Differenciálegyenletek

Farkas Csaba

2017. december 21.

Tartalomjegyzék

1 FEJEZET

Bevezetés

you need not fear the results of a hundred battles.

1.1. Differenciálegyenletek és azok megoldásai

Értelmezés.

Differenciálegyenlet alatt olyan függvényegyenleteket értünk, melyekben független változók, függvények és azok deriváltjai szerepelnek.

Egy differenciálegyenletet **közönséges differenciálegyenlet** nevezünk, ha a benne levő ismeretlen függvény egy valós vagy komplex változótól függ (azaz az y függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$). A differenciálegyenletet **parciális differenciálegyenletnek** nevezzük, ha az ismeretlen függvény több változótól függ (ebben az esetben az értelmezési tartomány lehet $\mathbb{R}^N$, N a tér dimenziója).

1.1.1. példa

- A következő egyenletek közönséges differenciálegyenletek:

$$y'(x) + 5y(x) = e^x, \; x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x \cdot \frac{dy}{dx} + 17y = 0, \; \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = x - 2y.$$

- A következő egyenletek parciális differenciálegyenletek:

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} - 2\frac{\partial u}{\partial t}$$

A differenciálegyenlet első elsőrendű, ha az tartalmazza az ismeretlen függvény deriváltját, de nem tartalmazza annak egyetlen magasabb rendű deriváltját sem.

Egy differenciálegyenlet másodrendű ha tartalmazza az ismeretlen függvény másodrendű deriváltját (tartalmazhatja az első deriváltját is) de nem tartalmazza annak magasabb rendű deriváltjait.

Egy n-ed rendű egyenletet a következő alakban írhatunk fel:

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0, \tag{1.1.1}$$

ahol F valamely $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+2}$ tartományon értelmezett valós vagy komplex függvény.

Az (1.1.1) egyenlet megoldásain valamely $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ intervallumon, olyan $y : \mathcal{I} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ függvényeket értünk amelyekre:

(i) $y \in C^n(\mathcal{I})$ (az y függvény n-szer folytonosan differenciálható);

(ii) $(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)) \in \Omega, \;\; \forall x \in \mathcal{I}$;

(iii) $F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0, \ \forall x \in \mathcal{I}.$

1.1.2. példa

Legyen $F(x, y, z) = x + yz$ egy háromváltozós függvény. Ekkor az (1.1.1) differenciálegyenlet a következő alakot ölti:

$$x + y \cdot y' = 0,$$

azaz

$$y' = -\frac{x}{y}, \ y \neq 0.$$

Egyszerű helyettesítéssel beláthatjuk, hogy

$$y_1 = -\sqrt{R^2 - x^2}, \ y_2 = \sqrt{R^2 - x^2}$$

alakú függvények megoldásai a megadott differenciálegyenletnek a $(-R, R)$ intervallumon. ✓

Az (1.1.1) egyenlet megoldásainak tanulmányozása szempontjából nagy előny ha az n-ed rendű deriváltat ki tudjuk fejezni az egyenletből, az $x, y, y', ..., y^{(n-1)}$ segítségével, azaz (1.1.1) egyenlet helyett a következő úgy nevezett **normál alakú egyenlet**et tekintjük:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right), \ \forall x \in \mathcal{I}. \tag{1.1.2}$$

A fenti egyenlet megoldását hasonlóan értelmezhetjük, mint az általános esetben.

Az (1.1.1) egyenletet lineáris egyenletnek mondjuk ha F lineáris az $y, y', ..., y^{(n)}$-ben. Ez azt jelenti, hogy egy n-ed rendű közönséges differenciálegyenlet lineáris ha felírható a következő alakban:

A linearitást y-ban vizsgáljuk. Megjegyezendő, hogy egy f függvény lineáris ha $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ minden x, y és α, β esetén

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x) \tag{1.1.3}$$

Vegyük észre, hogy a fenti egyenletben az $a_j(x), \ j = \overline{0, n}$ együttható függvények nem függnek az y ismeretlen függvénytől. Azok az egyenletek amelyek nem írhatóak fel az (1.1.3) alakba **nem-lineáris egyenlet**eknek nevezzük.

Megjegyezendő, hogy a deriválás esetén $(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$

1.1.3. példa

- A következő egyenletek lineáris egyenletek:

$$y'' - 5y' + 6y = 0, \ x^2y'' + xy' + y = e^x.$$

- Az alábbi egyenletek nem-lineáris egyenletek:

Az $y \mapsto y^n$ függvény nem-lineáris ha $n > 1$.

$$\overset{\text{függ } y\text{-tól}}{\boxed{(1-y)}} \ y' + 10y = \sin(x), \ y' = \overset{\text{függ } y\text{-tól}}{\boxed{\ln(x+y)}}, \ y'' + \overset{\text{a rend } \geq 2}{\boxed{y^2}} = 0.$$

Értelmezés.

Egy közönséges differenciálegyenlet megoldásának a grafikus képét **megoldás görbének** nevezzük.

Mivel egy differenciálegyenlet y megoldása differenciálható függvény az $\mathcal{I}$ értelmezési tartományon ez'ert, sok esetben különbség van egy y függvény grafikus képe és egy y megoldás függvény grafikusképe között. Ennek az illusztrálására tekintsük a következő példát:

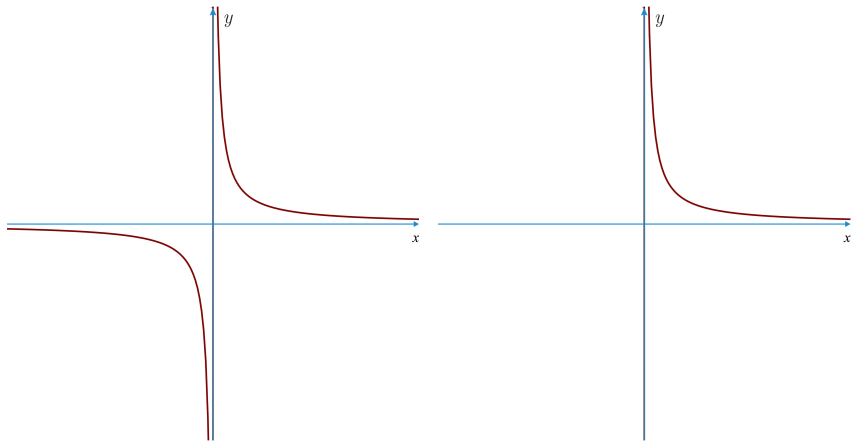
1.1.4. példa Függvény és megoldás

Tekintsük az $y(x) = \dfrac{1}{x}$ függvényt. Ennek a függvénynek a grafikus képe az alábbi ábrán látható. Világos, hogy az y függvény nem differenciálható az 0 pontban.

Tekintsük most az

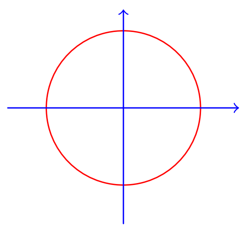
$$xy' + y = 0$$

differenciálegyenletet. Ellenőrizhető, hogy ennek az egyenletnek az $y = \dfrac{1}{x}$ megoldása. Ez alatt pontosan azt értjük, hogy az y megoldása az egyenletnek egy olyan $\mathcal{I}$ intervallumon ami nem tartalmazza a 0-t.



1.1. ábra. Az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függény ábrázolása, illetve az $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$ megoldás görbe ábrázolása.

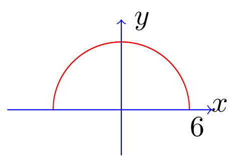
Térjünk vissza az (1.1.1) vagy (1.1.2) egyenletekhez. Ezen egyenleteknek két típusú megoldást különböztetünk meg: explicit megoldás ill. implicit megoldás.



Az $x^2 + y^2 = 36$ implicit megoldás

Értelmezés.

1. Azon megoldásokat amelyek kifejezhetőek csak a független változó(k) segítségével, azokat **explicit megoldásoknak** nevezzük.
2. Az (1.1.1) egyenlet esetén a $G(x, y) = 0$ relációt **implicit megoldásnak** nevezzük az $\mathcal{I}$ intervallumon.



(a) $y_1(x) = \sqrt{36 - x^2}$ explicit megoldás.

1.1.5. példa

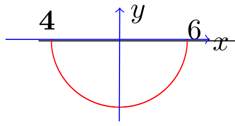
Az $x^2 + y^2 = 36$ reláció implicit megoldása az

$$y' = -\frac{x}{y}$$

egyenletnek az $\mathcal{I} = (-6, 6)$ intervallumon. Valóban deriválva a megadott relációt

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}36 \quad \text{vagy } 2x + 2yy' = 0.$$

Világos, hogy az utóbbi összefüggés pontosan az adott differenciálegyenletet szolgáltatja.



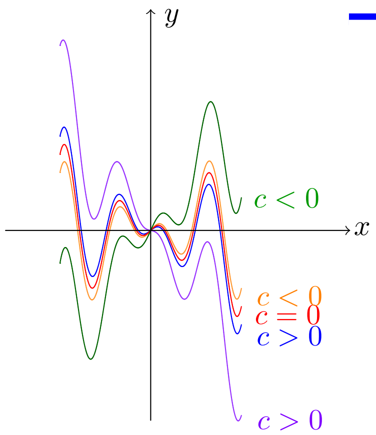
(b)
$y_2(x) = -\sqrt{36-x^2}$ explicit megoldás.

Észrevehető ugyanakkor az is, hogy a reláció alapján $y_{1,2}(x) = \pm\sqrt{36-x^2},\ x \in \mathcal{I}$. Ezen függvények explicit megoldásai az adott egyenletnek.

Egy differenciálegyenlet megoldása során a megoldásunk tartalmazhat egy c tetszőleges állandót, ilyen esetben a $G(x, y, c) = 0$ egy paramétertől függő megoldásnak nevezzük. Egy n-ed rendű egyenlet esetén n paramétertől függő megoldást kapunk:

$$G(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy egy differenciálegyenletnek végtelen sok megoldása lehet. Azon megoldásokat amelyek nem függnek a paramétertől sajátos megoldásnak nevezzük.



Az $y = cx - x\cos x$ függvény grafikus képe.

1.1.6. példa Sajátos megoldások

1. Tekintsük a következő c paramétertől függő függvénycsaládot: $y(x) = cx - x\cos x,\ c \in \mathbb{R}$. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy a fenti függvény egy explicit megoldása az

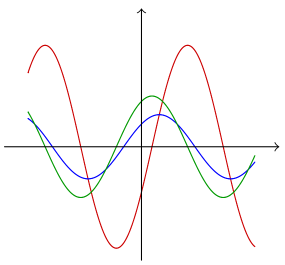
$$xy' - y = x^2 \sin x$$

lineáris differenciálegyenletnek. A fenti példában látszik, hogy az $y = -x\cos x$ függvény a differenciálegyenlet egy sajátos megoldása.

2. Tekintsük az $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ két paramétertől függő függvényt. Belátható, hogy az y megoldása az

$$y'' + y = 0$$

másodrendű differenciálegyenletnek. Az $y(x) = \sin x$ és az $y(x) = \cos x$ az eredeti egyenlet egy-egy sajátos megoldásai.



Az $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ függvény grafikus képe.

1.1.1. Megjegyzés. *Tekintsük az $y = cx^4$ függvénycsaládot. Észrevehető, hogy ez a függvénycsa megoldása az*

$$xy' - 4y = 0$$

differenciálegyenletnek az $\mathbb{R}$-n. Ugyanakkor világos, hogy az

$$y(x) = \begin{cases} -x^4 & x < 0 \\ x^4 & x \geq 0 \end{cases}$$

megoldása a differenciálegyenletnek. Tehát egy differenciálegyenletnek többképlettel megadott függvény is lehet megoldása.

1.2. Kezdetiérték feladatok

A differenciálegyenletek megoldása során számos esetben kezdeti feltételeket is figyelembe kell vennünk. Például időtől függő jelenségek esetén figyelembe vesszük az kezdeti pillanatban ismert információt (kezdeti hőmérséklet stb.) Ilyen esetekben nem célunk az egyenletünk összes megoldását meghatározni.

Értelmezés.

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ egy összefüggő halmaz, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ egy adott folytonos függvény. Ekkor az

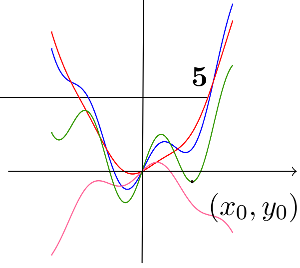
$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right) \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases} \qquad (\mathscr{P})$$

ahol $\left(y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}\right) \in \Omega$, feladatot **kezdetiérték feladat**nak vagy **Cauchy feladat**nak nevezzük.

A fenti értelmezés elsőrendű egyenletek esetén a következőt jelenti: adott az $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ összefüggő halmaz és az $f : \Omega \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Adott az $(x_0, y_0) \in \Omega$ pont és keressük azon függvényeket amelyek megoldják az

$$y' = f(x, y)$$

differenciálegyenletet és kielégitík az $y(x_0) = y_0$ feltételt (Másképp fogalmazva azon megoldásokat keressük, melyekre a megoldás görbe áthalad az (x_0, y_0) ponton, lásd az ábrát).



A kezdetiérték feladat geometriai jelentése.

1.2.1. Megjegyzés. *Itt természetesen meg kell határozni egy olyan $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ intervallumot, mely tartalmazza x_0-t és $y \in C^1(\mathcal{I})$ függvényt, melyre*

$$y'(x) = f(x, y(x)),\ \forall x \in \mathcal{I} \text{ és } y(x_0) = y_0.$$

1.3. Kitűzött feladatok

1. * Döntsük el az alábbi egyenletek lineárisak vagy sem?

   a) $(1-x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$;

   b) $\dfrac{d^2u}{dt^2} + \dfrac{du}{dt} + u = \cos(r+u)$;

   c) $(\sin\theta)y'' - (\cos\theta)y' = 2$;

   d) $x'' - \left(1 - \dfrac{x'^2}{3}\right)x' + x = 0.$

2. * Bizonyítsuk be, hogy az alábbi differenciálegyenleteknek a kijelölt függvény egy explicit megoldása:

   a) $2y' + y = 0;\quad y(x) = e^{-\frac{x}{2}}$

   b) $y' + 20y = 24;\quad y(x) = \dfrac{6}{5} - \dfrac{6}{5}e^{-20x}$

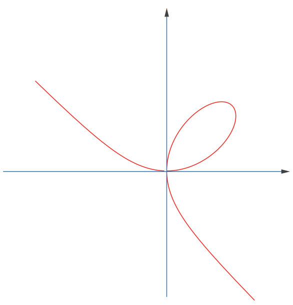
   c) $(y-x)y' = y - x + 8;\quad y(x) = x + 4\sqrt{x+2}$

   d) $2y' = y^3\cos x;\quad y = (1-\sin x)^{-\frac{1}{2}}$

   e) $\dfrac{dP}{dt} = P(1-P);\quad P = \dfrac{ce^t}{1+ce^t}$

   f) $y' + 2xy = 1;\quad y = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt + ce^{-x^2}$

   g) $x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = 12x^2;\ y(x) = c_1\dfrac{1}{x} + c_2x + c_3x\ln x + 4x^2$



Descartes-féle levél

3. ** Bizonyítsuk be, hogy a Descartes-féle levél, amelynek egyenlete $x^3 + y^3 - 3cxy = 0$ egy implicit megoldása az
$$y' = \frac{y(y^3 - 2x^3)}{x(2y^3 - x^3)}$$
differenciálegyenletnek.

4. ** Bizonyítsuk be, hogy ha y megoldása az
$$y'(x) = \frac{1}{x^2 + y^2(x)},\ x > 1,\ y(1) = 1$$
egyenletnek, akkor
$$\lim_{x\to\infty} y(x) \le 1 + \frac{\pi}{4}.$$

5. ** Mutassuk meg, hogy az $y'(x) = x^2 + y^2(x),\ y(0) = 0$ kezdetiérték-probléma megoldásának egyetlen infelxiós pontja van: az origó.

2 FEJEZET

Elsőrendű egyenletek

If you know the enemy and you know yourself you need not fear the results of a hundred battles.

(Sun Tzu)

2.1. Direkt integrálással megoldható egyenletek

A továbbiakban célunk, hogy adjunk, néhány egyszerűbb típusra megoldási módszert. Ennek megfelelően a legegyszerűbb differenciálegyenletek az

$$y' = f(x),\ x \in [a,b],\ -\infty \leq a < b <\leq \infty \tag{2.1.1}$$

alakú egyenletek, ahol f adott folytonos függvény. Ezen egyenleteket *direkt integrálható egyenlet*eknek nevezzük. A kérdést ebben az esetben, úgy is megfogalmazhatjuk, hogy melyik az az y függvény amelyet ha deriválunk, a deriválás eredménye az f függvény lesz.

Ekkor az (2.1.1) alapján világos, hogy

$$y(x) = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R},$$

ahol F a f függvény egy primitív függvénye.

Megoldott Feladat.

Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket:

1. $y'(x) = \sin(x)$;
2. $y'(x) = \ln x,\ x > 0$;
3. $y'(x) = \text{ctg}(x)$;
4. $y'(x) = x\sqrt{1+x^2}$.

Megoldás. Ezen feladatok megoldása nem jelent más mint kiszámítani a jobb oldalon levő függvények egy primitív függvényét.

1. Világos, hogy ki kell számítanunk $\int \sin(x)dx$ integrált. Tehát:

$$y(x) = \int \sin(x)dx = -\cos(x) + c.$$

2. Hasonlóan mint a fenti esetben:

$$y(x) = \int \ln x dx = \int 1 \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c.$$

Megjegyezendő, hogy itt felhasználtuk a parciális integrálás képletét:

$$\boxed{\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.} \tag{2.1.2}$$

3. Ebben az esetben

$$y(x) = \int \mathrm{ctg}(x)dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx = \int \frac{(\sin(x))'}{\sin(x)}dx = \ln|\sin(x)| + c.$$

Ennek a feladatnak a megoldása során felhasználtuk, hogy

$$\boxed{\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln|u(x)| + c.} \tag{2.1.3}$$

4. Világos, hogy

$$y(x) = \int x\sqrt{1+x^2}dx.$$

Ekkor, elvégezzük az

$$t = 1 + x^2,$$

változó cserét, ekkor

$$dt = 2xdx,$$

így visszahelyettesítve a fenti integrálba:

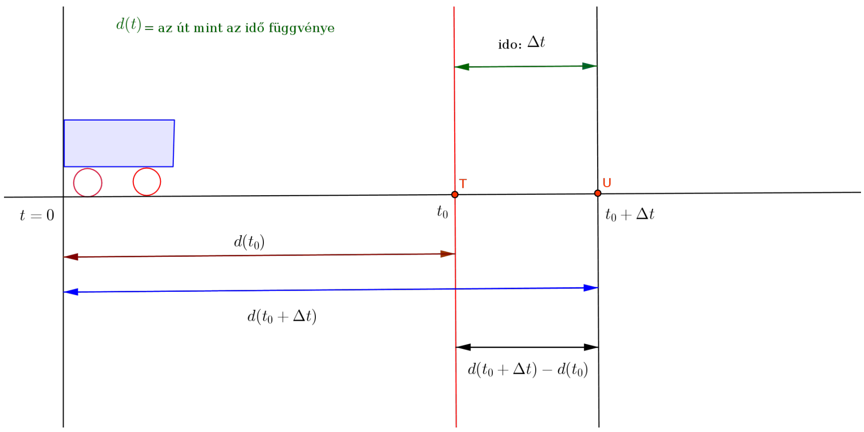
$$y(x) = \int x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c.$$

□

Tekintsük a következő fontos példást:

2.1.7. példa A megtett út időszerinti deriváltja

Egy autó folytonosan halad egy egyenesvonalú úton. A megtett útat az idő függvényében képzeljük el.



2.1. ábra. Sebesség mint az út időszerinti deriváltja

Feladatunk, hogy nyerjünk információt a t_0 idő pillanatban az autó sebességéről. Ha az utat úgy képzeljük el mint az idő függvénye, akkor a fenti ábráról is világosan látszik, hogy a T pontig az autó $d(t_0)$ távolságot tesz meg (a kiindulási ponttól). Mivel egyéb információval nem rendelkezünk csak azzal, hogy mekkora utat tesz meg egy adott ideig, ezért a stratégia amivel dolgozunk, hogy "kicsi" idő elteltével újra megmérjük a megtett út hosszát. Ez azt jelenti, hogy $d(t_0 + \Delta t)$ utat tettünk meg az U pontig (ahol Δt kicsi). Ekkor a TU szakaszon megtett út hossza

$$d(t_0 + \Delta t) - d(t_0),$$

míg az eltelt idő Δt, ezért a sebesség (átlag sebesség) a TU szakaszon a következő képlettel fejezhető ki:

$$v = \frac{d(t_0 + \Delta t) - d(t_0)}{\Delta t}.$$

Ez a szám akkor közelíti meg a legjobban a t_0 időpillanatban a pillanatnyi sebességet, ha a Δt nagyon kicsi (azaz $\Delta t \to 0$), ezért, felhasználva a deriválás értelmezését:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{d(t_0 + \Delta t) - d(t_0)}{\Delta t} = d'(t_0).$$

✓

Láthajuk, hogy a fenti példában, ha a sebességet megadjuk az idő függvényében és kiváncsiak vagyunk az megtett útra, akkor pontosan az (2.1.1) feladathoz jutottunk vissza.

2.2. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

A következő típusú differenciálegyenlet, amelyet tanulmányozni fogunk az a szétvászthatő változójú differenciálegyenletek, azaz a következő típusú differenciálegyenletek:

Értelmezés.

Azokat a differenciálegyenleteket amelyek

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \tag{2.2.1}$$

alakban írhatók fel, **szétválasztható** differenciálegyenletnek nevezzük, vagy **szétválasztható változójú** differenciálegyenletnek nevezzük.

Megoldási módszer. A továbbiakban vizsgáljuk, meg hogy tudunk-e egy általános módszert adni a szétválasztható változójú differenciálegyenletek megoldására. Tekintsük mégegyszer az eredeti egyenletet:

$$y' = g(x)h(y).$$

Ekkor osszuk el az egynlet mindkét oldalát $h(y)$-nal:

$$f(y)y'(x) = g(x),$$

alakot kapjuk, ahol $f(y)$ függvénnyel az $\frac{1}{h(y)}$ függvényt jelöltük. Ekkor ha integráljuk mindkét oldalt, akkor a következőt figyelhetjük meg:

$$\int f(y(x))y'(x)dx = \int g(x)dx.$$

Legyen ekkor $y(x) = t$, így $y'(x)dx = dt$, azaz

$$\int f(t)dt = \int g(x)dx.$$

Legyenek most F illetve G a f illetve a g primitív függvényei. Ekkor a következőt kapjuk:

$$F(t) = G(x) + c,$$

azaz figyelembe véve a $t = y(x)$ helyettesítést:

$$F(y(x)) = G(x) + c.$$

★

2.2.8. példa

Tekintsük a következő differenciálegyenleteket:

$$y'(x) = y^2(x)xe^{3x+4y} \text{ illetve } y'(x) = y + \ln(x),$$

akkor könnyen látható, hogy az első egyenlet szétválasztható differenciálegyenlet, míg a második egyenlet nem szétválasztható változójú differenciálegyenlet. Ugyanis

$$y'(x) = y^2(x)xe^{3x+4y} = \overset{g(x)}{\boxed{(xe^{3x})}} \cdot \overset{h(y)}{\boxed{(y^2e^{4y})}}$$

Míg a másik egyenlet esetén nem tudjuk felírni az $y + \ln(x)$ összeget olyan szorzat alakjában amelyben a tényezők x és y függvényei, azaz $g(x) \cdot h(y)$ alakban. ✓

A továbbiakban nézzünk néhány alkalmazást az eddig ismertetett egyenletekre:

2.2.1. Feladat. *Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket:*

1. $y'(x) = (1 + x)y$;

2. $\begin{cases} y'(x) = \frac{x}{y}, \\ y(4) = -3. \end{cases}$

3. $y'(x) = y^2 - 4$;

4. $\begin{cases} (e^{2y} - y)\cos xy'(x) = e^y \sin(2x), \\ y(0) = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} y'(x) = x\sqrt{y}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

6. $y'(x) = -\frac{x^4}{1-y(x)^2}$;

7. $y'(x) = 3x^2(1 + y(x)^2)$;

8. $y'(x) = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}, x \in [-2, \infty)$.

9. $\begin{cases} y'(x) = 2y^2x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} y'(x) = \sqrt{y}, \quad x \in [0, \infty) \\ y(0) = 0. \end{cases}$

A továbbiakban megmutatjuk néhány feladat megoldását.
Megoldás. Ezen feladatokat a fenti módszer segítségével fogjuk megoldani.
1. Világos, hogy az egyenlet a következő alakba írható:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 1 + x,$$

amelyet integrálással a következő alakra hozhatjuk:

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}dx = \int (1 + x)dx.$$

Felhasználva az (2.1.3) összefüggést:

$$\ln|y(x)| = x + \frac{x^2}{2} + c, \text{ így } y(x) = \pm ce^{x+\frac{x^2}{2}}.$$

2. Hasonlóan járva el, mint az előző feladat esetén:

$$y(x)y'(x) = x, \text{ azaz } \frac{y^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + c.$$

Ekkor felhasználva, hogy $y(4) = -3$,

$$\frac{9}{2} = \frac{16}{2} + c,$$

ekkor $c = -\frac{7}{2}$. Ekkor visszahelyettesítéssel

$$y(x) = \pm\sqrt{x^2 - 7}, x \geq 4.$$

3. Ebben az esetben is úgy járunk el mint az előzőekben:

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)-4} = 1,$$

azaz, alkalmazva az elemi törtekre való felbontást

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+2}\right) y'(x) = 1,$$

ekkor integrálva mindkét oldalt

$$\frac{1}{4}\ln|y-2| - \frac{1}{4}\ln|y+2| = x + c_1,$$

átrendezve a következő összefüggéshez jutunk:

$$\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = 4x + c_2,$$

ahol $c_2 = 4c_1$ jelölést vettük figyelembe. Az utolsó összefüggést tovább alakítva:

$$\frac{y-2}{y+2} = \pm e^{4x+c_2},$$

ekkor ismét bevezetve a $c = \pm e^{c_2}$ jelölést a következő megoldáshoz jutunk:

$$y(x) = 2\frac{1+ce^{4x}}{1-ce^{4x}}.$$

Megjegyezendő, hogy ebben az esetben elvesztettünk két darab megoldást. Ugyanis, ha az eredeti egyenletben szereplő jobb oldali kifejezést tényezők szorzatára írjuk fel, akkor

$$y'(x) = (y(x)-2)(y(x)+2),$$

azaz ha $y(x) = \pm 2$ állandó függvényeket tekintjük, akkor ezen függvények kielégítik az eredeti egyenletet.

$\square$

3 FEJEZET

Szétválasztható egyenletekre visszavezethető egyenletek

A továbbiakban egy olyan egyenlet típust szeretnénk bemutatni, amelyeket visszavezethetünk szétválasztható változójú differenciálegyenletekre.

Értelmezés.

Tekintsük a következő egyenletet:

$$y'(x) = f(ax + by(x) + c),$$

a, b, c valós számok, valamint f egy adott folytonos függvény.

Ebben az esetben, elvégezzük

$$u = ax + by(x) + c,$$

változócserét. Ebben az esetben, hogy $u'(x) = a + by'(x)$, azaz $y'(x) = \frac{u'(x)-a}{b}$, ekkor az egyenlet a következőképpen alakul

$$\frac{u'(x) - a}{b} = f(u), \text{ vagy } u'(x) = a + bf(u).$$

Észrevehető, hogy az utóbbi egyenlet már szétválasztható változójú egyenlet. Ekkor

$$u'(x) = a + bf(u),$$

egyenlet esetén

$$\frac{u'(x)}{a + bf(u)} = 1.$$

Tehát, ha $F(x)$ az $\frac{1}{a+bf(x)}$ függvény egy primitívje, akkor

$$F(u) = x + c.$$

3.1. Homogén egyenletek

Értelmezés.

Egy f függvényt homogénnek nevezzük, ha

$$f(tx, ty) = t^{\beta} f(x, y), \tag{3.1.1}$$

valamilyen β valós szám esetén. Egy

$$M(x, y) + N(x, y)y'(x) = 0,$$

differenciálegyenletet homogén differenciálegyenletnek nevezzük, ha M, N függvények homogén függvények (rendelkeznek (3.1.1) tulajdonsággal).

Megoldási módszer. Tekintsük a következő homogén differenciálegyenletet:

$$M(x,y) + N(x,y)y'(x) = 0.$$

Ekkor világos, hogy (3.1.1) alapján

$$M(x,y) = x^{\beta} M\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Azaz,

$$x^{\beta} M\left(1, \frac{y}{x}\right) + x^{\beta} N\left(1, \frac{y}{x}\right) y'(x) = 0.$$

Így

$$M\left(1, \frac{y}{x}\right) + N\left(1, \frac{y}{x}\right) y'(x) = 0,$$

ami átírható a következő egyenlet

$$y'(x) = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Ekkor legyen, $u = \frac{y}{x}$, azaz $y = u \cdot x$,

$$y' = u + xu',$$

tehát

$$u + xu' = g(u).$$

Észrevehető, hogy a fenti egyenlet egy szétválasztható változójú egyenlet:

$$\frac{u'}{g(u) - u} = \frac{1}{x},$$

ami integrálással megoldható.

□

3.1.1. Feladat. *Határozzuk meg azoknak a tükröknek az alakját amelyek azzal a tulajdonsággal rendelkeznek, hogy az O origóból induló fénysugrakat az Ox tengellyel párhuzamosan verik vissza.*

Megoldás. Tekintsük az alábbi ábrát. A keresett tükröt úgy keressük mint $x \mapsto y(x)$ függvény. A görbe egy adott $A(x, y(x))$ pontjába érintőt húzunk (kék egyenes). A fény visszaverődés és a párhuzamosság miatt világos, hogy

$$m(\widehat{BAO}) = m(\widehat{OBA}).$$

A fenti, összefüggés azt szolgáltatja számunkra, hogy az OAB_{Δ} háromszög egyenlőszárú, azaz

$$OA = OB.$$

A továbbiakban meghatározzuk a B pont koordinátáit. Világos, hogy a B pont mint geometriai objektum úgy jön létre mint két egyenes metszéspontja, pontosabban a görbéhez húzott érintő és az Ox tengely metszéspontja. Az érintő egyenletét úgy írjuk fel mint adott ponton átmenő adott iránytényezőjű egyenes egyenlete:

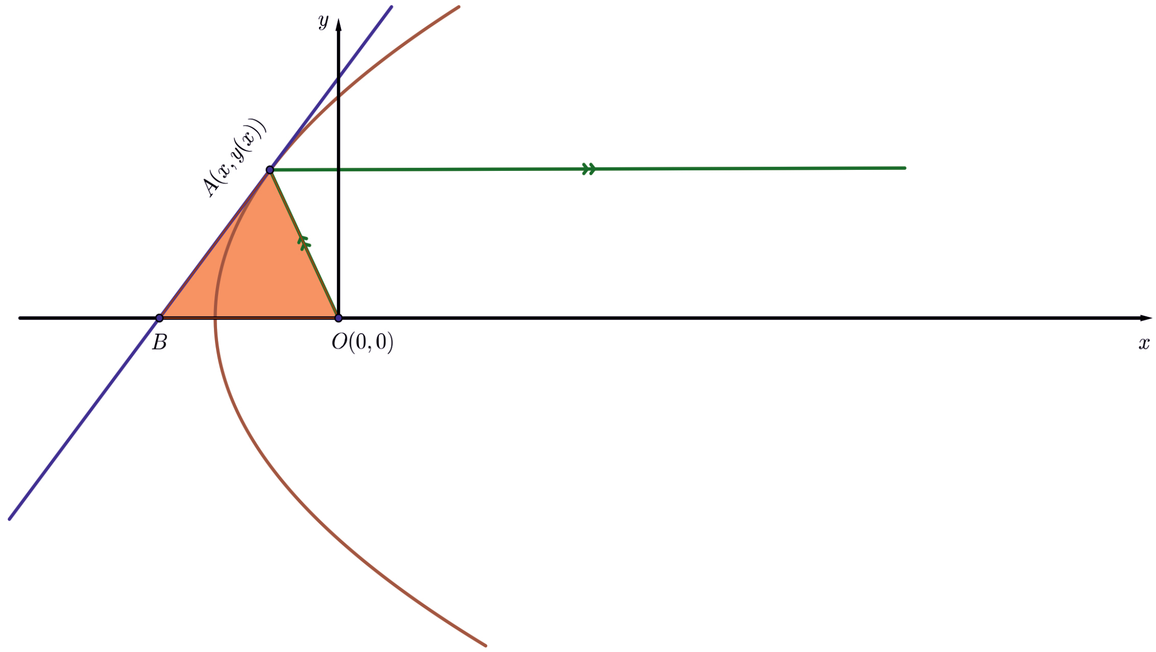
$$(Y - Y_0) = m(X - X_0), \tag{3.1.2}$$

ahol (X_0, Y_0) az adott pontot jelöli, míg m az iránytényezőt. Felhasználva a derivált mértani jelentését, a (3.1.2) összefüggés a következőképpen alakul:

$$\text{é} : Y - y(x) = y'(x)(X - x).$$

Ekkor, mivel $\{B\} = \text{é} \cap Ox$, a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{cases} Y - y(x) = y'(x)(X - x) \\ Y = 0 \end{cases}$$



Tehát

$$\begin{cases} x_B = x - \frac{y(x)}{y'(x)} \\ y_B = 0. \end{cases}$$

Felhasználva két pont távolságának képletét a következő egyenlethez jutunk:

$$OA = \sqrt{x^2 + y^2(x)} = \left| x - \frac{y(x)}{y'(x)} \right| = OB,$$

azaz, átrendezve

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x \mp \sqrt{x^2 + y^2(x)}}.$$

A $\mp$ előjelek közül egyet választva:

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x - \sqrt{x^2 + y^2(x)}} = \frac{\frac{y(x)}{x}}{1 - \sqrt{1 + \left(\frac{y(x)}{x}\right)^2}}.$$

Elvégezve az $\frac{y(x)}{x} = t$ változócserét, a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{t'(1 - \sqrt{1 + t^2})}{t\sqrt{1 + t^2}} = \frac{1}{x}, \text{ azaz } \int \frac{t'(1 - \sqrt{1 + t^2})}{t\sqrt{1 + t^2}} dx = \int \frac{1}{x} dx,$$

vagy

$$\int \frac{(1 - \sqrt{1 + t^2})}{t\sqrt{1 + t^2}} dt = \ln x + c, \text{ azaz } \int \frac{1}{t\sqrt{1 + t^2}} dt = \ln(t \cdot x) + c.$$

Tehát ki kell számítanunk az $\int \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} dt$ integrált.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{t\sqrt{1 + t^2}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u\sqrt{1 + u}} du \qquad (\text{vált. csere } t^2 = u) \\ &= \int \frac{1}{v^2 - 1} dv \qquad (\text{vált. csere } \sqrt{1 + u} = v) \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{v - 1}{v + 1}. \end{aligned}$$

Így

$$\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{1+t^2}+1}=\ln(tx)+c,$$

azaz kihozva a logaritmusból a - előjelt, valamint gyöktelenítve:

$$-\ln(1+\sqrt{1+t^2})=\ln(x)+c,$$

tehát

$$1+\sqrt{1+t^2}=\frac{c}{x},\ \text{vagy}\ t^2+1=\left(\frac{c}{x}-1\right)^2,$$

$$t^2=\frac{c^2}{x^2}-\frac{2c}{x},\ \text{azaz}\ y^2(x)=c^2-2cx.$$

□

3.2. Az $y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ alakú differenciálegyenletek

Tekintsük a következő differenciálegyenletet

$$y'=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2},$$

ahol $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$. Az egyenletet két esetben fogjuk megoldani:
I. eset Tegyük fel, hogy

$$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}.$$

Ekkor végezzük el a következő változócserét

$$\begin{cases} x=u+x_0 \\ y=v+y_0 \end{cases}$$

ahol az $x_0$és y_0 értékeket úgy válasszuk meg, hogy

$$\begin{cases} a_1x_0+b_1y_0+c_1=0 \\ a_2x_0+b_2y_0+c_2=0 \end{cases}.$$

Ekkor a transzformáció elvégzése után egyenletünk a következőképpen alakul:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{du}=v'(u)&=f\left(\frac{a_1(u+x_0)+b_1(v+y_0)+c_1}{a_2(u+x_0)+b_2(v+y_0)+c_2}\right)\\ &=f\left(\frac{a_1u+b_1v+\overbrace{\boxed{a_1x_0+b_1y_0+c_1}}^{0}}{a_2u+b_2v+\underbrace{\boxed{a_2x_0+b_2y_0+c_2}}_{0}}\right)\\ &=f\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right).\end{aligned}$$

Tehát

$$v'=f\left(\frac{a_1+b_1\boxed{\frac{v}{u}}}{a_2+b_2\boxed{\frac{v}{u}}}\right),$$

ami egy Euler értelemben homogén egyenlet (lásd előző előadás) .
II. eset Tegyük fel, hogy

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{1}{\alpha}.$$

Ekkor az egyenletünk a következőképpen alakul

$$y' = \frac{\boxed{a_1x + b_1y} + c_1}{\alpha\left(\boxed{a_1x + b_1y}\right) + c_2},$$

tehát jelöljük $t = a_1x + b_1y$, tehát

$$t' = a_1 + b_1y',$$

azaz

$$y' = \frac{t' - a_1}{b_1},$$

ekkor

$$\boxed{\frac{t' - a_1}{b_1} = \frac{t + c_1}{\alpha t + c_2}.}$$

A fenti egyenlet már egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet.

4 FEJEZET

Elsőrendű lineáris egyenletek

4.1. Bevezetés

A következő részben az ún. elsőrendű lineáris egyenletekkel fogunk foglalkozni.

Értelmezés.

Azokat az elsőrendű egyenleteket, amelyek a következőképpen vannak megadva

$$a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x) \tag{4.1.1}$$

első rendű lineáris egyenletnek nevezzük az y változóban. (Az együttható függvények adott függvények). Amennyiben a $g(x) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy az egyenlet **homogén**, különben **inhomogén** egyenletnek nevezzük.

Láthatjuk, hogy az ilyen típusú egyenletek egy újabb kaput nyitnak meg számunkra az differenciál egyenletek tanulmányozásának elméletében. Tekintsük, az eredeti egyenletet:

$$\boxed{a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x),}$$

ekkor az egyenlet mindkét oldalát végigosztva $a_1(x)$-el, akkor a következő egyenlethez jutunk:

$$y'(x) + \overset{P(x)}{\overset{\downarrow}{\boxed{\frac{a_0(x)}{a_1(x)}}}}\, y(x) = \overset{f(x)}{\overset{\downarrow}{\boxed{\frac{g(x)}{a_1(x)}}}} \tag{4.1.2}$$

Jelöljük $\mathscr{L}y$-al a fenti egyenlet baloldalát, azaz

$$\mathscr{L}y = y' + P(x)y.$$

Látható, hogy $\mathscr{L}$ egy lineáris operátor a $C^1(I)$ térből $C(I)$-be, mert

$$\mathscr{L}(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1\mathscr{L}(y_1) + c_2\mathscr{L}(y_2),$$

minden $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ esetén, és $y_1, y_2 \in C^1(I)$ esetén.

4.2. Megoldási módszer: konstans variálásának módszere

A fenti egyenlethez rendelet homogén egyenlet a következő, $\mathscr{L}y = 0$, azaz

$$y'(x) + P(x)y(x) = 0. \tag{4.2.1}$$

1. Lépés Először is vegyük észre, hogy az (4.1.2) egyenlethez rendelt, homogén egyenlet egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet, azaz y_h meghatározása az eddig ismertett módszerrel könnyen meghatározható. Legyen $\Lambda(x)$ a $P(x)$ függvény egy primitív függvénye, ekkor

$$y_h(x) = c \cdot \overset{y_1(x)}{\overset{\downarrow}{\boxed{e^{-\Lambda(x)}}}}.$$

2. Lépés Az (4.1.2) megoldását az ún. **konstans variálásának módszerével** fogjuk megoldani. Az alapötlet az, hogy keressük az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását a következő alakban:

$$y_p(x) = u(x) \cdot y_1(x).$$

Ekkor

$$y_p'(x) \overset{\text{szorzat deriváltja}}{=} u'(x)y_1(x) + u(x)y_1'(x),$$

azaz

$$u'(x)y_1(x) + u(x)y_1'(x) + P(x)u(x)y_1(x) = f(x),$$

átrendezve az egyenletet a következőt tudjuk megfigyelni:

$$u(x) \cdot \overset{0}{\boxed{(y_1'(x) + P(x)y_1(x))}} + u'(x)y_1(x) = f(x).$$

Tehát

$$u'(x)y_1(x) = f(x),$$

azaz

$$u(x) = e^{-\Lambda(x)} \cdot \int f(x)e^{\Lambda(x)}dx.$$

Tehát a végső megoldás:

$$y(x) = \underbrace{\boxed{ce^{-\Lambda(x)}}}_{y_h} + \underbrace{\boxed{e^{-\Lambda(x)} \cdot \int f(x)e^{\Lambda(x)}dx}}_{y_p}.$$

✓

Tehát felmerülhet a következő kérdés: A fenti módszerrel meghatároztuk az egyenletünk összes megoldását? Kérdésünkre a választ a következő tétel adja meg:

Tétel.

A (4.1.2) megoldásahalmaza

$$S = S_h + y_p,$$

vagyis a

$$ce^{-\Lambda(x)} + e^{-\Lambda(x)} \cdot \int f(x)e^{\Lambda(x)}dx, \qquad c \in \mathbb{R}$$

függvények összesége, amikor c leírja az $\mathbb{R}$-t.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy minden $y = cy_h + y_p$ megoldása az $\mathscr{L}y = f$ egyenletnek, mert

$$\mathscr{L}(cy_1 + y_p) = c\mathscr{L}y_1 + \mathscr{L}y_p = f.$$

Fordítva, ha $u \in C^1(I)$ egy tetszőleges függvény amely megoldása $\mathscr{L}y = f$-nek, akkor a $v = u - y_p$ megoldása a homogén egyenletnek, mert

$$\mathscr{L}v = \mathscr{L}(u - y_p) = \mathscr{L}u - \mathscr{L}y_p = f - f = 0.$$

Így $v \in S_h$ és

$$u = v + y_p \in S = S_h + y_p.$$

□

4.3. Bernoulli és Riccati differenciálegyenletek

Értelmezés.

Tekintsük az a, b adott folytonos függvényeket. Ekkor az

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)y^{\alpha}(x), \text{ ahol } \alpha \neq 0, 1, \tag{4.3.1}$$

differenciálegyenletet *Bernoulli* féle differenciálegyenletnek nevezzük.

Megoldási módszer. A továbbiakban egy megoldási módszert adunk az (4.3.1) differenciálegyenletnek. Az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk $y^{\alpha}(x)$, ekkor a következő egyenlethez jutunk:

$$\frac{y'(x)}{y^{\alpha}(x)} + a(x)\frac{y(x)}{y^{\alpha}(x)} = b(x),$$

azaz

$$y'(x)y^{-\alpha}(x) + a(x)y^{1-\alpha}(x) = b(x).$$

Ekkor vezessük be, az $u(x) = y^{1-\alpha}(x)$ jelölést. Az egyenletet átírjuk a u függvényre. Ennek érdekében ki kell számítanunk az $u'(x)$-t:

$$u'(x) = (1-\alpha)y^{1-\alpha-1}y'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'(x).$$

A fenti azonosságból $\frac{u'(x)}{1-\alpha} = y^{-\alpha}(x) \cdot y'(x)$. Visszahelyettesítve

$$\frac{u'(x)}{1-\alpha} + a(x)u(x) = b(x),$$

vagy

$$u'(x) + \underbrace{\boxed{(1-\alpha)a(x)}}_{P(x)}u(x) = \underbrace{\boxed{(1-\alpha)b(x)}}_{f(x)}.$$

A fenti egyenlet egy elsőrendű lineáris egyenlet, azaz alapkja pontosan elsőrendű lineáris egyenletehez hasonlítható, tehát a további megoldás is annak az egyenletnek a megoldásával folytatható. ★

4.3.9. példa

Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$y' - \frac{2y}{x} = -x^2y^2.$$

A fenti módszernek megfelelően osszuk el mindkét oldalt y^2-tel ekkor:

$$y'y^{-2} - \frac{2}{x}y^{-1} = -x^2$$

Ekkor legyen $u = \frac{1}{y}$ változócsere. Ekkor $u' = \frac{-y'}{y^2}$. Visszahelyettesítve az egyenletbe a következő egyenlethez jutunk:

$$u' + \frac{2}{x}u = x^2,$$

ami egy elsőrendű lineáris differenciálegyenlet. A megoldási módszernek megfelelően, hozzárendeljük a homogén egyenletet:

$$u' + \frac{2}{x}u = 0, \ u' = -\frac{2}{x}u.$$

Ekkor szétválasztva a változókat és integrálva:

$$\ln u = -2\ln x + c,$$

azaz $u_h = \frac{c}{x^2}$. Ekkor a sajátos megoldás $u_p = \frac{c(x)}{x}$,

$$u_p' = \frac{c'(x)x^2 - 2xc(x)}{x^2}.$$

Ekkor visszahelyettesítve u_p függvényt az eredeti egyenletbe, azaz

$$u_p' + \frac{2}{x}u_p = x^2,$$

$$\frac{c'(x)x^2 - 2xc(x)}{x^4} + \frac{2}{x}\frac{c(x)}{x^2} = x^2,$$

tehát

$$\frac{c'(x)}{x^2} = x^2, \text{ vagy } c(x) = \frac{x^5}{5}.$$

Ekkor a 4.2 Tétel alapján

$$u(x) = u_p(x) + u_h(x) = \frac{c}{x^2} + \frac{1}{5}x^3.$$

Tehát figyelembe véve, hogy $u = \frac{1}{y}$, kapjuk, hogy

$$y(x) = \frac{1}{\frac{c}{x^2} + \frac{1}{5}x^3}$$

✓

Értelmezés.

Legyenek a, b, c adott folytonos függvények. Ekkor az

$$y'(x) = c(x) + b(x)y(x) + a(x)y^2(x), \tag{4.3.2}$$

differenciálegyenletet Riccati féle differenciálegyeneltnek nevezzük.

Megoldási módszer. Általában a Riccati differenciálegyenletre nincs megoldási módszerünk, azonban ha ismerünk egy $y_1(x)$ megoldását az (4.3.2) egyenletnek, akkor abból előállóthatjuk az összes többi megoldást. Valóban, ebben az esetben legyen u függvény úgy, hogy

$$y(x) = u(x) + y_1(x).$$

Ekkor y-t visszahelyettesítve (4.3.2) egyenletbe a következőt kapjuk:

$$u'(x) + y_1'(x) = c(x) + b(x)y_1(x) + b(x)u(x) + a(x)y_1^2(x) + a(x)2y_1(x)u(x) + a(x)u^2(x).$$

Mivel y_1 megoldása az egyenletnek, azaz

$$y_1'(x) = c(x) + b(x)y_1(x) + a(x)y_1^2(x),$$

ezért

$$u'(x) + \boxed{y_1'(x)} = \boxed{c(x) + b(x)y_1(x) + a(x)y_1^2(x)} + b(x)u(x) + a(x)2y_1(x)u(x) + a(x)u^2(x),$$

így

$$u'(x) = (b(x) + a(x)2y_1(x))\,u(x) + a(x)u^2(x),$$

vagy

$$u'(x) - \underbrace{\boxed{(b(x) + a(x)2y_1(x))}}_{B(x)} u(x) = \underbrace{\boxed{a(x)}}_{a(x)} u^2(x).$$

Látható, hogy a fenti egyenlet egy Bernoulli féle differenciálegyenlet. Tehát a Riccati féle differenciálegyenletet visszavezettük egy Bernoulli féle differenciálegyenletre ismerve az eredeti egyenletnek egy megoldását. A fenti egyenlet megoldásait ugyanúgy állítjuk elő mint az (4.3.1) egyenletnek. ★

4.3.1. Megjegyzés. *Amennyiben* (4.3.2) *egyenletben az* $y(x) = \frac{1}{u(x)} + y_1(x)$ *helyettesítést végezzük akkor nem Bernoulli egyenlethez jutunk, hanem egy elsőrendű lineáris egyenlethez. Valóban, visszahelyettesítve az* $y(x) = \frac{1}{u(x)} + y_1(x)$ *függvényt az* (4.3.2) *egyenletben:*

$$-\frac{1}{u^2(x)}u'(x)+y_1'(x) = c(x)+b(x)\frac{1}{u(x)}+b(x)y_1(x)+c(x)\frac{1}{u^2(x)}+2c(x)y_1(x)\frac{1}{u(x)}+c(x)y_1^2(x).$$

Ekkor

$$-\frac{u'(x)}{u^2(x)} + \boxed{y_1'(x)} = \boxed{c(x) + b(x)y_1(x) + a(x)y_1^2(x)} + b(x)\frac{1}{u(x)} + c(x)\frac{1}{u^2(x)} + 2c(x)y_1(x)\frac{1}{u(x)},$$

$$-\frac{u'(x)}{u^2(x)} = b(x)\frac{1}{u(x)} + c(x)\frac{1}{u^2(x)} + 2c(x)y_1(x)\frac{1}{u(x)},$$

$$-u'(x) = b(x)u(x) + c(x) + 2c(x)y_1(x)u(x),$$

$$-u'(x) = \underbrace{\boxed{(b(x) + 2c(x)y_1(x))}}_{f(x)} \cdot u(x) + c(x).$$

Világos, hogy az előbbi egyenlet már egy elsőrendű lineáris egyenlet. ★

4.3.10. példa

Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$y'(x) = y^2(x) - \frac{y(x)}{x} - \frac{1}{x^2}, \quad x > 0.$$

Megoldás. Észrevehető, hogy $y_1(x) = \frac{1}{x}$ megoldása az egyenletnek. Valóban, mivel $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$,

$$-\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}.$$

Ekkor alkalmazva a fenti megjegyzést, elvégezzük az $y(x) = \frac{1}{u(x)} + y_1(x)$ változó cserét.

$$-\frac{1}{u^2(x)}u'(x) - \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{u(x)} + \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{u(x)} + \frac{1}{x}\right)^2.$$

Elvégezve a számításokat:

$$-\frac{1}{u^2(x)}u'(x) = -\frac{1}{x}\frac{1}{u(x)} + \frac{1}{u^2(x)} + 2\frac{1}{xu(x)},$$

$$-\frac{1}{u^2(x)}u'(x) = \frac{1}{u^2(x)} + \frac{1}{xu(x)}, \quad \text{azaz} \quad -u'(x) = 1 + \frac{1}{x}u(x).$$

Hozzárendelve a homogén egyenletet: $u'(x) = -\frac{1}{x}u(x)$, azaz $\frac{u'(x)}{u(x)} = -\frac{1}{x}$. Ekkor integrálva mindkét oldalt, akkor a homogén egyenlet megoldása $u_h(x) = \frac{c}{x}$. Ekkor a sajátos megoldás $u_p(x) = \frac{c(x)}{x}$, amit visszahelyettesítve

$$-\frac{xc'(x) - c(x)}{x^2} = 1 + \frac{c(x)}{x^2},$$

$$\frac{c'(x)}{x} = -1, \text{ azaz } c(x) = -\frac{x^2}{2}.$$

Ekkor felírva a megoldást

$$u(x) = \frac{c}{x} - \frac{1}{2}x.$$

Így $y(x) = \frac{1}{\frac{c}{x} - \frac{1}{2}} - \frac{1}{x}$. ✓

4.3.1. Feladat. *Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket:*

1. $y' - y + y^2 = e^x$;
2. $(1-x)y' - xy = xy^2$;
3. $y' = \frac{(1+y)^2}{x(1+y) - x^2}$;

Képletek első rész

Deriválhatóság

Értelmezés.

Legyen $f : A \to \mathbb{R}$ függvény. Ekkor az f függvény deriválhatónak (differenciálhatónak) nevezzük, ha létezik és véges a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0, x_0 + h \in A} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < \infty$$

határérték. Ekkor az f függvény deriváltját $f'(x_0)$-val jelöljük, melynek értéke:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Hasonlóan értelmezhető a jobb és baloldali derivált fogalma is:

$$f'_l(x_0) = \lim_{x \to x_0, x < x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

és

$$f'_r(x_0) = \lim_{x \to x_0, x > x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

. Ekkor világos, hogy $f'(x_0)$ létezik ha $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$, és $f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$.

Továbbiakban néhány középiskolai tanulmányokból ismert képletet szeretnénk feleleveníteni.

Tétel (Deriválási szabályok)**.**

Legyenek $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválható függvények az $x \in A$ pontban. Ekkor érvényesek az alábbi derviálási szabályok:

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ (összeg deriváltja);
- $(cf)'(x) = cf'(x)$, minden $c \in \mathbb{R}$ esetén;
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$ (szorzat deriváltja);
- ha $g(x) \neq 0$, $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$ (hányados deriváltja);
- ha $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$, f deriválható az $x_0 \in I$-ben és g deriválható $y_0 = f(x_0)$, akkor $(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$;
- ha $f : I \to J$ folytonos, bijektív, deriválható x_0, úgy, hogy $f'(x_0) \neq 0$, akkor

  $$f^{-1} : J \to I$$

  deriválható az y_0 pontban, $y_0 = f(x_0)$ és

  $$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

A továbbiakban vizsgáljuk meg az alapfüggvényeink deriváltjait.

Elemi függvények deriváltjai

1. $f(x) = c$ akkor $f'(x) = 0$;
2. $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ akkor $f'(x) = nx^{n-1}$;
3. $f(x) = x^r, r \in \mathbb{R}, x > 0$ akkor $f'(x) = rx^{r-1}$;
4. $f(x) = \sqrt{x}, x > 0$ akkor $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
5. $f(x) = \ln(x), x > 0$ akkor $f'(x) = \frac{1}{x}$;
6. $f(x) = a^x, a \neq 1, a > 0, x > 0$ akkor $f'(x) = a^x \ln(a)$;
7. $f(x) = e^x$ akkor $f'(x) = e^x$;
8. $f(x) = \sin(x)$ akkor $f'(x) = \cos(x)$;
9. $f(x) = \cos(x)$ akkor $f'(x) = -\sin(x)$;
10. $f(x) = \tan(x), x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \ \in \mathbb{Z}$ akkor $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$;
11. $f(x) = \cot(x), x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ akkor $f'(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}$;
12. $f(x) = \arcsin(x), x \in [0, 1]$ akkor $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13. $f(x) = \arccos(x), x \in [0, 1]$ akkor $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$;
14. $f(x) = \arctan(x)$ akkor $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Összetett függvény deriváltja

Ebben a részben, olyan összetett függvények deriváltjait soroljuk fel, amelyeket nagy hasznossággal tudjuk felhasználni a differenciálegyenletek tanulmányozása során. Legyen u egy függvény. Ekkor érvényesek:

1. $f(u) = c$ esetén $f'(u) = 0$;
2. $f(u) = u^n, n \in \mathbb{N}$ esetén $f'(u) = nu^{n-1} \cdot u'$;
3. $f(u) = u^r, r \in \mathbb{R}, u > 0$ esetén $f'(u) = ru^{r-1} \cdot u'$;
4. $f(u) = \sqrt{u}, u > 0$ akkor $f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;
5. $f(u) = \ln(u), u > 0$ akkor $f'(u) = \frac{1}{u} \cdot u'$;
6. $f(u) = a^u, a \neq 1, a > 0, u > 0$ akkor $f'(u) = a^u \ln(a) \cdot u'$;
7. $f(u) = e^u$ esetén $f'(u) = e^u \cdot u'$;
8. $f(u) = \sin(u)$ akkor $f'(u) = \cos(u) \cdot u'$;
9. $f(u) = \cos(u)$ esetén $f'(u) = -\sin(u) \cdot u'$;
10. $f(u) = \tan(u), \cos(u) \neq 0$, akkor $f'(u) = \frac{1}{\cos^2(u)} \cdot u'$;
11. $f(u) = \cot(u), \sin(u) \neq 0$ akkor $f'(u) = \frac{-1}{\sin^2(u)} \cdot u'$;
12. $f(u) = \arcsin(u), u \in [0, 1]$ akkor $f'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
13. $f(u) = \arccos(u), u \in [0, 1]$ akkor $f'(u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
14. $f(u) = \arctan(u)$ akkor $f'(u) = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.