesszük egyenlővé attól függően hogy $f'(a) f''(a) > 0$ vagy $f'(b) f''(b) > 0$.

Az eljárást folytatjuk míg az abszolút, illetve relatív hiba kisebb mint egy adott $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &< \epsilon, \\ \frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n|} &< \epsilon. \end{aligned}$$

Az említett kilépési kritériumot csak akkor használhatjuk ha az $(x_n)_n$ sorozat konvergens.

ABRA 'Newton1.eps';

Algoritmus (Newton módszer):

Bemenő adatok: a, b, f, ϵ

$x = a$

if $f(x) f''(x) < 0$ then $x = b$

do $x^* = x$

$$x = \varphi(x^*) := x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}$$

while $|x - x^*| \geq \epsilon$

print x .

A **Matlab** programozási nyelvben az f függvény gyökét meghatározó parancs a következő:

$$[x, fval] = fzero(f, x_0)$$

ahol x_0 egy gyök körüli érték.

Feladat. Oldjuk meg az

$$x = \sin(x) + 1$$

egyenletet.

Megoldás. Az $f(x) = \sin(x) + 1 - x$ függvényt ábrázoljuk és a $[0, \pi]$ egy elkülönítő intervallumnak bizonyul.

Az intervallum felező algoritmust alkalmazva azt kapjuk, hogy az x gyök az alábbi egymásba skatulyázott intervallumokban található:

$$[0, \pi] \supset \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right] \supset \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right] \supset \dots \ni x.$$

A Newton módszert alkalmazva a sorozat a következő lesz $\pi, \frac{\pi+1}{2}, \dots$

A **Matlab** programban az elkülönítés érdekében ábrázoljuk az f függvényt. Először értelmezzük az f függvényt: $f = @(x) \sin(x) + 1 - x$, majd ábrázoljuk egy aránylag nagy intervallumon, például $[-10, 10]$: `ezplot(f, [-10, 10])`. Az $x_0 = \pi$ kezdeti értéket felhasználva kapjuk az egyenlet közelítő megoldását $\simeq 1.9346$.

Megjegyzés: Ha az egyenletnek több megoldása van és az elkülönítést nem végezzük el akkor az algoritmus csak egy megoldást kap.

Kitűzött feladatok:

1) Oldjuk meg az alábbi egyenletet

$$e^x - 1 = 0.$$

2) Az

$$x^3 - x + 3 = 0$$

egyenlet esetében vegyük az $x_0 = 0$ kezdeti értéket a Newton módszerhez. Mit lehet észrevenni?

3) A Newton módszert alkalmazva számítsuk ki \sqrt{a} értéket ahol $a > 0$ adott. Vegyük figyelembe hogy \sqrt{a} az $x^2 - a = 0$ egyenlet gyöke. Általánosítsuk.

4) Oldjuk meg az

$$x^{x+1} = (x+1)^x$$

egyenletet!

4. FEJEZET

A húr, a szelő, a Steffensen-féle módszer.

Gyakorlat célja: bemutatni a Newton módszer hátrányait és alternatív megoldásokat adni.

Elméleti fogalmak

Annak ellenére hogy az érintő módszer nagyon gyors és hatékony, szükséges az f' derivált ismerete. A derivált numerikus megközelítéséből különböző módszereket kapunk.

A húr módszer esetében a derivált iránytényezője megközelíthető (lásd 1-es ábra) a $(b, f(b)), (x, f(x))$ pontokat összekötő húr iránytényezőjével:

$$(4.0.1) \quad f'(x) \simeq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Tehát a φ iteratív függvény a Newton módszerben

$$(4.0.2) \quad \varphi(x) = \frac{bf(x) - xf(b)}{f(x) - f(b)}.$$

Hasonlóan a párhuzamosak módszer

$$(4.0.3) \quad f'(x) = \lambda \geq f'(x_0), \quad \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{\lambda},$$

-szelő módszer

$$(4.0.4) \quad f'(x) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, \quad \varphi(x, y) = \frac{f(x)y - f(y)x}{f(x) - f(y)}$$

-Steffensen módszer:

$$(4.0.5) \quad f'(x) = \frac{f(x + f(x)) - f(x)}{f(x)}, \quad \varphi(x) = \frac{f^2(x)}{f(x + f(x)) - f(x)}.$$

Gyakorlat menete

Feladat.

Számítsuk ki az

$$e^x - 1 = 0$$

egyenlet gyökét $\epsilon = 10^{-6}$ pontossággal és hasonlítsuk össze hány lépésre van szükség a bemutatott módszerek esetében.

Megoldás. A megoldást az alábbi táblázat tartalmazza.

	lépés	megoldás
Newton	6	7.78e-017
Steffensen	8	2.16e-017
szelő	9	4.48e-015
Húr	16	-4.79e-007

A táblázatból látszik hogy a Newton és a Steffensen módszerek úgy lépésben mind megoldásban közel állnak.

Kitűzött feladatok.

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

$$(i) \quad 3e^x - 4 \cos(x) = 0;$$

$$(ii) \quad \operatorname{arctg}(x) = 0.$$

4.0.1. Fokozatos közelítések

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x) \quad x \in [a, b].$$

Ha

$$(4.0.6) \quad |\varphi'(x)| < 1, \quad x \in [a, b]$$

akkor

$$(4.0.7) \quad x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

sorozat konvergál az adott egyenlet gyökéhez.

2. PROBLÉMA. Oldjuk meg az $3e^x - 4 \cos(x) = 0$ egyenletet $x \in [0, 1]$.

Az $f(x) = 3e^x - 4 \cos(x) = 0$ egyenletet átírjuk $x = \varphi(x)$ ahol:

- (1) $\varphi(x) = x + \lambda(3e^x - 4 \cos(x))$. Az $\varphi'(x) = 1 + \lambda(3e^x + 4 \sin(x))$ függvényt tanulmányozva azt kapjuk, hogy $\lambda = -\frac{1}{10}$ -ra a deriváltra igaz az $|\varphi'(x)| < 1$ feltétel, tehát a (4.0.7) sorozat konvergál: $x_0 = 0, x_1 = \varphi(x_0) = \frac{1}{10}, x_2 = \varphi(x_1) = 0.1664, 0.2065, 0.2292, 0.2414, 0.2479, 0.2512, 0.2530, 0.2539, 0.2543 \dots$
 $x_n \rightarrow 0.2548$.

A $q = \max_{x \in [0,1]} |\varphi'(x)| = 0.7$ elég közel van 1 értékhez (a gyök közelében $|\varphi'(x)| \approx 0.5$) ezért a konvergencia lassú.

- (2) $\varphi(x) = \ln\left(\frac{4}{3} \cos(x)\right)$ és $|\varphi'(x)| = |\tan(x)| < 1, x \in [0, \frac{1}{2}]$. $x_0 = 0, x_1 = \varphi(x_0) = \ln\left(\frac{4}{3}\right) = 0.2876, x_2 = \varphi(x_1) = 0.2457, 0.2571, 0.2542, 0.2550, 0.2548$.

A gyök közelében $|\varphi'(x)| \approx 0.25$, kisebb az előbbi alpontonál kapott értéknél (= 0.5) ezért a konvergencia gyorsabb.

- (3) $\varphi(x) = \arccos\left(\frac{3}{4}e^x\right) \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{-3e^x}{\sqrt{16-9e^{2x}}} < -1, x \in [0, 1]$. Az (4.0.7) sorozat divergens.

3. PROBLÉMA. Oldjuk meg az $\sqrt{x} - \cos(x) = 0$, $\cos^2(\sqrt{x} - \cos(x)) = 0$, $e^x = 4x$ egyenleteket!

4. PROBLÉMA. Oldjuk meg a $x^2 - x - 1 = 0$, $x \in [1, 2]$ egyenletet fokozatos közelítésekkel ha

- $\varphi(x) = x^2 - 1$ div
- $\varphi(x) = \frac{1}{x-1}$ div
- $\varphi(x) = \sqrt{x+1}$ konv
- $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{x}$ konv

5. FEJEZET

A Newton-Horner módszer az algebrai egyenletek gyökeinek a meghatározására.

Gyakorlat célja: kiaknázni a polinomok előnyeit annak érdekében hogy a Newton módszerben a derivált értéket minél pontosabban lehessen kiszámítani.

Elméleti fogalmak

A Newton-Horner séma a $P(x) = 0$ algebrai egyenletek valós gyökeinek a meghatározására szolgál, ahol

$$(5.0.1) \quad P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

A P polinomiális függvény behelyettesítési értékét egy $t \in \mathbb{R}$ pontban a Horner sémával számítjuk ki

$$(5.0.2) \quad P(t) = a_0 + t(a_1 + \dots + t(a_{n-1} + ta_n)).$$

Deriválva a

$$(5.0.3) \quad P(x) = (x - t)Q(x) + r, \quad Q \in \mathbb{P}_{n-1},$$

képletet kapjuk hogy

$$P'(x) = (x - t)Q'(x) + Q(x).$$

Tehát

$$(5.0.4) \quad P'(t) = Q(t),$$

vagyis a P derivált értéke megegyezik a Q polinom behelyettesítési értékével amit újból Horner sémával oldunk meg.

Az algebrai egyenleteket

$$P(x) = 0$$

a (3.2.1) Newton módszerrel oldjuk meg

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}, \quad n \geq 0,$$

és a P' értékét a (5.0.4) sémával számítjuk ki. Kezdeti értéknek lehet venni $x_0 = 0$, vagy $x_0 = \frac{a_0}{a_1}$.

Gyakorlat menete

A Horner sémát a következő rekurzív eljárással végezzük

$$(5.0.5) \quad a_n = q_n, \quad q_{j-1} = a_{j-1} + tq_j, \quad j = \overline{n, 1}.$$

Feladat. Oldjuk meg az

$$P(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

algebrai egyenletet.

Megoldás. $x_0 = 0$ véve kezdeti értéknek azt kapjuk hogy:

$$x_1 = x_0 - \frac{P(0)}{P'(0)} = \frac{24}{50}, \quad |x_1 - x_0| = 0.48,$$

$$x_2 = x_1 - \frac{P(0.48)}{P'(0.48)} = 0.48 - \frac{7.011}{-22.869} = 0.78, \quad |x_2 - x_1| = 0.3 \dots$$

A **Matlab** programban a (5.0.1) polinom beolvasása, a polinom kiszámítása a t pontban (Horner séma) és a gyökök meghatározása a következő utasításokkal történik:

$$P=[a_n \ a_{n-1} \dots \ a_1 \ a_0]$$

$$Pt=polyval(P, t)$$

$$r=roots(P).$$

Az előbbi gyakorlat adatait véve alapul: $P=[1 \ -10 \ 35 \ -50 \ 24]$, $r=roots(P) \Rightarrow r = 4, 3, 2, 1$.

Kitűzött feladat:

Számítsuk ki az

$$x^3 - 1 = 0$$

egyenlet gyökeit.

6. FEJEZET

A Newton-Raphson-féle módszer nemlineáris egyenletrendszerek megoldására.

Gyakorlat célja: nemlineáris egyenletrendszerek numerikus megoldása.

Elméleti fogalmak

A Newton-Raphson módszer egy iteratív eljárás a nemlineáris egyenletrendszerek megoldására, vagyis egy X^0 kezdeti közelítő megoldást felhasználva egy olyan X^1, X^2, \dots, X^k vektor sorozatot hozunk létre ami konvergál az egyenletrendszer megoldásához.

Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$(6.0.1) \quad \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases},$$

illetve annak egy $X^0 = (x_0, y_0)$ közelítő megoldását.

Az f, g függvényeket Taylor sorba fejtjük a lineáris tagokkal bezárólag

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ g(x, y) &= g(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0), \end{aligned}$$

és figyelembe véve a (6.0.1) egyenletrendszert azt kapjuk, hogy

$$(6.0.2) \quad x - x_0 = -\frac{\begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial y} \\ g & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}_{(x_0, y_0)}}{\det J(x_0, y_0)}, \quad y - y_0 = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & f \\ \frac{\partial g}{\partial x} & g \end{vmatrix}_{(x_0, y_0)}}{\det J(x_0, y_0)},$$

ahol $\det J(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right)(x_0, y_0) \neq 0$.

A (6.0.1) egyenletrendszer megoldásának következő $X^1 = (x_1, y_1)$ közelítése:

$$(6.0.3) \quad x_1 = x_0 - \frac{\begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial y} \\ g & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}_{(x_0, y_0)}}{\det J(x_0, y_0)}, \quad y_1 = y_0 - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & f \\ \frac{\partial g}{\partial x} & g \end{vmatrix}_{(x_0, y_0)}}{\det J(x_0, y_0)}.$$

Hasonlóan a k -ik lépésben ha $\det J(x_k, y_k) \neq 0$ akkor:

$$(6.0.4) \quad x_{k+1} = x_k - \frac{\begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial y} \\ g & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}_{(x_k, y_k)}}{\det J(x_k, y_k)}, \quad y_{k+1} = y_k - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & f \\ \frac{\partial g}{\partial x} & g \end{vmatrix}_{(x_k, y_k)}}{\det J(x_k, y_k)}.$$

Az eljárást folytatjuk míg két egymásutáni vektor $X^k = (x_k, y_k)$ és $X^{k+1} = (x_{k+1}, y_{k+1})$ abszolút, illetve relatív különbsége kisebb mint egy adott $\epsilon > 0$ pontosság:

$$\begin{aligned} \|X^{k+1} - X^k\| &\leq \epsilon, \\ \frac{\|X^{k+1} - X^k\|}{\|X^k\|} &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Gyakorlat menete

Feladat.

A Newton-Raphson módszert használva oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$(6.0.5) \quad \begin{cases} f(x, y) = x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0 \\ g(x, y) = x^3 - y^3 - 6y + 2 = 0 \end{cases}.$$

Megoldás. Legyen $X^0 = (x_0, y_0) = (0, 0)$ egy kezdeti megoldás. $\Rightarrow f(0, 0) = 3, g(0, 0) = 2,$

$$J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 6 & 3y^2 \\ 3x^2 & -3y^2 - 6 \end{pmatrix} (0, 0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det J(0, 0) = 36$. Akkor a (6.0.3) megfelelően kapjuk a következő megközelítést:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 - \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}}{36} = \frac{18}{36} = 0.5, \quad y_1 = 0 - \frac{\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{36} = \frac{12}{36} = 0.33 \\ \Rightarrow X^1 &= (0.5, 0.33), \quad \|X^1 - X^0\|_2 = 0.6, \dots \end{aligned}$$

A (6.0.5) egyenletrendszernek a mértani jelentése az alábbi ábrán látható:

Ha az $X^0 = (0, 0)$ pontból indulunk ki, akkor az $(X^k)_k$ megoldás sorozat a (0.53, 0.35) pont felé konvergál.

A **Matlab** programban a

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f(x_1, x_2) \\ g(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2)$$

nemlineáris egyenletrendszert a következő utasítással oldjuk meg:

$$x = \text{fsolve}(\mathbf{F}, \mathbf{x}_0)$$

ahol \mathbf{x}_0 egy kezdeti megoldás.

7. FEJEZET

A Gauss és az LU faktorizációs módszer.

Gyakorlat célja: lineáris egyenletrendszerek numerikus megoldása.

Elméleti fogalmak

A

$$(7.0.1) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \dots & \\ a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszert felső-háromszög típusúnak nevezünk mert az A mátrix nem-nulla tagjai a főátló fölött helyezkednek el:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ha $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, akkor a (7.0.1) megoldása

$$(7.0.2) \quad x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}, \quad x_k = \frac{b_k - \sum_{i=k+1}^n a_{ki}x_i}{a_{kk}}, \quad k = \overline{n-1, 1}.$$

Egy négyzetes

$$(7.0.3) \quad Ax = b$$
$$A = (a_{ij})_{i,j=1,n}, \quad x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^t, \quad b = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)^t$$

egyenletrendszernek a megoldásához használhatjuk a Gauss módszert ami a lineáris algebrából ismert kicserélési lemmára alapszik. Lineáris transzformációkat alkalmazva a sorok között, a (7.0.3) egyenletrendszert visszavezetjük a (7.0.1) háromszög alakú egyenletrendszerre.

A **Matlab** programban ha meg van adva az A és a b mátrix, a megoldást

$$x = A \setminus b$$

utasítással számítjuk ki.

Az LU faktorizációs módszer az $A = (a_{i,j})_{i,j=1,n}$ mátrix szorzatra való felbontásán alapszik

$$A = LU$$

ahol

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

egy alsó-, illetve felső-háromszög alakú mátrix:

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}}{u_{jj}}, \quad i = \overline{j+1, n},$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}, \quad i = \overline{1, j}.$$

Akkor az

$$Ax = b \Leftrightarrow L U x = b$$

egyenletrendszert két háromszög egyenletrendszer megoldására vezetjük vissza

$$\begin{aligned} Ly &= b, \\ Ux &= y. \end{aligned}$$

Egy A mátrix felbontása a **Matlab** programmal

$$[L, U] = lu(A)$$

$$[L, U, P] = lu(A)$$

ahol a P mátrix a permutációs mátrix, i.e.: $PA = LU$.

Az LU felbontás alkalmas a determináns kiszámítására is

$$\det A = \prod_{i=1}^n u_{ii}.$$

Gyakorlat menete

Feladat.

1.) Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert

$$(7.0.4) \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 4x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}.$$

MEGOLDÁS. A (7.0.4) egyenletrendszer ekvivalens az alábbi háromszög egyenletrendszerrel

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_2 - 7x_3 = 10 \\ 22x_3 = -22 \end{cases}$$

aminek a (7.0.2) képlet szerint $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, -1)$ a megoldása.

Az A mátrix LU felbontása a következő mátrixokat eredményezi:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & -0.33 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1.5 & 3.5 \\ 0 & 0 & 3.66 \end{pmatrix}, P = I_3.$$

□

Matlab függvények: `spy(A)`, `diag(A)`, `triu(A)`, `tril(A)`

2.) Szerkesszük meg azt a negyedfokú

$$P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{P}_4$$

polinomot mely összeköti a $(1, 1)$, $(4, 2)$, $(9, 3)$, $(16, 4)$, $(25, 5)$ pontokat.

MEGOLDÁS. A $P(x_i) = y_i$, $i = \overline{1, 5}$ feltételekből következik, hogy:

$$\begin{cases} a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = & 1 \\ 256a_4 + 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + a_0 = & 2 \\ 6561a_4 + 729a_3 + 81a_2 + 9a_1 + a_0 = & 3 \\ 65536a_4 + 4096a_3 + 256a_2 + 16a_1 + a_0 = & 4 \\ 390625a_4 + 15625a_3 + 625a_2 + 25a_1 + a_0 = & 5 \end{cases}.$$

Az egyenletrendszer mátrixa:

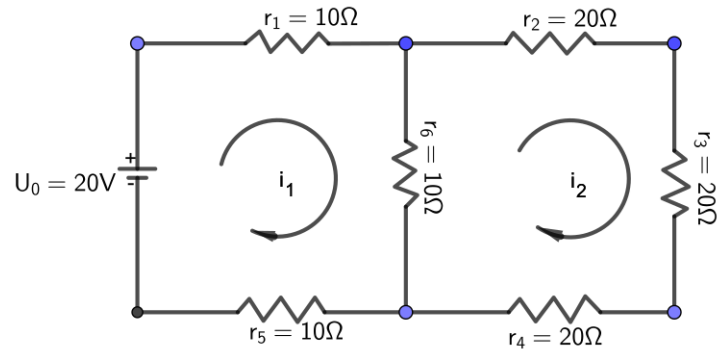
$$A = \begin{pmatrix} 1^4 & 1^3 & 1^2 & 1^1 & 1 \\ 4^4 & 4^3 & 4^2 & 4^1 & 1 \\ 9^4 & 9^3 & 9^2 & 9^1 & 1 \\ 16^4 & 16^3 & 16^2 & 16^1 & 1 \\ 25^4 & 25^3 & 25^2 & 25^1 & 1 \end{pmatrix}$$

VanderMonde típusú mátrix, a megoldása pedig:

$$\begin{cases} a_0 = 0.555555555555556 \\ a_1 = 0.47815255731922 \\ a_2 = -0.03530092592593 \\ a_3 = 0.00162037037037 \\ a_4 = -0.00002755731922 \end{cases}$$

□

3.) Alkalmazzuk Kirchhoff törvényét az alábbi áramkörök esetében:



7.0.1. ábra. Dupla hurkos áramkör

MEGOLDÁS. A Kirchhoff elv szerint minden zárt hurokban az áramköri elemekben lévő feszültségek összege nulla. Az első, illetve második hurokban az egyenletek:

$$\begin{cases} U_{r_1} + U_{r_6} + U_{r_5} - U_0 = 0 \\ U_{r_2} + U_{r_3} + U_{r_4} + U_{r_6} = 0 \end{cases}$$

majd az Ohm törvényét használva:

$$\begin{cases} r_1 i_1 + r_6 (i_1 - i_2) + r_5 i_1 = U_0 \\ r_2 i_2 + r_3 i_2 + r_4 i_2 + r_6 (i_2 - i_1) = 0 \end{cases}$$

⇒

$$\begin{cases} 30i_1 - 10i_2 = 20 \\ -10i_1 + 70i_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = 0.7 \\ i_2 = 0.1 \end{cases} .$$

□

Iteratív módszerek. Túlhározott egyenletrendszerek

8.1. Jacobi-féle iteratív módszer.

Gyakorlat célja: *lineáris egyenletrendszerek iteratív megoldása.*

Elméleti fogalmak

Az

$$(8.1.1) \quad Ax = b$$

egyenletrendszer ahol

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ekvivalens a

$$(8.1.2) \quad x = B_J x + C$$

ahol

$$(8.1.3) \quad B_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \dots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Ha adott egy X^0 kezdeti megoldás akkor a (8.1.2) rekurzív képletből

$$X^1 = B_J X^0 + C, \dots, X^{k+1} = B_J X^k + C, \dots$$

Az eljárás folytatható míg

$$\|X^{k+1} - X^k\| \leq \epsilon$$

ahol $\epsilon > 0$ egy előre megadott pontosság.

Gyakorlat menete

Feladat.

Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Jacobi módszerrel

$$(8.1.4) \quad \begin{cases} 9x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -4 \\ -x_1 + 4x_2 - 8x_3 = -5 \end{cases} .$$

MEGOLDÁS. Mivel az egyenletrendszer átlósan domináns, a Jacobi módszer konvergál.

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{9} & \frac{3}{9} \\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{8} & \frac{4}{8} & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{4}{7} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

$$X^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X^1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{4}{7} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}, \quad X^2 = \begin{pmatrix} \frac{131}{168} \\ \frac{205}{143} \\ \frac{431}{504} \end{pmatrix}, \dots$$

□

8.2. Túlhatározott lineáris egyenletrendszerek

$$Ax = b$$

$A \in \mathcal{M}_{mn}, x \in \mathcal{M}_n, b \in \mathcal{M}_m, m > n.$

5. PROBLÉMA. Oldd meg az alábbi túlhatározott lineáris egyenletrendszert (a négyzetes egyenletrendszerhez használj Gauss módszert)

(1)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases} .$$

Számítsd ki az $r = Ax - b$ maradék-vektor normáját $\|r\|_2 = ?$

6. PROBLÉMA. J. Kepler harmadik törvénye bolygók mozgására: $\frac{T^2}{x^3} = konst$ ahol T a bolygó keringési periódusa a Nap körül, x a bolygó távolsága a Naptól

$$\Rightarrow T = c \cdot x^{\frac{3}{2}}.$$

Ha ismertek a Merkúr, Vénusz, Föld, Mars adatai:

x (millió km)	58	108	150	228
T (földi nap)	88	225	365	687

1. táblázat. Bolygók távolsága a Naptól és keringési periódusuk

határozd meg a c konstans! Milyen távolságra van a Szaturnusz a Naptól ha keringési periódusa $T_{Sz} = 10759$ földi nap?

MEGOLDÁS. A

$$\begin{cases} 58^{\frac{3}{2}} \cdot c = 88 \\ 108^{\frac{3}{2}} \cdot c = 225 \\ 150^{\frac{3}{2}} \cdot c = 365 \\ 228^{\frac{3}{2}} \cdot c = 687 \end{cases}$$

túlhatározott egyenletrendszernek a megoldása $c = 0.1994$, tehát az egyenlet

$$T = 0.1994 \cdot x^{\frac{3}{2}}.$$

A Szaturnusz periódusát behelyettesítve kapjuk, hogy $x_{Sz} = 1428$ millió km-re van a Naptól.

□

8.3. Rosszul kondicionált lineáris egyenletrendszerek

A lineáris egyenletrendszerek megoldásánál figyelembe kell venni ezek kondicionáltságát. Egy egyenletrendszer rosszul kondicionált ha kis változások az A vagy b mátrixban nagy változásokat eredményeznek a megoldásokban.

A kondicionálás mérőszáma a $cond$

$$(8.3.1) \quad cond(A) = \|A\|_p \cdot \|A^{-1}\|_p.$$

A **Matlab** utastás

$$k=cond(A,p)$$

ahol p a norma típusa.

Ha a $cond$ érték nagy az egyenletrendszer instabil, ha pedig $cond \simeq 1$ akkor stabil.

Példa. A negyedrendű Hilbert-féle mátrix

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

kondicionálási száma: $cond(H) = 15514$.

7. PÉLDA. 2) Igazoljuk, hogy a $\|\cdot\|_{\max} : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$, $\|A\|_{\max} = \max |a_{ij}|$ függvény eleget tesz a norma definíciónak, de $\|A \cdot B\| \not\leq \|A\| \cdot \|B\|$.

9. FEJEZET

Sajátérték, sajátvektor

Gyakorlat célja: Sajátértékek, sajátvektorok numerikus kiszámítása.

Motiváció

Rezgő mozgás

A két test mozgását írjuk le:

$$F = ma$$

$$\begin{cases} -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) = m_1a_1 \\ -k_2(x_2 - x_1) = m_2a_2 \end{cases}$$

Elméleti fogalmak

A λ számot az $A = (a_{ij})_{i,j=1,n}$ mátrix sajátértékének nevezzük ha $\exists x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0_n$ úgy, hogy

$$(9.0.1) \quad Ax = \lambda x.$$

Az x vektort a λ sajátértékhez hozzárendelt sajátvektornak nevezzük.

A sajátértékeket a karakterisztikus polinom gyökeiként lehet kiszámítani

$$(9.0.2) \quad \det(A - \lambda I_n) = 0,$$

vagy

$$(9.0.3) \quad (-1)^n [\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \dots + (-1)^n p_n] = 0,$$

ahol

$$(9.0.4) \quad p_1 = \text{Tr}(A) = a_{11} + \dots + a_{nn}, \dots, p_n = \det(A).$$

A Cayley-Hamilton tétel szerint minden A mátrix teljesíti a karakterisztikus egyenletét:

$$(9.0.5) \quad A^n - p_1A^{n-1} + p_2A^{n-2} + \dots + (-1)^n p_nI_n = 0_n.$$

9.1. Krylov módszer

A módszer abban áll hogy a (9.0.5) egyenletet beszorozzuk $Y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \dots \\ y_n^0 \end{pmatrix}$,

kezdeti vektorral majd $Y^k = \begin{pmatrix} y_1^k \\ y_2^k \\ \dots \\ y_n^k \end{pmatrix} = AY^{k-1}$, $k = \overline{1, n}$ jelöléssel a következő

$n \times n$ -es lineáris egyenletrendszerhez jutunk

$$(9.1.1) \quad \begin{cases} p_1 y_1^{n-1} + p_2 y_1^{n-2} + \dots + p_n y_1^0 = -y_1^n \\ p_1 y_2^{n-1} + p_2 y_2^{n-2} + \dots + p_n y_2^0 = -y_2^n \\ \dots \\ p_1 y_n^{n-1} + p_2 y_n^{n-2} + \dots + p_n y_n^0 = -y_n^n \end{cases}$$

melynek megoldása a karakterisztikus polinom együtthatói. Ezután megoldjuk a (9.0.3) egyenletet.

A Matlab

$[sv, se] = eig(A)$

utasítással megkapjuk az A mátrix sv sajátvektorait és se sajátértékeit.

Gyakorlat menete

Feladat.

Számítsuk ki az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, majd ellenőrizzük le a (9.0.1) definíciót.

MEGOLDÁS. $[sv, se] = eig(A)$

\Rightarrow

$$sv = \begin{pmatrix} -0.5915 & -0.9383 & 0.5717 \\ -0.5294 & 0.1934 & -0.7927 \\ -0.6082 & 0.2866 & 0.2116 \end{pmatrix}, \quad se = \begin{pmatrix} 5.71 & 0 & 0 \\ 0 & 1.07 & 0 \\ 0 & 0 & -1.79 \end{pmatrix}.$$

A sajátértékek az se mátrix átlóján találhatóak és a megfelelő oszlopon az sv mátrixban a sajátvektor normázva.

□

Kitűzött feladatok.

Számítsuk ki az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9.2. Hatvány módszer

8. PÉLDA. Számítsuk ki az $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix domináns sajátértékét, sajátvektorát.

Megoldás: Ha $y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $eps = 10^{-2}$ akkor a domináns sajátérték

$domse = 5.7114$, a megfelelő sajátvektor $domsv = \begin{pmatrix} 0.5914 \\ 0.5293 \\ 0.6085 \end{pmatrix}$.

```
while norm(y-yy)>eps
```

```
    yy=y;
```

```
    y=A*yy;
```

```
    y=y/norm(y);
```

```
end
```

```
domsv=y
```

```
domse=((A*y)'*y)/(y'*y) %Rayleigh hanyados =<Ay,y>/<y,y>
```

9. PÉLDA. Számítsuk ki az $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix domináns sajátértékeit, sajátvektorait!

Megoldás: Ha $y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ és $eps = 10^{-2}$ akkor a domináns sajátérték

$domse = 4.0122$, a megfelelő (normalizált) sajátvektor $domsv = \begin{pmatrix} 0.7092 \\ 0.7050 \end{pmatrix}$.

A minse kiszámításához felhasználjuk, hogy ha (λ, X) se+sv az A mátrixnak akkor, $(\frac{1}{\lambda}, X)$ se+sv az A^{-1} mátrixnak. Tehát kiszámítjuk az $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

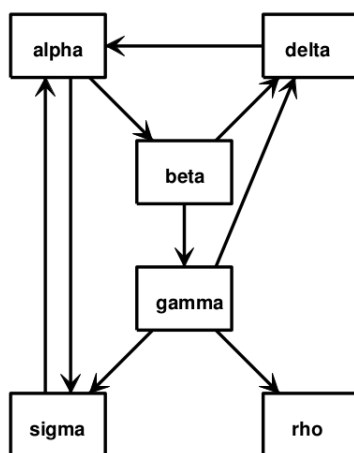
mátrixnak a domse, innen pedig az A mátrix minse= $1/domseA^{-1}$, vagyis $minseA = \frac{1}{0.9986} = 1.0014$, $minsv = \begin{pmatrix} 0.4483 \\ -0.8939 \end{pmatrix}$.

10. DEFINÍCIÓ. Sztochasztikus (valószínűségi) mátrixnak nevezzük azt a mátrixot aminek elemei valószínűségek (nulla és egy közötti számok) és minden oszlopban a tagok összege egyenlő eggyel.

Egy $n \times n$ esetén lehet például az egyenletes $E = e_{ij} = \frac{1}{n}, \forall i, j$

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

11. PÉLDA. C.Moler tiny Web. Ha az alábbi ábra egy web hálózat akkor egy véletlenszerű sétában milyen gyakran látogatjuk meg a csomópontokat?



9.2.1. ábra. Kis web hálózat

A gráf szomszédsági mátrixa:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A cél egy A átmeneti (valószínűségi) mátrixot képezni a G -ből, ami tükrözi egy csomópontból a másikba való áttérési valószínűséget.

A G mátrix oszlopaiból kiolvasható hány él indul kifelé az adott csomópontból. Például az első oszlopban látható, hogy az első ($alpha$) csomópontból két él indul kifelé ($beta$, illetve $sigma$ fele). Ugyanakkor rho -ból nem indul egy él sem

(zsákutca). Tehát a G mátrix j -dik oszlopában a tagokat összegezve a j csomópont ki -fokát kapjuk (soronként a be -fokát):

$$(9.2.1) \quad c_j = \sum_i g_{ij}.$$

Ha a G minden egyes j oszlopát elosztjuk c_j -vel akkor egy G^* "majdnem" valószínűségi mátrixot kapunk, ugyanis a nulla ki-fokú oszlopokban nem teljesül a feltétel. A G^* mátrix egy átmeneti mátrix de csak a ki-fokot veszi figyelembe; ugyanakkor ha egy nulla ki-fokú csomóba sétálunk nem tudjuk folytatni az utat. Ennek elkerüléséhez az A mátrixot a G^* és E kombinációjaként számítjuk ki

$$(9.2.2) \quad A := p \cdot G^* + (1 - p) \cdot E$$

oly módon, hogy a p súly tükrözze a gráfban megadott séták lehetőségét. Ennek megfelelően, ha egy oszlop ki-foka nulla, akkor $p = 0$, vagyis ebben az esetben a G^* mátrix súlya nulla. Különben legyen p (pl. $p = 0.85$) annak a valószínűsége, hogy a gráfban egy adott élen áthaladunk-e vagy sem (természetesen $(1 - p)$ az ellentétes esemény valószínűsége). Tehát a keresett $A = (a_{ij})$ áttérési mátrix elemeit a következő képlettel állíthatók elő:

$$(9.2.3) \quad a_{ij} = \begin{cases} p \frac{g_{ij}}{c_j} + (1 - p) \frac{1}{n}, & \text{ha } c_j \neq 0 \\ \frac{1}{n} & \text{ha } c_j = 0 \end{cases}.$$

Az így előállított A mátrix egy valószínűségi mátrix és ennek az egyensúlyi vektorát az alábbi Markov lánc adja:

$$Ay, A^2y, A^3y, \dots$$

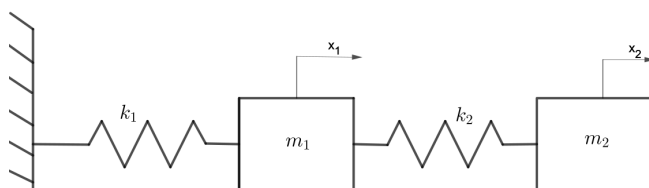
ahol y vektor a rendszer egy kezdeti állapota. Tehát az A mátrix domináns sajátvektorát keressük. Az A mátrix domináns sajátértéke egyenlő eggyel $\lambda_{max} = 1$. A megfelelő sajátvektort a hatvány módszerrel számítjuk ki.

Az adott gráfra a csomópontok (linkek) látogatottsági valószínűsége

$$x = (0.321, 0.170, 0.106, 0.136, 0.064, 0.200)^t,$$

tehát egy véletlenszerű szörföző 32.1%-ban fogja látogatni az *alpha* linket, miközben a *rho* linket csak 6.4% -ban.

12. PÉLDA. Rezgő mozgás.



9.2.2. ábra. Két test rezgő mozgása

Az ábrán látható m_1, m_2 testek két - $k_1 = 0.2, k_2 = 0.4$ merevségű $\left(\frac{N}{m}\right)$ - rugóval vannak a falhoz rögzítve. A testeket kimozdítjuk az egyensúlyi pozíciójukból

$$x_1 = +0.1, x_2 = -0.3(m).$$

A Newton törvénye szerint $F = m \cdot a$ tehát

$$\begin{cases} -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) & = m_1 \ddot{x}_1 \\ -k_2 (x_2 - x_1) & = m_2 \ddot{x}_2 \end{cases}$$

vagyis

$$\begin{cases} (-k_1 - k_2) x_1 + k_2 x_2 & = m_1 \ddot{x}_1 \\ k_2 x_1 - k_2 x_2 & = m_2 \ddot{x}_2 \end{cases}$$

Az egyenletrendszer átírható

$$-KX = M\ddot{X}.$$

alakra, ahol

$$K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}.$$

Ha $m_i = 1$ akkor $M = I_2$ és a következő egyenlethez jutunk:

$$(9.2.4) \quad KX = -\ddot{X}.$$

A megoldását

$$(9.2.5) \quad X(t) = e^{\lambda t} \cdot u$$

alakban keressük ahol u egy konstans vektor. Innen

$$\ddot{X}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} \cdot u$$

amit behelyettesítve a (9.2.4) képletbe

$$K e^{\lambda t} \cdot u = -\lambda^2 e^{\lambda t} \cdot u,$$

majd $e^{\lambda t}$ -vel egyszerűsítve:

$$(9.2.6) \quad K \cdot u = (-\lambda^2) \cdot u.$$

A kapott egyenlet (9.0.1) típusú, vagyis $((-\lambda^2), u)$ a K mátrix sajátértéke, sajátvektorja. A K egy szimmetrikus, pozitív definit mátrix, tehát (valós) pozitív sajátértékei vannak:

$$sv = \begin{pmatrix} -0.6154 & -0.7882 \\ -0.7882 & 0.6154 \end{pmatrix}, se = \begin{pmatrix} 0.0877 & 0 \\ 0 & 0.9123 \end{pmatrix},$$

ahonnan következik, hogy λ imaginárius szám lesz.

A $-\lambda^2 = 0.0877$ -ből következik

$$\lambda_{1,2} = \pm 0.2961i,$$

és a $-\lambda^2 = 0.9123$ -ből következik

$$\lambda_{3,4} = \pm 0.9551i,$$

Az általános (valós) megoldást a (9.2.5) képlet jobboldalán lévő tagok kombinációjából állítjuk elő,

$$(9.2.7) \quad X(t) = (c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}) \cdot sv_1 + (c_3 e^{\lambda_3 t} + c_4 e^{\lambda_4 t}) \cdot sv_2.$$

Ugyanakkor, figyelembe véve az Euler formulát:

$$(9.2.8) \quad e^{i \cdot t} = \cos(t) + i \cdot \sin(t),$$

a (9.2.7) képlet első két tagjának az összege következőképpen írható:

$$\begin{aligned} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} &= c_1 (\cos(\bar{\lambda}_1 t) + i \sin(\bar{\lambda}_1 t)) + c_2 (\cos(\bar{\lambda}_2 t) + i \sin(\bar{\lambda}_2 t)) = \\ &= c_1 \cos(\bar{\lambda}_1 t) + c_1 i \sin(\bar{\lambda}_1 t) + c_2 \cos(\bar{\lambda}_1 t) - c_2 i \sin(\bar{\lambda}_1 t) = \\ &= (c_1 + c_2) \cos(\bar{\lambda}_1 t) + (c_1 - c_2) i \sin(\bar{\lambda}_1 t), \end{aligned}$$

ahol

$$(9.2.9) \quad \bar{\lambda}_i = \operatorname{Im}(\lambda_i).$$

Ahhoz, hogy valós megoldást kapjunk c_1, c_2 komplex, konjugált számok kell legyenek, például:

$$2c_1 = A - iB, \quad 2c_2 = A + iB.$$

Tehát

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = A \cos(\bar{\lambda}_1 t) + B \sin(\bar{\lambda}_1 t),$$

és hasonlóan

$$c_3 e^{\lambda_3 t} + c_4 e^{\lambda_4 t} = C \cos(\bar{\lambda}_3 t) + D \sin(\bar{\lambda}_3 t).$$

A (9.2.7) általános megoldás felírható tehát mint:

$$(9.2.10) \quad X(t) = (A \cos(\bar{\lambda}_1 t) + B \sin(\bar{\lambda}_1 t)) \cdot sv_1 + \\ + (C \cos(\bar{\lambda}_3 t) + D \sin(\bar{\lambda}_3 t)) \cdot sv_2 =$$

$$(9.2.11) \quad = sv \cdot \begin{pmatrix} A \cos(\bar{\lambda}_1 t) + B \sin(\bar{\lambda}_1 t) \\ C \cos(\bar{\lambda}_3 t) + D \sin(\bar{\lambda}_3 t) \end{pmatrix},$$

ahol

$$sv = (sv_1 \mid sv_2).$$

Az A, B, C, D paramétereket a kezdeti feltételekből határozzuk meg:

- kezdeti ($t = 0$) kilengés $kil = \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.3 \end{pmatrix} \Rightarrow X(0) = kil$ ami a következő lineáris egyenletrendszerhez vezet:

$$sv \cdot \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = kil,$$

$$\text{tehát } \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \text{linsolve}(sv, kil).$$

- kezdeti sebesség $v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (szabadon engedve) $\Rightarrow \dot{X}(0) = v_0$ ami a következő lineáris egyenletrendszerhez vezet:

$$sv \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 B \\ \lambda_3 D \end{pmatrix} = v_0,$$

$$\text{tehát } \begin{pmatrix} \lambda_1 B \\ \lambda_3 D \end{pmatrix} = \text{linsolve}(sv, v_0).$$

10. FEJEZET

Interpoláció.

10.1. Lagrange -féle interpolációs polinom.

Gyakorlat célja: adott pontokra egy interpoláló polinomot szerkeszteni, majd kiemelni a globális interpoláció hátrányát.

Elméleti fogalmak

Ismerve egy f függvény $(x_0, f_0), \dots, (x_n, f_n)$ interpoláló pontjait, keresünk egy olyan n -ed fokú $L_n f$ polinomot ami úgyszintén keresztül halad a pontokon:

$$(10.1.1) \quad L_n f(x_i) = f(x_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Az $L_n f$ polinomot a következő alakban szerkesztjük meg:

$$(10.1.2) \quad L_n f(x) = f_0 l_0(x) + f_1 l_1(x) + \dots + f_n l_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i l_i(x)$$

ahol

$$(10.1.3) \quad l_i(x) = \frac{\prod_{k \neq i} (x - x_k)}{\prod_{k \neq i} (x_i - x_k)}, \quad i = \overline{0, n},$$

vagy

$$(10.1.4) \quad \varpi(x) := (x - x_0) \dots (x - x_n), \quad l_i(x) = \frac{\varpi(x)}{(x - x_i) \varpi'(x_i)}.$$

MEGOLDÁS. Gyakorlat menete

Feladat.

Határozzuk meg a Lagrange féle interpoláló polinomot a következő adatok esetében:

x_i	0	1	4	9
f_i	0	1	2	3

1. táblázat. Interpolációs pontok

Megoldás. A harmadfokú interpoláló polinom $L_3f(x) = y_0l_0(x) + y_1l_1(x) + y_2l_2(x) + y_3l_3(x)$ és a (10.1.3)-ból

$$l_0(x) = \frac{(x-1)(x-4)(x-9)}{(-1)(-4)(-9)}, \quad l_1(x) = \frac{(x-0)(x-4)(x-9)}{(1)(-3)(-8)}, \quad \dots$$

Téves azt gondolni hogy minél több az interpoláló pont annál pontosabban illeszkedik $L_n f$ polinom az adatokra. Ennek érdekében bemutatjuk C. Runge példáját.

10.2. Runge -féle ellenpélda

Az $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$, $x \in [-1, 1]$, analitikus függvényből kiemelünk egyenközű interpolációs pontokat és interpoláljuk ezeket a megfelelő polinommal. Az alábbi ábra hét (..) illetve 14 (-) pont interpolációs polinomját hasonlítja össze az eredeti $f(x)$ függvénnyel.

ABRA 'Runge.eps';

Látható, hogy a foksám növekedésével az interpoláló polinomok egyre jobban divergálnak a széleken.

A Matlab

$L_n = \text{polyfit}(x_i, f_i)$

utasítás ahol, $x_i = x_i$, $f_i = f_i$, visszatéríti a Lagrange interpoláló polinomot, míg a

$Q = \text{polyfit}(x_i, f_i, n)$

visszatéríti az n -ed fokú Q approximáló polinomot (a legkisebb négyzetek módszere).

13. PÉLDA. Magyarországon a 1-től 5-ig terjednek a jegyek, a legkisebb átmenő jegy 2-es. A romániai jegyek 1 től 10 -ig terjednek, legkisebb átmenő 5-ös.

- (1) Adjuk meg a lineáris függvényt amely átalakítja a jegyeket ha
- | | | |
|-------|---|----|
| m_i | 2 | 5 |
| r_i | 5 | 10 |
- és határozzuk meg a magyarországi 3,4-es osztályzatnak a romániai megfelelőjét!

- (2) Adjuk meg a négyzetes függvényt amely átalakítja a jegyeket ha
- | | | | |
|-------|---|---|----|
| m_i | 2 | 4 | 5 |
| r_i | 5 | 8 | 10 |
- és határozzuk meg a magyarországi 3-as osztályzatnak a romániai megfelelőjét!

11. FEJEZET

Szakaszos interpoláció.

Gyakorlat célja: alternatívát szolgáltatni a globális interpolációhoz.

Elméleti fogalmak

A Lagrange interpoláció hátrányainak a kiküszöbölésére használjuk a szakaszos interpolációt, vagyis minden $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ intervallumon megszerkesztjük az interpoláló polinomot.

A harmadfokú Hermite-féle interpoláló polinom alakja

$$(11.0.1) \quad s(x) = f_i H_0^3(x) + \dot{f}_i H_1^3(x) + \dot{f}_{i+1} H_2^3(x) + f_{i+1} H_3^3(x), \quad x \in [x_i, x_{i+1}],$$

ahol $\{H_0^3, H_1^3, H_2^3, H_3^3\}$ a Hermite-féle alap polinomok

$$(11.0.2) \quad \begin{aligned} H_0^3(x) &= 3 \left(\frac{x_{i+1} - x}{h_i} \right)^2 - 2 \left(\frac{x_{i+1} - x}{h_i} \right)^3, \\ H_1^3(x) &= -h_i \left(\left(\frac{x_{i+1} - x}{h_i} \right)^3 - \left(\frac{x_{i+1} - x}{h_i} \right)^2 \right), \\ H_2^3(x) &= h_i \left(\left(\frac{x - x_i}{h_i} \right)^3 - \left(\frac{x - x_i}{h_i} \right)^2 \right), \\ H_3^3(x) &= 3 \left(\frac{x - x_i}{h_i} \right)^2 - 2 \left(\frac{x - x_i}{h_i} \right)^3, \quad h_i = x_{i+1} - x_i. \end{aligned}$$

Az interpoláló polinom tulajdonságai:

$$(11.0.3) \quad \begin{aligned} s(x_i) &= f_i, \quad s(x_{i+1}) = f_{i+1} \\ s'(x_i) &= \dot{f}_i, \quad s'(x_{i+1}) = \dot{f}_{i+1}. \end{aligned}$$

Ha a \dot{f}_i deriváltak ismeretlenek, akkor valmilyen módszerrel meg kell szerkeszteni, például

$$(11.0.4) \quad \dot{f}_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Gyakorlat menete

Feladat.

Szerkesszünk egy Hermite-féle interpoláló függvényt a következő adatokra:

x_i	0	1	4	9
y_i	0	1	2	3.

Megoldás. Minden ponthoz hozzárendelünk egy irányítványozót a (11.0.4) képlettel $\dot{f}_1 = \frac{2}{4}$, $\dot{f}_2 = \frac{2}{8}$ és $\dot{f}_0 = 1$, $\dot{f}_3 = \frac{1}{5}$.

A **Matlab** utasítás a (11.0.1) polinom megszerkesztéséhez

$ch = \text{spapi}(4, [xi \ xi], [fi \ di])$

ahol $xi = x_i$, $fi = f_i$, $di = \dot{f}_i$ vektorok.

A fenti adatok esetében a Hermite interpoláló polinomot ábrázoljuk az $\text{fnplt}(ch, 'r')$

utasítással.

ABRA hermite.eps

A (11.0.3) képletből azt kapjuk hogy a Hermite interpolációs polinom C^1 osztályú. Ahhoz hogy símább, C^2 interpoláló polinomot kapjunk használjuk a köbös spline függvényeket s_i , $i = 0, \dots, n-1$ ($s_i : [x_i, x_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$):

$s = \text{spline}(xi, fi)$

$s = \text{csapi}(xi, fi)$

$s = \text{csape}(xi, fi, conds, valconds)$.

Feladat.

Szerkesszük meg a fenti adatok esetében a köbös spline függvényt a következő perem feltételekkel

$$(i) \quad s''_0(x_0) = 0, \quad s''_{n-1}(x_n) = 0,$$

(„natural” , természetes spline) majd

$$(ii) \quad s'_0(x_0) = \dot{f}_0 = 1, \quad s'_{n-1}(x_n) = \dot{f}_n = 1/5$$

(„complete” spline).

Megoldás. (i) $xi = [0 \ 1 \ 4 \ 9]$; $fi = [0 \ 1 \ 2 \ 3]$; $s = \text{csapi}(xi, fi); \text{fnplt}(s)$

(ii) $xi = [0 \ 1 \ 4 \ 9]$; $fi = [0 \ 1 \ 2 \ 3]$; $di = [1 \ 1/5]$; $s = \text{csape}(xi, fi, [1 \ 1], di); \text{fnplt}(s)$

ABRA 'cubspline.eps';

Közelítés a legkisebb négyzetek módszerrel

Gyakorlat célja: olyan approximáló módszert bemutatni ami általánosítja az interpolációt.

Elméleti fogalmak

Egy $(x_0, f_0), \dots, (x_n, f_n)$ pontokban ismert f függvény legkisebb négyzetek szerinti approximációján, egy F függvényt értünk amely minimizálja a pontokban az eltérést:

$$(12.0.1) \quad \sum_{i=0}^n (f(x_i) - F(x_i))^2 \rightarrow \min.$$

A továbbiakban az F függvényt az algebrai polinomok családjából választjuk ki:

$$F(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m.$$

Az $A = (a_0 \ a_1 \ \dots \ a_m)^T$ vektorban szereplő együtthatókat egy

$$(12.0.2) \quad MA = V$$

egyenletrendszer megoldásaként kapjuk ahol:

$$(12.0.3) \quad M = \begin{pmatrix} M_0 & M_1 & \dots & M_m \\ M_1 & M_2 & \dots & \\ \vdots & & & \\ M_m & M_{m+1} & \dots & M_{2m} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_m \end{pmatrix}$$

és

$$(12.0.4) \quad M_j : = \sum_{i=0}^n x_i^j, \quad j = \overline{0, 2m}$$

$$V_k : = \sum_{i=0}^n x_i^k y_i, \quad k = \overline{0, m}.$$

Gyakorlat menete

Feladat.

Szerkesszük meg az alábbi pontokra a lineáris regressziós függvényt.

x_i	0	1	4	9
f_i	0	1	2	3

Megoldás. $F(x) = a_1x + a_0$, $M_0 = 4$, $M_1 = 14$, $M_2 = 98$, $V_0 = 6$, $V_1 = 36 \implies$

$$\begin{cases} 4a_0 + 14a_1 = 6 \\ 14a_0 + 98a_1 = 36 \end{cases}, \implies a_0 = \frac{3}{7}, a_1 = \frac{15}{49} \implies F(x) = \frac{15}{49}x + \frac{3}{7}.$$

ABRA $\frac{15}{49}x + \frac{3}{7}$;

A **Matlab** utasítás:

$F = \text{polyfit}(x_i, f_i, m)$

ahol $x_i = x_i$, $f_i = f_i$, $m =$ a keresett approximáló polinom fokszáma.

Numerikus deriválás és integrálási képletek

13.1. Numerikus deriválás

Gyakorlat célja: különböző eljárást bemutatni derivált és integrál numerikus kiszámítására.

Elméleti fogalmak

Legyen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ egy folytonos és deriválható függvényt és $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ egy pont az I belsejében.

A határérték definíciójából kiindulva a következő elemi deriválási képletek adódnak

$$(13.1.1) \quad f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h},$$

$$(13.1.2) \quad f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

Az első képlet pontossága $O(h)$ a másodiknak pedig $O(h^2)$.

A másodrendű derivált esetében

$$(13.1.3) \quad f''(x_0) = \frac{f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0)}{h^2}$$

$O(h^2)$ pontossággal.

Több ismeretlenes függvények esetében $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, a parciális deriváltak kiszámítása hasonlóan történik

$$(13.1.4) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m) = \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m)}{h},$$

$$(13.1.5) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m) = \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_i - h, \dots, x_m)}{2h}.$$

A másodrendű deriváltakat az alábbi képletekkel számítjuk

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1, \dots, x_m) &= \frac{1}{h^2}(f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_m) - 2f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) + \\ &\quad + f(x_1, \dots, x_i - h, \dots, x_m)), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{4hk} (f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_j + k, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_j - k, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_i - h, \dots, x_j + k, \dots, x_m) + f(x_1, \dots, x_i - h, \dots, x_j - k, \dots, x_m))$$

ahol h illetve k az x_i illetve x_j irányban megtett lépés.

Gyakorlat menete

Feladat.

Számítsuk ki $f'(1)$, $f''(1)$ értékeket különböző h lépésekre ha $f(x) = e^x$.

Megoldás. Legyen $h = 10^{-2}$. A (13.1.1) képletből

$$f'(1) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{e^{1.01} - e}{0.01} = 2.7319$$

ebben az esetben a hiba $\left| \frac{f(1+h)-f(1)}{h} - e \right| = 2.7319 - 2.7183 = 0.0136$.

A (13.1.2) képletet használva

$$f'(1) = \frac{f(1+h) - f(1-h)}{2h} = \frac{e^{1.01} - e^{0.99}}{0.02} = 2.718327$$

a hiba pedig $\left| \frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h} - e \right| = 2.718327 - 2.718281 = 4.6 \times 10^{-5} = 0.46 \times 10^{-4}$.

A másodfokú derivált értéke

$$f''(1) = \frac{f(1+h) - 2f(1) + f(1-h)}{h^2} = \frac{e^{1.01} - e + e^{0.99}}{10^{-4}} = 2.718304,$$

a hiba $\left| \frac{f(1+h)-2f(1)+f(1-h)}{h^2} - e \right| = 2.26 \times 10^{-5} = 0.226 \times 10^{-4}$.

14. PÉLDA. a.) Ha $f(x) = \sin(x)$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, számítsuk ki $f'(\frac{\pi}{3})$, $f''(\frac{\pi}{3})$ deriváltakat $\epsilon = 10^{-4}$ pontossággal!

b.) Ábrázoljuk az f, f', f'' függvényeket!

c.) Számítsuk ki az $x_0 = \frac{\pi}{3}$ pontban húzott érintő és az Ox tengely által bezárt szöveget!

MEGOLDÁS. a.) Az $f'(\frac{\pi}{3})$ kiszámításához a (13.1.2) képletet használjuk $h = 10^{-2}$ lépéssel:

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - h\right)}{2h} = 0.4999916,$$

az abszolút hiba pedig $8.33 \cdot 10^{-6}$.

Hasonlóan, a (13.1.3) képlettel:

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - h\right)}{h^2} = -0.866,$$

a hiba $7.21 \cdot 10^{-6}$.

b.) ABRA numderiv.eps

c.) Az érintő- O xtengely szöget a

$$\tan \alpha = m,$$

összefüggésből számítjuk ki, ahol m az érintő meredeksége

$$m = f'(x_0).$$

A derivált értékéhez a (13.1.2) képletet használjuk $f'(\frac{\pi}{3}) = 0.4999916$, tehát:

$$\alpha = \arctan(m) = \arctan(0.4999916) = 0.4636 \text{ rad},$$

vagyis $\alpha_{fok} = \frac{180 \cdot \alpha}{\pi} = 26.5647^\circ$. \square

15. PÉLDA. Számítsuk ki az $f(x, y) = e^{xy}$ függvény parciális deriváltjait az $(1, 2)$ pontban.

MEGOLDÁS. Legyen $h = k = 10^{-2}$. A (13.1.5) képletnek megfelelően:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = \frac{f(1+h, 2) - f(1-h, 2)}{2h} = 14.7791$$

és a hiba $|\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) - 2e^2| = |\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) - 14.7781| = 9.85 \times 10^{-4}$;

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = \frac{f(1, 2+k) - f(1, 2-k)}{2k} = 7.3892$$

és a hiba $|\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) - e^2| = |\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) - 7.3891| = 1.23 \times 10^{-4}$. \square

13.2. Numerikus integrálás

Legyen $f : [a, b] \rightarrow R$ egy folytonos függvény és az $[a, b]$ intervallum egy felosztása:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Két gyakran használt integrálási képlet az ún. trapéz

$$(13.2.1) \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

és a Simpson képlet

$$(13.2.2) \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + f(x_{2n}) \right).$$

16. PÉLDA. Számítsuk ki $\int_1^3 x^2 dx$ értéket a trapéz illetve Simpson képlet segítségével ($n = 4$).

MEGOLDÁS. $f(x) = x^2$. A megadott n -ből kiszámítjuk a trapéz módszernek megfelelő lépést: $h = \frac{3-1}{4} = 0.5$, majd a (13.2.1) képletből következik, hogy:

$$\begin{aligned} \int_1^3 x^2 dx &= \frac{h}{2} (f(1) + 2f(1+0.5) + 2f(1.5+0.5) + 2f(2+0.5) + f(3)) = \\ &= 0.25 (1 + 4.5 + 8 + 12.5 + 9) = 8.75. \end{aligned}$$

A hiba $\left| 8.75 - \frac{x^3}{3} \right|_1^3 = |8.75 - 8.66| = 0.09$ ($O(n^{-2}) = 1/16 = 0.0625$).

Hasonlóan a Simpson módszerből $h = \frac{3-1}{2.4} = 0.25$ és a (13.2.2) képletből:

$$\begin{aligned} \int_1^3 x^2 dx &= \\ &= \frac{h}{3} (f(1) + 4(f(1.25) + f(1.75) + f(2.25) + f(2.75)) + 2(f(1.5) + f(2) + f(2.5)) + f(3)) \\ &= \frac{0.25}{3} (1 + 4(1.5625 + 3.0625 + 5.0625 + 7.5625) + 2(2.25 + 4 + 6.25) + 9) = 8.6666. \end{aligned}$$

□

Mivel a függvény másodfokú polinom, az integrál nulla hibával állítható elő a Simpson képlettel.

A trapéz integrálási módszerhez a következő **Matlab** utasítást használjuk:

$I = \text{trapz}(xi, fi)$

ahol $x = x_i$, $fi = f_i = f(x_i)$, míg a Simpson integrálási módszerhez

$I = \text{quad}(f, a, b)$.

A kettes integrál

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

kiszámítására használjuk a

$I = \text{dblquad}(f, a, b, c, d)$

utasítást.

Feladat.

Számítsuk ki a $f(x, y) = 8e^{-x^2-y^4}$ felület az $R = [0, 1] \times [0, 1]$ négyzet fölött bezárt térfogatot.

ABRA 'dblquad.eps';

Megoldás. Ki kell számítani a

$$\int_0^1 \int_0^1 8e^{-x^2-y^4} dx dy$$

kettes integrált.

$f = @(x) 8 * \exp(-x.^2 - y.^4);$

$I = \text{dblquad}(f, 0, 1, 0, 1)$

Az integrál értéke $\simeq 5.045$.

14. FEJEZET

Differenciálegyenletek. Euler, Heun, Runge-Kutta módszerek.

Gyakorlat célja: közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldása.

14.1. Elsőrendű differenciálegyenletek

Elméleti fogalmak

Tekintsük a Cauchy feladatot ($y = y(t)$):

$$(14.1.1) \quad \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}, \quad t \in [t_0, t_f],$$

illetve a $[t_0, t_f]$ intervallum egy ekvidisztáns felosztását:

$$(14.1.2) \quad t_0 < \dots < t_n = t_f, \quad t_i = t_0 + ih,$$

ahol

$$(14.1.3) \quad h = \frac{t_f - t_0}{n}$$

a lépést jelöli.

Az Euler módszer lényege, hogy az elméleti görbét t -pontról t -pontra haladva lineáris szakaszokkal közelítjük meg és eredményül egy $P_0P_1\dots P_n$ tört vonalat kapunk; innen származik a módszer elnevezése.

ABRA deeuler.eps

A pontok $(y_i)_{i=1}^n$ ordinátáit a következőképpen állítjuk elő:

$$(14.1.4) \quad y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i), \quad i = \overline{0, n-1}.$$

vagyis

$$(14.1.5) \quad y_{i+1} = y_i + k_1, \quad i = \overline{0, n-1}$$

ahol

$$(14.1.6) \quad k_1 = h \cdot f(t_i, y_i).$$

A Heun módszer egy

$$(14.1.7) \quad k_2 = h \cdot f(t_i + h, y_i + k_1)$$

korrekciós tényezőt alkalmaz az Euler módszerhez:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2, \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Az Euler módszer pontossága $O(h)$, míg a Heun pontossága $O(h^2)$.

A pontosság növelése érdekében használjuk a Runge-Kutta módszert:

$$(14.1.8) \quad y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = \overline{0, n-1},$$

ahol

$$(14.1.9) \quad k_1 = h \cdot f(t_i, y_i), \quad k_2 = h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$(14.1.10) \quad k_3 = h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = h \cdot f(t_i + h, y_i + k_3).$$

A módszer hibarendje $O(h^4)$.

Gyakorlat menete

17. PÉLDA. Oldjuk meg a következő Cauchy-féle feladatot ($h = 0.1$)

$$\begin{cases} y' = t \cdot y, & t \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

MEGOLDÁS. Alkalmazzuk az Euler módszert: $f(t, y) = t \cdot y$, $t_0 = 0$, $t_i = i \cdot 0.1$, $P_0(0, 1)$

$$y_1 = y_0 + 0.1 \cdot f(0, 1) = 1 + 0$$

$$\implies P_1(0.1, 1)$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(t_1, y_1) = 1 + 0.1 \cdot 0.1 = 1.001$$

$$\implies P_2(0.2, 1.001), \dots \quad \square$$

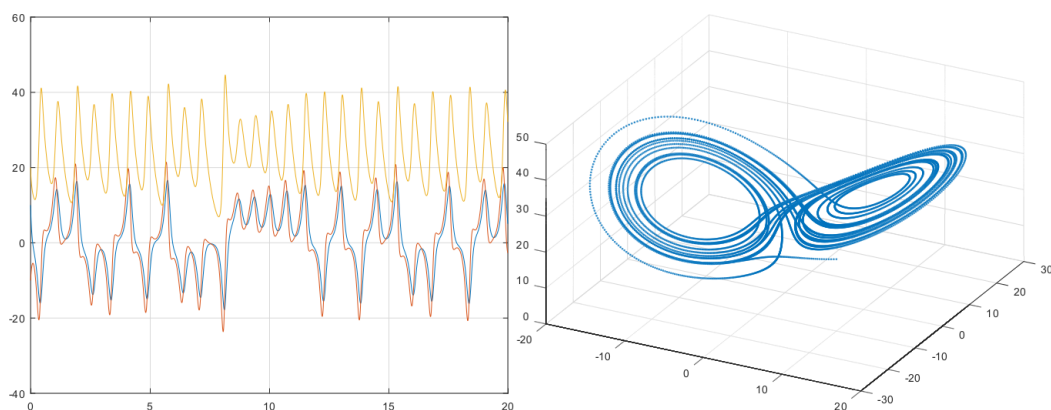
14.2. Differenciál egyenletrendszerek

18. PÉLDA. A Lorenz-féle attractor. Határozzuk meg az $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ függvényeket ha

$$\begin{cases} \dot{x} = 10 \cdot (y - x) (= dx(t, x, y, z)) \\ \dot{y} = x \cdot (28 - z) - y (= dy(t, x, y, z)) \\ \dot{z} = x \cdot y - \frac{8}{3}z (= dz(t, x, y, z)) \end{cases}, \quad t \in [0, 20]$$

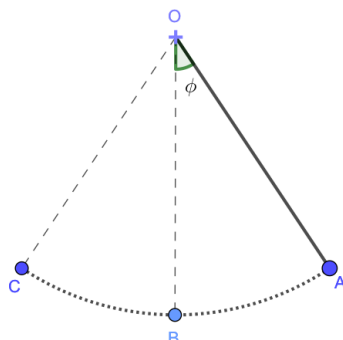
$$\begin{cases} x(0) = 10 \\ y(0) = -10 \\ z(0) = 20 \end{cases}$$

Az Euler módszernél használjunk $n = 10^4$.

14.2.1. ábra. Az x, y, z függvények és a Lorenz-féle attractor

14.3. Másodrendű differenciálegyenletek

19. PÉLDA. Inga lengő mozgása.



14.3.1. ábra. Inga

Adott egy $m = 0.3\text{kg}$ (pontszerű) test egy $l = 1\text{m}$ hosszú kar végén. A testet kilendítjük ($t_0 = 0$ kezdeti időpontban) $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ szöggel és szabadon engedjük. Tanulmányozzuk a lengést ($\varphi = \varphi(t)$) tíz percen át $t_f = 10$ ha:

- (1) súrlódásmentes mozgást feltételezünk
- (2) súrlódásos mozgás esetén.

MEGOLDÁS. A lengés egyenlete $m \cdot l \cdot \ddot{\varphi}(t) = -m \cdot g \cdot \sin(\varphi(t))$, tehát a feladat

$$\begin{cases} l \cdot \ddot{\varphi} = -g \cdot \sin(\varphi), & t \in [t_0, t_f] \\ \varphi(t_0) = \varphi_0 \\ \dot{\varphi}(t_0) = 0 \end{cases}$$

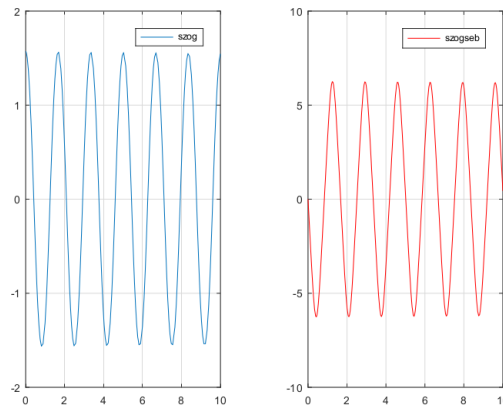
Bevezetve a φ_1, φ_2 függvényeket:

$$\varphi_1 := \varphi, \varphi_2 := \dot{\varphi}_1$$

a következő differenciál egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_2 = \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \cdot \sin(\varphi_1) \end{cases}, t \in [t_0, t_f]$$

$$\begin{cases} \varphi_1(t_0) = \varphi_0 \\ \varphi_2(t_0) = 0 \end{cases}.$$

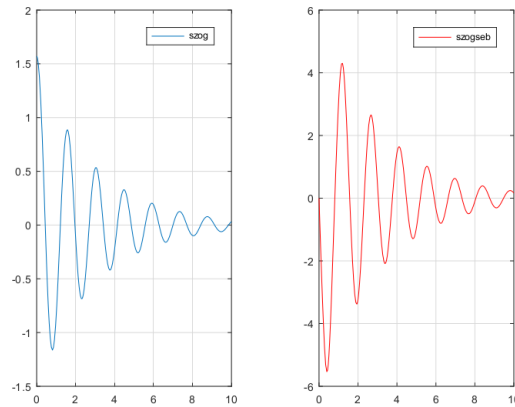


14.3.2. ábra. Súrlódásmentes mozgás

A súrlódás arányos a sebességgel: $m \cdot l \cdot \ddot{\varphi}(t) = -k \cdot \dot{\varphi}(t) - m \cdot g \cdot \sin(\varphi(t))$

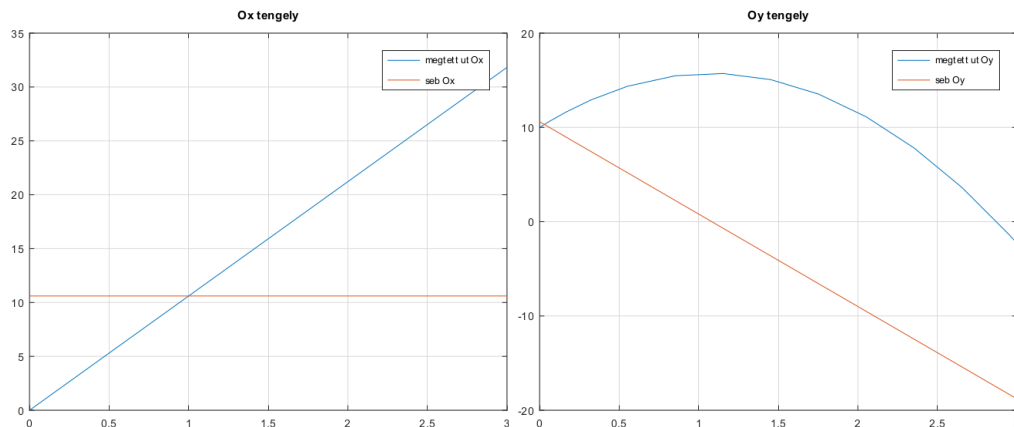
$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_2 = \ddot{\varphi} = -\frac{k}{m \cdot l} \cdot \varphi_2 - \frac{g}{m \cdot l} \cdot \sin(\varphi_1) \end{cases}, t \in [t_0, t_f]$$

$$\begin{cases} \varphi_1(t_0) = \varphi_0 \\ \varphi_2(t_0) = 0 \end{cases}.$$

14.3.3. ábra. Súrlódásos mozgás ($k = 0.1$)

□

20. PÉLDA. Szög alatti dobás. Egy testet $\alpha = \frac{\pi}{4}$ szög alatt dobunk $h = 10\text{m}$ magasságból, $v_0 = 15\text{m/s}$ sebességgel. Írjuk le a vízszintes és függőleges (súrlódásmentes) mozgást. Hasonlítsuk össze az Ox tengely mentén megtett utat különböző szögek esetén!

14.3.4. ábra. Vízszintes, illetve függőleges mozgás $\alpha = \frac{\pi}{4}$

15. FEJEZET

A rács módszer a parciális differenciálegyenletek megoldására.

Gyakorlat célja: parciális differenciálegyenletek numerikus megoldása.

Elméleti fogalmak

A másodrendű parciális differenciálegyenlet általános alakja a következő:

$$(15.0.1) \quad a \cdot u_{xx} + b \cdot u_{xy} + c \cdot u_{yy} + d \cdot u_x + e \cdot u_y + f \cdot u = g, \quad (x, y) \in \Omega$$

ahol a, b, c, d, e, f, g függvények x, y -ban.

Osztályozás:

- ha $b^2 - 4ac > 0$ akkor az (15.0.1)-es de.-t hiperbolikusnak nevezünk

Pl. Hullámegyenlet:

$$u_{xx} = \frac{1}{v^2} u_{tt},$$

- ha $b^2 - 4ac = 0$ akkor az (15.0.1)-es de.-t parabolikusnak nevezünk

Pl. Hőterjedés, diffúzió:

$$u_{xx} = \frac{1}{a} u_t,$$

- ha $b^2 - 4ac < 0$ akkor az (15.0.1)-es de.-t elliptikusnak nevezünk

Pl. Laplace-féle egyenlet

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

A (15.0.1)-es differenciálegyenlethez hozzárendelünk kezdeti vagy perem-feltételek

Lefedjük az Ω síktartományt egy $\Pi = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \times \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ráccsal ahol $(x_i)_{i=1}^m, (y_j)_{j=1}^n$ egyenközű osztópontok

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h, \quad i = \overline{1, m} \\ y_{j+1} &= y_j + k, \quad j = \overline{1, n} \end{aligned}$$

Az $u(x, y)$ függvény megközelítésére az u függvény (x_i, y_j) csomópontokban közelítését használjuk

$$u(x, y) \simeq u(x_i, y_j) =: u_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Az (15.0.1) egyenlet diszkrét alakjában behelyettesítjük a deriváltak helyett az ismert numerikus deriválási képleteket (13.1.4):

$$(15.0.2) \quad u_x(x_i, y_j) = (u_x)_{i,j} = \frac{u(x_i + h, y_j) - u(x_i, y_j)}{h} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h},$$

$$u_y(x_i, y_j) = (u_y)_{i,j} = \frac{u(x_i, y_j + k) - u(x_i, y_j)}{k} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k},$$

vagy a pontosabb közelítés (13.1.5)

$$(15.0.3) \quad (u_x)_{i,j} = \frac{u(x_i + h, y_j) - u(x_i - h, y_j)}{2h} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h},$$

$$u_y(x_i, y_j) = (u_y)_{i,j} = \frac{u(x_i, y_j + k) - u(x_i, y_j - k)}{2k} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k}.$$

Hasonlóan a másodrendű deriváltakat

$$(15.0.4) \quad (u_{xx})_{i,j} = \frac{u(x_i + h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i - h, y_j)}{h^2}$$

$$(15.0.5) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2},$$

$$(15.0.6) \quad (u_{yy})_{i,j} = \frac{u(x_i, y_j + k) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j - k)}{k^2}$$

$$(15.0.7) = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$$

$$(15.0.8) \quad (u_{xy})_{i,j} = \frac{u(x_i + h, y_j + k) - u(x_i + h, y_j) - u(x_i, y_j + k) + u(x_i, y_j)}{hk}$$

$$(15.0.9) = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} + u_{i,j}}{hk}.$$

A (15.0.3) képletek véve alapul az $u_{xy}(x_i, y_j)$ vegyes deriváltat a következő képletet lehet kiszámítani:

$$(15.0.10) \quad u_{xy}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i + h, y_j + k) - u(x_i + h, y_j - k) - u(x_i - h, y_j + k) + u(x_i - h, y_j - k)}{4hk}$$

$$(15.0.11) = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4hk}.$$

A behelyettesítést követően, attól függően hogy kezdeti vagy perem-feltételek adódtak, egy rekurzív képletet- vagy egy egyenletrendszert kapunk aminek az ismeretleni $u_{i,j}$.

Gyakorlat menete

Feladat.

Hőterjedés: adott egy L egységnyi vastag és végtelen nagyságú lemez. Az eredetileg $f(x)$, $x \in [0, L]$ fokos lemezt a t_0 időpontban lehűtjük u_0 fokra (a

lemez oldalait). Vizsgáljuk a hőterjedést a lemezanyagában ha az oldalak u_0 fokon vannak tartva.

$$(15.0.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} u : [0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \\ u_{xx}(x, t) = \frac{1}{a} u_t(x, t), \\ u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, L] \\ u(0, t) = g_0(t), \quad u(L, t) = g_1(t), \quad t \in [0, T] \end{array} \right. ,$$

ahol $[0, T]$ a tanulmányozott időintervallum, a pedig a lemez hőterjedési együtthatója.

Konkrét adatok: $L = 2$, $T = 0,5$, $f(x) = 100$ ($^{\circ}C$), $\forall x \in [0, 2]$, $u_0 = 0$ ($^{\circ}C$), $a = 1$, $g_0(t) = g_1(t) = 0$ ($^{\circ}C$).

Megoldás. Legyen $x_i = i \cdot h$, $i = \overline{0, n}$, $h = (L-0)/n$, és $t_j = j \cdot k$, $j = \overline{0, m}$, $k = (T-0)/m$, illetve az általuk alkotott rács szerkezet (lásd az alábbi ábrát)

ABRA 'pdegrid.eps';

Behelyettesítve a (15.0.13) képletbe a (15.0.2), (15.0.6) képleteket azt kapjuk, hogy

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} - \frac{1}{a} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = 0, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{0, n-1}.$$

Átalakítva a következő rekurzív képletet kapjuk:

$$u_{i,j+1} = \frac{ak}{h^2} u_{i-1,j} + \left(1 - 2\frac{ak}{h^2}\right) u_{i,j} + \frac{ak}{h^2} u_{i+1,j}, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{0, n-1}.$$

A konkrét adatok esetében vegyük a következő lépéseket $h = 0.2$, $k = 0.01 \Rightarrow \frac{ak}{h^2} = 0.25$

$$u_{i,j+1} = 0.25u_{i-1,j} + 0.5u_{i,j} + 0.25u_{i+1,j}, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{0, n-1}.$$

ahol $u_{0,j+1} = 0$, $u_{n,j+1} = 0$, $u_{i,0} = 100$.

Az alábbi ábrán a hőmérséklet eloszlása látható a lemezben.

ABRA 'pdeeloszlas.eps';