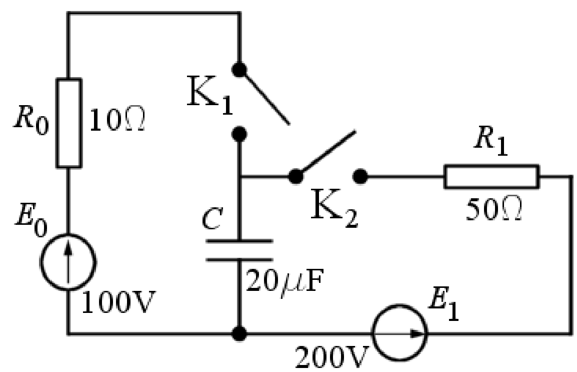
1. Feladat

Az 1. ábrán látható egyenáramú áramkörben, kezdetben mindkét kapcsoló nyitott állásba található. A$t = 0$ pillanatban zárjuk a K_1 kapcsolót, majd megvárjuk, hogy a létrejövő tranziens folyamat során a kondenzátor töltődjön fel. Miután beáll a stacionárius állapot, nyitjuk a K_1 kapcsolót, majd tetszőleges idő múlva zárjuk a K_2 kapcsolót. Megvárjuk, ameddig az újabb tranziens folyamat lezárul.

a.) Tanulmányozzuk a K_1 kapcsoló zárása útján létrejövő tranziens folyamatot.

b.) Tanulmányozzuk a K_2 kapcsoló zárása útján létrejövő tranziens folyamatot.

c.) Az a.) és b.) pontokhoz képes megfordítjuk az E_1 generátor polaritását.

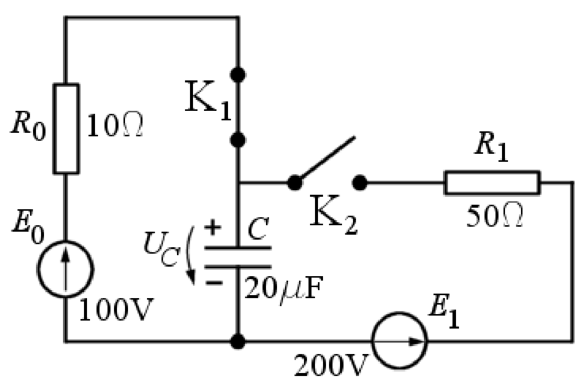


1. ábra

Megoldás

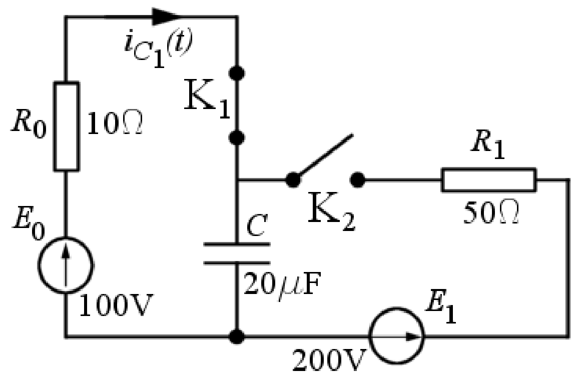
a.) AK_1 kapcsoló zárása útján létrejövő tranziens folyamat.

Mivel a kezdeti pillanatban minden kapcsoló nyitva van, a kondenzátor nincs feltöltve és így nincs elektromos tér formájában energia elraktározva a fegyverzetei között. A K_1 kapcsoló zárásakor elindul a kondenzátor feltöltődése, melynek végére a kondenzátor feszültsége megegyezik az egyenáramú generátor e.m.f.-vel $\left(U_{C_1} = E_0\right)$ és a 2. ábrának megfelelő polaritással.



2. ábra

A létrejövő tranziens folyamat leírásához tudni kell, hogy a kondenzátor rögtön a kapcsoló zárását követően rövidzárásként viselkedik, tehát nullaértékű ellenállást tanúsít. A folyamatot leíró differenciál egyenletet a 3. ábrán látható áramkör jelöléseivel a következőképpen írhatjuk fel.



3. ábra

$$R_0 i_{C_1}(t) + \frac{1}{C}\int_0^\infty i_{C_1}(t)dt + U_C(0-) = E_0$$

ahol$U_C(0-) = 0$.

Vezessük be a keresett mennyiség Laplace-transzformáltját, $\mathcal{L}\left(i_{C_1}(t)\right) = I_{C_1}(p)$, így az egyenlet Laplace-transzformáltja a következő alakban adható meg.

$$R_0 I_{C_1}(p) + \frac{I_{C_1}(p)}{pC} = \frac{E_0}{p}$$

tehát a keresett mennyiség (az átviteli függvény):

$$I_{C_1}(p) = \frac{\frac{E_0}{p}}{R_0 + \frac{1}{pC}} = \frac{E_0 C}{pR_0C + 1}$$

A kifejezés számlálója nullad fokú, a nevezője pedig első fokú polinom. A nevező gyöke $p_1 = -1/R_0C$. Ennek megfelelően az időtartományba való visszatranszformáláshoz a Heaviside 1. képletet alkalmazhatjuk.

$$i_{C_1}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(I_{C_1}(p)\right) = \frac{E_0 C}{R_0 C} e^{-\frac{t}{R_0 C}} = \frac{E_0}{R_0} e^{-\frac{t}{R_0 C}} = \frac{E_0}{R_0} e^{-\frac{t}{\tau_1}} =$$

ahol$\tau_1 = R_0C = 0{,}2\ ms$ a kondenzátor töltődésének az időállandója.

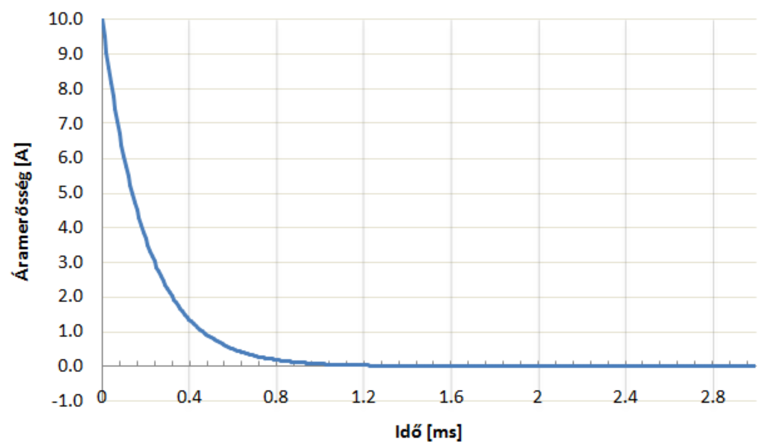
Az áram ismeretében kiszámíthatjuk a kondenzátoron illetve az ellenálláson megjelenő feszültségek időfüggéseit is.

$$u_{C_1}(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_{C_1}(t)dt = \frac{E_0}{CR_0}\int_0^t e^{-\frac{t}{R_0C}}dt = E_0\left(1 - e^{-\frac{t}{R_0C}}\right)$$

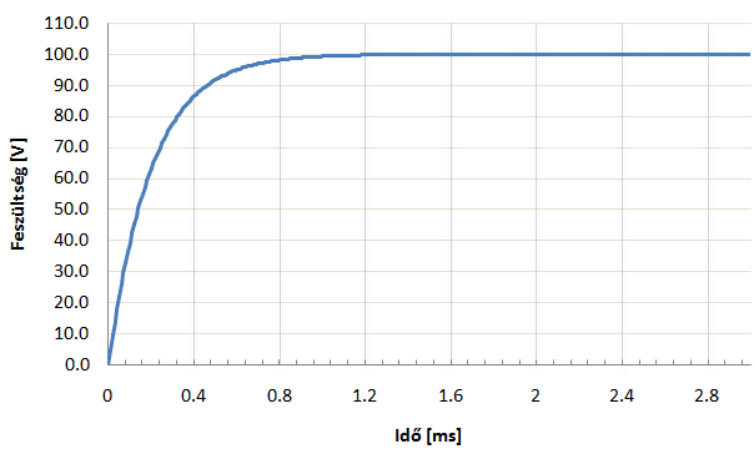
és

$$u_{R_0}(t) = R_0 i_{C_1}(t) = E_0 e^{-\frac{t}{R_0C}}.$$

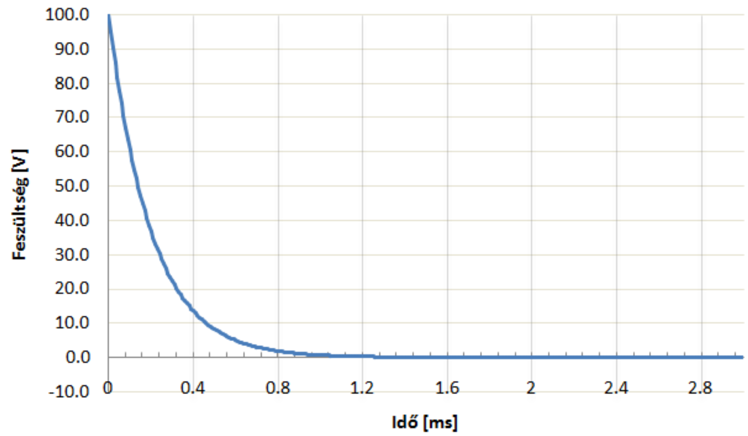
A fenti mennyiségek időfüggéseit az alábbi ábrákon szemléltetjük.



4.a. ábra – a töltőáram



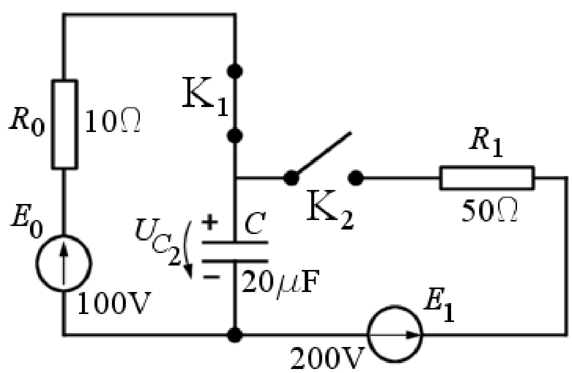
4.b. ábra – a kondenzátor feszültsége



4.c. ábra – az ellenállás feszültsége

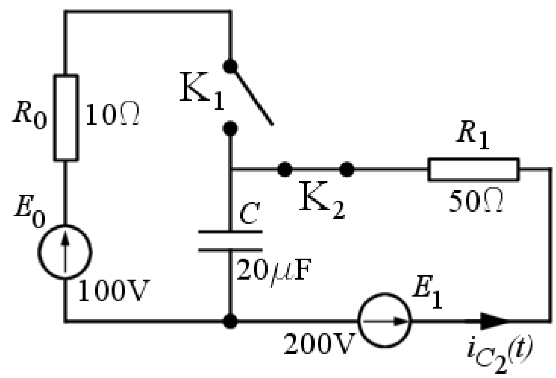
b.) A K_1 kapcsoló nyitása, majd a K_2 kapcsoló zárását követő tranziens folyamat.

A két kapcsolót nem szimultán váltjuk. Először nyitjuk a K_1 kapcsolót így a kondenzátor feltöltve marad. Legyen a két kapcsoló pozíciójának átváltása között eltelő idő $1\,ms$. Ezután zárjuk a K_2 kapcsolót és várjuk meg a tranziens folyamat végét. A folyamat lezárásakor a kondenzátor feszültsége az kezdeti E_0 értékről $U_{C_2} = E_1$ értékre változik és az áramkörnek megfelelően (5. ábra) megmarad a polaritása.



5. ábra

A kondenzátor újabb töltődési folyamatát leíró differenciál egyenletet a 6. ábra alapján írhatjuk fel.



6. ábra

$$u_{C_2}(t) + i_{C_2}(t)R_1 = E_1$$

ahol a kondenzátor feszültsége, figyelembe véve a kezdeti feltöltött állapotát is

$$u_{C_2}(t) = u_C(t) + U_{C_1}$$

tehát

$$\frac{1}{C}\int_0^t i_{C_2}(t)dt + U_{C_1} + i_{C_2}(t)R_1 = E_1$$

ahol$U_{C_1} = E_0$.

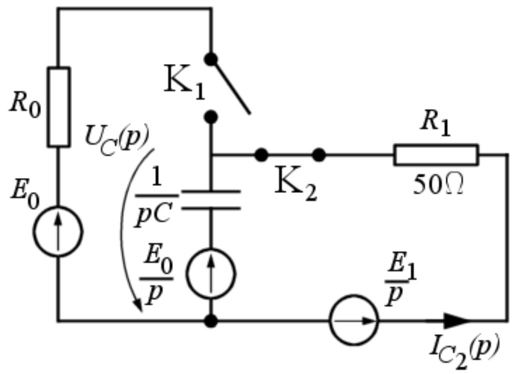
Az egyenlet Laplace-transzformáltja

$$\frac{I_{C_2}(p)}{pC} + \frac{E_0}{p} + I_{C_2}(p)R_1 = \frac{E_1}{p}$$

vagy

$$\frac{I_{C_2}(p)}{pC} + I_{C_2}(p)R_1 = \frac{E_1 - E_0}{p}$$

amelynek segítségével felrajzolhatjuk a megfelelő operátoros áramkört.



7. ábra

A keresett mennyiség Laplace-transzformáltja

$$I_{C_2}(p) = \frac{(E_1 - E_0)C}{1 + pR_1C}$$

A töltőáram időfüggését az $i_{C_2}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(I_{C_2}(p)\right)$ összefüggéssel számítjuk ki. Az átviteli függvény számlálója nullad fokú, a nevezője pedig egy első fokú polinom, amelynek egy egyszeres gyöke van, amely nem nulla $(p_1 = -1/R_1C)$, így a Heaviside 1. összefüggést alkalmazhatjuk.

$$i_{C_2}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(I_{C_2}(p)\right) = \frac{E_1 - E_0}{R_1} e^{-\frac{t-t_K}{R_1C}} = \frac{E_1 - E_0}{R_1} e^{-\frac{t-t_K}{\tau_2}}$$

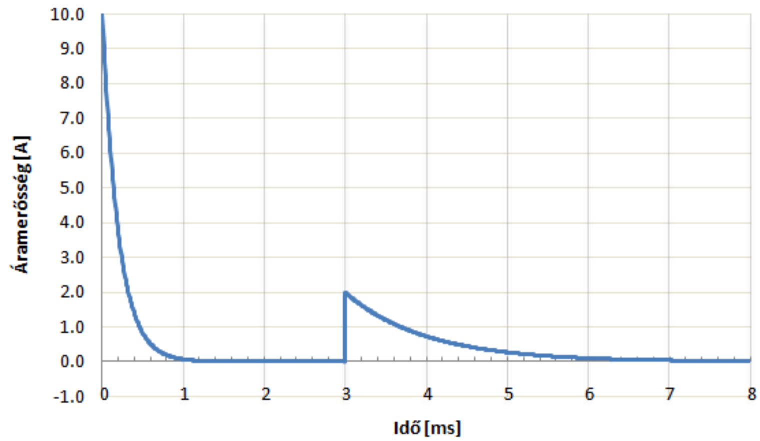
ahol $\tau_2 = R_1C = 1\ ms$ a második feltöltődés időállandója. Az ellenálláson megjelenő feszültség

$$u_{R_1}(t) = (E_1 - E_0)e^{-\frac{t-t_K}{R_1C}}$$

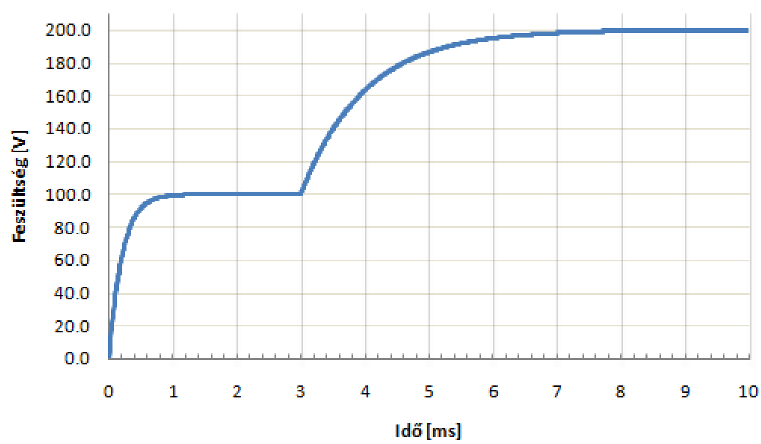
míg a kondenzátoron megjelenő feszültség

$$u_{C_2}(t) = \frac{1}{C}\int_0^t \frac{E_1 - E_0}{R_1} e^{-\frac{t}{R_1C}} dt + E_0 = E_1 - (E_1 - E_0)e^{-\frac{t-t_K}{R_1C}}$$

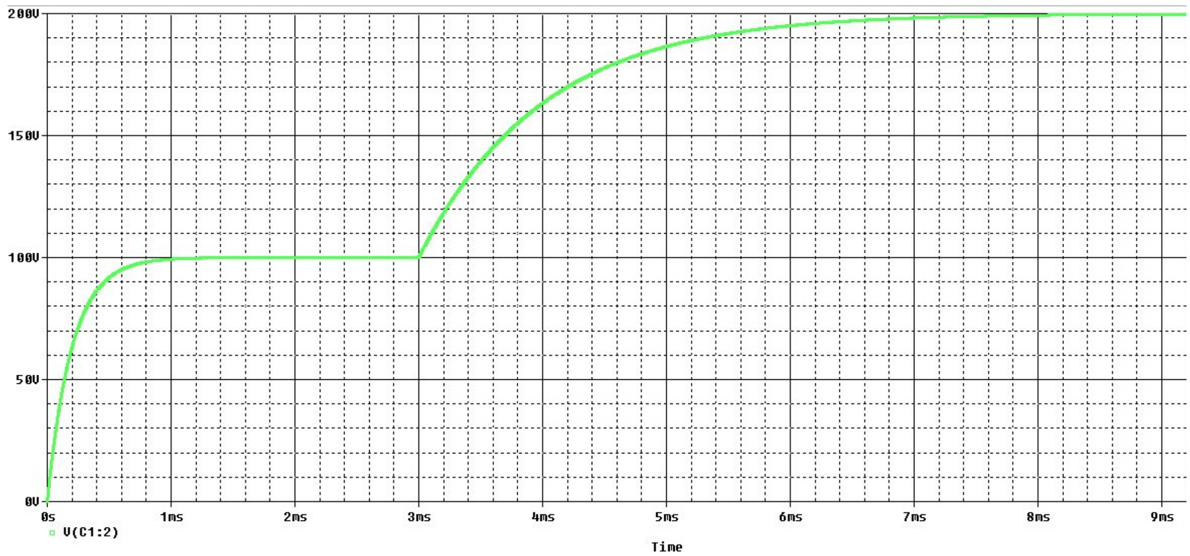
A 8. a-c. ábrák a feladat a.) és b.) pontjainak megfelelően alkalmazott kapcsolásoknak megfelelően vannak elkészítve. A feladat kijelentésének megfelelően, pl. az időtengelyen a $t = 2\ ms$-nak megfelelő pillanat lehetnek a K_1 kapcsolónak a nyitása, a $t_K = 3\ ms$ pillanat pedig a K_2 kapcsoló zárásának megfelelő pillanat (Megjegyezzük, hogy az időállandók ötszörösének megfelelő idő eltelte után mindegyik tranziens folyamat lejártnak tekinthető így, pl. a K_1 kapcsoló zárását követő $5\tau_1$ idő eltelte után bármikor zárható a K_2 kapcsoló, ugyanazt az eredményt érjük el a kondenzátor feltöltése szempontjából).



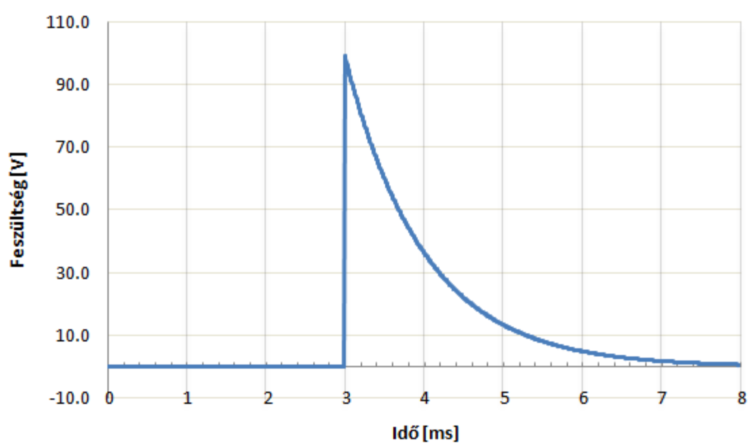
8.a. ábra – A kondenzátor töltőáramának időfüggése



PSpice szimuláció eredménye

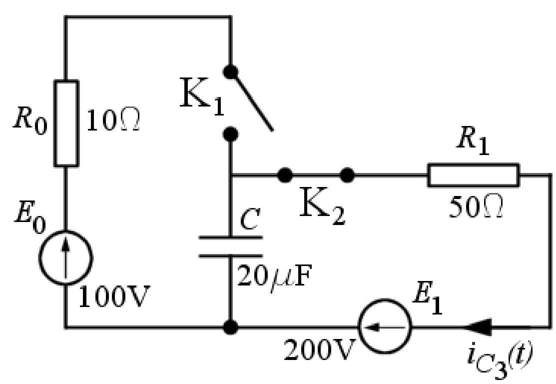


8.b. ábra – A kondenzátor feszültségének időfüggése



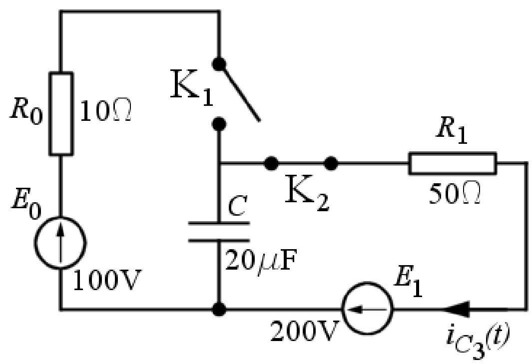
8.c. ábra – Az R_1 ellenálláson megjelenő feszültség időfüggése

c.) Megváltoztatjuk az E_1 generátor polaritását. A K_2 kapcsoló zárása után a kondenzátor az $U_{C_3} = E_1$ feszültségre töltődik fel, a polaritása pedig a 9. ábrának megfelelő.



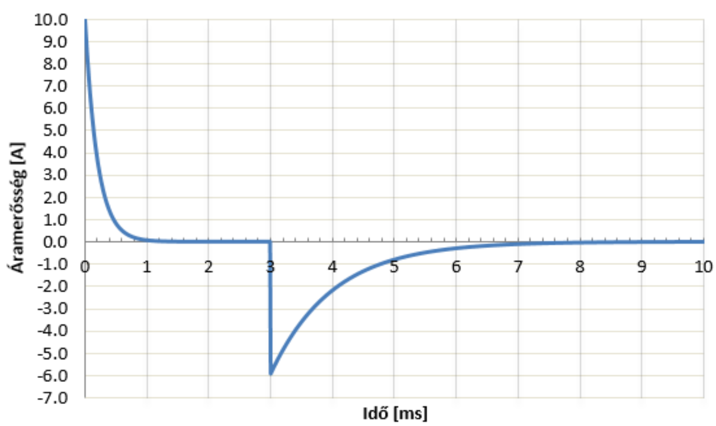
9. ábra

A K_2 kapcsoló zárása után a 10. ábrán látható áramkörben az $i_{C_3}(t)$ áramot határozzuk meg. Jelen esetben nem írjuk fel a differenciál egyenletet és transzformáljuk azt, mivel a feladat b.) pontjához képest csak azt a változtatást kell a felírt egyenletekben és levezetett képletekben elvégezni, hogy az $E_1 = -200\ V$, minden más ugyanúgy érvényes.

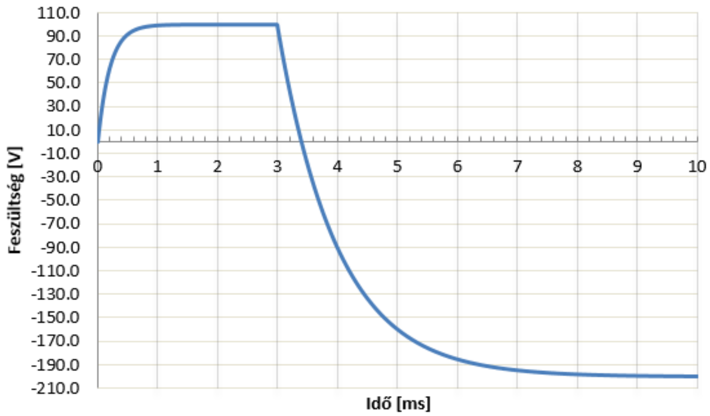


10. ábra

Ennek megfelelően a kondenzátor töltőáramának, a kondenzátor feszültségévek és az R_1 ellenálláson megjelenő feszültségnek az időbeli változásait a 11. a-c. ábrák szemléltetik.

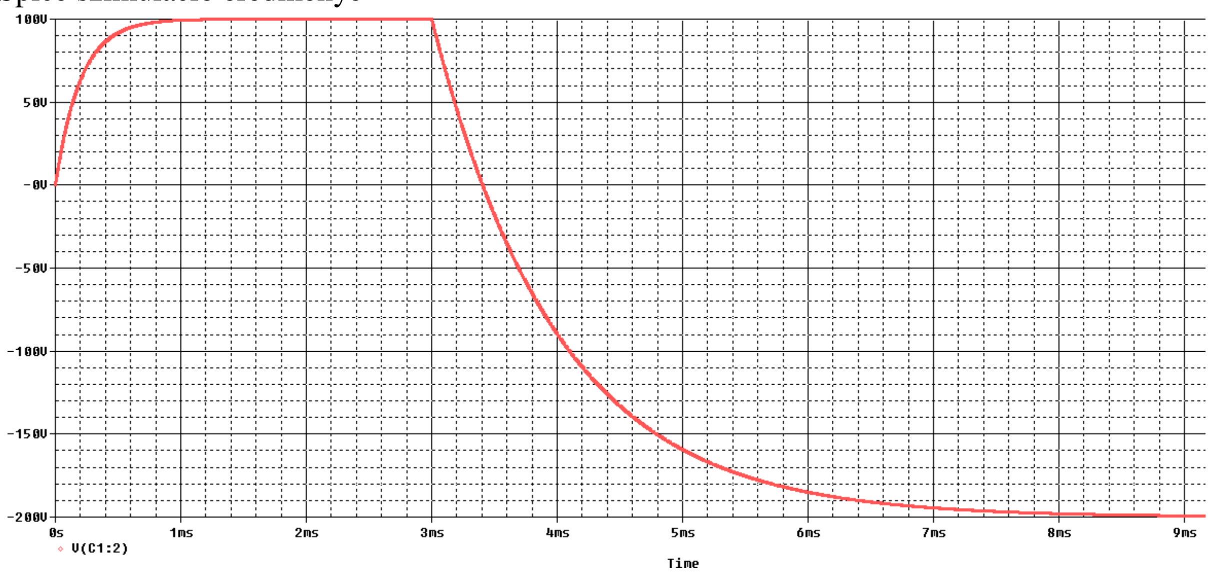


11. a ábra – a kondenzátor töltőárama

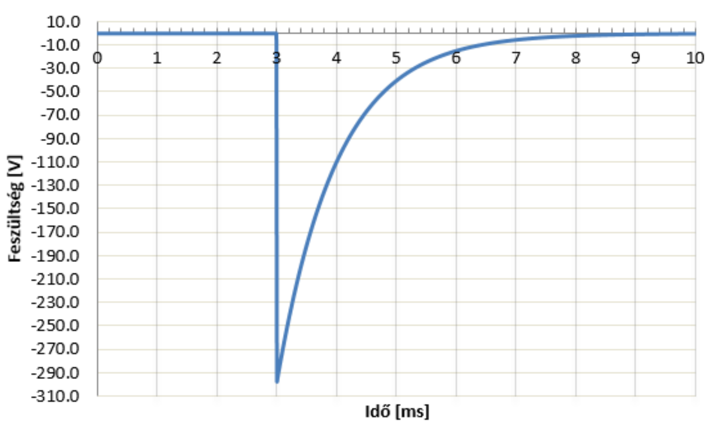


11. b ábra – a kondenzátor töltőárama

PSpice szimuláció eredménye



11.c ábra – a kondenzátor feszültsége



11.d ábra – az R_1 ellenálláson megjelenő feszültség

A reziduum-tétel alkalmazása.

Reziuduum-tétel. Legyen $F(p) = G(p)/H(p)$ átviteli függvény, melyet vissza kell transzformálni az időtartományba.

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} Rez\{F(p)e^{p_i t}, p_i\}$$

ahol

$$Rez\{F(p)e^{p_i t}, p_i\} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{p \to p_i} [(p - p_i)^k F(p) e^{pt}]^{(k-1)}$$

Alkalmazás: 1.

$$I_{C_1}(p) = \frac{E_0 C}{pR_0 C + 1} = \frac{E_0}{R_0} \frac{1}{p + \frac{1}{R_0 C}}$$

$$i_{C_1}(t) = \frac{E_0}{R_0} \left[\lim_{p \to -1/R_0 C} \left[\left(p + \frac{1}{R_0 C} \right) \frac{1}{p + \frac{1}{R_0 C}} e^{-\frac{1}{R_0 C} t} \right] \right] = \frac{E_0}{R_0} e^{-\frac{1}{R_0 C} t}.$$

Alkalmazás: 2.

$$I_{C_2}(p) = \frac{(E_1 - E_0)C}{1 + pR_1 C} = \frac{E_1 - E_0}{R_1} \frac{1}{p + \frac{1}{R_1 C}}$$

$$i_{C_2}(t) = \frac{E_1 - E_0}{R_1} \left[\lim_{p \to -1/R_0 C} \left[\left(p + \frac{1}{R_0 C} \right) \frac{1}{p + \frac{1}{R_0 C}} e^{-\frac{1}{R_0 C}(t - t_K)} \right] \right] = \frac{E_1 - E_0}{R_1} e^{-\frac{1}{R_0 C}(t - t_K)}.$$