Algoritmusok felülnézetből

4. ELŐADÁS

Sapientia-EMTE

2015-16

„Mohó kódok”

- 1951-ben, az MIT-n, David Huffman és osztálytársai választhattak a vizsga és egy tudományos dolgozat írása között, „leghatékonyabb bináris kód” témakörben.
- Huffman már azon volt, hogy nekilát tanulni a vizsgára, amikor hirtelen az az ötlete támadt, hogy használjon *gyakoriságon alapuló bináris fát* a kódoláshoz, amelyről könnyűszerrel bizonyítani is tudta, hogy a lehető leghatékonyabb módszer.

Huffman kódolás

- Ha szeretnénk, hogy egy szöveg *karakterenkénti* kódja a lehető legrövidebb legyen, akkor a gyakoribb karaktereknek rövidebb, a ritkábbaknak pedig hosszabb kódot célszerű választani.
  - Példa: **SAPIENTIA–INFORMATIKA**

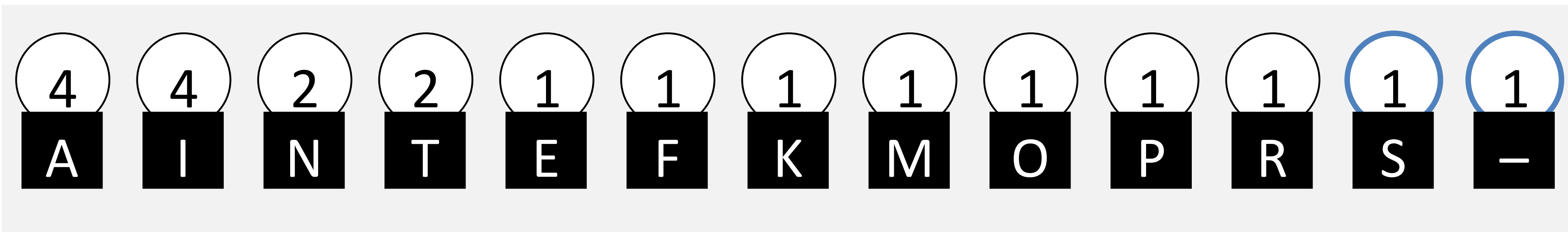
A	I	N	T	E	F	K	M	O	P	R	S	–
4	4	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1

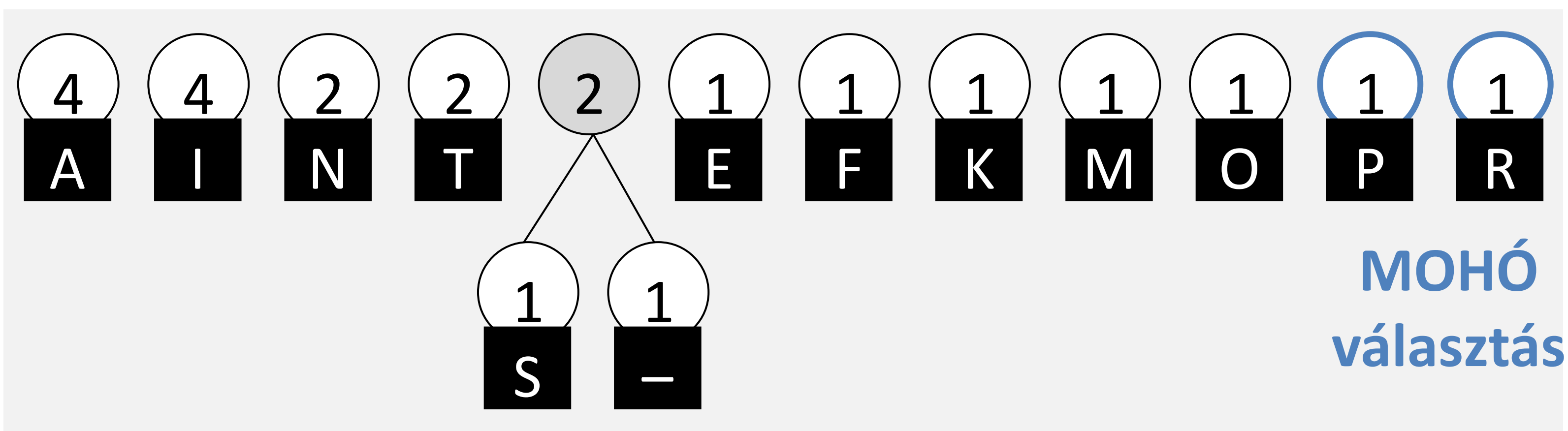
Huffman – fa (0)

- Huffman egy bináris fát épített a gyakorisági tábla alapján:
  - A szöveg karakterei a fa leveleibe kerülnek;
  - A megfelelő kódok a gyökér-levél utak bináris ábrázolásai lesznek.
- A mohó elvvel összhangba azt szeretnénk, hogy gyakoribb karaktereket képviselő levelek magasabbra, a ritkábbakat ábrázolók pedig mélyebbre kerüljenek.
- Huffman a fát levelektől gyökér fele irányba építette fel:
  - Kezdetben minden karakter csomópontja különálló egypontú fának tekintendő;
  - E gyökér-csomópontok mindegyike tárolja az illető karakter gyakoriságát .
  - Minden lépésben összevonjuk a két legkisebb gyakoriság értékű gyökérrel rendelkező részfát oly módon, hogy létrehozunk részükre egy közös apa-csomópontot;
  - Az új apa-csomópont (az egyesült részfák közös gyökere) gyakoriságértéke, a fiú-részfák gyökerei gyakoriságértékeinek összege lesz.

Huffman – fa (1)

MOHÓ választás

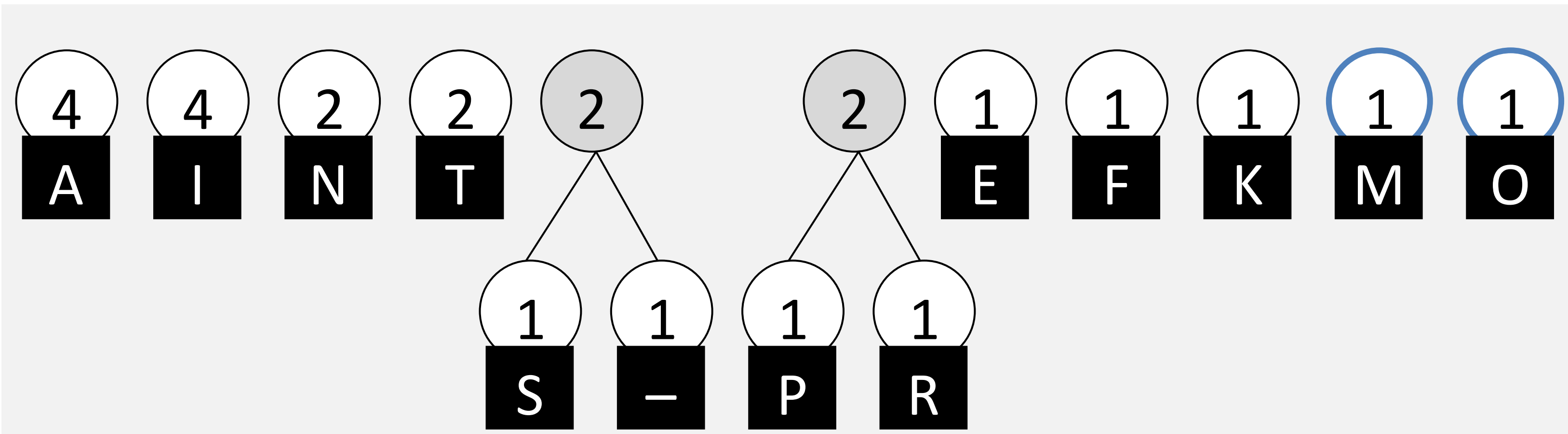


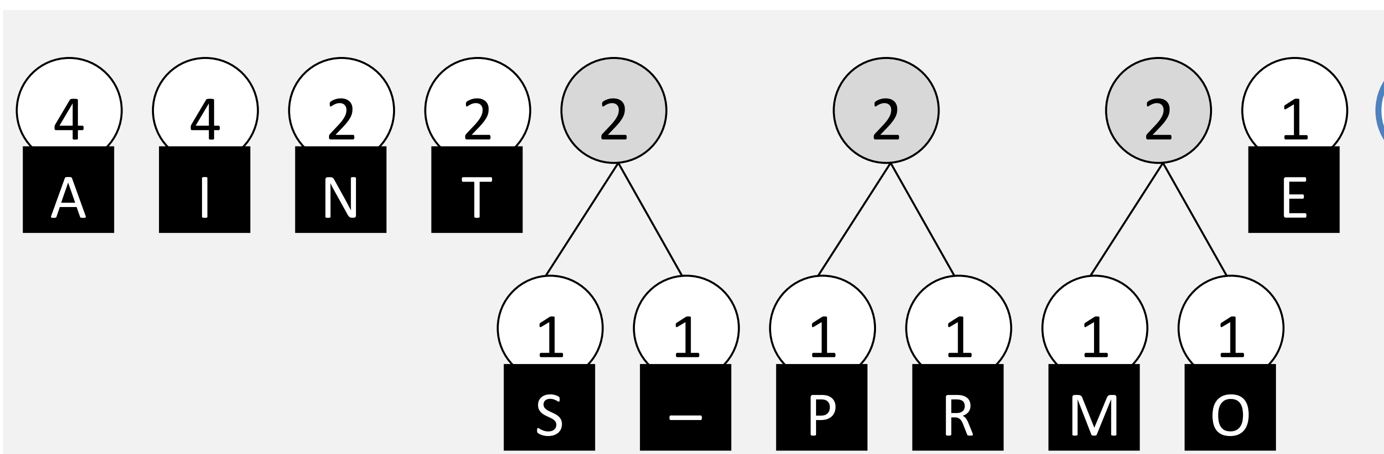


MOHÓ választás

Huffman – fa (2)

MOHÓ választás

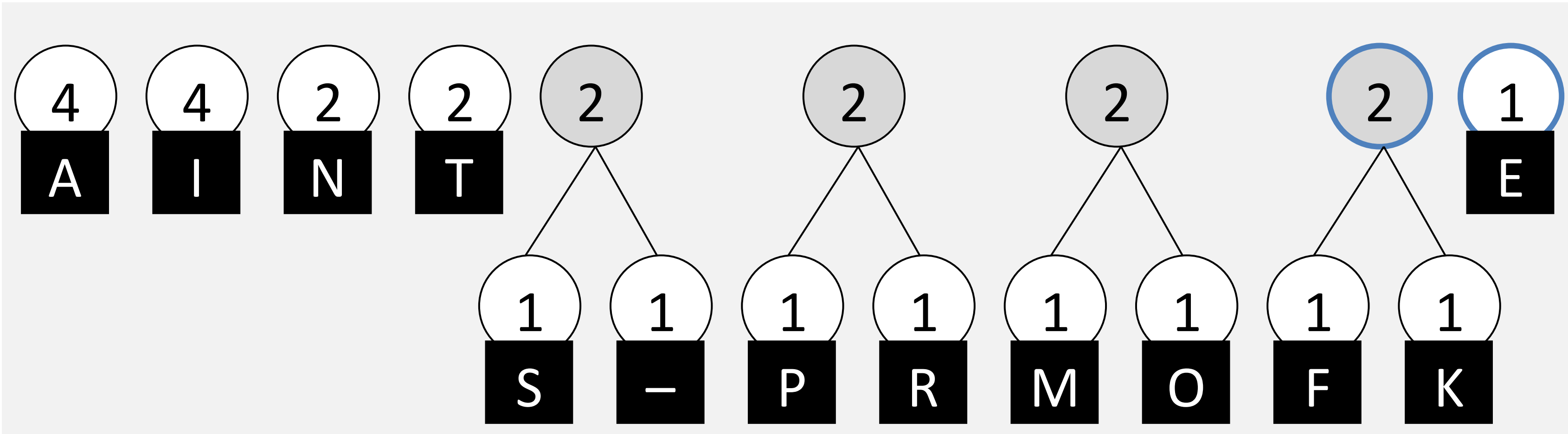




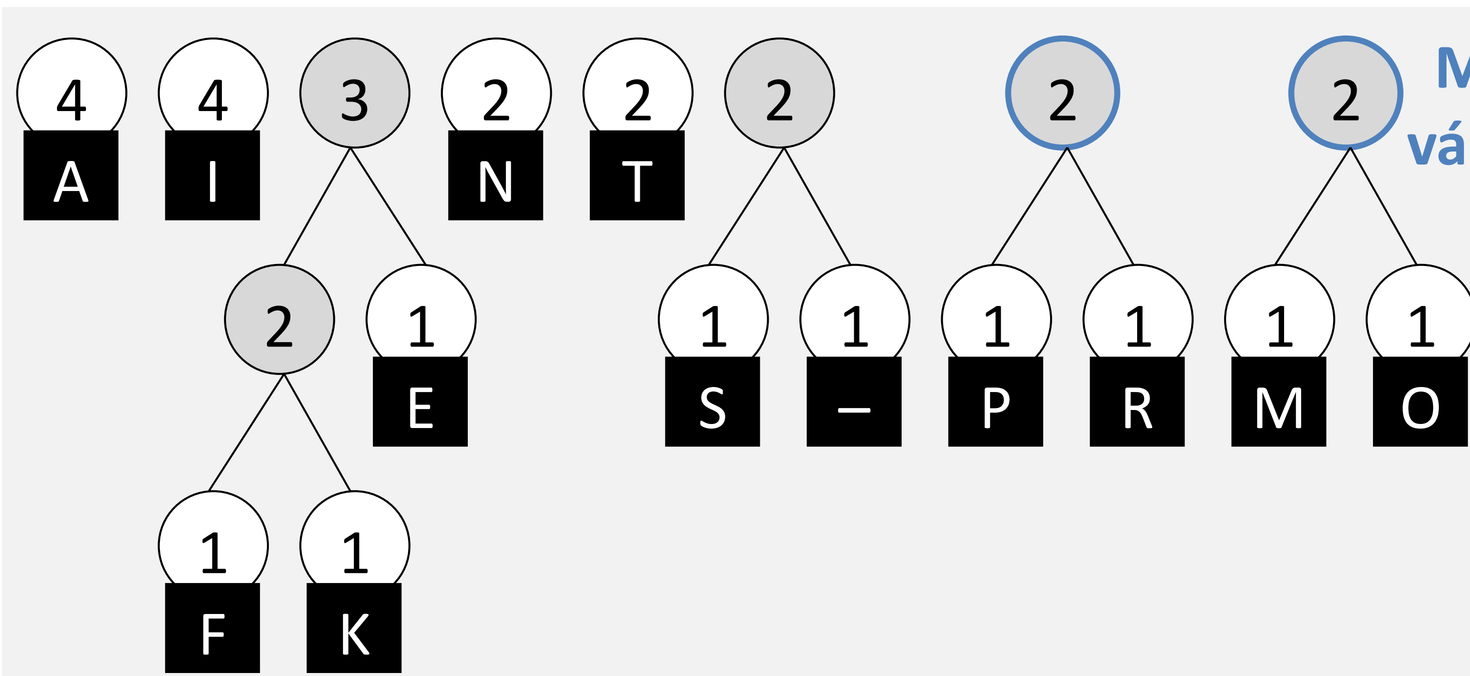
MOHÓ választás

Huffman – fa (3)

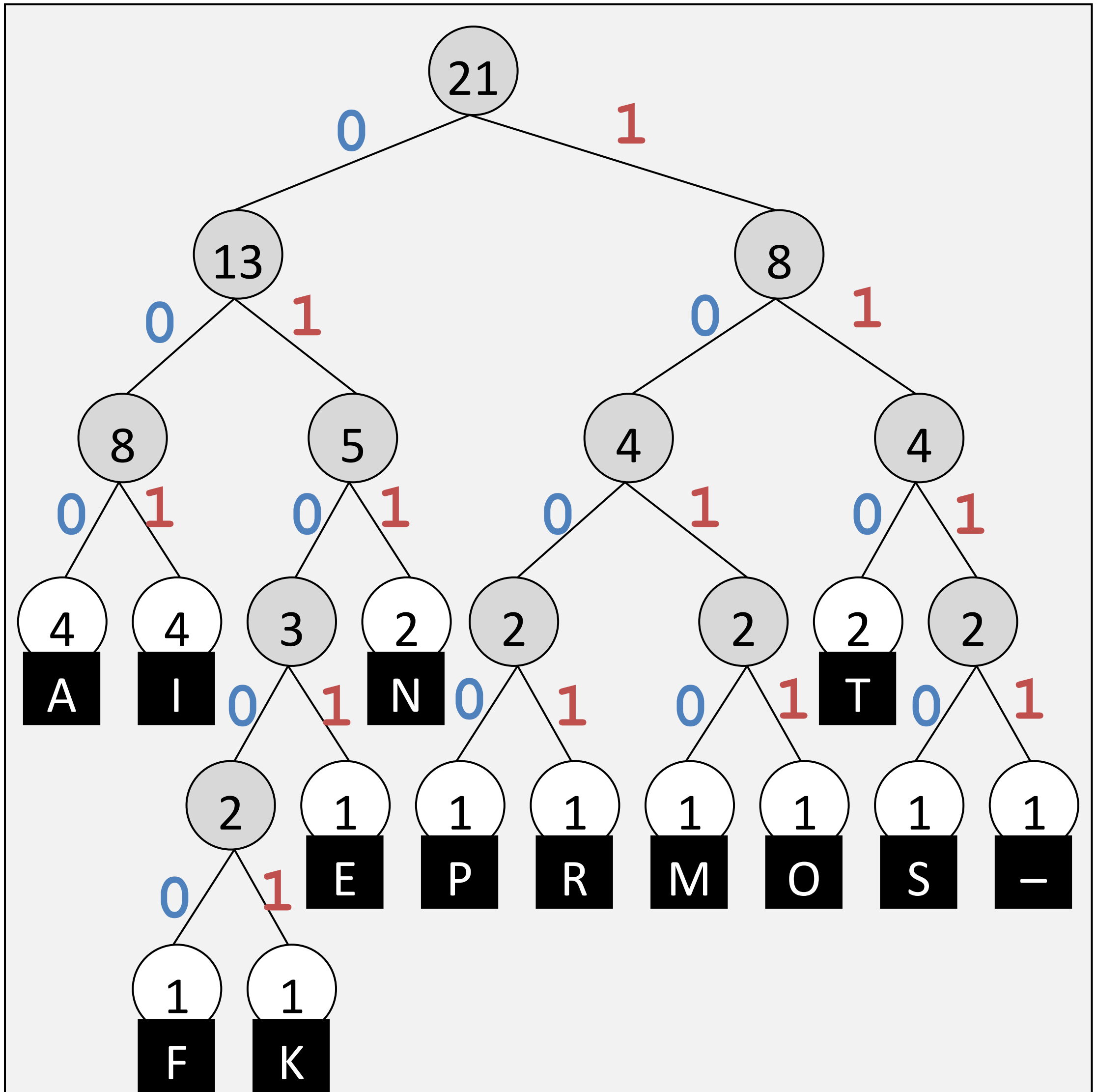
MOHÓ választás



MOHÓ választás



Huffman – fa (4)



S(1): 1110
A(4): 000
P(1): 1000
I(4): 001
E(1): 0101
N(2): 011
T(2): 110
F(1): 01000
O(1): 1011
R(1): 1001
M(1): 1010
K(1): 01001
–(1): 1111

Huffman – kódolás

Naiv kódolás:

- 13 féle karakter
- 4-bit hosszú karakter-kódok
- 21x4=**84** hosszú kódolt szöveg

S(1): 1110
A(4): 000
P(1): 1000
I(4): 001
E(1): 0101
N(2): 011
T(1): 110
F(1): 01000
O(1): 1011
R(1): 1001
M(1): 1010
K(1): 01001
-(1): 1111

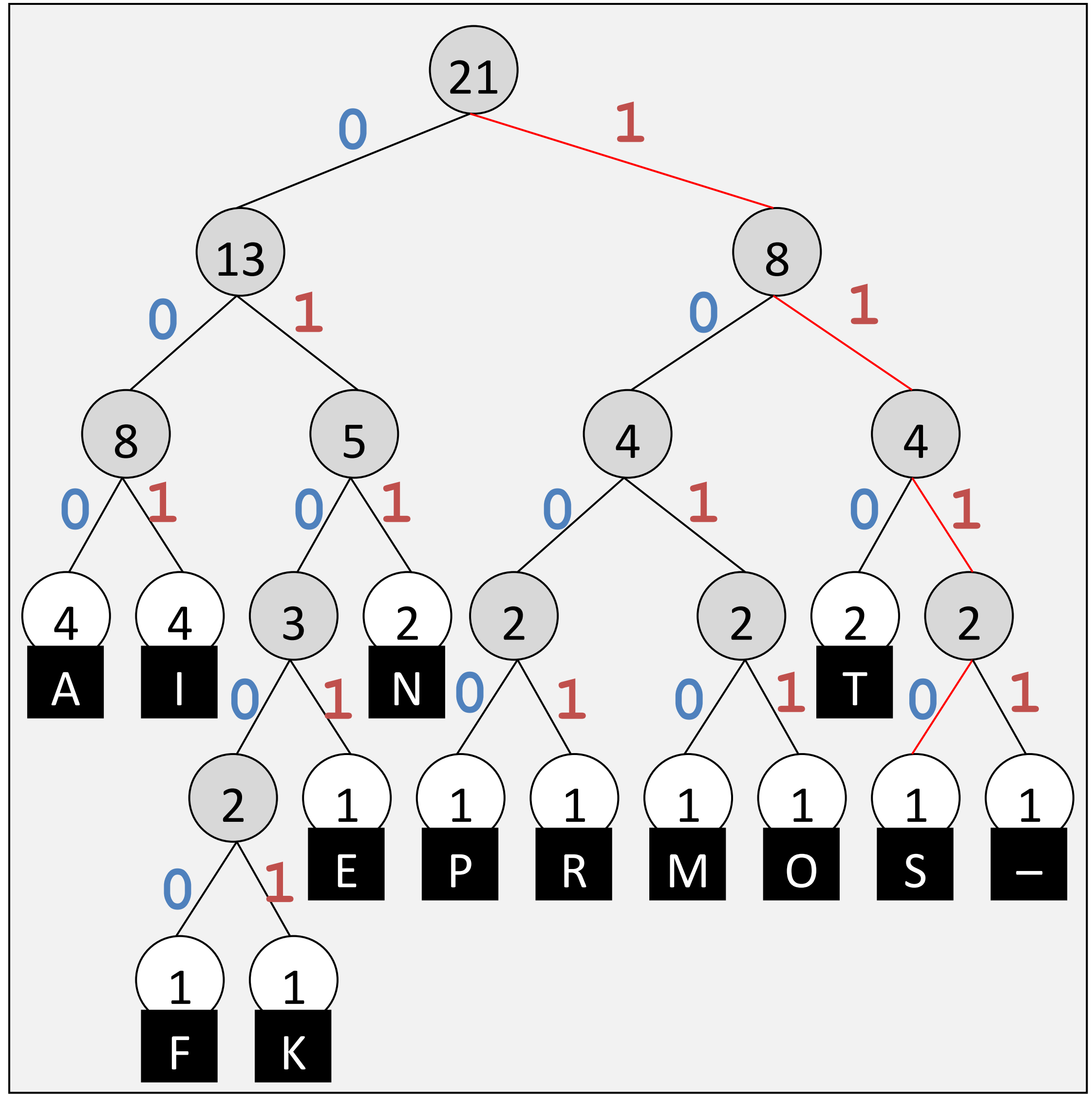
74 bit

SAPIENTIA-INFORMATIKA

1110000100000101010111100010001111 0010110100010111001101000011000101001000

Dekódolás

Mivel a kódok kizárólag levelekbe vezető utak, ezért egyik se prefix-je a másiknak



S

1110000100000101010111100010001110010110100010111001101000011000101001000

Mohó algoritmusok (GREEDY)

- A greedy módszert optimalizálási feladatok megoldására használjuk.

(Felvonó) Egy egyszemélyes felvonó előtt n személy áll, akikről ismert, hogy hányadik emeletre szeretnének feljutni (e_1, e_2, $\ldots$, e_n). Milyen sorrendben kellene használják a felvonót, ha azt szeretnék, hogy a várakozási idejük összege *minimális* legyen? Mennyi lesz ez az összidő, ha tudjuk, hogy a felvonó időegységekként egy emeletmagasságot tesz meg, és a kiszállás és beszállás „szempillantás alatt” történik?

(Műsorok) Adott n tévéműsor, amelyeknek ismert a kezdési és befejezési időpontjuk: (b_1, e_1), (b_2, e_2), ..., (b_n, e_n). Egy család, amelynek egy tévékészüléke van, úgy dönt, hogy a $[B, E]$ időintervallumban ($b_i \geqslant B$, $e_i \leqslant E$, $i = 1, n$) tévézni fog. Mely műsorokat válasszák (lehetnek átfedődő műsorok is, amelyeket természetesen más-más kanálison közvetítenek), ha azt szeretnék, hogy a *legtöbb* műsort lássák? *Legkevesebb* hány tévékészülékre lenne szükségük (és legalább hány tagú kellene hogy legyen a család) ahhoz, hogy minden műsort megnézhessen legalább egy családtag?

(Telefonhálózat) N számú város között telefonhálózatot szeretnének kiépíteni. Egy `d[1..m]` egydimenziós tömbben adott, hogy mely várospárok között építhető ki direkt telefonvonal, valamint, hogy ezek a kapcsolatok egyenként mennyibe kerülnének. Az i-edik közvetlen vonal végpontjait, valamint megépítési költségét a `d[i].x`, `d[i].y` és `d[i].k` mezők tárolják. Mely városok között építsék ki a közvetlen telefonvonalakat ahhoz, hogy összekapcsoljanak minden várost (legalább közvetve), és a költségek *minimálisak* legyenek?

(Madarak) Adott $n+1$ fa, amelyek 1-től $(n+1)$-ig vannak megszámozva. Az első n fa mindenikén elhelyezkedett egy-egy madár. Ezeket is megszámozzuk 1-től n-ig. Az i-edik fára az i-edik madár szállt ($i = 1, n$). A madarak elkezdenek áthelyezkedni. Minden lépésben valamelyik madár átrepül az éppen üres fára (egyszerre csak egyetlen madár van a levegőben). Ismerve, hogy egy idő után melyik madár éppen melyik fára szállt, „repítsük vissza" a madarakat eredeti helyükre *minimális* számú repüléssel.

(Legrövidebb utak) Adott egy $n \times n$ méretű d mátrix, amely egy n várost összekötő úthálózatot ábrázol. A `d[i][j]` elem az i és j városok közti közvetlen út hosszát tárolja (ha két város közt nincs direkt út, a megfelelő mátrixelemek értéke ∞). Határozzuk meg az első várostól az összes többihez vezető *legrövidebb* utakat és ezeknek a hosszát.

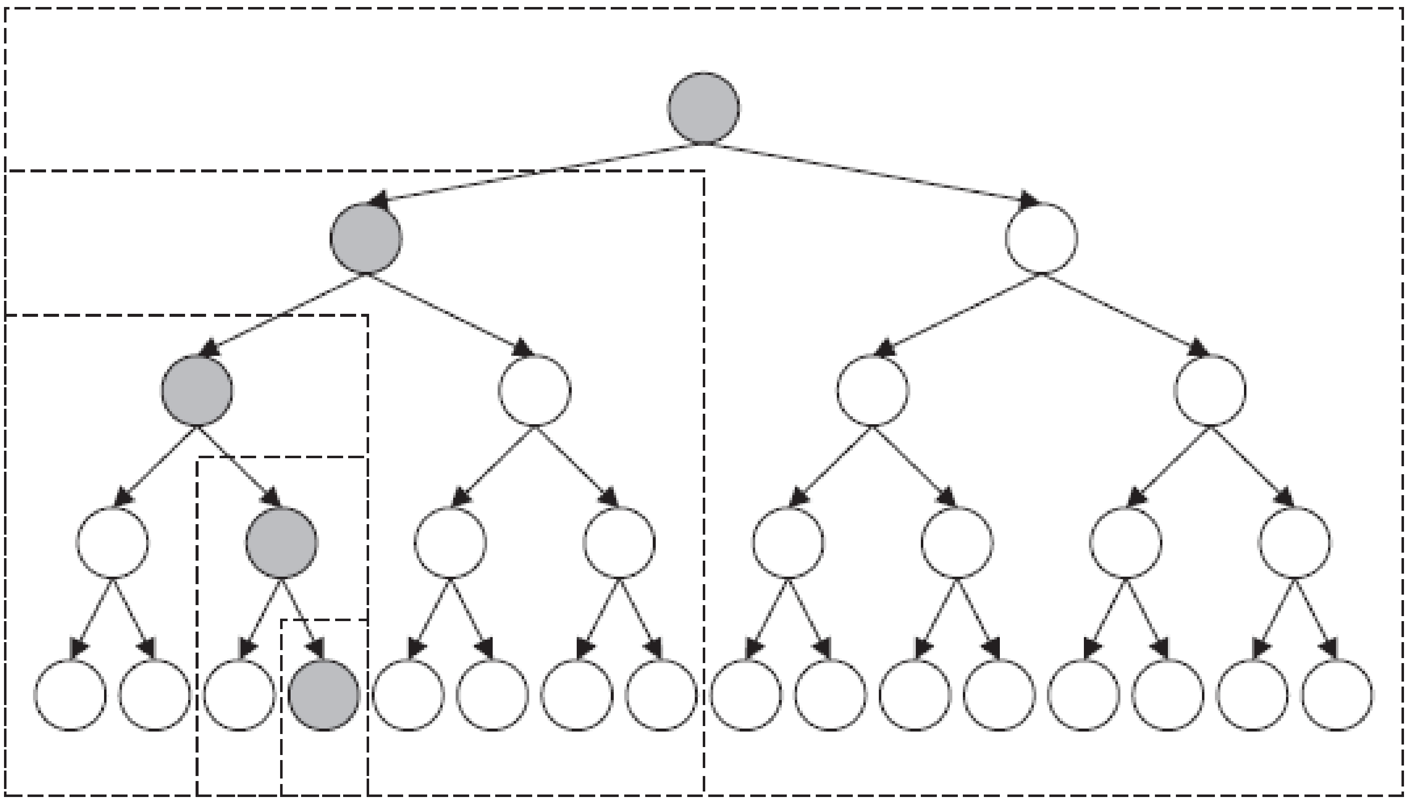
Mohó stratégia

Mindent feltesz egy lapra!

- Mindig az adott lépésben optimálisnak látszó (legígéretesebb) döntést hozzuk
  - Nem számolva az esetleges hosszú távú következményekkel
- Úgy gondolkodunk, hogy a lokális optimum majd globális optimumhoz vezet
  - Ez általánosságban nem igaz
  - Mohó melléfogások:
    - Nem az optimális megoldást találja meg
      - 6 euró kifizetése minimális számú 1,3,4 eurósokkal
    - Úgy érzékeli nincs megoldás
      - 9 euró kifizetése minimális számú 3,4 eurósokkal

Mohó stratégia a fán

- Minden döntéssel a feladat *egy* hasonló egyszerűbbé redukálódik
  - Optimális megoldás = optimális gyökér-levél út



Mohó döntések

1. Mivel annak a személynek a feljutási ideje, aki éppen használja a felvonót, bekerül a többi, még sorára váró lakó várakozási idejébe is, ezért mindig a *legalacsonyabban lakó* személy lesz a következő.

2. A *leghamarabb befejeződő* műsort választjuk ki elsőként, hogy a lehető leghosszabb *folytonos* időszakasz maradjon fenn további választásokra. Ha a soron következő legígéretesebb műsor átfedődik a már kiválasztottakkal, egyszerűen kihagyjuk.

3. Mindig a következő *legolcsóbb* szakaszon építjük ki a telefonvonalat, ügyelve arra, hogy ne építsünk közvetlen vonalat ott, ahol már létrejött közvetett kapcsolat.

4. Arra törekszünk, hogy mindenik madár a lehető *legkevesebb* repüléssel kerüljön a helyére. Tehát mindig az a madár fog repülni, amelyiknek a fája éppen üres. Ily módon az illető madár egy repüléssel a helyére kerül. Ha egy adott pillanatban az $(n+1)$-edik fa válik üressé, és nincs még minden madár a helyén, akkor ezek közül valamelyik elrepül az $(n+1)$-edik fára. Ez a madár végül két repülésből kerül a fájára.

5. Mindig a már elért városokhoz *legközelebb* eső város lesz a következő, amelyikhez meghatározzuk a legrövidebb utat. Ez a sorrend biztosítja majd, hogy minden városhoz a legrövidebb úton jussunk el.

Kandidátusok halmaza

Megoldás halmaz

Mohó – váz

```
eljárás greedy(K)
    S ← Φ
    amíg nem megoldás(S) és K ≠ Φ
        x ← legígéretesebb(K)                    (1)
        K ← K \ {x}                              (2)
        ha bővíthető(S,x) akkor
            S ← S ∪ {x}                          (3)
        vége ha
    vége amíg
    ha megoldás(S) akkor
        kiír(S)
    különben
        ki: "Nincs
    vége ha
vége greedy
```

Például (lásd 2. feladatot): a következő legkorábban befejeződő műsor

Nem fedi át a már programra tűzött műsorokat

(1) – mindig az adott pillanatban legígéretesebbnek látszó kandidátust választjuk (a döntési fa aktuális csomópontjának legígéretesebb fiát);

(2) – a kiválasztott kandidátust „örökre” eltávolítjuk a kandidátushalmazból;

(3) – ha a megoldás halmaz bővíthető az illető elemmel, akkor végérvényesen beletesszük, ha nem, akkor végképp lemondunk róla.

Műsorok feladat megoldása

Ígéretességi sorrendbe rendezzük a műsorokat (a kadidátusokat)

```
műsorok (e[],b[],n)
   rendezés(e,b,n) // az e és b tömbök párhuzamos rendezése
                   // a befejezési időpontok szerint
   ki: '(',b[1],',',e[1],')'
   V=e[1]
   minden i=2,n végezd
      ha b[i] > V akkor
         ki: '(',b[i],',',e[i],')'
         V = e[i]
      vége ha
   vége minden
vége műsorok
```

A soron következő műsor később kezdődik, mint az eddig programra tűzöttek

Matematikai háttér

- Mohó-választás alapelve
  - A feladat optimális megoldása mohó-választással kezdődik (vagy módosítható úgy, hogy mohó-választással kezdődjön),
  - és ezen választás nyomán a feladat hasonló feladattá redukálódik.
- Optimalitás alapelve
  - A feladat optimális megoldása a részfeladatok (amelyekre a feladat a mohó-döntések nyomán redukálódik) optimális megoldásaiból épül fel.

Élj a mának?!

„Minden napnak elég a maga baja”

„Amit vet az ember, azt fogja aratni is”