$$\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ így } \lambda_1 \text{ és } \lambda_2 \text{ valós, negatív gyökök.}$$

Ebben az esetben, az áramkörben folyó áram két exponenciális függvény összegeként állítható elő.

$$i(t) = A \cdot e^{-\lambda_1 t} + B \cdot e^{-\lambda_2 t} \tag{6.25}$$

d) A gyengén- és az erősen csillapított rezgés közötti átmenetet aperiodikus határesetnek nevezzük. Ebben az esetben:

$$\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \quad R_h = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

ahol, R_h a határellenállás.

6.2. A Laplace-transzformáció módszere

6.2.1. A Laplace-transzformáció

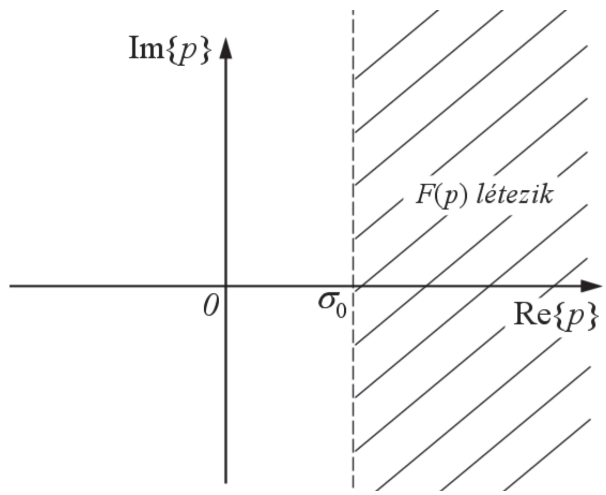
Legyen adott egy valós változó, melyet jelöljünk t-vel és egy $f(t)$ tetszésszerinti függvény. Matematikai szempontból t tulajdonképpen bármilyen változó lehet, esetünkben viszont már a jelölés is sugallja, hogy tranziens jelenségek leírásánál ez a változó az idő. Az $f(t)$ függvény lehet valós, de komplex is, általában értéke a $t < 0$ időpillanatban nulla (de nem feltétlenül). Ez például elektrotechnikai alkalmazásoknál megfelelhet annak az esetnek amikor az $f(t)$ függvénnyel leírt feszültséget $t = 0$ pillanatban bekapcsolunk be egy áramkörbe. Az így definiált függvény Laplace-transzformáltján a következő integrált értjük:

$$\mathcal{L}(f(t) \equiv F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt \tag{6.26}$$

ahol, p egy komplex szám, az integrálást t szerint végezzük, így az eredmény csak ennek a komplex változónak a függvénye. A komplex számok definíciója szerint $p = \sigma + j\omega$ alakban írható fel, ahol σ a komplex szám valós ω pedig az imaginárius része.

Az $F(p)$ függvény létezési feltételeinek általános tárgyalása túlmutat ennek a könyvnek a keretein, ezért itt csak néhány fontosabb követelményt, tulajdonságot mutatunk be. Ha a p komplex szám valós része pozitív, belátható, hogy e^{-pt} a végtelenben exponenciálisan tűnik el. Az állítás csak pozitív valós részre igaz. Növekvő exponenciálissal az integrál divergens! Az e^{-pt} függvény csökkenése gyorsabb, mint bármilyen *n*-ed fokú polinom növekedése, vagy amikor az $f(t)$ függvény exponenciális, $e^{\alpha t}$ alakú, ahol $\alpha < \sigma$.

Az eddigiek szerint állíthatjuk, hogy ha a (6.26) integrál abszolút integrálható egy p_0 érték mellett, akkor a komplex síkon a $\sigma = \sigma_0$ egyenlettel meghatározott egyenestől jobbra abszolút integrálható, így az $F(p)$ függvény létezik.



6.10 ábra

Ez azt jelenti, hogy az $F(p)$ függvény értelmezési tartománya egy a képzetes tengellyel párhuzamos egyenestől jobbra eső végtelen félsík (6.10 ábra).

6.2.2. A Laplace-transzformáció elemi tulajdonságai

A Laplace-transzformáció elemi tulajdonságait a 7. Függelékben részletesen tárgyaljuk.

6.2.3. A Laplace-transzformáció alkalmazása egyszerű áramkörök esetében. Operátoros impedanciák

A tranziens folyamatok leírásánál a feladat fizikai természetű részének megoldása után komoly gondot okozhat a kapott differenciálegyenlet, vagy differenciál-egyenletrendszer megoldása. Ennek a matematikai problémának a megoldásánál nyújt komoly segítséget a Laplace-transzformáció alkalmazása.

A valós áramkörökben a tekercsek és kondenzátorok jelenléte okozza a tranziens jelenségek létrejöttét, így ezek viselkedését kell megvizsgálnunk olyan esetekben amikor az áramköröket ki/be- kapcsoljuk, illetve megváltoztatunk valamilyen áramköri paramétert.

Tekintsünk egy ideális, L induktivitású tekercset és feltételezzük, hogy i pillanatnyi erősségű áram folyik át rajta. Ebben az esetben u_L feszültséget mérhetünk a tekercs sarkain, melyet a (6.27) képlettel adhatunk meg

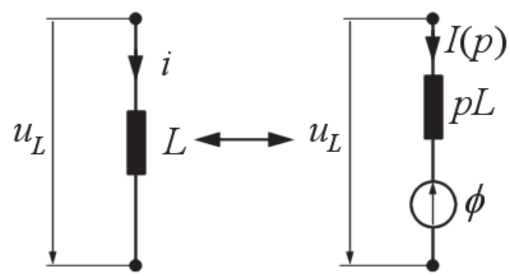
$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}. \tag{6.27}$$

Alkalmazzuk a (6.1) összefüggésre a Laplace-transzformációt (7. Függeklék (3)):

$$U_L(p) = L\left[pI(p) - i(0-)\right] = pLI(p) - Li(0-) \tag{6.28}$$

ahol, a $i(0-)$ nem más, mint az áram, amely a kezdeti permanens állapotban folyik át a tekercsen. Mértékegységét tekintve az $Li(0-)$ nem más, mint mágneses fluxus, amit *Weber*-ben mérünk (*Wb*), így a (6.28) összefüggés jobboldalának második tagja a tekercs mágneses fluxusa a kapcsolás (paraméterváltoztatás) pillanata előtt. Amennyiben a kapcsolás pillanata előtt nem folyik áram a tekercsen keresztül $Li(0-) = 0$, vagyis a tekercs nem raktároz energiát a mágneses tér formájában ekkor:

$$U_L(p) = pLI(p) \tag{6.29}$$



6.11 ábra

A $\phi = Li(0-)$ fluxus, a (6.28) összefüggés szerit, feszültségforrásként viselkedik.

Fontos: a feszültségforrás elektromotoros feszültségének irányítása lehet az 6.11 ábrának megfelelő, de fordított is, amennyiben $\phi = -Li(0-)$ jelölést használunk.

Tekintsünk a továbbiakban egy ideális, C kapacitású kondenzátort és feltételezzük, hogy a kondenzátor körében i pillanatnyi erősségű áram folyik és a kondenzátoron a kapcsolás pillanatában $U_C(0-)$ a feszültség. Ebben az esetben a kondenzátor fegyverzetein megjelenő feszültség pillanatnyi értékét megadhatjuk, mint

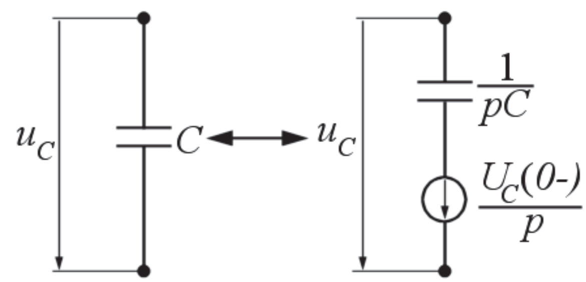
$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t idt + U_C(0-). \tag{6.30}$$

Alkalmazzuk a (6.30) összefüggésre a Laplace-transzformációt:

$$U_C(p) = \frac{1}{pC} I(p) + \frac{U_C(0-)}{p} \tag{6.31}$$

Amennyiben a kondenzátor töltetlen a kapcsolás pillanatában ($U_C(0-) = 0$), a kondenzátor nem raktároz energiát elektromos tér formájában, a pillanatnyi feszültséget és a transzformált feszültséget pedig a következőképpen adhatjuk meg:

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t idt \text{ , illetve } U_C(p) = \frac{1}{pC} I(p) \tag{6.32}$$



6.12 ábra

Az $U_C(0-)/p$ mennyiség, a (6.31) összefüggés szerit, feszültségforrásként viselkedik.

Fontos: a feszültségforrás elektromotoros feszültségének irányítása lehet a 6.12 ábrának megfelelő, de fordított is, amennyiben $-U_C(0-)/p$ jelölést használunk.

Megjegyzés: általában a tranziens folyamatok tárgyalásánál a $(0-)$ jelölés a kapcsolások, vagy paraméterváltoztatások pillanatát megelőző permanens állapotban lévő paramétereket jelölik.

A (6.29) és (6.32) összefüggéseket megfigyelve észrevehetjük, hogy hasonlóságot mutatnak az egyenáramú áramköröknél megismert Ohm-törvénnyel ($U = RI$).

- operátoros Ohm-törvények	$U_L(p) = pLI(p)$	$U_C(p) = \frac{1}{pC} I(p)$
	$U_L(p) = Z_L(p)I(p)$	$U_L(p) = Z_C(p)I(p)$
-operátoros impedanciák	$Z_L(p) = pL$	$Z_C(p) = \frac{1}{pC}$

(6.33)

Az operátoros impedanciák ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkeznek, és ugyanolyan szabályok érvényesek rájuk, mint az ohmos ellenállásokra (vagy akár a komplex impedanciákra), vagyis ugyanúgy számolhatunk eredő operátoros impedanciát soros, párhuzamos illetve vegyes kapcsolások esetén.

Tisztán operátoros impedanciákkal csak abban az esetben dolgozhatunk, ha a tekercseknek nincs mágneses tere, illetve a kondenzátoroknak nincs elektromos tere a kapcsolások pillanatában (nincsenek jelen mezőenergiák). Abban az esetben ha vannak, a (6.29) illetve (6.32) összefüggések szerint kell őket figyelembe vegyük, vagy felírjuk a megfelelő differenciálegyenletet (differenciál-egyenletrendszert) majd transzformáljuk.

6.2.4. A Feladatmegoldások menete

Foglaljuk össze a feladatmegoldással kapcsolatos eddigi információkat. Mivel minden esetben a tranziens folyamat úgy játszódik le, hogy az áramkör egy permanens állapotból (kezdeti) egy másik (végső) permanens állapotba jut, fontos az, hogy megfelelően azonosítsuk ezeket az állapotokat, állapítsuk meg az áramköri elemek szerepét, illetve azonosítsuk, hogy hol és milyen típusú mezőenergiák vannak jelen.

Függetlenül attól, hogy mezőenergiák jelen vannak vagy sem, tulajdonképpen két úton járhatunk.

1. Felírjuk a hurok- és csomóponttörvényeket differenciális alakban, majd transzformáljuk azokat.

2. Átrajzoljuk az áramkört operátoros impedanciák és operátoros feszültségforrások bevezetésével és felírjuk a hurok- és csomóponttörvényeket operátoros formában.

Mindkét módszerrel ugyanazt az operátoros egyenletrendszert kapjuk, melyet, mint algebrai egyenletrendszert oldunk meg. Ennek eredményeként megkapjuk a keresett mennyiségek operátoros alakjait, melyeket vissza kell transzformálnunk, hogy megkaphassuk a keresett időfüggvényeket. Tulajdonképpen ez a lépés a legnehezebb. Ennek a problémának a megoldására is két út létezik. Az egyik a következő pontban általunk is tárgyalt elemi út, amely sok időfüggvény Laplace-transzformáltjának ismeretét feltételezi és racionális törtfüggvények törzstényezőre bontásának módszerével határozza meg a keresett időfüggvényeket. Ez a módszer azonban nem vezet eredményre minden esetben. A másik módszer teljesen általános, a komplex függvénytanra alapuló módszer, mely a Fourier-transzformáció és a reziduum-tétel ismeretét tételezi fel. Ezt a módszert ebben a jegyzetben nem tárgyaljuk.

6.2.5. A Laplace-transzformáció megfordítása elemi úton. Heaviside-képletek

A Heaviside-képletek segítségével racionális törtfüggvényeknek az idő térbe való visszatranszformálására van lehetőség. Attól függően, hogy a racionális tört nevezőjének milyen típusú gyökei vannak, három Heaviside-képletet különböztetünk meg, melyeket részletesen az alábbiakban tárgyalunk.

1. Heaviside-képlet

Legyen a p térben a racionális törtfüggvény a (6.34) összefüggés által adott:

$$F(p)=\frac{G(p)}{H(p)} \tag{6.34}$$

ahol, a $G(p)$ polinom fokszáma kisebb, vagy legfeljebb egyenlő a $H(p)$ polinom fokszámával és a $H(p)$ polinomnak n darab egyszeres gyöke van, tehát $H^{'}(p)\neq 0$, de $p=0$ nem gyöke.

Ahhoz, hogy visszatranszformáljunk az idő térbe, az $F(p)$ polinomot törzstényezőkre kell bontsuk a következőképpen:

$$F(p)=\frac{G(p)}{H(p)}=\frac{C_1}{p-p_1}+\frac{C_2}{p-p_2}+...+\frac{C_i}{p-p_i}+...+\frac{C_n}{p-p_n} \tag{6.35}$$

ahol az $1/p-p_i$ törteknek megfelelő időfüggvényeket már ismerjük, így a C_i állandók meghatározása a feladatunk. Megszorozzuk a (6.35) összefüggést $p-p_i$-vel:

$$(p-p_i)\cdot\frac{G(p)}{H(p)}=A\cdot(p-p_i)+C_i\,\frac{p-p_i}{p-p_i} \tag{6.36}$$

A (6.36) összefüggésből meghatározhatjuk C_i-t, ha az összefüggésbe p_i-t helyettesítünk, azonban ebben az esetben a bal oldalon "$0/0$" határozatlansági eset van, a jobb oldal első tagja nulla lesz (az A állandó tartalmaz minden olyan tagot a (6.35) összefüggésből, amelynek nevezőjében nem található meg $p-p_i$), a második pedig szintén "$0/0$" határozatlansági eset. A határozatlansági eseteket l'Hopital szabállyal oldjuk fel, így:

$$C_i=\left.\frac{\frac{d}{d\,p}\left[(p-p_i)G(p)\right]}{\frac{d}{d\,p}(H(p))}\right|_{p=p_i}=\left.\frac{G(p)+(p-p_i)G^{'}(p)}{H^{'}(p)}\right|_{p=p_i}=\frac{G(p_i)}{H^{'}(p_i)} \tag{6.37}$$

Ismerjük, hogy:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-p_i}\right)=e^{p_i t} \tag{6.38}$$

így az $F(p)$ függvénynek megfelelő $f(t)$ időfüggvényt a következőképpen határozhatjuk meg:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{G(p_i)}{H'(p_i)} \cdot e^{p_i t} \tag{6.39}$$

2. Heaviside-képlet

Az előző ponthoz képest az a különbség, hogy az $F(p)$ függvény nevezőjének $p_0 = 0$ is egyszeres gyöke és a (6.40) összefüggésnek megfelelő alakú. Minden más feltétel az előbbi pontnak megfelelő.

$$F(p) = \frac{G(p)}{pN(p)} \tag{6.40}$$

A visszatranszformálási képlet meghatározásához elegendő a (6.39) összefüggésből kiindulni, ahol

$$H'(p_i) = \frac{d}{d\,p}\left[pN(p)\right]\Big|_{p=p_i} = p'N(p) + pN'(p)\Big|_{p=p_i}$$

A fenti összefüggésbe be kell helyettesítsünk minden gyököt, beleértve a $p_0 = 0$-t is. Mikor $p_0 = 0$-t helyettesítünk, az összefüggés jobboldalának második tagja, mikor pedig a többi gyököt helyettesítjük az összefüggés jobboldalának első tagja válik nullává. Ennek megfelelően a (6.39) összefüggés a következőképpen alakul:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \frac{G(0)}{N(0)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{G(p_i)}{p_i N'(p_i)} \cdot e^{p_i t} \tag{6.41}$$

3. Heaviside-képlet

Legyen a p térben a racionális törtfüggvény a (6.34) összefüggés által adott:

$$F(p) = \frac{G(p)}{H(p)} \tag{6.42}$$

ahol, a $G(p)$ polinom fokszáma kisebb, vagy legfeljebb egyenlő a $H(p)$ polinom fokszámával és a $H(p)$ polinomnak *n* darab gyöke van, melynek mindegyike m_n-szeres, de $p = 0$ nem gyöke. Törzstényezőkre bontjuk az $F(p)$ polinomot a $H(p)$ polinom különböző gyökeinek különböző fokszámai szerint. Az alábbi összefüggésben csak az i-ik gyöknek megfelelő tagokat írtuk ki:

$$F(p)=\frac{G(p)}{H(p)}=\ldots+\frac{C_{i1}}{p-p_i}+\frac{C_{i2}}{(p-p_i)^2}+\ldots+\frac{C_{ij}}{(p-p_i)^j}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{C_{im_i}}{(p-p_i)^{m_i}}+\ldots=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{C_{ij}}{(p-p_i)^j} \tag{6.43}$$

ahol az $1/(p-p_i)^j$ törteknek megfelelő időfüggvényeket már ismerjük, így a C_{ij} állandók meghatározása a feladatunk. Megszorozzuk a (6.43) összefüggést $(p-p_i)^{m_i}$ -vel és a jobboldalon elvégezzük az egyszerűsítéseket:

$$(p-p_i)^{m_i}.\frac{G(p)}{H(p)}=\ldots+C_{i1}(p-p_i)^{m_i-1}+C_{i2}(p-p_i)^{m_i-2}+\ldots$$
$$\ldots+C_{ij}(p-p_i)^{m_i-j}+\ldots+C_{im_i}+\ldots \tag{6.44}$$

Behelyettesítjük $p=p_i$-t, melynek eredményeként (6.43) jobb oldalán minden tag nullává válik és megmarad C_{im_i}, a baloldalon pedig ismét "0/0" határozatlansági eset van, melyet l'Hopital szabállyal oldunk fel.

$$C_{im_i}=\frac{d^{m_i}}{d\,p^{m_i}}\frac{(p-p_i)^{m_i}G(p)}{H(p)}\Bigg|_{p=p_i}=m_i!\frac{G(p_i)}{H^{m_i}(p_i)} \tag{6.45}$$

A C_{ij} állandók meghatározásához a (6.44) összefüggést m_i-j-szer deriváljuk majd behelyettesítünk $p=p_i$-t.

$$(m_i-j)!C_{ij}=\frac{d^{m_i-j}}{d\,p^{m_i-j}}\left[\frac{(p-p_i)^{m_i}G(p)}{H(p)}\right]\Bigg|_{p=p_i} \tag{6.46}$$

tehát,

$$C_{ij}=\frac{1}{(m_i-j)!}\frac{d^{m_i-j}}{d\,p^{m_i-j}}\left[\frac{(p-p_i)^{m_i}G(p)}{H(p)}\right]\Bigg|_{p=p_i} \tag{6.47}$$