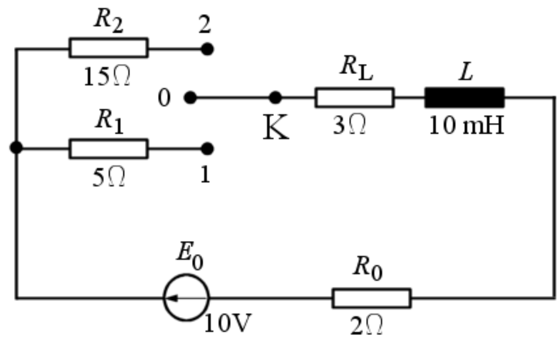
1. Feladat

Az 1. ábrán látható egyenáramú áramkörben a *K* kapcsoló kezdetben a 0-val jelzett semleges helyzetben található. Első lépésben a kapcsolót az *1*-es állásba, majd a stacionárius állapot beállta után a *2*-es állásba kapcsoljuk.

a.) Tanulmányozzuk az *1*-es állásba való kapcsolás után végbemenő tranziens folyamatot.

b.) Tanulmányozzuk az *1*-ből *2*-es állásba való kapcsolás után végbemenő tranziens folyamatot.

c.) A tekercs induktivitásának függvényében vizsgáljuk meg, miként változik a teljes folyamat időbelisége az alábbi esetekben: $L = 0{,}1\ mH$, $L = 1\ mH$, $L = 10\ mH$ és $L = 100\ mH$.



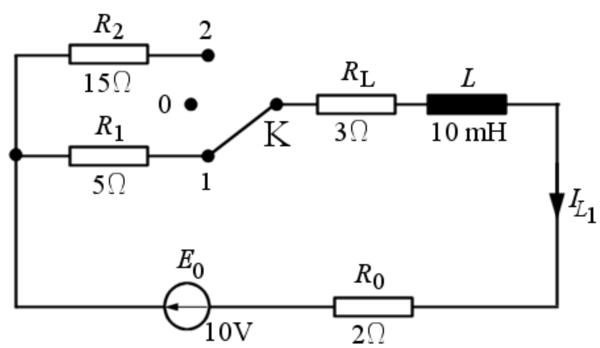
1. ábra

Megoldás

a.) Az kapcsoló *1*-es állásba kapcsolása után létrejövő tranziens folyamat.

Mivel kezdetben a kapcsoló semleges helyzetben található, az áramkörben nem folyik áram és így a valódi tekercs nem raktáros energiát mágneses tér formájában.

A kezdet stacionárius állapotot leíró paraméterek (kezdeti feltételek): $I_{L_0} = 0\ A$ és a tekercs fluxusa $\phi_{L_k} = 0\ Wb$. A feladat szövegének megfelelően a kapcsolót az *1*-es állásba kapcsoljuk (2. ábra) és megvárjuk, hogy kialakuljon a stacionárius állapot.



2. ábra

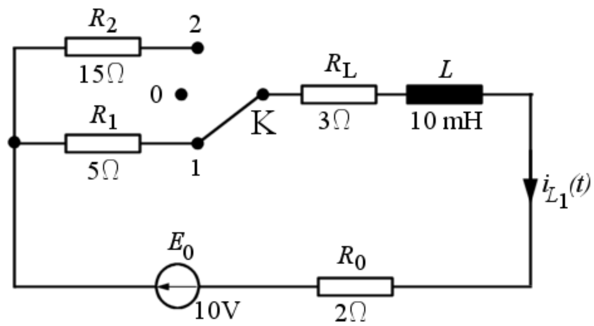
Az áramkörben egy áram folyik, amelyet a huroktörvény segítségével határozható meg,

$$I_{L_1} = \frac{E_0}{R_0 + R_1 + R_L} = 1\ (A)$$

a tekercs fluxusa pedig

$$\phi_{L_k} = I_{L_1} L = 10\ mWb.$$

A tranziens folyamat leírásához fel kell írjuk és meg kell oldjuk a folyamatot leíró differenciál egyenletet. Ezt megtehetjük a 3. ábrán szemléltetett áramkörben, ahol már az időfüggő áramot tüntettük fel.



3. ábra

$$(R_0 + R_1 + R_L) i_{L_1}(t) + L \frac{d i_{L_1}(t)}{dt} = E_0$$

A differenciál egyenletet Laplace-transzformáció segítségével oldjuk meg. Legyen a keresett mennyiség Laplace-transzformáltja $\mathcal{L}\left(i_{L_1}(t)\right) = I_{L_1}(p)$, és ennek megfelelően az egyenlet transzformáltja az irodalomnak megfelelő jelölésekkel:

$$(R_0 + R_1 + R_L) I_{L_1}(p) + p\left[I_{L_1}(p) - i_{L_1}(0-)\right] = \frac{E_0}{p}$$

ahol $i_{L_1}(0-) \equiv I_{L_0} = 0$-val, tehát

$$(R_0 + R_1 + R_L) I_{L_1}(p) + p I_{L_1}(p) = \frac{E_0}{p}$$

és így a keresett mennyiség Laplace-transzformáltja (az átviteli függvény):

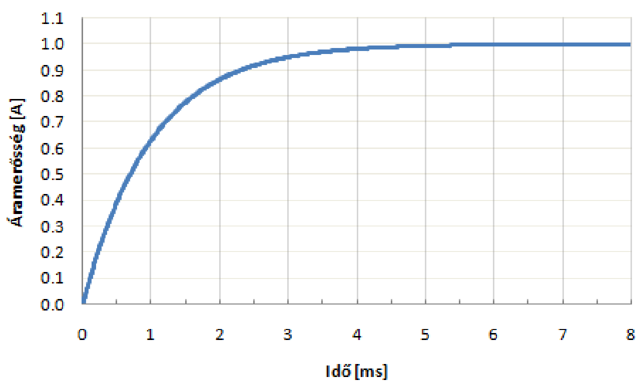
$$I_{L_1}(p) = \frac{\frac{E_0}{p}}{R_0 + R_1 + R_L + pL}$$

A kapott mennyiség idő tartományba való visszatranszformálásához elengedhetetlenül fontos követelmény az, hogy szüntessünk meg minden emeletes törtet a kifejezésben, és addig alakítsuk a képletet, amíg úgy a számlálóban, mint a nevezőben egy-egy polinom található.

$$I_{L_1}(p) = \frac{E_0}{p(R_0 + R_1 + R_L + pL)}$$

Látható, hogy a számlálóban található egy nullad rendű, $G(p) = E_0$, míg a nevezőben első rendű, $H(p) = R_0 + R_1 + R_L + pL$ polinom található. A $H(p)$ polinomnak két darab egyszeres gyöke van, az egyik a $p_0 = 0$, a másik pedig a $p_1 = -(R_0 + R_1 + R_L)/L$. Ennek megfelelően az összefüggés inverz-Laplace transzformáltját, $\mathcal{L}^{-1}\left(I_{L_1}(p)\right) = i_{L_1}(t)$, a Heaviside 2. képlet segítségével határozhatjuk meg. A 4. ábra a tekercsen átfolyó áram így kapott időbeli változását szemlélteti.

$$i_{L_1}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(I_{L_1}(p)\right) = \frac{E_0}{R_0 + R_1 + R_L} + \frac{E_0}{-\frac{R_0 + R_1 + R_L}{L}L} e^{-\frac{R_0+R_1+R_L}{L}t}$$
$$= \frac{E_0}{R_0 + R_1 + R_L}\left(1 - e^{-\frac{R_0+R_1+R_L}{L}t}\right) = \frac{E_0}{R_0 + R_1 + R_L}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right)$$



4. ábra

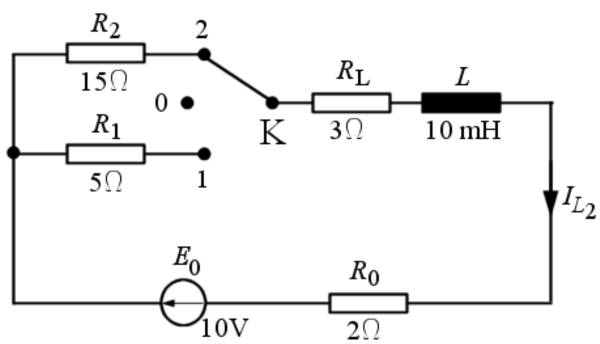
A kapott összefüggés szerint az áramkör időállandója

$$\tau_1 = \frac{L}{R_0 + R_1 + R_L} = 1\ (ms)$$

Megjegyzés: megfigyelhető az ábrán, hogy az $5\tau_1$ idő eltelte után a tranziens folyamat már tulajdonképpen leteltként kezelhető, mivel az áram már nagyon közel van a stacionárius értékhez (számítások alapján a stacionárius érték 99,33%-át éri el eddig az áram). Mivel a matematikai modellben szereplő ∞ időtartam csak fikció a valóságban, az alkalmazások esetén ez a megszokott kritérium.

b.) A kapcsoló *1*-esből *2*-es állásba való kapcsolás után végbemenő tranziens folyamat.

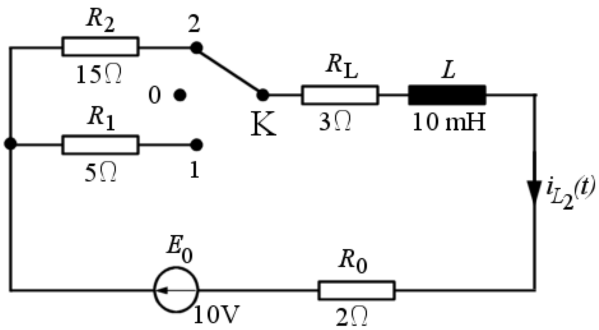
Az $5\tau_1$ idő eltelte után (az áramkör más stacionáriussá vált!) a kapcsolót a *2*-es állásba kapcsoljuk és tanulmányozzuk a létrejövő tranziens folyamatot. Figyelembe kell vennünk azt a tényt, hogy a tekercsen az átkapcsolás pillanatában már 1 A erősségű áram folyik, így a tekercs mágneses terében energiát halmozott fel. Az előző tranziens folyamat lezárásával létrejött stacionárius állapot a következő tranziens folyamat kezdeti állapotává válik. A második folyamatra a tekercs kezdeti fluxusa $\phi_{L_k} = I_{L_1}L = 10\ mWb$. A tranziens folyamat lejárta után egy újabb stacionárius állapot alakul ki, ahol a tekercsen átfolyó áram erősségét az 5. ábrán látható áramkörből határozhatjuk meg.



5. ábra

$$I_{L_2} = \frac{E_0}{R_0 + R_2 + R_L} = 0{,}5\ (A)$$

Látható, hogy a kapcsoló *2*-es állásba kapcsolása után lejátszódó tranziens folyamat eredményeként a tekercsen átfolyó áram és természetesen a mágneses fluxus is a felére lecsökken. A tranziens folyamatot leíró huroktörvény differenciális alakját a 6. ábrán látható áramkörre írhatjuk fel.



6. ábra

$$(R_0 + R_2 + R_L)i_{L_2}(t) + L\frac{di_{L_2}(t)}{dt} = E_0$$

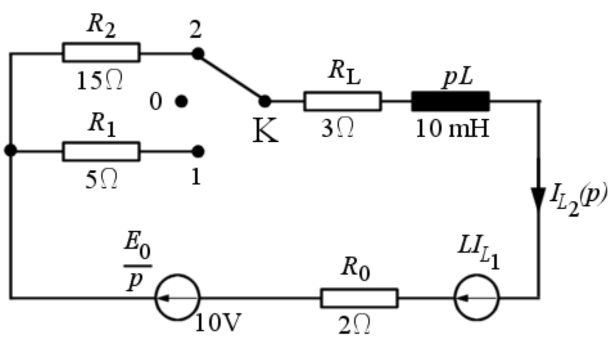
Megjegyezzük, hogy ennek az egyenletnek az alakja megegyezik a kapcsolónak az 1-es állásba való kapcsolásánál felírt egyenletével, így hát a Laplace-transzformáltja is megegyező kell legyen az előbbinek a transzformáltjával.

$$(R_0 + R_2 + R_L)I_{L_2}(p) + L\left[pI_{L_2}(p) - i_{L_2}(0-)\right] = \frac{E_0}{p}$$

ahol $i_{L_2}(0-) = I_{L_1} = 0{,}5\ A$.

$$(R_0 + R_2 + R_L + pL)I_{L_2}(p) = \frac{E_0}{p} + Li_{L_2}(0-) = \frac{E_0}{p} + LI_{L_1}$$

A fenti egyenlet rajz (áramkör) formájában is megjeleníthető, amit úgy hívunk, hogy operátoros áramkör (7. ábra).



7. ábra

A helyes visszatranszformálási képlet elérése érdekében újból elvégezzük a közös nevezőre hozásokat és eltüntetjük az emeletes törtet.

$$I_{L_2}(p) = \frac{\frac{E_0}{p} + LI_{L_1}}{R_0 + R_2 + R_L + pL} = \frac{E_0 + pLI_{L_1}}{p(R_0 + R_2 + R_L + pL)}$$

Ebben az esetben a számláló elsőfokú, míg a nevező másodfokú polinom. A nevezőnek két gyöke van, mindkettő egyszeres, az egyik a $p_0 = 0$, a másik pedig $p_1 = -(R_0 + R_2 + R_L)/L$, így a visszatranszformálás a következő képlettel $\mathcal{L}^{-1}\left(I_{L_2}(p)\right) = i_{L_2}(t)$ számítható ki. A képlet felírásakor figyelembe kell venni, hogy ez a második tranziens folyamat az első tranziens által létrehozott stacionárius állapot beállta után jön létre és így az elsőnek a vonatkoztatási rendszerében volt a $t = 0$ pillanat. A második folyamat leírásához így $(t - t_{ki})$ kell az exponensbe kerüljön, ahol t_{ki} az átkapcsolás pillanatát jelöli.

$$i_{L_2}(t) = \frac{E_0}{R_0 + R_2 + R_L} + \frac{E_0 - \frac{R_0 + R_2 + R_L}{L} LI_{L_1}}{-\frac{R_0 + R_2 + R_L}{L} L} e^{-\frac{R_0+R_2+R_L}{L}(t - t_{ki})} =$$
$$= \frac{1}{R_0 + R_2 + R_L}\left[E_0 - \left(E_0 - (R_0 + R_2 + R_L)I_{L_1}\right)e^{-\frac{R_0+R_2+R_L}{L}(t - t_{ki})}\right]$$

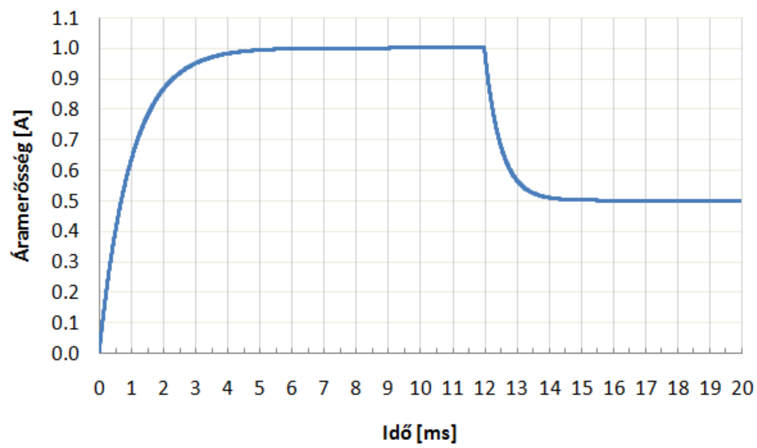
Látható az előbbi összefüggésben, hogy a második tranziens időállandója fele akkor, mint az első folyamaté, így tehát kétszer olyan gyorsan álla be a végző stacionárius állapot is.

$$\tau_2 = \frac{L}{R_0 + R_2 + R_L} = 0{,}5\ ms$$

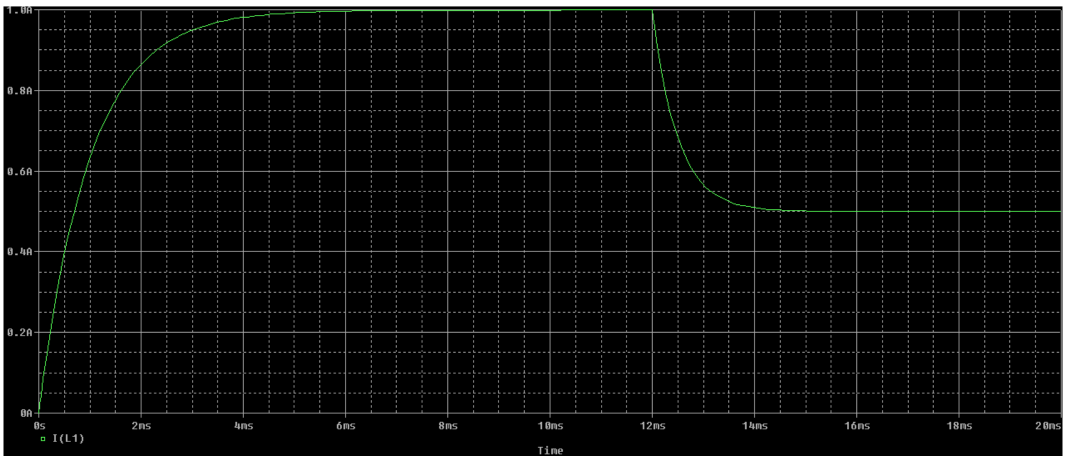
Behelyettesítjük a megadott értékeket és így kapjuk, hogy

$$i_{L_2}(t) = 0{,}05\left(10 + 10e^{-2000(t - t_{ki})}\right)$$

A 8. ábra egy olyan folyamatot szemléltet, ahol a kapcsolót $t = 0$ pillanatban kapcsoljuk az *1*-es állásba, majd $t_{ki} = 12\ ms$ pillanatban kapcsoljuk a *2*-es állásba.



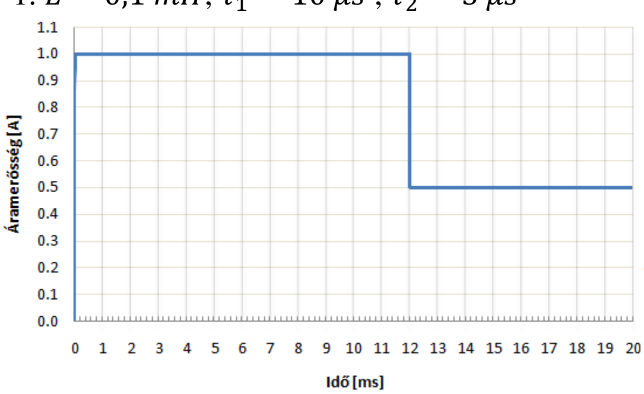
PSpice szimuláció eredménye



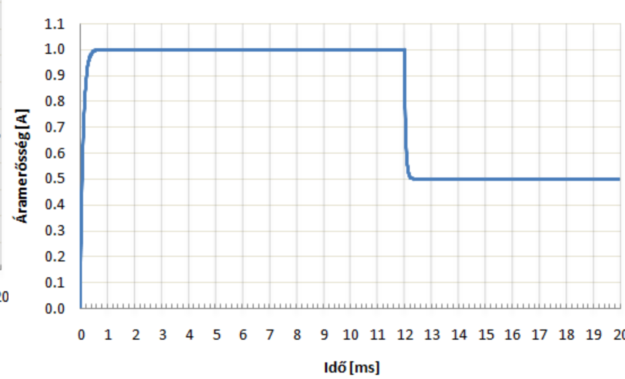
8. ábra

c.) Induktivitás hatása a folyamat időbeliségére.

1. $L = 0{,}1\ mH;\ \tau_1 = 10\ \mu s\ ,\ \tau_2 = 5\ \mu s$

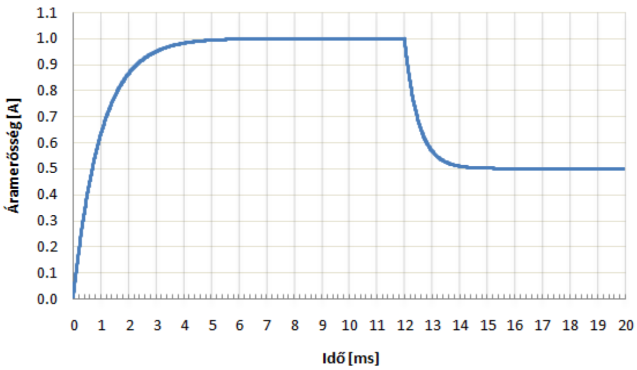


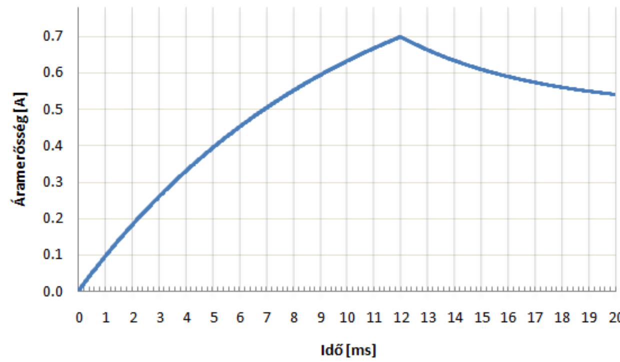
2. $L = 1\ mH;\ \tau_1 = 0{,}1\ ms\ ,\ \tau_2 = 50\ \mu s$



3. $L = 10\ mH;\ \tau_1 = 1\ ms\ ,\ \tau_2 = 0{,}5\ ms$

4. $L = 100\ mH;\ \tau_1 = 10\ ms\ ,\ \tau_2 = 5\ ms$





A reziduum-tétel alkalmazása.

Reziuduum-tétel. Legyen $F(p) = G(p)/H(p)$ átviteli függvény, melyet vissza kell transzformálni az időtartományba.

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} Rez\{F(p)e^{pt}, p_i\}$$

ahol

$$Rez\{F(p)e^{pt}, p_i\} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{p \to p_i} [(p-p_i)^k F(p)e^{pt}]^{(k-1)}$$

Alkalmazás: 1.

$$I_{L_1}(p) = \frac{E_0}{L} \frac{1}{p\left(\frac{R_0+R_1+R_L}{L} + p\right)}$$

ahol $p_0 = 0$ és $p_1 = -\frac{R_0+R_1+R_L}{L}$.

$$i_{L_1}(t) = \frac{E_0}{L}\left[\lim_{p \to p_0} p \left[\frac{1}{p\left(\frac{R_0+R_1+R_L}{L} + p\right)}\right] + \lim_{p \to p_1} (p-p_1)\left[\frac{1}{p\left(\frac{R_0+R_1+R_L}{L} + p\right)} e^{-p_1 t}\right]\right] =$$

$$= \frac{E_0}{L}\left[\frac{1}{\frac{R_0+R_1+R_L}{L}} + \frac{1}{-\frac{R_0+R_1+R_L}{L}} e^{-p_1 t}\right] = \frac{E_0}{R_0+R_1+R_L}\left[1 - e^{-\frac{R_0+R_1+R_L}{L}t}\right].$$

Alkamlazás: 2.

$$I_{L_2}(p) = \frac{E_0 + pLI_{L_1}}{p(R_0+R_2+R_L+pL)} = \frac{1}{L}\frac{E_0 + pLI_{L_1}}{p\left(p + \frac{R_0+R_2+R_L}{L}\right)}$$

ahol $p_0 = 0$ és $p_1 = -\frac{R_0+R_2+R_L}{L}$.

$$= \frac{1}{L}\left[\lim_{p\to p_0} p\left[\frac{E_0 + pLI_{L_1}}{p\left(p + \frac{R_0 + R_2 + R_L}{L}\right)}\right] + \lim_{p\to p_1}(p - p_1)\left[\frac{E_0 + pLI_{L_1}}{p\left(p + \frac{R_0 + R_2 + R_L}{L}\right)} e^{-p_1(t-t_{ki})}\right]\right]$$

$$i_{L_2}(t) = \frac{1}{L}\left[\frac{E_0}{\frac{R_0 + R_2 + R_L}{L}} + \frac{E_0 - \frac{R_0 + R_2 + R_L}{L} LI_{L_1}}{-\frac{R_0 + R_2 + R_L}{L}} e^{-\frac{R_0+R_2+R_L}{L}(t-t_{ki})}\right] =$$

$$= \frac{1}{R_0 + R_2 + R_L}\left[E_0 - \left(E_0 - (R_0 + R_2 + R_L) I_{L_1}\right) e^{-\frac{R_0+R_2+R_L}{L}(t-t_{ki})}\right]$$